Turbulência

Atila P. Silva Freire
Programa de Engenharia Mecânica
COPPE/UFRJ

Anderson Ilha
Diretoria de Metrologia Científica e Industrial
Inmetro

Marcelo J. Colaço
Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais
Instituto Militar de Engenharia

Editores

ABCM – Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica
COPPE/UFRJ – Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia
IME – Instituto Militar de Engenharia

Coleção Cadernos de Turbulência
Turbulência, Volume 5, Tomo 1.

5ª Escola de Primavera em Transição e Turbulência
Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro
25 a 29 de setembro de 2006

Editores

Atila P. Silva Freire, *Programa de Engenharia Mecânica*, COPPE/UFRJ
Anderson Ilha, *Diretoria de Metrologia Científica e Industrial*, Inmetro
Marcelo J. Colaço, *Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais*, *IME*

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Processos Técnicos da
Biblioteca do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro

Escola de Primavera em Transição e Turbulência (5.:2006: Rio de Janeiro, RJ)
Turbulência: Anais da V Escola de Primavera em Transição e Turbulência,
Rio de Janeiro, 25 a 29 de setembro de 2006 /editores Atila P. Silva Freire,
Anderson Ilha e Marcelo J. Colaço. Rio de Janeiro: ABCM, 2006.
XVI, 466 p.; 23,5 cm – (Coleção Cadernos de Turbulência. Turbulência, V. 5, Tomo 1)
Inclui bibliografias
1. Turbulência. 2. Mecânica dos fluidos. 3. Fenômenos de transporte.
I. Freire, Atila P. Silva II. II. V EPTT (5.:2006: Rio de Janeiro, RJ).
III. Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica. IV. Título. II.
Série
629.1332
E74t
ISBN (10 dígitos): 85-85769-24-6
ISBN (13 dígitos): 978-85-85769-24-6

Copyright 2006, Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica, ABCM.
A ABCM não autoriza a reprodução de qualquer parte desta publicação para sua distribuição em geral, para promoções, para a criação de novas publicações ou para a venda. Apenas através de prévia solicitação, por escrito, e em casos.
Documento preparado pelos Editores em LaTeX.
Impresso no Brasil pela Gráfica Graffito.

ISBN 85-85769-24-6
9 788585 769246

Conteúdo

1 Mecânica do Contínuo e Turbulência **1**
1.1 Introdução 1
1.2 Descrição do movimento 2
1.3 Conjuntos materiais 4
1.4 Gradiente de deformação, estiramento, cisalhamento e rotação . . . 5
1.5 Gradiente de velocidades, taxa de deformação e giro 7
1.6 Equações de transporte para os tensores gradiente de velocidade, taxa de deformação e vorticidade 10
1.7 Convecção e difusão da vorticidade 10
1.8 Mudança de observador 11
1.9 Identificação de vórtices 12
1.10 Referências 14

2 Estimativas rigorosas para escoamentos turbulentos baseadas nas equações de Navier-Stokes **17**
2.1 Introdução 17
2.2 As equações de Navier-Stokes 18
2.3 Quantidades médias, médias amostrais e soluções estatísticas . . . 19
2.4 Teoria de Kolmogorov e alguns resultados rigorosos 21
2.4.1 A lei de dissipação de energia de Kolmogorov 21
2.4.2 Cascata de energia 22
2.5 Escoamento em um canal liso sob um gradiente de pressão (e em outras geometrias) 24
2.5.1 Estimativa por baixo para C_f 26
2.5.2 Estimativa por cima para C_f 27
2.6 Referências 31

3 Introdução à teoria estatística da turbulência **37**
3.1 Introdução 37
3.2 Descrição estatística da turbulência 40
3.2.1 Aspectos cinéticos 40
3.2.2 Aspectos dinâmicos 55
3.3 Fenomenologia de Kolmogorov 63

3.3.1 Leis de escala na faixa inercial 63
3.3.2 Complexidade computacional das DNS 66
3.3.3 Decaimento temporal da energia 68
3.3.4 Dispersão de Richardson 69
3.4 O fenômeno da intermitência 73
3.4.1 Anomalias de escala 73
3.4.2 Densidades de probabilidade 74
3.4.3 Modelos fenomenológicos 76
3.4.4 Formalismo multifractal 83
3.4.5 Auto-similaridade estendida 90
3.5 Projeto de conclusão 91
3.6 Referências 92

4 Princípios de anemometria térmica 99
4.1 Introdução 99
4.2 Princípios básicos 101
4.2.1 Modos de operação 102
4.2.2 A ponte de Wheatstone 103
4.2.3 Tipos de sensores 106
4.2.4 A transferência de calor entre o fio-quente e o fluido 107
4.2.5 Leis de calibração 109
4.3 Anemômetro de corrente constante 110
4.3.1 Princípio de funcionamento 110
4.3.2 Filtragem do sinal 112
4.4 Anemômetro de temperatura constante 112
4.4.1 O circuito de controle 113
4.4.2 A taxa de sobreaquecimento 117
4.4.3 Controle digital 119
4.5 Resposta dinâmica da ponte CTA 121
4.5.1 Modelos da dinâmica do anemômetro 125
4.5.2 Teste de resposta em freqüência e teste de resposta transitória 127
4.6 Medição de velocidade 130
4.6.1 Sensibilidade direcional 132
4.6.2 Medição de duas componentes de velocidade 134
4.6.3 Medição do vetor velocidade 136
4.7 Medição simultânea de velocidade e temperatura 138
4.7.1 Calibração de temperatura para o fio-frio 139
4.7.2 Calibração direta de velocidade e de temperatura para o sensor de fio-quente 140
4.7.3 Métodos de compensação analítica 142
4.7.4 Aparato experimental 143
4.7.5 Comparação entre os métodos 146
4.8 Aquisição e tratamento de dados 148
4.8.1 Condicionamento e aquisição do sinal 149
4.8.2 Cálculo das estatísticas do escoamento 151

4.9 Análise de incertezas 155
4.9.1 Tipos de erros associados à medição 155
4.9.2 Incerteza da medição 156
4.9.3 Incerteza dos resultados 157
4.10 Aplicações 157
4.10.1 Escoamento ao redor de um cilindro 158
4.10.2 Escoamento sobre placa plana 159
4.10.3 Escoamento sobre superfície rugosa 162
4.11 Agradecimentos 167
4.12 Referências 167

5 Fundamentos de anemometria laser-Doppler 173
5.1 Preâmbulo 173
5.2 Introdução 175
5.3 Princípios básicos 179
5.3.1 Fonte de luz coerente 180
5.3.2 O efeito Doppler 181
5.3.3 O modelo de franjas 185
5.3.4 Resolução do sentido da velocidade 187
5.3.5 Ajuste do desvio de freqüência 189
5.4 Teoria de reflexão da luz por partículas pequenas 191
5.4.1 A teoria de Lorenz-Mie 193
5.4.2 Características reflexivas do feixe de laser 195
5.4.3 Partículas em anemometria laser-Doppler 195
5.4.4 Detecção posterior ou anterior ao volume de controle 198
5.5 Geração do sinal 201
5.5.1 Detecção da luz refletida 201
5.5.2 Características do sinal da anemometria laser-Doppler . . . 203
5.6 Aquisição e tratamento do sinal 205
5.6.1 Processadores de sinal 205
5.6.2 Cálculo das estatísticas do escoamento 211
5.6.3 Estimativa do espectro e funções de correlação 213
5.7 Sistemas de anemometria laser-Doppler 221
5.7.1 Sistemas unidirecionais 221
5.7.2 Sistemas bidimensionais 223
5.7.3 Sistemas tri-dimensionais 225
5.7.4 Outros componentes ópticos e acessórios 226
5.8 Análise de incertezas 228
5.8.1 Cálculo dos erros associado a uma medida 229
5.8.2 Incerteza dos resultados 232
5.8.3 Cálculo do erro associado às medidas de velocidade 233
5.9 Aplicações 235
5.9.1 Jato livre 235
5.9.2 Escoamento sobre variação de topografia 238
5.10 Agradecimentos 246

5.11 Referências 246

6 Turbulência em fluidos não-newtonianos 253
6.1 Introdução 253
6.1.1 Escoamentos turbulentos de fluidos não-newtonianos 253
6.1.2 Breve revisão do estado da arte 254
6.1.3 Organização do curso/capítulo 258
6.2 Propriedades reológicas de fluidos não newtonianos 259
6.2.1 Fluidos inelásticos: a viscosidade de corte, viscosimétrica ou de cisalhamento 259
6.2.2 Comportamento dependente do tempo 261
6.2.3 Fluidos com tensão de cedência 263
6.2.4 Fluidos viscoelásticos 265
6.3 Modelos constitutivos reológicos 269
6.3.1 Introdução e equações fundamentais 269
6.3.2 Modelos inelásticos 271
6.3.3 Modelos para fluidos com tensão de cedência 275
6.3.4 Modelos viscoelásticos explícitos 276
6.3.5 Modelos viscoelásticos implícitos na tensão 277
6.3.6 Modelos multímodo 284
6.4 Escoamento turbulento em dutos 285
6.4.1 Introdução 285
6.4.2 Fluidos viscosos 286
6.4.3 Fluidos viscoelásticos 289
6.4.4 Efeitos de escala 293
6.5 Filosofias de modelagem da turbulência 295
6.6 Fechamento de turbulência para modelo reológico de tensão pseudo-elástica 297
6.6.1 Introdução 297
6.6.2 Equação constitutiva 298
6.6.3 Equações de transporte 300
6.6.4 Fechamento para a viscosidade molecular média 303
6.7 Modelo $\kappa - \varepsilon$ anisotrópico de baixo número de Reynolds 306
6.8 Vários aspectos da modelagem 308
6.8.1 Função de amortecimento viscoso 308
6.8.2 A função de amortecimento f_μ 308
6.8.3 Modelo para a tensão pseudo-elástica 312
6.8.4 Resultados e discussão 317
6.9 Modelos de turbulência com base no modelo FENE-P 324
6.9.1 Introdução 324
6.9.2 Equações de governo e necessidades de modelação 324
6.9.3 Desenvolvimentos futuros 330
6.9.4 Modelos para outras equações constitutivas de fluidos . . . 330
6.10 Referências 331

7 Transferência de calor em escoamentos turbulentos parietais 341
7.1 Introdução 341
7.2 As equações instantâneas 342
7.2.1 Introdução 342
7.2.2 Fluxo turbulento de calor em escoamentos parietais dilatáveis 343
7.2.3 A adimensionalização das equações instantâneas 345
7.2.4 Escoamentos dilatáveis 347
7.3 Formulação estatística para escoamentos dilatáveis 348
7.3.1 Funções estatísticas 351
7.3.2 Um modelo estatístico para escoamentos dilatáveis 353
7.3.3 As equações médias 354
7.3.4 As equações médias adimensionais 355
7.4 O problema de fechamento 356
7.4.1 Formulação evolutiva para o problema de fechamento . . . 356
7.4.2 Formulação constitutiva para o problema de fechamento . 365
7.4.3 Modelos de turbulência de origem constitutiva 368
7.5 Leis de parede 372
7.5.1 Introdução 372
7.5.2 A camada limite turbulenta de temperatura 373
7.5.3 Dedução da lei de parede para a camada limite térmica . . 378
7.5.4 O número de Prandtl turbulento 383
7.5.5 Determinação analógica dos fluxos turbulentos parietais de calor 386
7.6 Resultados 388
7.6.1 Introdução 388
7.6.2 Resultados 392
7.6.3 Conclusão 398
7.7 Agradecimentos 398
7.8 Referências 399

8 Simulação numérica de escoamentos complexos 405
8.1 Introdução 405
8.2 O conceito de decomposição de campos 409
8.2.1 A equação de Reynolds 410
8.2.2 Equações de transporte para o tensor de Reynolds 414
8.2.3 A equação para o transporte de escalares 417
8.2.4 Equações de transporte para o fluxo turbulento de escalares 418
8.3 Modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta 419
8.3.1 O conceito de viscosidade turbulenta 419
8.3.2 O modelo $\kappa - \varepsilon$ 422
8.3.3 O modelo $\kappa - \omega$ 429
8.3.4 O modelo *shear stress transport* (SST) 431
8.4 Modelos para a equação de transporte do tensor de Reynolds . . . 432
8.4.1 O modelo LRR 435
8.4.2 O modelo SSG 438

8.4.3 O modelo *BSL* $\kappa - \omega$ 439
8.5 Aplicações 440
8.5.1 Escoamento sobre colinas abruptas 440
8.5.2 Jato impingente sobre placa plana 453
8.6 Referências 460

Prefácio

O ato quase solene de escrever o Prefácio de um livro necessariamente provoca em seu escritor momentos de profunda reflexão. Afinal, o objeto de tanta dedicação intelectual se mostra por completo, desnudo, em suas virtudes e defeitos.

Em sua forma definitiva, que não pode ser modificada, o livro deveria não apenas transmitir aos seus leitores a letra fria do rigor de suas construções teóricas, mas, principalmente, o espírito de toda a sofisticação intelectual que se pretende alcançar.

O presente texto pertence a uma já extensa e exitosa família. A série de escolas dedicadas exclusivamente à investigação da turbulência de fluidos deu origem a outros textos que marcaram época. A manutenção da alta estirpe, pois, poderia causar sérios embaraços a novas contribuições.

A Turbulência é uma matéria com sabidas dificuldades conceituais, que exige de seus militantes especializações múltiplas e sofisticadas. Esse texto, sem dúvida, preencherá lacunas importantes no arcabouço de métodos e técnicas que se pretendem disponíveis para um ataque consistente às dificuldades de natureza teóricas e práticas impostas pela Turbulência àqueles que a ambicionam assaltar. Temas do mais alto grau de complexidade e importância são dissecados em dois tomos que formam uma obra com doze capítulos. Um julgamento honesto dos Editores classifica a presente contribuição como da maior relevância tanto para iniciantes como para pesquisadores experientes no assunto.

A dedicação dos autores e seu compromisso com o resultado final dessa jornada foram da maior sensibilidade. Os Editores, sinceramente, esperam que os leitores reconheçam as muitas horas de trabalho abnegado que permitiram a existência desta obra.

Finalmente, talvez devêssemos agora nos inquirir sobre o propósito de tudo isso. Por que trabalhar com tamanho afinco para a existência dessa obra? A resposta é simples e singela: para a construção de uma sociedade melhor. Um objetivo que nos tem sido caro e que nos possibilitou encontrar aliados importantes na ABCM, na FAPERJ e no CNPq. Este projeto é, sobretudo, uma iniciativa feliz da ABCM e do Pronex "Núcleo de Excelência em Turbulência" um projeto apoiado pela FAPERJ e pelo CNPq (Processo No E-26/171.198/2003).

Os Editores

Agradecimentos

PRONEX Edital 2003

FAPERJ

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

CAPES

UFRJ COPPE

PEM

IME

INMETRO

ABCM
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ENGENHARIA E CIÊNCIAS MECÂNICAS

Relação de Autores

Capítulo 1 **página 1**

Fernando Pereira Duda
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 2 **página 17**

Fábio Ramos
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Ricardo Rosa
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Roger Temam
Department of Mathematics
Indiana University, Bloomington
IN 47405-5701
USA

Capítulo 3 **página 37**

Luca Moriconi
Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 4 **página 99**

Juliana B. R. Loureiro
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

José Luiz da Silva Neto
Programa de Engenharia Elétrica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 5 **página 173**

Juliana B. R. Loureiro
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Fernando T. Pinho
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade do Porto
Porto 4200-465
Portugal

Capítulo 6 **página 253**

Daniel Cruz
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade Federal do Pará
Belém 66075-970 Brasil

Fernando Pinho
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade do Porto
Porto 4200-465
Portugal

Capítulo 7 **página 341**

José Luiz Fontoura
Depto. de Engenharia Mecânica
Universidade de Brasília
Brasília, D.F. 70910-900
Brasil

Capítulo 8 **página 405**

Alexandre T. P. Alho
Depto. Engenharia Naval e Oceânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Anderson Ilha
Diretoria de Metrologia Científica
Instituto Nacional de Metrologia
Duque de Caxias, 22050-050
Rio de Janeiro Brasil

Capítulo 6

Turbulência em fluidos não-newtonianos

A modelagem de escoamentos turbulentos constitui um tema de pesquisa tão fascinante quanto complexo e vasto. A formulação de modelos de turbulência é uma tarefa sofisticada, a qual não possui uma metodologia claramente definida, contando em grande parte com a experiência e com a intuição do modelador. Neste capítulo, será discutido o tratamento teórico do escoamento turbulento de fluidos não newtonianos. Grande parte do texto envolve a descrição dos modelos propostos pelos autores, juntamente com os passos e as hipóteses adotadas durante a análise. Esperamos com este capítulo contribuir para a divulgação do estudo da turbulência e dos fluidos não newtonianos e principalmente para despertar o interesse (e eventualmente a paixão) pelos temas apresentados.

6.1 Introdução

6.1.1 Escoamentos turbulentos de fluidos não-newtonianos

Quando se fala em Mecânica dos Fluidos, a maioria dos engenheiros associa a disciplina a escoamentos de fluidos de características newtonianas, da qual os exemplos mais comuns são o ar e a água. É indiscutível que estes representam, em massa e volume, mais de 99% dos fluidos na biosfera, para além da sua freqüente presença na indústria e na nossa vida diária. Esta presença esmagadora não significa que os fluidos não newtonianos sejam irrelevantes, uma raridade e uma curiosidade acadêmica; a maioria dos fluidos sintéticos industriais, inúmeros fluidos de relevância biológica e a massa magnética do planeta, entre outros, apresentam aspectos claramente não newtonianos. Na sua maioria, eles exibem características reológicas diversas com diferentes graus de elasticidade, plasticidade, tixotropia e reofluidificação. São fluidos tão diversos como as tintas decorativas, as tintas de impressão, as colas, os produtos de cosmética e beleza, os medicamentos, os

produtos alimentares no estado líquido (ketchup, iogurtes, molhos), inúmeros produtos alimentares que, apresentando-se aos consumidores no estado sólido ou em pó, passaram em processo por uma fase líquida (sorvetes, produtos de confeitaria, massa de panificação), os sabões e detergentes, alguns óleos com aditivos de massa molecular elevada ou contendo partículas no estado sólido (óleo multigrade, por exemplo), fluidos lubrificantes utilizados na perfuração de poços de petróleo e gás natural, petróleo bruto, plásticos no estado líquido (polímero fundido), alguns fluidos térmicos, lamas de estações de tratamento de águas residuais, todo o tipo de lamas provenientes da indústria extrativa, fluidos abrasivos, alcatrão, etc. A lista de fluidos não newtonianos é muito extensa, de fato muito mais extensa do que uma lista de fluidos com características newtonianas.

Se a maioria destes fluidos apresentam uma consistência elevada que torna os seus escoamentos dominados por efeitos viscosos e elásticos, no chamado regime laminar e até em muitos casos no regime dos escoamentos de baixos números de Reynolds[1], não é menos verdade que são freqüentes os casos em que o escoamento decorre no regime turbulento. É o caso do escoamento no interior das brocas de perfuração de poços de petróleo ou gás natural, de escoamentos em reatores agitados mecanicamente e em trocadores de calor nas indústrias química e de processamento operando com soluções não newtonianas, ou ainda em modernos sistemas de aquecimento/arrefecimento comunitários, onde o recurso a fluidos térmicos viscoelásticos traz enormes vantagens na redução dos custos associados às perdas de calor e por fricção. De fato, este último caso é um claro exemplo de uma aplicação industrial projetada para beneficiar diretamente do fenômeno da redução do arrasto.

Na seção seguinte, faremos uma breve revisão do estado da arte no que diz respeito à modelação da turbulência para fluidos viscoelásticos exibindo redução de arrasto.

6.1.2 Breve revisão do estado da arte

Uma das características mais interessantes dos escoamentos turbulentos de fluidos não newtonianos com comportamento viscoleástico em dutos é a redução, em muitos casos bastante intensa, do atrito na parede. Esse fenômeno é conhecido como redução do arrasto e possui larga aplicação prática.

Desde 1948, quando Toms reportou a ocorrência de redução do arrasto no escoamento turbulento numa conduta de um fluido não newtoniano, que inúmeros investigadores dedicaram o seu tempo a compreender o comportamento de fluidos viscoelásticos nestas condições. Estes esforços culminaram em meados dos anos setenta, numa razoável compreensão fenomenológica, que está bem documentada nas revisões de Hoyt (1972) e Virk (1975). Esta descrição será apresentada mais adiante na Seção 6.4.

Até a década iniciada em 1970 o esforço de investigação dirigiu-se sobretudo a uma compreensão física do fenômeno, reforçada posteriormente com o desenvolvimento de métodos ópticos de diagnóstico. São alguns exemplos desse esforço os

[1] A designação corrente destes escoamentos em inglês é “creeping flows”.

trabalhos iniciais de Achia e Thompson (1977) e Reischman e Tiederman (1975), de Luchik e Tiederman (1988) e Pinho e Whitelaw (1990) nos anos oitenta e mais recentemente de Warholic *et al.* (1999), Pereira e Pinho (1994) e Escudier *et al.* (1999), entre outros. Em 1995 Gyr e Bewersdorff fizeram uma revisão crítica do estado de conhecimento num livro que abordou não só a redução de arrasto para soluções de polímero, mas também para soluções de agentes tenso-activos e suspensões de fibras.

Uma das descobertas importantes das investigações de Tiederman e Hanratty em escoamentos entre placas paralelas foi a redução nas tensões de corte de Reynolds, que só pode ser explicado pelo aparecimento de uma tensão de corte suplementar, de origem elástica, mas que até à data não foi ainda medido. Esta descoberta sugeriu uma nova dinâmica da turbulência envolvendo, entre outras coisas, o acoplamento entre as flutuações das tensões elásticas e as flutuações do gradiente de velocidade. Estas também foram algumas das conclusões de estudos usando simulação numérica direta (DNS[2]) de Massah e Hanratty (1997) com o modelo FENE-P[3], que mostrou que a tensão elástica flutua e interage com a turbulência e o escoamento médio.

Apesar de todos os esforços experimentais, não há ainda uma explicação clara para a ocorrência de redução de arrasto e a sua relação com a reologia dos fluidos viscoelásticos. Embora haja fortes indícios para uma relação entre a redução do arrasto e uma viscosidade extensional reoespessante, até a data não houve uma demonstração cabal desse fato. A medição da viscosidade extensional é ainda uma tarefa difícil e em especial para os fluidos muito diluídos capazes de atingir escoamentos em regime turbulento.

Com os grandes avanços na capacidade de cálculo computacional surgiu a alternativa de se realizar investigação por DNS. Desde 1993, com o trabalho de Massah *et al.*, que esta técnica tem fornecido informação útil sobre o efeito de propriedades reológicas específicas sobre as características do escoamento, e é hoje um método poderoso de caracterizar o escoamento turbulento, com qualquer tipo de fluido que é posteriormente utilizado para auxiliar o esforço de modelação. Para fluidos viscoelásticos existe, porém, uma dificuldade acrescida relativamente à utilização de DNS com fluidos newtonianos e discutido na seção 6.3: não há *a priori* a certeza de qual seja a equação constitutiva correta para um determinado fluido. Veja-se a este propósito as conclusões de Zhou e Akhavan (2003) que afirmam que o modelo FENE-P apresenta erros significativos na previsão da viscosidade extensional em regime transitório. Mesmo assim, o cálculo DNS com FENE-P permite a obtenção de informação extremamente relevante sobre a relação entre a reologia dos fluidos e as respectivas características hidrodinâmicas.

As primeiras investigações DNS de Massah *et al.* (1993) e Massah e Hanratty (1997) não foram auto-consistentes uma vez que se concentraram na resolução da equação constitutiva reológica, geralmente FENE-P, para uma cinemática newtoniana, não foram capazes de prever a redução do arrasto, mas permitiram ver o

[2]DNS é uma sigla com origem no termo inglês "Direct Numerical Simulation".

[3]FENE-P é uma sigla com origem no termo inglês "Finitely Extensible Nonlinear Elastic model" com a aproximação de Peterlin (1966).

efeito da turbulência na evolução das conformações moleculares e, consequentemente nas propriedades dos fluidos.

Uma das principais descobertas de Massah *et al.* (1997) foi o grande aumento no tamanho das moléculas presentes na subcamada viscosa, mas a ausência de extensão na camada intermédia. Num escoamento de Couette em regime laminar, as moléculas também se estenderam significativamente, mas não se encontrou redução de arrasto. A conclusão é óbvia: embora os efeitos da extensão molecular afetem as viscosidades de corte e extensional, o arrasto é só uma função da tensão de corte que em regime laminar não depende da viscosidade extensional. Contudo, a extensão molecular interfere na dinâmica da vorticidade, e por conseqüência na turbulência, pelo que a tensão de corte em regime turbulento vem afetada. O progresso dos meios de cálculo permitiu simulações numéricas diretas consistentes a partir de meados dos anos noventa usando equações constitutivas simplificadas para analisar o efeito da turbulência sobre determinadas propriedades reológicas. Orlandi (1995) e Den Toonder *et al.* (1995, 1997) adotaram equações constitutivas viscosas para imitar os efeitos dos polímeros nos seus cálculos de DNS. Os modelos estudados apresentavam termos anisotrópicos e diferentes tipos de variação das propriedades reológicas e o seu impacto sobre a redução de arrasto foi investigado.

Mais recentemente já se efetuaram simulações DNS consistentes em escoamentos entre placas paralelas com modelos viscoelásticos mais realistas derivados das teorias cinético-molecular (modelo FENE-P) e das redes (modelo de Giesekus) por Massah e Hanratty (1997), Sureshkumar *et al.* (1997) e Dimitropoulos *et al.* (1998, 2001). Estes trabalhos conseguiram prever reduções de arrasto significativas, mas ainda inferiores a 30%, i.e., no chamado regime de baixa redução de arrasto, e mostraram concordância qualitativa com resultados experimentais. As simulações com o modelo FENE-P e de Giesekus mostraram reduções de arrasto semelhantes quando os seus parâmetros foram escolhidos, por forma a igualar a viscosidade extensional máxima[4] (Dimitropoulos *et al.*, 2001).

As investigações DNS mais recentes reportam-se a números de Reynolds mais elevados e sobretudo a níveis de redução de arrasto mais intensos tendo-se definido relações entre os parâmetros reológicos e a redução de arrasto (Housiadas e Beris, 2004a), incluindo nos regimes de redução de arrasto elevada (DR $> 40\%$) e máxima (Li *et al.*, 2005). Os desenvolvimentos mais recentes nas técnicas DNS para fluidos viscoelásticos permitiram reduzir a difusão numérica necessária a convergir a equação constitutiva reológica, formulada em termos da conformação molecular (Housiadas e Beris, 2004b), tendo-se verificado que a redução de arrasto obtida com o modelo de Giesekus é superior à obtida com o modelo FENE-P sobretudo nos regimes de elevada e máxima redução de arrasto. As simulações mais recentes mostraram também o grande aumento na dimensão das estruturas coerentes presentes no escoamento, a correspondente diminuição da sua freqüência de ejeção, e a necessidade de grandes domínios de cálculo na direção longitudinal. O processamento dos dados de DNS para a realização de novos balanços de energia cinética de turbulência, enstrofia e tensões de Reynolds (Housiadas e Beris, 2005) é certa-

[4] As viscosidades extensionais máximas destes dois modelos são iguais desde que se verifique a seguinte relação entre os parâmetros α do modelo de Giesekus e L^2 do modelo FENE-P: $\alpha = 1/L^2$.

mente um dos elementos mais relevantes para o desenvolvimento de novos modelos de turbulência.

A técnica de DNS também foi utilizada para investigar a dinâmica de escalares no seio do escoamento de fluidos viscoelásticos (modelo FENE-P) em regime turbulento, o que é importante para o desenvolvimento de modelos para a redução de arrasto heterogênea (Gupta *et al.*, 2005a).

Em contraste com o trabalho experimental e o DNS, o progresso no desenvolvimento de modelos de turbulência locais para escoamentos de fluidos viscoelásticos tem sido muito lento. Após um esforço inicial nos anos 1970 (Durst *et al.*, 1977, 1979; Hassid e Poreh, 1975, 1978 e Poreh e Hassid, 1977) pouco se fez nos anos seguintes. Nesses desenvolvimentos iniciais o modelo $\kappa - \varepsilon$ para fluidos newtonianos foi utilizado com modificações nas funções de parede (modelo "standard") ou nas funções de amortecimento (modelo de baixo número de Reynolds). Hassid e Poreh (1975) sugeriram um modelo de uma equação, mas este tipo de modelos foi rapidamente abandonado devido às dificuldades em se definir uma escala de comprimento adequada, mesmo para fluidos newtonianos. Em Poreh e Hassid (1977) e Hassid e Poreh (1978) a mesma versão modificada do modelo $\kappa - \varepsilon$ de baixo número de Reynolds de Jones e Launder (1972) foi utilizado, mas isso não foi suficiente para prever redução do arrasto de forma genérica. O coeficiente da função de amortecimento da viscosidade turbulenta do tipo Van Driest teve que ser determinado a partir de resultados da redução de arrasto para o caso específico a ser previsto e por isso a aplicabilidade do modelo ficou em causa.

Essencialmente, em todos estes casos as modificações não foram capazes de prever a redução do arrasto com generalidade, mas mostraram que modificações adequadas da lei de parede ou das funções de amortecimento podem conduzir a previsões corretas. A deficiência de generalização do modelo resulta da falta de ligação entre o modelo de turbulência e a reologia dos fluidos. O assunto já tinha sido abordado em 1974 por Mizushina *et al.* que utilizaram um modelo de turbulência de ordem zero com um fator de amortecimento de Van Driest modificado para ter em consideração a viscoelasticidade do fluido incorporando um tempo de relaxação, que foi determinado a partir da teoria linear elástica de Rouse e de resultados experimentais. Esta metodologia foi capaz de prever o comportamento com um mesmo fluido em diferentes condições de escoamento, o que os modelos de turbulência posteriores de Hassid e Poreh e Durst *et al.* não foram capazes de conseguir.

As excursões na temática do desenvolvimento de modelos de turbulência para fluidos não newtonianos dos anos noventa tiveram uma aplicação muito limitada: Politis (1989), Malin (1997) e Cruz *et al.* (2000) deduziram independentemente as equações relevantes à previsão de escoamentos turbulentos com fluidos lei de potência com um modelo do tipo $\kappa - \varepsilon$ mas não foram capazes de prever redução de arrasto de origem elástica.

Outros desenvolvimentos de modelos de viscosidade turbulenta também foram tentados. Poreh e Dimant (1972) desenvolveram um modelo baseado no comprimento de mistura de Van Driest por inclusão de um parâmetro de amortecimento variável que representava os efeitos dos aditivos poliméricos. Expressões

mais complexas foram deduzidas por Edwards e Smith (1980) e mais recentemente por Azouz e Shirazi (1997). Estes autores previram o escoamento turbulento de soluções poliméricas de CMC[5] em condutas anulares, mas necessitaram de utilizar no seu modelo resultados de escoamentos dos mesmos fluidos em condutas de seção circular.

Só muito recentemente surgiu o primeiro modelo de turbulência verdadeiramente acoplado a um modelo reológico de um fluido. Partindo de um modelo constitutivo reológico para um fluido newtoniano generalizado, que foi modificado para incluir efeitos do reoespessamento da razão de Trouton[6] , Pinho (2003) e Cruz e Pinho (2003) desenvolveram um modelo $\kappa - \varepsilon$ capaz de prever simultaneamente o comportamento de fluidos puramente viscosos e também de fluidos reofluidificantes com elasticidade, esta caracterizada pela razão de Trouton reoespessante. O modelo é genérico, pois só necessita de informação sobre dados reométricos convencionais, mas necessita ainda de inúmeras melhorias, para que as previsões sejam quantitativamente precisas para uma gama extensa de fluidos e de condições de escoamento. Em 2004 Cruz *et al.* incluíram no seu modelo um novo termo de tensão que tinha sido desprezado anteriormente no balanço de quantidade de movimento com melhorias na previsão das quantidades médias (fator de fricção e velocidade media) e turbulentas (energia cinética de turbulência). Mais recentemente, Resende *et al.* (2006) desenvolveram uma versão não-linear do modelo $\kappa - \varepsilon$ que é por isso capaz de prever o aumento da anisotropia das tensões de Reynolds com a redução de arrasto.

Como resultado das simulações DNS com o modelo FENE-P o primeiro modelo de turbulência para este tipo de fluidos foi recentemente apresentado por Gupta *et al.* (2005b), um modelo de ordem zero formulado em termos de uma viscosidade turbulenta, e cobrindo os três regimes de redução de arrasto. O modelo prevê exatamente o comportamento do fluido FENE-P num escoamento turbulento entre placas paralelas, mas não foi testado nem para o escoamento numa conduta de seção circular nem noutros escoamentos turbulentos viscoelásticos.

6.1.3 Organização do curso/capítulo

Este curso, e o restante texto, está organizado da seguinte forma: em primeiro lugar começaremos por descrever sucintamente as propriedades reológicas dos fluidos não newtonianos capazes de atingir regime turbulento A descrição destas propriedades por modelos constitutivos reológicos é o tópico seguinte, introduzindo modelos para fluidos inelásticos e posteriormente fluidos viscoelásticos do tipo diferencial não linear.

Descrevem-se então as principais características dos escoamentos turbulentos das soluções com redução de arrasto. A descrição das propriedades dos escoamentos foca não só as características do escoamento médio, como o fator de fricção e os perfis de velocidade, mas também as propriedades de turbulência, nomeadamente os perfis das várias componentes do tensor das tensões de Reynolds.

[5] CMC é a sigla inglesa para "Carboxy Methil Cellulose".
[6] A razão de Trouton é o cociente entre as viscosidades extensional e viscosimétrica.

Estabelecido o conhecimento fundamental sobre as propriedades dos fluidos viscoelásticos e dos seus respectivos escoamentos, é então iniciada a descrição dos modelos de turbulência mais simples atualmente disponíveis para o cálculo deste tipo de escoamentos. Estes modelos baseiam-se numa equação constitutiva reológica pseudo-elástica que não é mais que uma adaptação do modelo newtoniano generalizado. Aqui apresentam-se vários modelos do tipo $\kappa - \varepsilon$ e um modelo para descrever o fluxo de Reynolds de calor, em que os escoamentos calculados são ainda os descritos no capítulo ou seção anterior.

Finalmente, o texto termina apontando direções para o desenvolvimento de melhores modelos de turbulência que assentam, em larga medida, nos resultados mais recentes de simulação numérica direta obtidos com fluidos viscoelásticos descritos pelo modelo FENE-P.

6.2 Propriedades reológicas de fluidos não newtonianos

Os fluidos não-newtonianos cujos escoamentos podem ocorrer em regime turbulento não podem necessariamente ser muito consistentes. No entanto, apresentam características reológicas tão complexas como as dos fluidos muito consistentes e de elevada viscosidade, como os polímeros fundidos. São normalmente soluções diluídas ou semi-diluídas de aditivos poliméricos, de aditivos do tipo tensoativo (em inglês "surfactant") ou ainda suspensões de partículas e/ou fibras. Neste texto não abordaremos nem a reologia das soluções de agentes tensoativos e de suspensões de fibras nem os seus modelos de turbulência específicos.

6.2.1 Fluidos inelásticos: a viscosidade de corte, viscosimétrica ou de cisalhamento

Os fluidos inelásticos são incapazes de acumular energia interna por deformação das suas moléculas ou arranjos de moléculas para posteriormente a devolver ao escoamento após uma mudança das respectivas características. Os fluidos inelásticos são pois meramente dissipativos e apresentam como propriedade reológica fundamental a viscosidade de corte, possuindo portanto um tempo de relaxação nulo. Os fluidos inelásticos por excelência são os fluidos ditos newtonianos, como a água e o ar, embora de um ponto de vista fundamental mesmo estes fluidos apresentem tempos de relaxação não nulos, embora muito pequenos e por isso irrelevantes para a maioria das situações de engenharia[7].

No caso das soluções poliméricas os aditivos responsáveis por tornar a viscosidade de corte variável e dependente da velocidade de deformação são também responsáveis pela viscoelasticidade. Contudo, alguns comportamentos fluido di-

[7] Os tempos de relaxação do ar (em condições normais de pressão e temperatura) e da água são da ordem de 10^{-13} a 10^{-12} s (c.f. Tanner RI; "Engineering Rheology," Clarendon Press, Oxford (1985)).

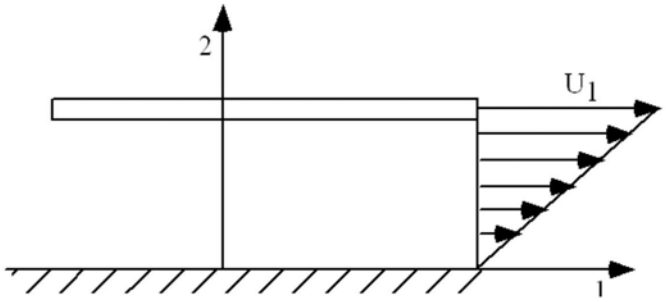


Figura 6.1: Escoamento de Couette plano.

nâmicos são basicamente ditados pelas propriedades inelásticas dos fluidos e esta idealização simplifica a sua interpretação e a medição da viscosidade de corte.

A viscosidade de corte, viscosimétrica ou de cisalhamento[8] (η) define-se como o quociente entre a tensão de corte (τ_{12}) e a respectiva velocidade de deformação ($\dot{\gamma}_{12}$) num escoamento de Couette (ver Figura 6.1), i.e.

$$\eta \equiv \frac{\tau_{12}}{dU_1/dx_2} = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} \,. \tag{6.1}$$

Tipicamente, os fluidos reais mais comuns apresentam um comportamento reofluidificante[9] no que diz respeito à viscosidade de corte, com um patamar de viscosidade constante (de valor elevado) a baixas velocidades de deformação, como se ilustra na Figura 6.2. Para alguns fluidos encontramos ainda um segundo patamar de viscosidade constante (de baixo valor de viscosidade) a elevadas velocidades de deformação. Estes patamares são por vezes designados de patamares newtonianos. Entre os dois patamares a viscosidade comumente diminui com o aumento da velocidade de deformação seguindo uma lei de potência, como se mostra na Figura 6.2(a).

Para determinadas suspensões de partículas de formas irregulares, e também para soluções de agentes tensoativos, a viscosidade de corte pode ainda apresentar um comportamento reoespessante[10], que também está representada na Figura 6.2(a) por uma linha a cheio.

A Figura 6.2(b) apresenta a variação da viscosidade de cisalhamento com a velocidade de deformação para as quatro soluções de CMC estudadas por Pinho e Whitelaw (1990). O aumento da concentração de polímero aumenta a viscosidade de corte, sobretudo para velocidades de deformação baixas, uma vez que

[8] O termo cisalhamento é de origem gaulesa sendo comumente utilizado no Brasil, enquanto que em Portugal se dá preferência aos termos "corte" ou "viscosimétrico".

[9] Em português caíram em desuso as expressões "reoespessante regressivo" e "pseudoplástico". Em inglês utiliza-se "shear-thinning" tendo caído em desuso o termo "pseudoplastic".

[10] Em português caíram em desuso as expressões "reoespessante progressivo" e "dilatante". Em inglês utiliza-se a expressão "shear-thickening" tendo caído em desuso o termo "dilatant".

a viscosidade das soluções tende para a viscosidade do solvente (água) quando a velocidade de deformação aumenta. Com o aumento da concentração de aditivo o declive da zona de lei de potência também aumenta e a transição do primeiro patamar newtoniano para a zona de comportamento lei de potência ocorre para velocidades de deformação cada vez menores.

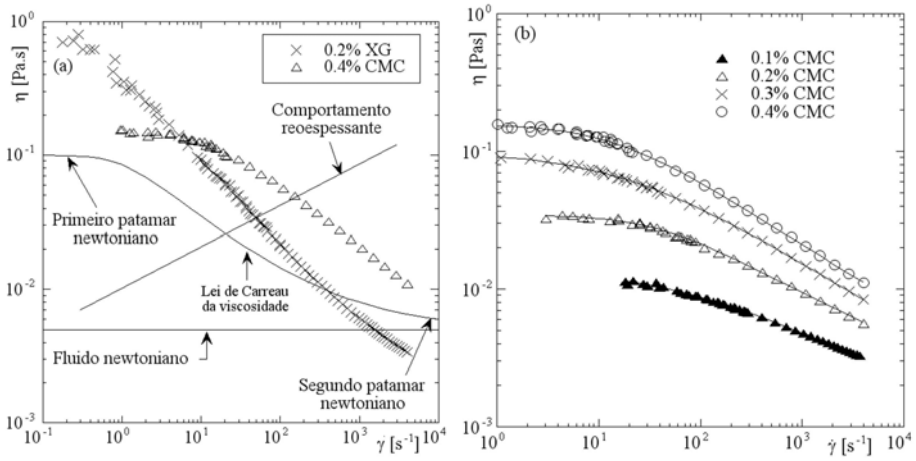


Figura 6.2: Comportamento viscoso típico de soluções poliméricas: (esquerda) soluções aquosas de 0.4% CMC (Pinho e Whitelaw, 1990) e 0.2% XG (Escudier *et al.*, 1999) e comparação com modelos newtoniano e de Carreau. (direita) Variação da viscosidade de corte de soluções de CMC em função da velocidade de deformação e concentração de aditivo (em massa). XG (goma de xantano) e CMC (celulose carboxi-metílica).

6.2.2 Comportamento dependente do tempo

Alguns fluidos inelásticos exibem dependência temporal das suas propriedades dissipativas. É o caso, por exemplo, de algumas suspensões de partículas argilosas onde a viscosidade viscosimétrica varia no tempo mesmo quando a velocidade de deformação permanece constante no tempo. Esta dependência do tempo não se deve a qualquer efeito de armazenamento elástico de energia, mas é um fenômeno puramente dissipativo que é reversível[11] e que se deve a alterações no equilíbrio entre a formação e a destruição de estruturas internas ao próprio fluido.

Para visualizar o fenômeno considere-se a Figura 6.3, que representa a resposta de um fluido em repouso a um ensaio a velocidade de deformação constante numa célula de Couette.

[11] A reversibilidade da tixotropia deve aqui ser entendida como um fenômeno que pode ser ciclicamente repetido, i.e., não ocorre qualquer degradação dos componentes do fluido. Não se trata pois de um reversibilidade do ponto de vista termodinâmico.

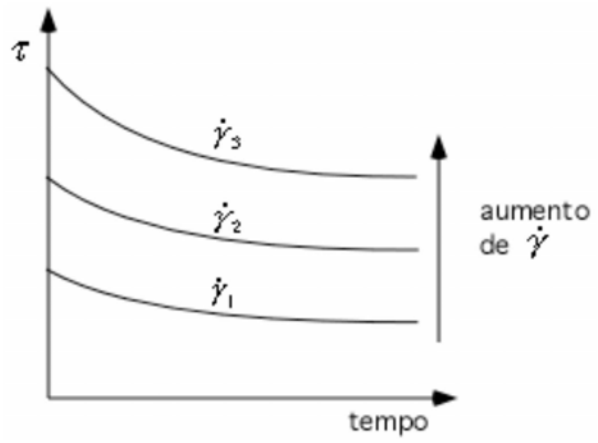


Figura 6.3: Comportamento tixotrópico da tensão de cisalhamento num escoamento de Couette.

A tensão diminui ao longo do tempo até se atingir um equilíbrio na estrutura interna do fluido. Para diferentes valores de $\dot{\gamma}$ verifica-se o mesmo fenômeno a que se dá o nome de tixotropia.

A tixotropia está associada à orientação das entidades constitutivas do fluido e à sua configuração estrutural, quando estes são sensíveis ao campo de tensões aplicado, mas o rearranjo estrutural é lento, comparado com o que ocorre nos fluidos ditos independentes do tempo, que se adaptam quase instantaneamente ao campo de tensão. Descrições qualitativas do comportamento tixotrópico dos fluidos, indicam que as suas partículas ou moléculas constituintes sofrem aglomerações ou dispersão e alinhamento ou entrelaçamento, que se desfazem após a remoção da tensão aplicada voltando a estrutura à situação original. Suspensões aquosas de barro bentonítico, petróleos a baixas temperaturas e emulsões pseudoplásticas de sabões, são alguns dos fluidos tixotrópicos, enquanto que no grupo dos reopéticos se deve considerar o poliester saturado (M_W= 2,000 kg/kmole) e a tinta de impressão.

A título de exemplo apresenta-se na Figura 6.4 a variação da viscosidade viscosimétrica com o tempo para uma solução aquosa de 1.5% de uma argila hectorítica em água, a laponite RD da Laporte Industries, que foi estudada por Pereira e Pinho (1999). A laponite é um aditivo freqüentemente utilizado na indústria formando soluções que se escoam também em regime permanente, e que também aparece na formulação de fluidos laboratoriais devido à transparência óptica das suas soluções (Escudier *et al.*, 1995), permitindo simular fluidos utilizados na perfuração de poços de petróleo e gás natural.

Na Figura 6.4, a curva superior representa a resposta do fluido quando se dá um aumento súbito da tensão imposta de 0 para 15 Pa. De acordo com alguns dos modelos fenomenológicos (Papenhuijzen, 1972), a tixotropia ocorre nos fluidos

que formam uma estrutura interna. Nesta estrutura forma-se uma rede de ligações e, em simultâneo, a deformação do material impõe roturas nessas ligações. Na presença de uma deformação imposta a estrutura na situação de equilíbrio resulta de um compromisso entre as taxas de formação e rotura de ligações internas. A curva superior da figura corresponde pois à evolução de uma situação de estrutura totalmente formada ($\tau = 0$ Pa para $t < 0$ s) para uma situação de equilíbrio.

Por outro lado, a curva inferior corresponde a uma queda súbita da tensão aplicada de 35 Pa para 15 Pa. Na ausência de qualquer estrutura interna as duas curvas deveriam coincidir, mas aqui não é o caso. O equilíbrio estrutural justifica que ambas as curvas apresentem um tempo de resposta semelhante, embora a variação da taxa de deformação (viscosidade) seja menor na curva inferior porque as modificações estruturais na passagem de 35 Pa para 15 Pa são menos intensas do que na variação de 0 Pa para 15 Pa. O tempo de resposta obtido nos ensaios de viscosidade é da ordem dos 3000 s e é idêntico para ambas as curvas.

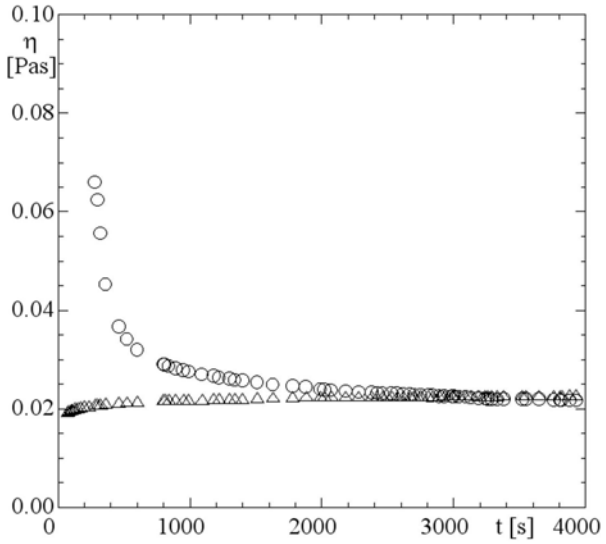


Figura 6.4: Evolução no tempo da viscosidade viscosimétrica de uma suspensão aquosa de 1.5% de laponite corresponde à aplicação no instante $t = 0$ s de uma tensão de corte de 15 Pa: O: $\tau = 0$ Pa para $t < 0$ s; Δ: $\tau = 35$ Pa para $t < 0$ s (de Pereira e Pinho, 1999).

6.2.3 Fluidos com tensão de cedência

Há fluidos em que não se observa o primeiro patamar newtoniano de viscosidade, mas em que esta tende a aumentar indefinidamente à medida que a velocidade de deformação diminui. Este caso configura fluidos que apresentam uma estrutura interna com alguma rigidez e que por isso dão origem ao aparecimento de uma

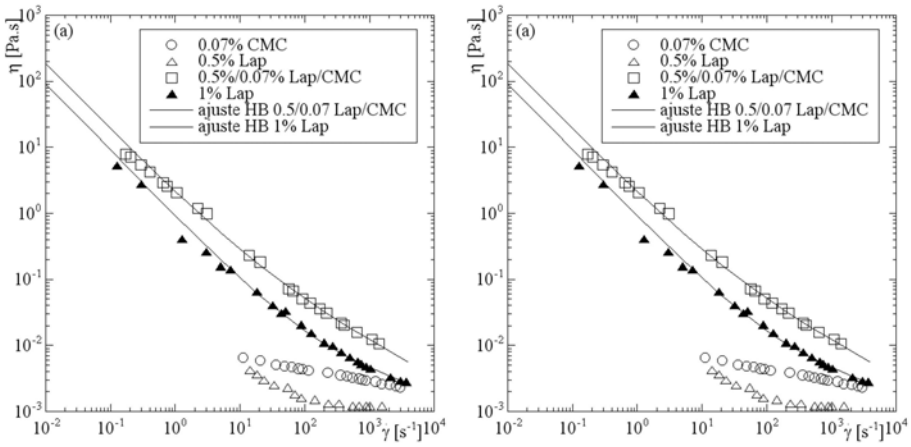


Figura 6.5: Suspensões de laponite (Lap): (esquerda) viscosidade viscométrica de equilíbrio; (direita) Deformação em ensaio de fluência de uma suspensão de 1% de laponite (Pereira e Pinho, 1999).

tensão crítica mínima, que é necessário vencer para a ocorrência de escoamento - a tensão de cedência. Tais materiais apresentam assim um comportamento ambíguo, pois comportam-se como fluidos quando a tensão de cedência é excedida, mas como sólidos no caso contrário. Exemplos são a pasta dentífrica, a maionese, o sangue ou ainda algumas suspensões de partículas, sobretudo se os solventes possuírem moléculas de elevado peso molecular.

O comportamento típico de um fluido com tensão de cedência (τ_Y) está ilustrado na Figura 6.5: a Figura 6.5(a) mostra ainda o ajuste de um modelo de Herschel-Bulkley (HB, Eq. (6.2)) à viscosidade de corte de dois fluidos baseado na laponite, enquanto que a Figura 6.5(b) mostra a resposta desse fluido a um ensaio de fluência, que constitui um dos métodos diretos de medição da tensão de cedência

$$\tau = \tau_Y + K\dot{\gamma}^n \,. \tag{6.2}$$

Como as suspensões de laponite são também fluidos tixotrópicos cada ponto da Figura 6.5(a) corresponde de fato a condições de equilíbrio que se obtém ao fim de muito tempo, i.e. após solicitar o fluido a uma velocidade de deformação ($\dot{\gamma}$) constante, durante um tempo suficientemente longo para que a viscosidade de corte deixe de variar no tempo (ver Figura 6.4).

A determinação experimental da tensão de cedência pode fazer-se de forma indireta ou direta. No método indireto, ilustrado na Figura 6.5(a), a tensão de cedência é calculada a partir do ajuste de uma equação aos valores medidos da viscosidade de corte, por exemplo o modelo de Herschel-Bulkley da Eq.(6.2). No método direto aplicam-se tensões de corte sucessivamente crescentes a uma amostra de fluido colocada numa célula de Couette. Enquanto a tensão aplicada for

inferior à tensão de cedência do material, após a remoção da tensão a deformação final do fluido é nula, mas haverá uma deformação residual quando a tensão exceder o valor crítico, como se mostra na Figura 6.5(b) onde a tensão crítica é da ordem de 2.9 Pa.

6.2.4 Fluidos viscoelásticos

Os fluidos são viscoelásticos quando são capazes de armazenar energia sob a forma elástica durante fenômenos cinematicamente transientes, posteriormente cedendo ao escoamento a energia armazenada. Há contudo outras manifestações da elasticidade, detectáveis mesmo em escoamentos em regime permanente.

Coeficientes da primeira e segunda diferença de tensões normais

No escoamento de Couette da Figura 6.1 um fluido elástico desenvolve tensões normais que tendem a afastar as duas placas. Define-se assim a propriedade material Ψ_1, designada por coeficiente da primeira diferença de tensões normais, como na Equação (6.3),

$$\Psi_1 \equiv \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2} = \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} \,. \tag{6.3}$$

Esta diferença resulta das propriedades de invariância do tensor das tensões que faz com que só duas das três tensões normais sejam realmente independentes entre si. O coeficiente da segunda diferença das tensões normais relaciona as outras duas componentes da tensão normal ($N_2 \equiv \tau_{22} - \tau_{33}$) é a segunda diferença das tensões normais). N_2 é normalmente muito baixo, podendo atingir valores máximos da ordem dos 20% de N_1, mas de sinal contrário.

O comportamento típico de um fluido viscoelástico, no que diz respeito a Ψ_1, apresenta-se na Figura 6.6(a), onde se observa que no limite das baixas taxas de deformação o fluido apresenta um coeficiente constante a que corresponde um $N_1 \to 0$. N_1 é responsável por alguns fenômenos espetaculares como o efeito de Weissenberg da Figura 6.6(b), onde se observa a subida de fluido ao longo de um bastão em rotação.

O comportamento das tensões normais representado na figura também é do tipo reofluidificante, com as tensões normais a variar muito intensamente, porque N_1 varia com $\dot{\gamma}^2$.

Módulos de conservação e dissipação

Aplicando uma tensão oscilatória de baixa amplitude ($\tau = \tau_0 \sin \omega t$) à placa superior da célula de Couette da Figura 6.1, a deformação do fluido $\gamma(t)$ não estará em fase nem com a tensão aplicada nem com a sua taxa de deformação $\dot{\gamma}(t)$ se o fluido for viscoelástico, mostrando assim que o comportamento do fluido apresenta simultaneamente características viscosas e elásticas. A deformação do fluido é quantificada por $\gamma(t) = \gamma_0 \sin(wt + \delta)$, estando por isso desfasada de δ em relação

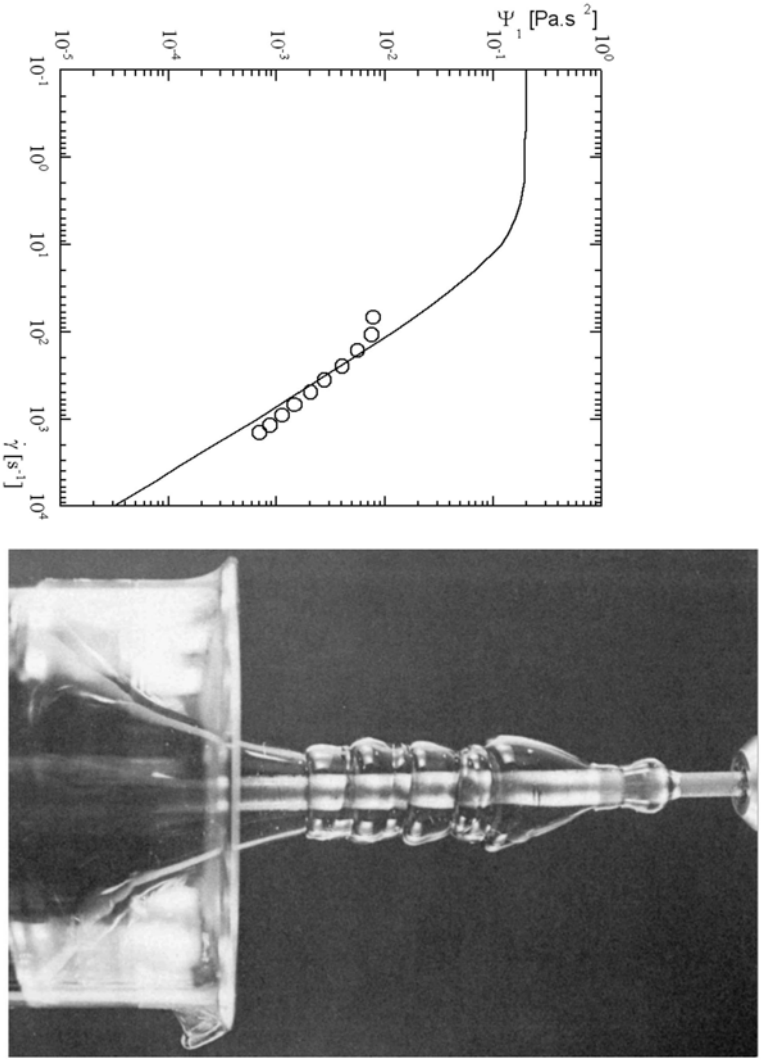


Figura 6.6: (esquerda) Variação de Ψ_1 em função de $\dot{\gamma}$ para fluidos viscoelásticos aqui representado pelo modelo Phan-Thien-Tanner com $\varepsilon = 0.25$, $\lambda = 0.1$ s, $\eta = 1$ Pa.s e $\xi = 0$, Solução aquosa de 0.4% poliacrilamida (de Poole e Escudier, 2003). (direita) Efeito de Weissenberg (de Boger e Walters, 1993).

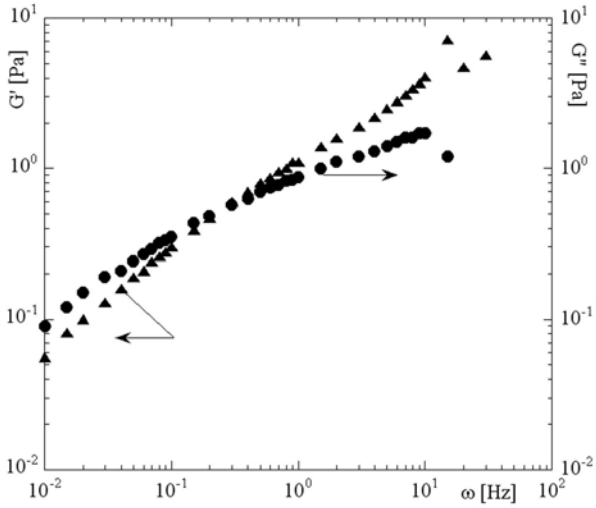


Figura 6.7: Resposta a um ensaio oscilatório de uma solução aquosa de 0.25% de goma de xantano.

à tensão aplicada. Surgem assim os conceitos de módulo de dissipação (G'') e modulo de conservação (G'), definidos nas equações (6.4) e (6.5):

$$G' \equiv \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos\delta \,, \tag{6.4}$$

$$G'' \equiv \frac{\tau_0}{\gamma_0} \sin\delta \tag{6.5}$$

que medem a quantidade de energia de deformação armazenada reversivelmente (G') e por isso recuperável, e a energia de deformação irreversivelmente perdida por efeito viscoso (G''). O desfasamento δ entre a tensão aplicada e a deformação resultante é designada por ângulo de perdas.

A Figura 6.7 mostra o comportamento de um fluido viscoelástico, no caso vertente uma solução aquosa diluída de goma de xantano. A resposta de um fluido newtoniano a um ensaio deste tipo é óbvia porque não sendo elástico se caracteriza por um ângulo de perdas que é máximo, i.e. $\delta = \pi/2$.

Viscosidade extensional ou elongacional

Se sujeitarmos uma amostra de fluido a um escoamento extensional, como por exemplo o que se verifica numa contração ou num ensaio de tração, o cociente entre a diferença de tensões normais e a velocidade de deformação normal na direção longitudinal ($\dot{\varepsilon}$) designa o que se convencionou chamar de viscosidade extensional

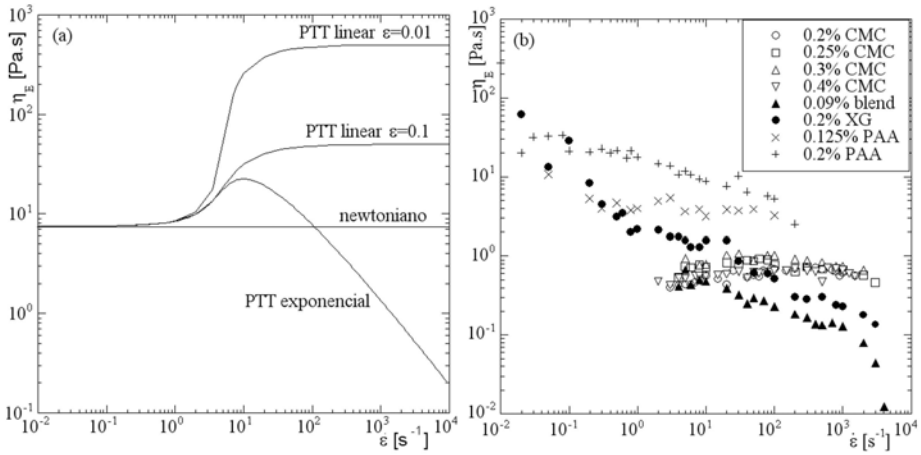


Figura 6.8: Variação da viscosidade extensional de vários fluidos: (esquerda) Modelo newtoniano e de Phan-Thien-Tanner; (direita) Várias soluções aquosas diluídas e semi diluídas de polímero, medida pelo reômetro de jatos opostos (de Escudier *et al.*, 1999).

ou elongacional uniaxial representado pelo símbolo η_E,

$$\eta_E \equiv \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\partial U_1/\partial x_1} = \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\varepsilon}} \,. \tag{6.6}$$

Todos os fluidos possuem uma viscosidade elongacional não nula, que no caso do fluido puramente viscoso (também designado de fluido de Stokes) é igual a três vezes a viscosidade de corte. Aquilo que caracteriza inúmeros fluidos viscoelásticos é o fato da razão entre as viscosidades extensional e de corte, designada por razão de Trouton[12], poder exceder largamente o valor de 3 e também a sua dependência da velocidade de deformação normal, $\dot{\varepsilon}$. A Figura 6.8(a) ilustra alguns comportamentos típicos da viscosidade elongacional de fluidos viscoelásticos, no caso vertente o comportamento previsto pelo modelo dito PTT (Phan-Thien-Tanner) a ser discutido na Seção 6.3.

Não é fácil medir esta propriedade dada a dificuldade em garantir que as partículas de fluido se submetam a uma velocidade de deformação constante durante um intervalo de tempo suficientemente longo para eliminar efeitos transitórios. Este problema é especialmente agudo para fluidos de baixa consistência em que η_E só pode ser medido normalmente em escoamento do tipo contração súbita, ou jacto oposto, tratando-se por isso de uma viscosidade extensional que não é pura[13]. É para esse tipo de fluidos pouco consistentes que a Figura 6.8(b)

[12] A razão de Trouton $T_R = \eta_E(\dot{\varepsilon})/\eta_V(\dot{\gamma})$ em que $\dot{\gamma} = \sqrt{3}\dot{\varepsilon}$.

[13] Nestes casos prefere-se falar de "indexador de viscosidade extensional" em vez de "viscosidade

mostra alguns resultados de medições da viscosidade extensional obtidas com o indexador de jactos opostos (Fuller *et al.*, 1987; Zirnsak e Boger, 1998). Mais recentemente foi desenvolvida a técnica de ruptura de um filamento capilar[14], que é particularmente adequada a medir a viscosidade extensional de soluções poliméricas diluídas. No entanto, esta técnica descrita em detalhe em Stelter *et al.* (2000, 2002) só permite medir um único valor de η_E a uma taxa $\dot{\varepsilon}$ específica para cada fluido e que resulta de um equilíbrio de forças elásticas e de tensão superficial, o princípio do seu funcionamento.

Há outras variantes da viscosidade elongacional, relacionadas com diferentes tipos de escoamento extensional, que não serão aqui abordadas, mas que apresentam o mesmo tipo de comportamento de um ponto de vista qualitativo (por exemplo, as viscosidades extensionais biaxial e plana). O leitor interessado poderá consultar a obra de Bird *et al.* (1987), para uma apresentação mais exaustiva desta propriedade. Aqui limitamo-nos a falar da viscosidade extensional uniaxial.

Outras propriedades reológicas

Esta apresentação de propriedades reológicas de fluidos foi propositadamente simples e restrita por razões óbvias de espaço e tempo. No entanto, há que referir que é cada vez mais importante atender à resposta dos fluidos e modelos reológicos a escoamentos de corte e extensional em regime não-estacionário. A literatura da especialidade (Lielens *et al.*, 1999) mostra claramente que modelos constitutivos reológicos adequados a prever corretamente as propriedades dos fluidos em ensaios em regime permanente falham por vezes na resposta desses mesmos fluidos se os ensaios decorrerem em regime transitório. Ora, esta é uma característica típica de escoamentos em regime turbulento.

6.3 Modelos constitutivos reológicos

6.3.1 Introdução e equações fundamentais

O cálculo numérico de um escoamento de um fluido não newtoniano passa no mínimo pela resolução de duas equações de conservação (massa e quantidade de movimento) e uma equação de estado constitutiva reológica. Se o problema envolver ainda transferência de calor é necessário juntar-lhe a equação de conservação da energia térmica. Finalmente, tratando-se de um escoamento em regime turbulento, é necessário considerar ainda equações de conservação de várias quantidades relacionadas com o modelo de turbulência, tais como a energia cinética de turbulência, a sua taxa de dissipação, as tensões de Reynolds ou outras. No contexto de um modelo para fluidos viscoelásticos surgirão novos termos envolvendo flutuações de quantidades físicas que terão de ser modelados, como se verá mais adiante.

Pode ser necessária ainda a resolução de uma equação constitutiva térmica, pois o tratamento de escoamentos não isotérmicos de fluidos viscoelásticos pode

extensional".

[14]Em inglês usa-se a sigla CaBer que vem de "Capillary break-up".

requerer o uso de uma formulação mais genérica da lei de Fourier (Bird e Curtiss, 1998; Curtiss and Bird, 1997). No entanto, é prática corrente adotar uma condutibilidade térmica isotrópica. Finalmente é de notar que a equação da energia térmica para fluidos viscoelásticos vem modificada relativamente à equação para fluidos newtonianos. O leitor interessado pode consultar as obras de Peters e Baaijens (1997) ou Wapperom e Hulsen (1998) entre outros.

Equação de conservação da massa

Os fluidos não newtonianos são, regra geral, líquidos considerados incompressíveis pelo que a equação de conservação da massa é escrita em notação indicial como

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\,, \tag{6.7}$$

onde u_i representa a componente do vector velocidade no sistema cartesiano, x_i. A notação indicial será usada freqüentemente ao longo deste texto aplicando-se também a regra da soma de índices de Einstein. Para uma explicação mais desenvolvida de álgebra tensorial, o leitor poderá consultar as obras de Aris (1962), Sedov (1971) e os apêndices de Bird *et al.* (1987a, 2002).

Equação de conservação da quantidade de movimento

A equação de conservação de quantidade de movimento para um fluido genérico apresenta-se em muitos textos (ex. Bird *et al.*, 1987a) como sendo

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\,. \tag{6.8}$$

Nesta equação vectorial para a componente de velocidade u_i, t representa o tempo, p a pressão, ρ a massa especifica do fluido, g_i é a aceleração da gravidade e τ_{ij} é a componente ij do tensor extra das tensões, que é dado por uma das equações constitutivas reológicas a apresentar na seção 6.3.2.

Equação de conservação da energia térmica

A equação de conservação da energia térmica para fluidos de condutibilidade térmica isotrópica obedecendo à lei de Fourier da condução é dada pela Eq.(6.9)

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c u_i T)}{\partial x_i} = \frac{\partial(k\,\partial T/\partial x_i)}{\partial x_i} + \tau_{ij} S_{ij} + S\,, \tag{6.9}$$

onde k é a condutibilidade térmica, c é o calor específico e T é a temperatura do fluido. S representa o termo fonte, que inclui qualquer outra parcela da equação (por exemplo a geração interna de calor devido a uma reação química), sendo que se extraiu desse termo a interação entre os tensores da tensão (τ_{ij}) e gradiente de deformação (S_{ij}), representado pelo segundo termo do membro da direita. Para o caso de fluidos puramente viscosos, essa interação representa a dissipação viscosa,

mas no caso de fluidos viscoelásticos pode incluir armazenamento ou cedência elástica de energia (Bird *et al.* (2002), Peters e Baaijens (1997), Wapperom (1995)).

A tensão τ_{ij} na equação de conservação de quantidade de movimento, Eq.(6.8), exprime o comportamento do fluido através de uma equação constitutiva reológica adequada para representar as propriedades reológicas do fluido, no caso vertente soluções diluídas e semi-diluídas de polímeros ou outros aditivos, que resultam em fluidos capazes de atingir o regime turbulento no escoamento em estudo. Nem sempre é fácil identificar tal equação, nem mesmo a totalidade das propriedades reológicas relevantes numa situação em que o escoamento não é simples, sendo esta uma das dificuldades da mecânica dos fluidos não newtonianos. Por outro lado, estaremos aqui limitados a usar modelos constitutivos reológicos sobre os quais foram desenvolvidos modelos de turbulência, o que acaba por limitar significativamente a escolha, por comparação com a situação em regime laminar.

A equação constitutiva reológica relaciona o campo de tensões num ponto do espaço e num instante de tempo com a história das deformações e velocidades de deformação desse fluido. Esta relação pode ser mais ou menos complexa, envolvendo ou não quantidades cinemáticas no próprio instante de tempo ou ao longo de tempos do passado dependendo do tipo de equação adotada. Aqui concentrar-nos-emos essencialmente em modelos não-integrais, eliminando-se por isso as equações que realizam uma integração da história da deformação ao longo do tempo.

Nesta breve descrição os modelos adotados são algébricos e do tipo diferencial e distinguiremos duas grandes famílias, a saber: os modelos explícitos e os modelos implícitos na tensão. Esta distinção é importante não só de um ponto de vista físico, pois alguns efeitos de elasticidade de fluidos implicam necessariamente um modelo implícito (como o efeito de memória), mas também nas perspectivas do desenvolvimento de modelos de turbulência e ainda da metodologia adotada para a resolução numérica das equações.

No grupo dos modelos explícitos enquadram-se os modelos do tipo newtoniano generalizado e as expansões em série de potência e seus derivados, como o modelo Criminale-Eriksen-Filbey (CEF). Por razões exclusivamente numéricas, nos modelos newtonianos generalizados devemos ainda distinguir os modelos com e sem tensão de cedência.

No grupo dos modelos implícitos surgem os modelos diferenciais quasi-lineares e não-lineares, onde a relação constitutiva é uma equação às derivadas parciais da tensão. Estes modelos são atualmente utilizados na grande maioria dos cálculos com fluidos viscoelásticos, limitando-se os modelos do tipo expansão em série de potências a situações em que pretendemos avaliar tendências de comportamento.

6.3.2 Modelos inelásticos

Modelo de fluido de Newton

Um fluido newtoniano não apresenta qualquer tipo de memória, é puramente viscoso e tem uma viscosidade constante, exceto no que diz respeito ao efeito da tem-

peratura e pressão. As suas propriedades não têm qualquer tipo de dependência do tempo ou de estados de deformação anteriores e a tensão desviatória (ou tensor das extratensões) de um fluido newtoniano obedece à relação linear

$$\tau_{ij} = 2\eta S_{ij} + \lambda' \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \tau_{ij} = 2\eta S_{ij} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\eta\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\,, \tag{6.10}$$

onde η é o coeficiente de viscosidade constante, e S_{ij} é o tensor velocidade de deformação[15] que se define na Equação (6.11)

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\,. \tag{6.11}$$

Como estes fluidos se apresentam no estado líquido, o vector velocidade é um solenóide e torna-se irrelevante a quantificação do coeficiente λ', que está relacionado com a expansão volumétrica (ou dilatação do fluido), reduzindo-se a Equação (6.10) a

$$\tau_{ij} = 2\eta S_{ij}\,. \tag{6.12}$$

No entanto, em situações em que haja fenômenos de compressibilidade (mesmo para fluidos não-newtonianos, ver Joseph, 1990) ou por razões de estabilidade numérica, é por vezes necessário ou há vantagens em manter o termo de dilatação. Para que a tensão seja desviatória, $\lambda'=-\frac{2}{3}\eta$. Como se vê na Eq.(6.10), por vezes prefere-se utilizar a chamada viscosidade de dilatação ou dilatacional μ', mas a sua quantificação é ainda assunto de alguma discussão e controvérsia (ver Schlichting e Gersten, 1999), sendo no entanto prática corrente a adoção da hipótese de Stokes ($\mu' = 0$), para garantir que a tensão seja desviatória. A viscosidade dilatacional define-se a partir da relação entre pressão termodinâmica (p) e pressão mecânica (simétrico de $\overline{\sigma}=-p+\mu'\partial u_i/\partial x_i$ com $\mu'=\lambda'+\frac{2}{3}\eta$), considerando ainda o conceito de tensão total (ver White, 1991; Schlichting e Gersten, 1999).

Um fluido não newtoniano pode agora definir-se como todo aquele que não obedece às equações (6.10) ou (6.12).

Modelo do fluido newtoniano generalizado

O modelo não newtoniano mais simples é explícito na tensão e é uma extensão do modelo newtoniano, com a viscosidade a ser uma função da velocidade de deformação local do fluido. Por esta razão designa-se este modelo como fluido newtoniano generalizado (sigla GNF do inglês "Generalized Newtonian Fluid"), cuja equação constitutiva é

$$\tau_{ij} = \eta(\dot{\gamma})\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\,, \tag{6.13}$$

já que se usou novamente a hipótese de Stokes.

[15] S_{ij} é o tensor velocidade de deformação ou taxa de deformação, Castro *et al.* (2001).

A viscosidade viscosimétrica η é função de três invariantes linearmente independentes do tensor velocidade de deformação S_{ij}, Equação (6.11), de que o exemplo mais conhecido é a lei de potência da viscosidade ou modelo de Ostwald-De Waele da Equação (6.14),

$$\eta(\dot{\gamma}) = K\dot{\gamma}^{n-1}\,, \tag{6.14}$$

sendo $\dot{\gamma}$ definido a partir no segundo invariante de $\mathbf{S}$, $\dot{\gamma} \equiv \sqrt{2\,\mathrm{tr}\,\mathbf{S}^2}$ (note-se que $II_S \equiv \frac{1}{2}[\mathrm{tr}\,\mathbf{S}^2 - (\mathrm{tr}\,\mathbf{S})^2]$, $\mathrm{tr}\,\mathbf{S} = 0$ (fluido incompressível) e $\mathrm{tr}\,\mathbf{S}^2 = S_{ij}S_{ij}$). Na Eq.(6.14), K e n representam os índices de consistência e de lei de potência, respectivamente. No modelo newtoniano generalizado são possíveis outras funções para $\eta(\dot{\gamma})$, como o modelo de viscosidade de Carreau-Yasuda

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)\left[1 + (\lambda\dot{\gamma})^a\right]^{\frac{n-1}{a}}\,, \tag{6.15}$$

onde η_0, η_∞, λ e n são parâmetros, ou o modelo de Carreau simplificado da Equação (6.16)

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}}\,. \tag{6.16}$$

Nas Eqs.(6.15) e (6.16), λ representa o inverso da velocidade de deformação que marca a transição entre as regiões de viscosidade constante e de lei de potência e que não deve ser confundido com qualquer tempo de relaxação típico de fluidos viscoelásticos. O parâmetro a determina a taxa a que a viscosidade do modelo muda da região de lei de potência para a região de viscosidade constante na vizinhança de $\dot{\gamma} = 1/\lambda$. O valor mais comum é a= 2, caso em que se recuperam os modelos de Carreau e Carreau simplificado a partir das equações (6.15) e (6.16), respectivamente. Para valores mais elevados do parâmetro a a transição entre essas duas regiões será mais brusca.

Outros modelos freqüentemente utilizados são o modelo de Sisko

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0 + K\dot{\gamma}^{n-1}\,, \tag{6.17}$$

e o modelo de Cross

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \alpha\dot{\gamma}^n}\,, \tag{6.18}$$

entre outros. A Figura 6.9 compara o comportamento destes vários modelos no que diz respeito à viscosidade viscosimétrica. De notar que só os modelos com pelo menos 3 parâmetros são capazes de prever o primeiro patamar newtoniano de viscosidade.

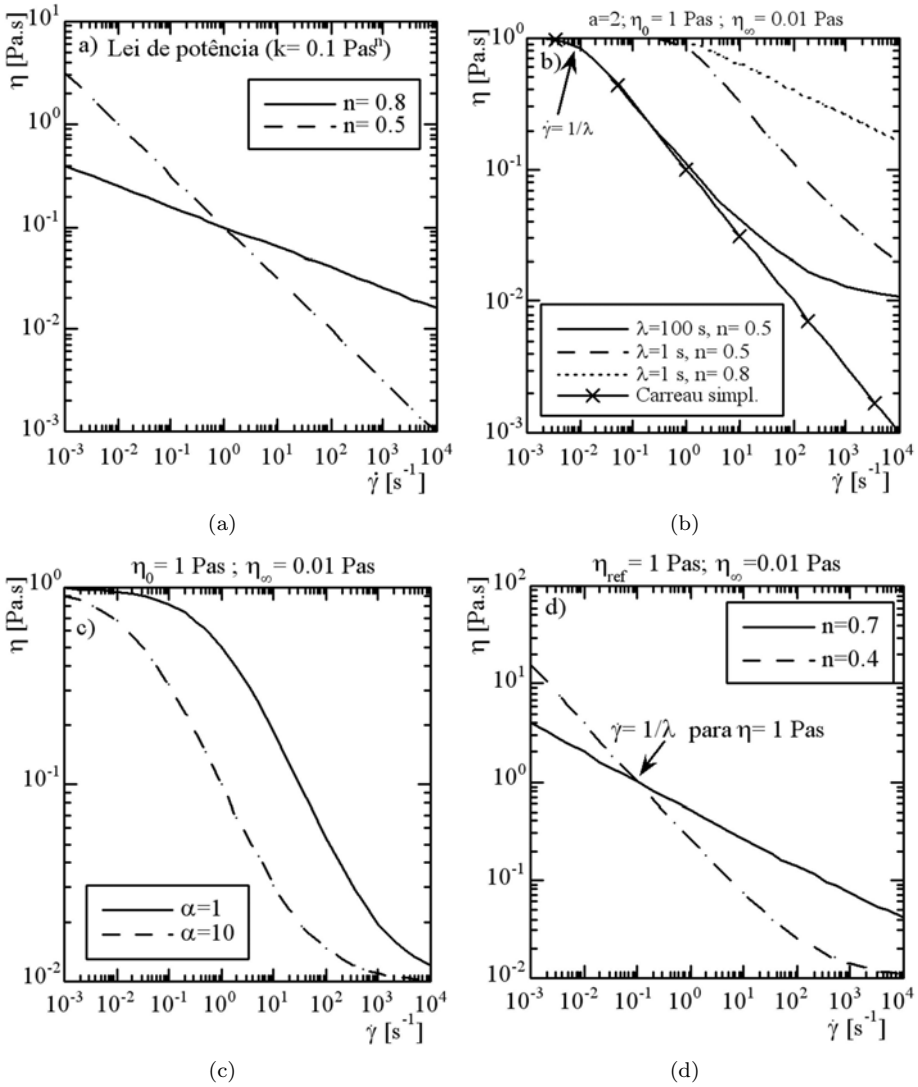


Figura 6.9: Variação da viscosidade de corte em função da velocidade de deformação para alguns modelos de viscosidade típicos: (a) Lei de potência; (b) Carreau-Yasuda e de Carreau simplificado; (c) Cross; (d) Sisko.

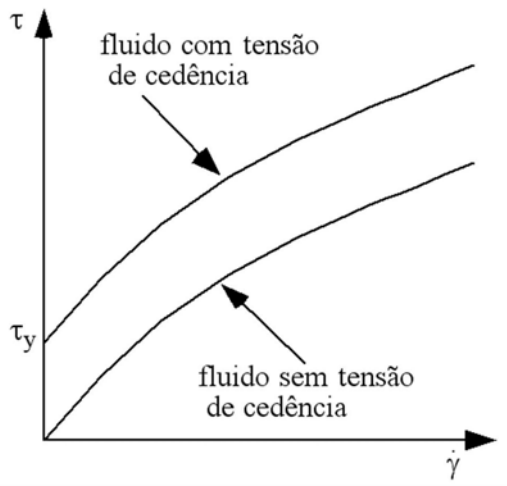


Figura 6.10: Distinção entre o comportamento de um fluido com e sem tensão de cedência.

6.3.3 Modelos para fluidos com tensão de cedência

Para fluidos com tensão de cedência (ver Figura 6.10), o modelo constitutivo reológico mais simples é o modelo do plástico de Bingham dado pelas equações

$$\tau_{ij} = \eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad \text{com} \quad \eta(\dot{\gamma}) = \mu + \frac{\tau_Y}{\dot{\gamma}} \quad \text{para} \quad \tau > \tau_Y \,, \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad \tau < \tau_Y \,, \tag{6.20}$$

onde τ também está relacionado com o segundo invariante do tensor das tensões que é definido como $\tau = \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr} \tau^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij}}$, porque o tensor τ_{ij} é desviatório.

Outros modelos para a função viscosidade típicos de fluidos com tensão de cedência são o modelo de Herschel-Bulkley, que combina a tensão de cedência e a lei de potência

$$\eta(\dot{\gamma}) = K \dot{\gamma}^{n-1} + \frac{\tau_Y}{\dot{\gamma}} \,, \tag{6.21}$$

ou o modelo de Casson, muito utilizado para o sangue e que só possui 2 parâmetros numéricos

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \qquad \text{com} \qquad \sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_Y} + \sqrt{\mu_\infty \dot{\gamma}} \,. \tag{6.22}$$

Também é possível generalizar todos estes modelos com uma única equação, a

Equação (6.23)

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_Y}{\dot{\gamma}} + \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)\left[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2\right]^{\frac{(n-1)}{2}} , \tag{6.23}$$

As equações (6.21) a (6.23) são equações alternativas à Equação (6.19) devendo em qualquer dos casos considerar-se ainda a Equação (6.20) para completar o modelo.

6.3.4 Modelos viscoelásticos explícitos

Os modelos das Subseções 6.3.2 e 6.3.3 são capazes de prever o comportamento puramente viscoso dos fluidos não newtonianos com o grau de precisão desejável, mas são incapazes de prever qualquer característica elástica.

No domínio dos modelos viscoelásticos explícitos na tensão, há equações capazes de prever algumas das características dos escoamentos de fluidos viscoelásticos. Um desses modelos só deve ser utilizado para o estudo de escoamentos do tipo viscosimétrico estacionários, mas neste caso permite obter resultados precisos (Bird *et al.*, 1987a). Trata-se do modelo constitutivo de Criminale-Eriksen-Filbey (CEF), que é escrito indiferentemente nas duas formas a seguir:

$$\tau_{ij} = 2\eta(\dot{\gamma})S_{ij} + [2\Psi_1(\dot{\gamma}) + 4\Psi_2(\dot{\gamma})]S_{ik}S_{kj} - \Psi_1(\dot{\gamma})\frac{\mathcal{D}S_{ij}}{\mathcal{D}t} , \tag{6.24}$$

$$\tau_{ij} = 2\eta(\dot{\gamma})S_{ij} - \Psi_1(\dot{\gamma})\,\overset{\nabla}{S}_{ij} + 4\Psi_2(\dot{\gamma})S_{ik}S_{kj} , \tag{6.25}$$

onde $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ representa a derivada de Jaumann[16] e $\overset{\nabla}{S}_{ij}$ indica a derivada convectiva superior, ambas definidas nas Equações a seguir:

$$\frac{\mathcal{D}S_{ij}}{\mathcal{D}t} \equiv \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + u_k\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} + (\Omega_{ik}S_{kj} - S_{ik}\Omega_{kj}) , \tag{6.26}$$

$$\overset{\nabla}{S}_{ij} \equiv \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + u_k\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} - S_{jk}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - S_{ik}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} . \tag{6.27}$$

O tensor velocidade de distorção ou vorticidade Ω_{ij} é definido por

$$\Omega_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) . \tag{6.28}$$

Outros modelos explícitos na tensão para fluidos viscoelásticos podem ser obtidos a partir das Eqs.(6.24) e (6.25) tornando todos os seus coeficientes constantes e independentes de $\dot{\gamma}$ (fluido de segunda ordem) e anulando Ψ_2 (equação de Reiner-Rivlin). Estes modelos, que fazem parte da família dos modelos em série de potência da velocidade de deformação e suas derivadas convectivas (c.f. Bird *et al.* (1987a) para uma descrição mais profunda), são de aplicação limitada a fluidos levemente elásticos, que pouco se desviam do fluido newtoniano e para escoamentos

[16] Esta e outras derivadas típicas da Mecânica dos Fluidos não newtoniana são definidos em vários livros de texto tais como Astarita & Marrucci (1974) e Aris (1962).

de baixo número de Débora. De fato, a sua aplicação deve limitar-se a escoamentos lentos, aqueles em que os tensores cinemáticos variam muito lentamente, já que a sua utilização fora destes limites resulta em respostas fisicamente incorretas. Por isso são sobretudo usados para investigar perturbações e tendências de comportamento devidas ao efeito da elasticidade e em relação ao comportamento de um fluido de Stokes. As principais características elásticas que estes modelos são capazes de prever são as primeira e segunda diferenças de tensão normal, e não são capazes de prever o efeito de memória dos fluidos viscoelásticos.

6.3.5 Modelos viscoelásticos implícitos na tensão

Os modelos viscoelásticos atualmente mais utilizados são do tipo diferencial implícito, e neste grupo a equação mais simples é a do modelo convectivo superior de Maxwell ou Maxwell contravariante[17] (sigla UCM do inglês "Upper Convected Maxwell"), que é dado pela equação

$$\tau_{ij} + \lambda \left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \right) = \eta_p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\tau_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \tau_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) , \quad (6.29)$$

onde λ representa o tempo de relaxação do fluido. O modelo UCM apresenta uma viscosidade viscosimétrica constante e igual a η_p, uma primeira diferença de tensões normais (N_1) não nula, mas de coeficiente constante (Ψ_1=$2\eta_p\lambda$), e uma segunda diferença de tensões normais (N_2) nula.

Embora o modelo de Maxwell contravariante seja simples do ponto de vista reológico, ele é o modelo numericamente mais problemático devido à sua tendência para tensões normais ilimitadas quando a taxa de deformação tende para $1/(2\lambda)$ o que invariavelmente origina a divergência dos métodos de cálculo. Isto acontece porque a viscosidade extensional do modelo de Maxwell contravariante é dada por

$$\eta_E = 3\eta_P \frac{1}{(1+\lambda\dot{\varepsilon})(1-2\lambda\dot{\varepsilon})} . \quad (6.30)$$

O modelo de Maxwell convectivo e outros modelos quasi-lineares e não-lineares, surgiram pela necessidade de obrigar as equações de estado constitutivas lineares a serem objetivas, i.e. a terem uma resposta em tensão independente do movimento dos eixos dos sistemas de coordenadas utilizados. Este desiderato é conseguido substituindo a simples derivada no tempo dos modelos lineares, que só são válidos no limite de gradientes de deformação infinitesimalmente pequenos, pelas derivadas de Oldroyd ou conectivas, Equação (6.27), introduzidas por Oldroyd em 1950. O exemplo mais conhecido desta substituição resulta exatamente no modelo de Maxwell contravariante a partir do modelo de Maxwell linear.

Apesar desta transformação, o modelo de Maxwell convectivo e outros modelos quasi-lineares e não-lineares, comportam-se como o modelo viscoelástico linear de

[17] Existe também um modelo de Maxwell covariante ou convectivo inferior que prevê características físicas irrelistas, nomeadamente $\Psi_2 = -\Psi_1$. Por essa razão esse modelo caiu em desuso e o termo modelo convectivo refere-se invariavelmente à versão contravariante ou convectiva superior.

Maxwell, no que diz respeito às propriedades no escoamento oscilatório de corte (módulos de conservação G' e de dissipação G'') que são dados por

$$G' = \frac{\eta_p \lambda \omega^2}{1 + (\lambda\omega)^2}\,, \tag{6.31}$$

$$G'' = \frac{\eta_p \omega}{1 + (\lambda\omega)^2}\,. \tag{6.32}$$

A Figura 6.11 ilustra o comportamento destas duas quantidades em função da freqüência de oscilação.

Embora do ponto de vista físico, o modelo de Maxwell contravariante seja relativamente limitado, dado que prevê alguns comportamentos que não são observados na maioria dos fluidos, nomeadamente η e Ψ_1 constantes, ele prevê bem o comportamento real de muitos fluidos em termos dos módulos de conservação e dissipação, sobretudo quando na versão multímodo[18] uma vez que este é um escoamento linear de pequena deformação. Além disso, este modelo tem a virtude de não ser puramente empírico e poder ser deduzido a partir da teoria cinético molecular mediante a formulação de algumas hipóteses simplificativas[19], o que nem sempre é o caso com equações constitutivas mais complexas. Dadas as suas propriedades, o modelo de Maxwell contravariante está sobretudo limitado a ser usado em combinação com outros modelos, como o modelo newtoniano.

O modelo viscoelástico imediatamente mais complexo é o modelo de Oldroyd-B definido pelas Eqs.(6.33) e (6.34), e que se caracteriza por representar a soma de um solvente newtoniano de viscosidade η_s com uma molécula polimérica, obedecendo ao modelo de Maxwell contravariante

$$\tau_{ij} = \eta_s \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij_p}\,, \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij_p} + \lambda \left(\frac{\partial \tau_{ij_p}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij_p}}{\partial x_k} \right) &= \eta_p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &\quad + \lambda \left(\tau_{jk_p} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \tau_{ik_p} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)\,. \end{aligned} \tag{6.34}$$

O modelo de Oldroyd-B, à semelhança do modelo de Maxwell convectivo prevê N_2=0 e uma viscosidade de corte constante $\eta = \eta_s + \eta_p$, mas também sofre da singularidade na viscosidade extensional já exibida na Equação (6.30), como se pode ver também pela Equação (6.36). O coeficiente Ψ_1 também é constante e idêntico ao do modelo de Maxwell convectivo ($\Psi_1 = 2\eta_p\lambda$).

Quanto às respostas deste modelo nos ensaios oscilatórios de corte e no escoamento extensional, elas só diferem das correspondentes respostas no modelo de Maxwell convectivo, devido à presença do solvente newtoniano. Assim, G' não

[18] Os modelos multímodo são explicados na subseção 6.3.6.
[19] Ver a propósito Bird *et al.* (1987b).

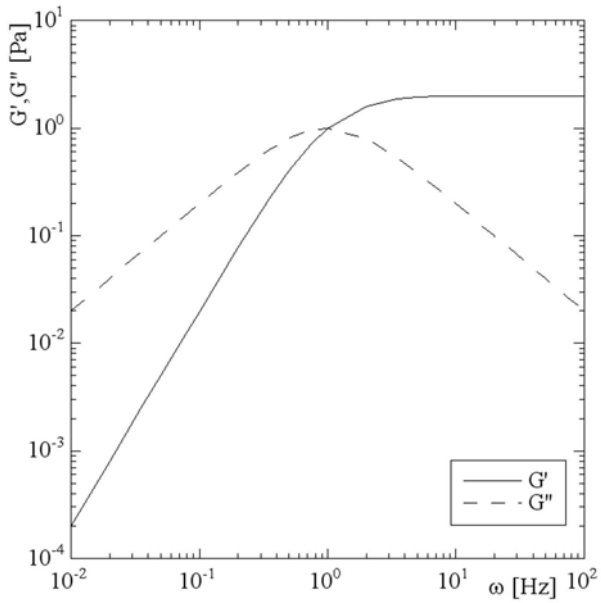


Figura 6.11: Comportamento dos módulos de conservação G' e de dissipação G'' do modelo de Maxwell convectivo $\eta_p = 2$ Pa.s, λ=1s

vem alterado, mas G'' e η_E são dados pelas Eqs.(6.35) e (6.36),

$$G'' = \eta_s\,\omega + \frac{\eta_p\,\omega}{1+(\lambda\omega)^2}\,, \tag{6.35}$$

$$\eta_E = 3\eta_s + \frac{3\eta_p}{(1+\lambda\dot{\varepsilon})(1-2\lambda\dot{\varepsilon})}\,. \tag{6.36}$$

A Figura 6.12 mostra o comportamento da viscosidade extensional dos fluidos de Maxwell contravariante e Oldroyd-B.

Do ponto de vista prático, o modelo de Oldroyd-B é adequado a prever o comportamento de alguns fluidos nalgumas situações, nomeadamente dos chamados fluidos de Boger que apresentam uma viscosidade constante, Ψ_1 aproximadamente constante e ainda Ψ_2 nulo. Os fluidos de Boger são, regra geral, soluções poliméricas diluídas em solventes newtonianos de elevada viscosidade, mas também é possível fabricá-los com solventes de viscosidade moderada desde que estes sejam solventes pobres (Stokes *et al.*, 2001).

Este é assim um modelo importante no contexto dos escoamentos turbulentos de fluidos viscoelásticos capazes de se escoarem no regime turbulento. Contudo, os problemas numéricos que potencia, com origem reológica, levam-no a ser preterido por modelos constitutivos mais realistas, assentes na teoria cinético molecular dos polímeros.

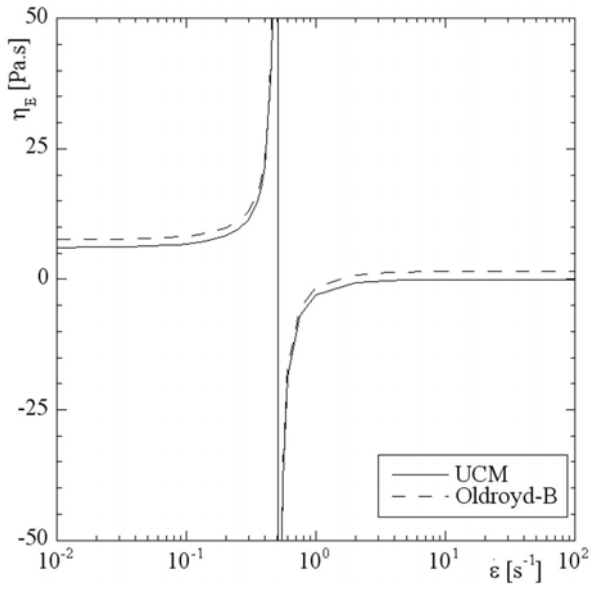


Figura 6.12: Viscosidade extensional dos modelos de Maxwell convectivo (UCM) e de Oldroyd -B: η_p=2 Pa.s, η_s=0.5 Pa.s, $\lambda = 1$ s.

A previsão de uma viscosidade variável e de uma variação não-linear das tensões normais obriga-nos a recorrer a modelos mais complexos, como por exemplo, os modelos de Phan-Thien-Tanner (PTT), de Giesekus e de White-Metzner, entre outros, podendo o leitor interessado numa perspectiva mais geral das suas propriedades e comportamentos consultar as obras de Larson (1988), Bird *et al.* (1987a,b) e mais recentemente Larson (1999), Tanner (2000) e Huilgol e Phan-Thien (1997).

O modelo de Phan-Thien-Tanner é dado pela Eq.(6.37)

$$\begin{aligned} f(\tau_{kk})\tau_{ij} + \lambda \Bigg[\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \tau_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\ + \xi \left(\tau_{jk} D_{ik} + \tau_{ik} D_{jk} \right) \Bigg] = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) , \end{aligned} \tag{6.37}$$

e possui dois parâmetros novos (ε e ξ). A função f() é uma função exponencial do traço do tensor das tensões,

$$f(\tau_{kk}) = \exp\left(\frac{\varepsilon \lambda}{\eta} \tau_{kk} \right) \tag{6.38}$$

que por vezes pode ser linearizada a partir da respectiva expansão em série de Taylor,

$$f(\tau_{kk}) = 1 + \frac{\varepsilon \lambda}{\eta} \tau_{kk} \, . \tag{6.39}$$

Neste modelo, ε é um parâmetro que limita a viscosidade extensional, a qual é proporcional ao inverso de ε . Quanto ao parâmetro ξ , ele contabiliza o deslizamento da rede molecular em relação ao meio contínuo. O modelo PTT é mais comumente utilizado para prever propriedades de polímeros fundidos ou de soluções concentradas de polímero dada a sua origem (Phan-Thien e Tanner, 1977; Phan-Thien, 1978) na teoria das redes. No entanto, a sua utilização para representar fluidos não newtonianos que se escoam em regime turbulento é perfeitamente possível, desde que as respectivas reologias sejam compatíveis. Por exemplo, neste contexto outros modelos têm sido utilizados como é o caso do modelo de Giesekus quer para representar soluções aquosas de polímero (Housiadas e Beris, 2004) quer para soluções de agentes tensoativos (Yu e Kawaguchi, 2003).

Quer o modelo PTT, quer o modelo de Giesekus da Equação (6.40),

$$\begin{aligned}\tau_{ij} + \lambda\left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \tau_{jk}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \tau_{ik}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) + \frac{\alpha\lambda}{\eta}\tau_{ik}\tau_{kj} \\ = \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\end{aligned} \tag{6.40}$$

caracterizam-se por preverem tensões normais transversais (τ_{22}) num escoamento cisalhante de que resulta uma segunda diferença de tensões normais ($N_2 = \tau_{22} - \tau_{33}$) não-nula. A versão simplificada do PTT (SPTT), que é muito usada, obtêm-se das Eqs.(6.38) e (6.39) fazendo $\xi = 0$.

O modelo SPTT apresenta $\tau_{22} = 0$ e $N_2 = 0$ e a Figura 6.13 representa o comportamento do fluido PTT, no que diz respeito às tensões de corte (τ_{xy}) e normal (τ_{xx}), no escoamento de Couette em regime permanente. Quanto à viscosidade extensional do modelo SPTT, a Figura 6.15 mostra o efeito do tempo de relaxação e do parâmetro extensional ε para o caso do modelo linear simplificado. Para valores de $\varepsilon \leq 0.5$, a viscosidade extensional varia de $3(\eta_s + \eta_p)$, a baixas velocidades de deformação normal, para um patamar máximo que se mantém constante por muito elevado que seja a velocidade de deformação. Quando $\varepsilon > 0.5$ há uma alteração fundamental na variação de η_E que passa a admitir um valor máximo para depois diminuir à medida que baixa a velocidade de deformação. Embora não esteja representada a variação de η_E para o modelo exponencial, neste caso há um máximo muito mais pronunciado que no modelo linear para elevados valores de ε. De fato, enquanto que no modelo linear há uma diminuição de η_E que tende para um valor constante muito superior a $3\eta_s$, no modelo exponencial a reofluidificação de η_E é muito pronunciada, com $\eta_E \to 3\eta_s$ à medida que $\dot{\varepsilon} \to \infty$.

Ainda relativamente ao modelo PTT com $\xi \neq 0$ há no entanto uma característica que o torna menos atrativo: o modelo apresenta um comportamento não-monotónico da tensão de corte (ver Figura 6.13(a)), sempre que o cociente $\eta_s/(\eta_s + \eta_p) \leq 1/9$, o que está na origem de instabilidades de origem constitutiva (Alves *et al.*, 2001; Georgiou e Vlassopoulos, 1998).

Haveria ainda a considerar outros modelos diferenciais como, por exemplo, os modelos de Gordon-Schowalter, Johnson-Segalman, Bird-DeAguiar, Acierno *et al.*, ou os modelos de Oldroyd de 4, 6 e 8 constantes, mas essa descrição teria aqui

pouco interesse. O leitor interessado é convidado a consultar as obras já referidas anteriormente.

Com bastante mais interesse para o desenvolvimento de modelos de turbulência de soluções viscoelásticas diluídas é a classe de modelos com base na teoria cinético-molecular para moléculas isoladas[20] (Bird *et al.*, 1987b), como os modelos FENE-P[21] ou o recente modelo pom-pom. Estes apresentam uma ou mais equações diferenciais na conformação e extensão molecular, que são depois relacionadas algebricamente com a tensão do fluido. No caso do modelo FENE-P, (Bird *et al.*, 1987b) a tensão é descrita pelo seguinte conjunto de equações, onde C_{ij} é o tensor conformação molecular

$$\tau_{ij} = \frac{\eta_p}{\lambda}\left[f(C_{kk})C_{ij} - f(L)\delta_{ij}\right] + 2\eta_s S_{ij}\,, \tag{6.41}$$

com

$$f(C_{kk})C_{ij} + \lambda\left(\frac{\partial C_{ij}}{\partial t} + u_k\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_k} - C_{jk}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - C_{ik}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) = \delta_{ij}\,, \tag{6.42}$$

$$f(C_{kk}) = \frac{L^2}{L^2 - C_{kk}} \qquad \text{e} \qquad f(L) = \frac{L^2}{L^2 - 3}\,. \tag{6.43}$$

Nestas equações, L é um parâmetro relacionado com a extensibilidade máxima da molécula. No modelo FENE-P só a orientação molecular é dada por uma equação diferencial sendo a extensão da molécula definida por um parâmetro constante. Este modelo também exibe um comportamento viscoso reofluidificante em regime permanente, $\Psi_2 = 0$ e uma viscosidade extensional limitada.

A viscosidade de cisalhamento deste modelo é dada pela Equação (6.44)

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_p C_{22} + \eta_s\,, \tag{6.44}$$

sendo a componente C_{22} do tensor conformação dada pela expressão

$$C_{22} = \frac{432^{1/6}\left(\delta^{2/3} - 2^{2/3}\right)}{6\sqrt{b}\,\delta^{1/3}}\,, \tag{6.45}$$

com

$$b = \frac{2\left(\lambda\dot{\gamma}\right)^2\left(L^2-3\right)^2}{L^6}\,, \qquad \alpha = 27b + 4\,, \qquad \beta = \sqrt{27b}\,, \qquad \delta = \sqrt{\alpha} + \beta\,.$$

[20] Aqui as moléculas são modeladas como um "dumbbell", uma representação simplificada onde a sua massa está concentrada em duas esferas unidas por uma mola entrópica. A molécula pode mover-se no solvente em todas as direcções sob a acção de forças de fricção sob as esferas (força de Stokes), uma força entrópica na mola (linear ou mais frequentemente não-linear) e forças brownianas. A partir da função de distribuição da orientação das "moléculas" determinam-se as suas propriedades macroscópicas.

[21] FENE vem do inglês "Finitely Extensible Non-linear Elastic" e P refere-se à simplificação introduzida por Peterlin (1966) (ver também Bird *et al.*, 1980) no cálculo do coeficiente não-linear da mola.

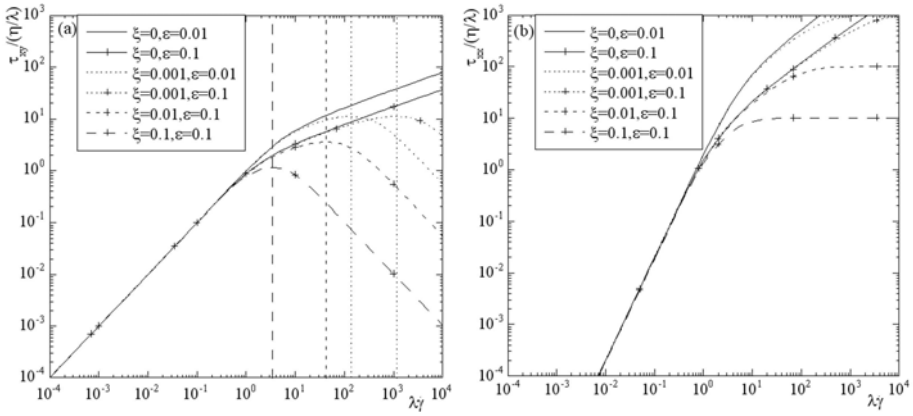


Figura 6.13: Variação da tensão de corte (esquerda) e tensão normal longitudinal (direita) com a velocidade de deformação num escoamento de Couette, para um fluido PTT com função de tensão linear. Linhas verticais representam taxa de deformação crítica (de Alves *et al.*, 2001).

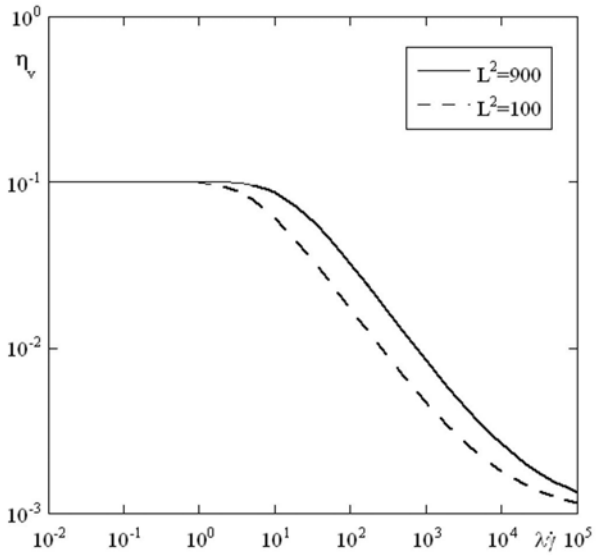


Figura 6.14: Variação da viscosidade de corte com a taxa de deformação normalizada e o parâmetro de extensibilidade L^2 para um fluido FENE-P com η_p= 0.1 Pa.s e η_s= 0.001 Pa.s.

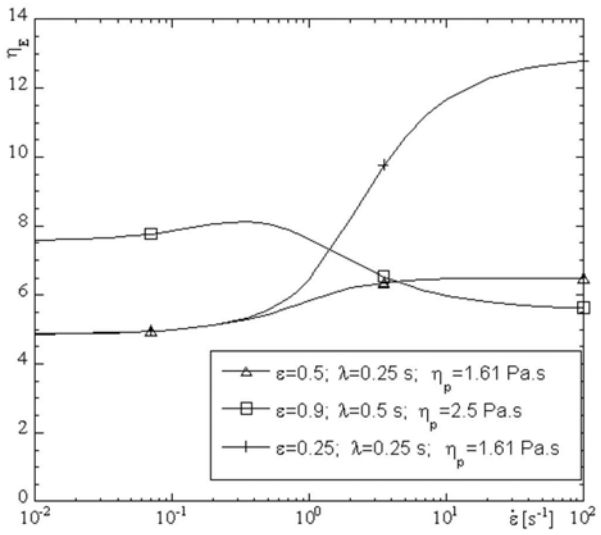


Figura 6.15: Variação da viscosidade extensional uniaxial do modelo PTT linear simplificado com $\eta_s = 0.01$ Pa.s. Efeito dos parâmetros ε e λ.

A Figura 6.14 apresenta o comportamento reofluidificante do fluido FENE-P que está representado pela Equação (6.44). A figura mostra que a redução da extensibilidade máxima da molécula coloca a transição entre o primeiro patamar newtoniano e a zona reofluidificada em valores menores da taxa de deformação normalizada.

Quanto à variação da viscosidade extensional, esta apresenta uma forma semelhante à variação da viscosidade extensional no modelo PTT linearizado, representada na Figura 6.15, como se pode ver comparando esta figura com as figuras do capítulo 8 de Bird *et al.* (2002)[22].

6.3.6 Modelos multímodo

Algumas das incapacidades preditivas dos modelos viscoelásticos descritos em 6.3.5 podem resolver-se pela adoção de uma variante multímodo de um determinado modelo constitutivo, desde que este seja capaz de prever qualitativamente a variação desejada da propriedade. Por exemplo, um modelo multímodo baseado na equação do modelo PTT será capaz de prever corretamente o comportamento

[22] O exemplo 8.6-1, nas páginas 255 e seguintes, apresenta as funções materiais mais relevantes do modelo FENE-P. De notar que Bird *et al.* apresenta o modelo FENE-P numa formulação diferente. A formulação aqui utilizada tem vantagens no âmbito da modelação da turbulência, como será discutido mais adiante neste texto, sendo que uma das principais razões para esta escolha tenha sido a disponibilidade na literaura de resultados de simulação numérica directa (DNS), em que o modelo FENE-P foi também formulado da mesma maneira.

reofluidificante de um fluido real porque o seu modelo de um único modo já é reofluidificante, havendo somente que determinar todos os coeficientes da série. Contudo, um modelo multímodo baseado na equação de Maxwell contravariante não é capaz de prever uma viscosidade variável, pois todos os seus modos prevêem uma contribuição constante para a viscosidade de corte.

Um modelo multímodo é um somatório de modos τ_{ij_k} de acordo com a equação

$$\tau_{ij} = \sum_k \tau_{ijk} \,, \tag{6.46}$$

onde a tensão de cada modo τ_{ijk} obedece a uma determinada equação constitutiva, por exemplo Maxwell convectivo, Oldroyd-B, PTT ou outro. Um modelo multímodo é assim um somatório de várias equações do mesmo tipo, onde a diferença entre os modos resulta dos diferentes valores numéricos para os diversos parâmetros, por exemplo λ, η, ε ou ξ a menos de algumas restrições. Por exemplo, o parâmetro ξ está relacionado com o deslizamento do conjunto das moléculas relativamente ao meio contínuo e por isso deve tomar sempre o mesmo valor numérico num modelo multímodo PTT.

6.4 Escoamento turbulento em dutos

6.4.1 Introdução

Em 1959, Dodge e Metzner realizaram um primeiro estudo teórico e experimental bastante completo relativo ao comportamento do escoamento turbulento de fluidos não newtonianos em dutos de seção circular. O principal objetivo foi a dedução das leis de comportamento do escoamento médio para fluidos de viscosidade variável, mas que não possuíssem qualquer elasticidade, i.e., fluidos puramente viscosos. Deduziram expressões para o coeficiente de fricção e velocidade média local em função do número de Reynolds e dos parâmetros da lei de potência da viscosidade. As correlações foram então validadas por resultados experimentais obtidos com alguns fluidos, mas observaram-se discrepâncias com outros fluidos que foram justificadas com base na sua viscoelasticidade.

Para os fluidos puramente viscosos, incluindo-se aqui os fluidos newtonianos como um caso limite, o regime turbulento caracteriza-se pelo forte domínio das forças inerciais, limitando-se as forças viscosas a uma ação local junto às paredes e à dissipação de energia cinética de turbulência ao nível das microescalas de turbulência, de acordo com a teoria do equilíbrio universal de Kolmogorov. O fato da viscosidade viscosimétrica de alguns fluidos variar não afeta grandemente o escoamento médio, exceto na região onde as tensões viscosas predominam. O seu efeito no resto do duto é pequeno já que os perfis de velocidade longe da parede são determinados pelas entidades que transportam as tensões de Reynolds, estruturas coerentes de grandes dimensões, e não pelas microescalas de Kolmogorov delimitadas pela viscosidade.

Quanto aos fluidos viscoelásticos, estes apresentavam varias características anômalas que se traduziam em uma forte diminuição do coeficiente de atrito,

comumente designada por redução de arrasto. Profundas alterações nos perfis de velocidade média e das tensões de Reynolds e energia cinética de turbulência, também se faziam presentes. Neste capítulo apresentam-se as principais características do escoamento turbulento de fluidos não newtonianos em dutos de seção circular, devidamente validadas experimentalmente.

Neste capítulo apresentam-se as principais características do escoamento turbulento de fluidos não newtonianos em dutos de seção circular, devidamente validadas experimentalmente.

6.4.2 Fluidos viscosos

Desprezando quaisquer efeitos da elasticidade, Dodge e Metzner deduziram em 1959 expressões para os perfis de velocidade nas várias regiões do escoamento e a relação entre coeficiente de fricção e vazão. A dedução destas relações segue um raciocínio idêntico ao utilizado para fluidos newtonianos, i.e. consideram-se desprezáveis os efeitos da turbulência na subcamada viscosa, enquanto que na camada tampão[23] os efeitos da inércia são da mesma ordem de grandeza dos efeitos dos termos viscosos. Nas zonas inercial e na camada exterior do escoamento, regiões onde são válidas a lei logarítmica, consideram-se desprezáveis os efeitos da difusão viscosa no fluido. Estas hipóteses são clássicas e em tudo idênticas às que se formulam no âmbito dos fluidos newtonianos (por exemplo, c.f. White, 1991).

Admitindo que se ajusta uma lei de potência à viscosidade viscosimétrica, resulta desta análise que na fina região de parede a tensão de corte é praticamente constante e igual à tensão na parede τ_w, de que resulta o seguinte perfil de velocidade, semelhante à equação para fluidos newtonianos, desde que se definam os termos adimensionais u^+ e y^+ como na Equação (6.48),

$$u = \left(\frac{y^n}{K}\right)^{\frac{1}{n}} \tau_w^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{y^n}{K}\right)^{\frac{1}{n}} (u_\tau)^{\frac{2}{n}} \rho^{\frac{1}{n}} , \tag{6.47}$$

$$u^+ = \frac{u}{u^*} = \frac{\rho y^n {u_\tau}^{\frac{2}{n}}}{K} = (y^+)^{\frac{1}{n}} . \tag{6.48}$$

No exterior da camada inercial, a lei de defeito de velocidade é dada pela Equação (6.49), onde u_m é a velocidade no eixo, enquanto que na zona inercial, também chamada de zona de lei logarítmica, o perfil de velocidade é dado pela relação (6.50),

$$\frac{u_m - u}{u_\tau} = -5.66 n^{0.25} \log \xi , \tag{6.49}$$

$$u^+ = \frac{5.66}{n^{0.75}} \log y^+ - \frac{0.566}{n^{1.2}} + \frac{3.475}{n^{0.75}} \left[1.960 + 0.815n - 1.628n \log(3 + \frac{1}{n})\right] . \tag{6.50}$$

[23] Do inglês "buffer layer".

Para o caso especial de $n = 1$ esta equação reduz-se a

$$u^+ = 2.466 \ln y^+ + 5.7\,, \tag{6.51}$$

que é suficientemente próxima da equação utilizada para fluidos newtonianos, cujos coeficientes são 2.5 e 5.5, respectivamente. Esta pequena diferença tem a ver com a validação experimental dos coeficientes e com a maior precisão e quantidade de resultados experimentais para fluidos newtonianos. A validação experimental destas equações para fluidos não newtonianos fez-se com suspensões de argila e soluções de Carbopol a concentrações onde os efeitos viscoelásticos foram considerados desprezáveis. As medidas foram realizadas com tubos de Pitot, um método não aconselhável para fluidos com características elásticas, e os resultados comparados com os de fluidos newtonianos e com as expressões derivadas. Para a gama $0.45 < n < 1.0$ os perfis de velocidade média foram idênticos aos de fluidos newtonianos quando expressos em coordenadas físicas mas diferentes em coordenadas de parede.

Para fluidos obedecendo uma lei genérica de viscosidade o raciocínio é em tudo idêntico exceto que as forças viscosas são consideradas proporcionais à viscosidade de parede, i.e., a viscosidade do fluido à velocidade de deformação na parede, designada por η_w. Esta pode ser facilmente determinada a partir do reograma e do balanço entre o gradiente de pressões e a tensão de corte na parede. Daqui resulta que na subcamada viscosa é válida a expressão

$$u^+ = y^+\,, \tag{6.52}$$

com

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \qquad \text{e} \qquad y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\eta_w}\,. \tag{6.53}$$

Já relativamente ao perfil de velocidades nas restantes zonas do escoamento teremos um comportamento bastante próximo do da lei newtoniana exceto que o comportamento reofluidificante resulta numa ligeira redução de arrasto com implicações na lei logaritmica de velocidade. A Equação (6.54) apresenta a lei logaritmica em função de n, o expoente da lei de potência, mas onde y^+ se define como na Equação (6.53) (c.f. Pereira e Pinho, 2002),

$$\begin{aligned} u^+ = {} & 2.457\, n^{0.25} \ln y^+ - \frac{0.566}{n^{1.2}} \\ & + \frac{2.475}{n^{0.75}} \left[1.96 + 0.816\, n - 1.628 \log_{10} \left(3 + \frac{1}{n} \right) \right]\,. \end{aligned} \tag{6.54}$$

Relativamente à perda de carga o coeficiente de fricção de Darcy para fluidos inelásticos obedecendo à lei de potência da viscosidade é dado pela expressão (6.55), validada com dados dos mesmos fluidos mencionados anteriormente. Nesta equação $n' = n$ e o número de Reynolds generalizado é calculado pela Equação (6.56),

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = \frac{2.0}{(n')^{0.75}} \log[\mathrm{Re}_{gen}(f)^{1-n'/2}] - \frac{1.204}{n'^{0.75}} + 0.602\, n'^{0.25} \frac{0.20}{(n')^{1.2}}\,, \tag{6.55}$$

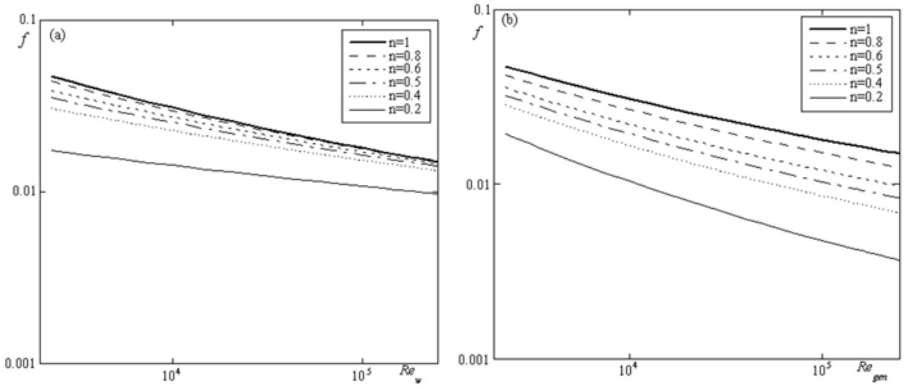


Figura 6.16: Variação do coeficiente de fricção de Darcy em condutas de seção circular: (esquerda) em função do número de Reynolds de parede; (direita) em função do número de Reynolds generalizado.

$$\mathrm{Re}_{gen} = \frac{\rho D^{n'} V^{2-n'}}{K' 8^{n'-1}} \,, \tag{6.56}$$

onde $K' = K(\frac{3n'+1}{4n'})^{n'}$ com K e n o índice de consistência e o expoente da lei de potência. Para fluidos que não sigam a lei de potência de Ostwald De Waele, a Equação (6.55) permanece válida, como indicado por Dodge e Metzner (1959), com K' e n' obtidos numa curva de τ_w versus $\frac{8V}{D}$ da seguinte forma: $\tau_w = \frac{D\Delta p}{4L} = K'(\frac{8V}{D})^{n'}$. Esta relação pode ser obtida por medição das características viscosas do fluido num viscosímetro capilar.

A Equação (6.55) não é explicita e em alternativa pode usar-se uma expressão do tipo equação de Blasius, como aliás se faz também para fluidos newtonianos. Para números de Reynolds entre 5,000 e 10^5 essa equação é dada por

$$f = \frac{\alpha}{(\mathrm{Re}_{gen})^{\beta}} \,. \tag{6.57}$$

Também aqui podemos rescrever por conveniência a Equação (6.55) utilizando a viscosidade na parede, resultando a Equação (6.58)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.8685\, n^{0.25} \ln\left(\frac{2n}{3n+1}\mathrm{Re}_w\sqrt{f}\right) + \frac{2.4082}{n^{0.75}}(1-n) - \frac{0.2}{n^{1.2}} \,. \tag{6.58}$$

A vantagem desta formulação é que se vê melhor o efeito da reofluidificação em provocar somente uma pequena redução de arrasto, como se ilustra na Figura 6.16 onde se compara resultado das duas formulações do coeficiente de fricção. É óbvio que Re_w depende de Re_{gen} e de n, e além disso um determinado valor de Re_{gen} corresponde a um valor numérico muito mais elevado de Re_w.

Tabela 6.1: Coeficientes α e β da equação (6.57).

n'	α	β	n'	α	β	n'	α	β
0.2	0.2592	0.35	0.8	0.3052	0.263	1.4	-	0.232
0.4	0.2840	0.307	1.0	0.3072	0.25	1.6	-	0.225
0.6	0.2960	0.28	1.2	-	0.24	2.0	0.3308	0.215

6.4.3 Fluidos viscoelásticos

Para as soluções não-newtonianas viscoelásticas observa-se uma forte redução da perda de carga, que se designa por redução do arrasto. A elasticidade dos fluidos manifesta-se de diferentes formas, mas não discutiremos neste capítulo as teorias relacionadas com o fenômeno. Convém no entanto recordar que a redução do arrasto não está associada à elasticidade em geral, mas a determinadas propriedades específicas. De fato, com a descoberta que determinados fluido elásticos, como o Carbopol, não mostravam redução do arrasto, ficou clara esta particularidade.

A evidência experimental recolhida nos anos 70 em experiências em dutos e canais e em escoamentos com forte cariz elongacional com fluidos não newtonianos muito diluídos, levaram à formulação de várias teorias para a redução do arrasto, da qual se salientam as apresentadas por Lumley (1977) e Hinch (1977). Entretanto, essas teorias foram sendo melhoradas e o desenvolvimento dos meios de cálculo automático, nomeadamente os meios relacionados com as técnicas de simulação numérica direta (DNS) têm permitido avanços significativos na esteira dessas primeiras teorias.

O campo de deformações imposto pela turbulência não apresenta uma elevada correlação entre os termos de deformação rotacional e normal, pelo que as moléculas podem estar orientadas durante muito tempo a esforços de tração. As moléculas, especialmente as de estrutura mais simples, podem ser muito deformadas e apresentam uma elevada resistência à deformação elongacional, quando sujeitas a elevadas taxas de deformação normal o que se traduz por elevadas viscosidade elongacionais.

Ora, os esforços normais a que ficam sujeitas as moléculas deformam-nas e à medida que estas aumentam de comprimento a sua resistência à deformação, i.e., a sua viscosidade elongacional, aumenta. O aumento da viscosidade elongacional pode ser muito intenso, podendo assim exceder entre cem a mil vezes o valor de equilíbrio, conduzindo ao aumento das forças resistentes e interferindo drasticamente na estrutura de produção/dissipação de turbulência.

Este é o mecanismo a que nos referimos quando mencionamos a elasticidade como causadora da redução do arrasto. Não está ainda provado cabalmente que este seja o mecanismo, mas as provas indiretas que relacionam a redução do arrasto com a viscosidade extensional vão-se acumulando.

As inúmeras investigações do passado vieram mostrar, que rapidamente se atingiam valores máximos de redução do arrasto que só dependiam do número de

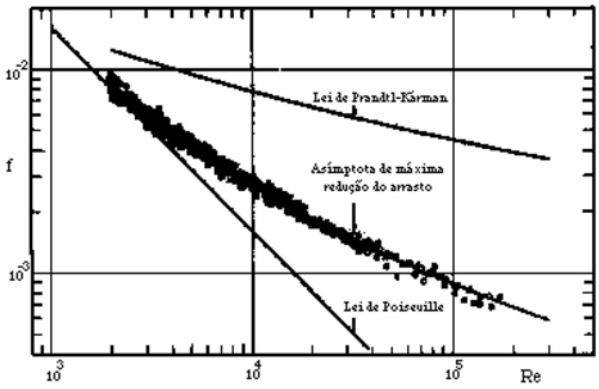


Figura 6.17: Gráfico do fator de fricção de Fanning para a assimptota de máxima redução do arrasto. Os dados experimentais são de diversas fontes (Toms, Castro, Giles, Hoyt, Little, Pruitt, Preston, Baher e Virk).

Reynolds, Figura 6.17. A partir de dados experimentais das mais variadas proveniências, Virk *et al.* (1967, 1970) derivaram envolventes empíricas da redução do arrasto máxima para a pressão e velocidade e formularam o modelo das três zonas de velocidade. Este modelo, de base empírica, tenta dar alguma luz sobre o fenômeno, apresentando a redução do arrasto em função dos perfis de velocidade em coordenadas de parede. O modelo das três zonas de velocidade compreende uma subcamada viscosa (inalterável relativamente à camada observada com fluidos newtonianos), uma camada intermédia chamada elástica, onde ocorrem os mecanismos mais importantes que dão origem à redução do arrasto e um núcleo turbulento semelhante ao observado em fluidos newtonianos, mas desviado paralelamente à curva newtoniana, i.e., iniciando-se para valores de y^+ superiores aos observados com fluidos newtonianos mas com o mesmo declive. Esta característica da camada logarítmica turbulenta indica que nessa região a interação entre escoamento médio e turbulento (produção de turbulência) permanece inalterável. Para condições de redução de arrasto muito elevado e máximo a camada elástica extende-se até ao eixo da conduta, substituindo completamente o núcleo turbulento, e esta zona já se caracteriza por um declive diferente para a lei logarítmica, i.e., a relação entre escoamento médio e turbulento já não é semelhante à que ocorre para fluidos newtonianos, Figura 6.18.

A Figura 6.17 representa as três leis de coeficiente de fricção em função do número de Reynolds, a saber: a lei de Prandtl-Kármán para fluidos newtonianos, a lei de Poiseuille do escoamento laminar, prolongada para números de Reynolds superiores aos de transição e a assimptota de redução de arrasto máxima dada pelas equações (6.59) e (6.60), também conhecida por assimptota de Virk

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 9.5 \log \left(\mathrm{Re}_w \sqrt{f} \right) - 19.06 \,, \tag{6.59}$$

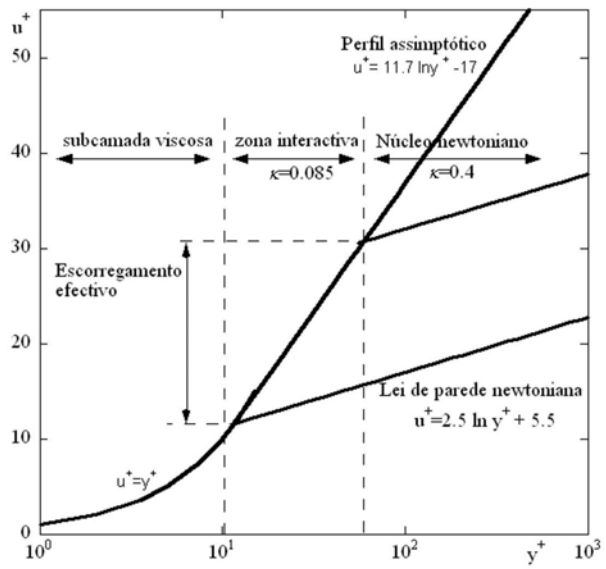


Figura 6.18: Modelo das três zonas para o escoamento médio durante a redução do arrasto proposto por Virk *et al.* (1970).

$$\frac{1}{\sqrt{f_F}} = 19.0 \log\left(\mathrm{Re}_w \sqrt{f_F}\right) - 32.4\,, \tag{6.60}$$

em que f e f_F são os coeficientes de Darcy e Fanning, respectivamente. De notar que nestas duas equações se usa o número de Reynolds baseado na viscosidade à velocidade de deformação na parede. Uma relação alternativa que é explícita, é como a equação de Blasius para o coeficiente de fricção de Darcy, é a equação

$$f = 0.8\,\mathrm{Re}_w^{-0.48}\,. \tag{6.61}$$

Nesta situação de redução de arrasto máxima, a correspondente lei de velocidade em coordenadas de parede, também conhecida por assimptota de Virk, é dada por

$$u^+ = 11.7\,\ln y^+ - 17.0\,. \tag{6.62}$$

A Figura 6.18 apresenta claramente o modelo das três zonas proposto por Virk *et al.*. A alteração da relação entre escoamento médio e turbulento é equivalente na camada elástica à utilização de um modelo de turbulência de comprimento de mistura de Prandtl, com uma constante de comprimento de mistura de 0.085, i.e., quase uma ordem de grandeza inferior à constante de Von Kárman para fluidos newtonianos de 0.4, o que ilustra bem a diminuição no transporte radial de quantidade de movimento que lhe está associado.

As Figuras 6.19 e 6.20 mostram a variação do coeficiente de fricção com o número de Reynolds para soluções aquosas de CMC (celulose de carboxi-metílico)

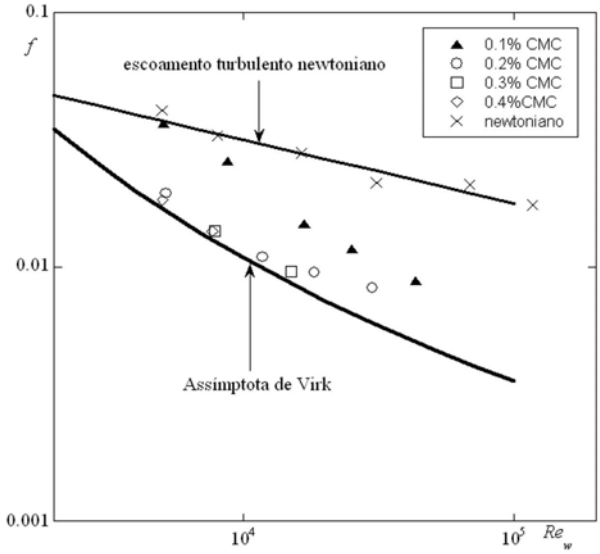


Figura 6.19: Variação do fator de fricção em condutas em função do número de Reynolds. De Pinho e Whitelaw (1990).

obtido por um dos autores e os respectivos perfis de velocidade média em coordenadas de parede. Estas curvas ilustram a teoria apresentada acima.

Relativamente às características turbulentas do escoamento, a Figura 6.21 mostra as correspondentes componentes da velocidade turbulenta em coordenadas de parede para um número de Reynolds da ordem de 17000. Os dados dizem respeito a escoamento em um duto de seção circular. O comportamento é diferente consoante a componente de velocidade. Para a componente axial observa-se um aumento do valor máximo de u'/u_τ com o aumento da redução de arrasto, que está associado a valores de rms pouco diferentes dos newtonianos mas a uma redução da velocidade de fricção, enquanto que para a componente tangencial e em particular para a componente radial, o aumento da redução de arrasto conduz a uma redução de w'/u_τ e v'/u_τ . Isto é compatível com uma redução na tensão de Reynolds de corte, o que caracteriza claramente os escoamentos com redução de arrasto. Esta componente de corte não foi medida, mas existem dados experimentais obtidos num escoamento entre placas paralelas que evidenciam bem este déficit na tensão de Reynolds (Luchik e Tiederman (1988) entre outros). Note-se que para valores muito elevados da redução do arrasto,verifica-se que até a componente axial u'/u_τ diminui.

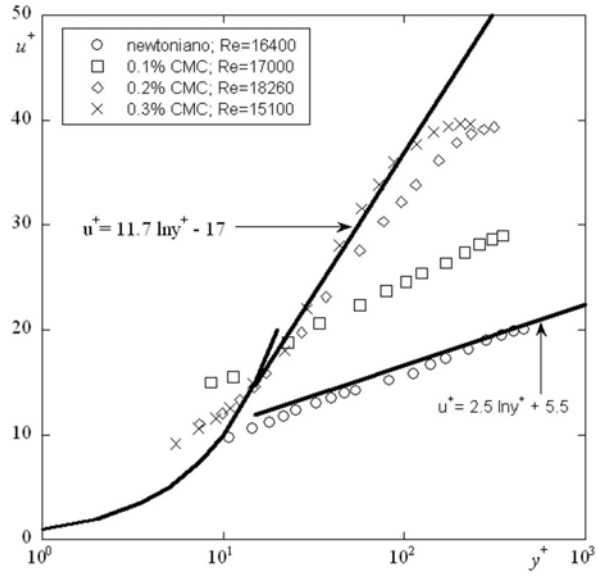


Figura 6.20: Perfis de velocidade média em coordenadas de parede para Re da ordem de 17000. De Pinho e Whitelaw (1990).

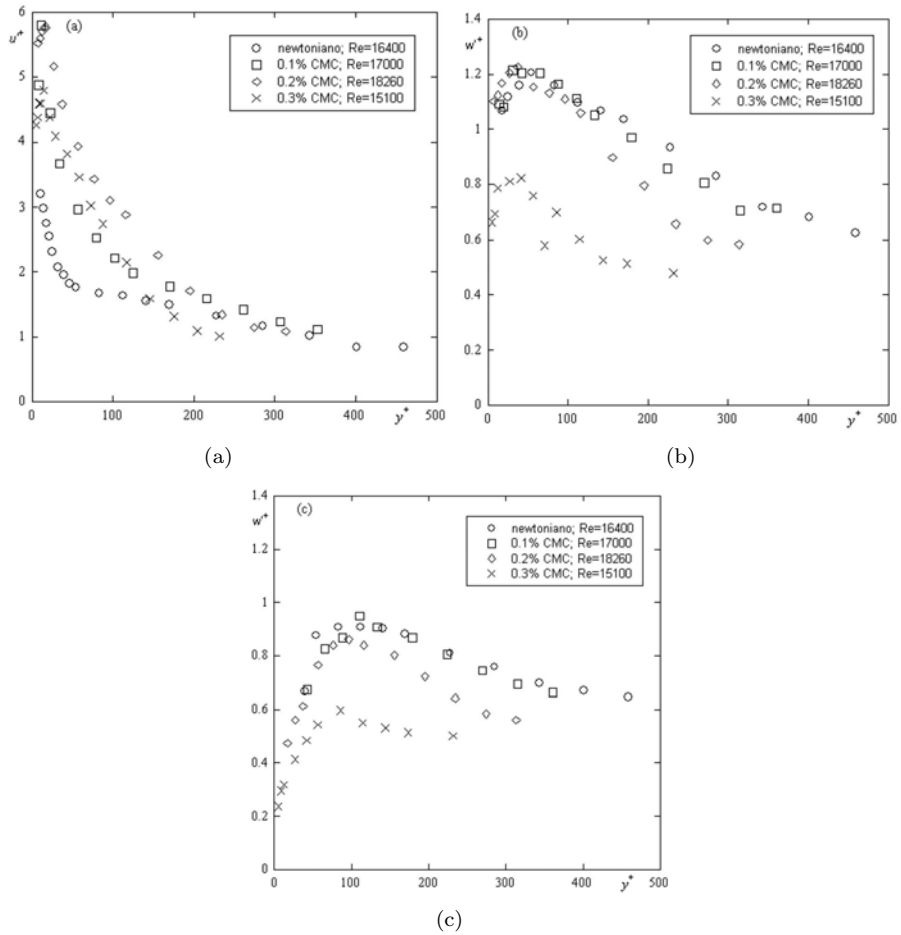
6.4.4 Efeitos de escala

Quando a redução do arrasto é inferior ao valor assimptótico, o coeficiente de fricção exibe uma dependência do número de Reynolds e sobretudo do diâmetro da conduta. Este efeito dificulta a tarefa do engenheiro que pretende calcular a perda de carga num escoamento porque implica o desconhecimento das reais condições do escoamento. Felizmente, desenvolveram-se algumas metodologias para a previsão do efeito de escala que são moderadamente eficientes, desde que a diferença de ordem de grandeza dos diâmetros em jogo não seja excessivamente grande.

Na Seção 6.4.3 viu-se (c.f. Figura 6.17) que a redução do arrasto é acompanhada por um desvio da lei de parede da camada inercial, que podemos descrever como sendo do tipo

$$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.0 + \Delta B \,, \tag{6.63}$$

onde ΔB pode variar entre 0 e 30. Na situação de redução de arrasto máxima esta zona inercial encontrar-se-á muito desviada da lei newtoniana e a sua aplicabilidade estará praticamente limitada à região do eixo central da conduta, já que será a assimptota de Virk que perdurará em quase toda a conduta. Recentemente Hoyt e Sellin (1993) apresentaram um método que permite quantificar o valor de ΔB a partir de medições obtidas com o mesmo fluido em condutas de pequeno diâmetro. Esta solução não é milagrosa, já que pressupõe o conhecimento do comportamento do fluido em pelo menos uma situação, i.e., que tenham sido efetuadas medições



(a) (b)

(c)

Figura 6.21: Perfis das velocidades turbulentas normalizadas em coordenadas de parede para Re da ordem de 17000: (a) componente axial; (b) componente tangencial; (c) componente radial. De Pinho e Whitelaw (1990).

de perda de carga numa conduta para vários números de Reynolds. Não se trata de uma equação geral, em que a partir do número de Reynolds e de parâmetros reológicos, se faz o cálculo da perda de carga, sem qualquer outro tipo de "input".

Segundo Hoyt e Sellin (1993), conhecido o coeficiente de fricção (f_1) numa conduta de diâmetro D_1 e numa gama de números de Reynolds Re_1, é possível determinar a curva correspondente ao mesmo fluido numa conduta de diâmetro D_2 por recurso à seguinte relação, inspirada na equação de Colebrook-White

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log \left(\frac{\mathrm{Re}\sqrt{f}}{2.51} + N \right) , \tag{6.64}$$

onde N é uma rugosidade negativa, semelhante ao termo $(\varepsilon/D)/3.7$ da equação de Colebrook-White, que quantifica o efeito de redução do arrasto dos aditivos não-newtonianos. Utilizando um par de valores Re_1 e f_1 , calcula-se o argumento da Equação (6.64) (termo entre parêntesis retos). Esta quantidade é então multiplicada pela razão de diâmetros D_2/D_1 e o novo argumento é substituído na Equação (6.64) para se calcular o novo valor de f_2. O número de Reynolds correspondente ao f_2 na conduta D_2 é calculado por intermédio da Equação (6.65)

$$\mathrm{Re}_2 = \mathrm{Re}_1 \frac{D_2}{D_1} \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} . \tag{6.65}$$

Com esta metodologia e as duas equações anteriores, converte-se uma curva experimental obtida em laboratório numa conduta de pequeno diâmetro para uma nova curva de comportamento numa conduta de diâmetro superior ou inferior. A única recomendação de Hoyt e Sellin diz respeito à limitação de que D_1 não deve ser inferior a 5 mm e preferencialmente deverá ser superior a 13 mm para que o escalamento seja bom. Esta limitação prende-se com a excessiva percentagem de área da seção da conduta que será ocupada pela subcamada viscosa quando o diâmetro é muito pequeno, e por conseqüência a camada inercial, em que se apoia este método, será pouco importante, perdendo a metodologia apresentada a sua precisão e generalidade.

6.5 Filosofias de modelagem da turbulência

Na Seção 6.3 apresentaram-se as equações de governo e em particular a equação de conservação de quantidade de movimento e diversas equações constitutivas reológicas. Em escoamento turbulento de fluidos viscoelásticos, e à semelhança do que acontece na mecânica dos fluidos newtonianos, essas equações são exatas se consideradas instantâneas. Assim, mesmo que em termos médios o escoamento apresente características independentes do tempo, as várias quantidades físicas são de fato dependentes do tempo, para além de variarem no espaço físico.

A solução dessas equações pode agora obter-se de duas formas distintas: ou se resolvem as equações na foram exata, naquilo que se convenciona chamar simulação

numérica direta, ou utilizam-se equações médias que resultam da aplicação de adequadas médias no tempo a todas as parcelas, o que se chama de método RANS[24]. Uma filosofia intermédia, conhecida por LES[25], é hoje em dia objeto de intensa investigação para fluidos newtonianos, mas no seu âmago e pelas suas limitações e dificuldades é hoje cada vez mais claro que o LES está mais próximo da metodologia RANS que da metodologia DNS. Enquanto que o DNS resolve as equações exatas sem necessidade de recorrer a qualquer tipo de modelação, as metodologias RANS e LES alisam determinadas quantidades turbulentas, que passam por isso a necessitar de modelação. A vantagem desta técnica é que os recursos computacionais diminuem consideravelmente, e torna-se possível resolver escoamentos complexos de relevância industrial, enquanto que no caso do DNS as necessidades computacionais são ainda proibitivas para que o método possa ser diretamente aplicado a este tipo de casos. Contudo, o DNS encontra a sua verdadeira vocação na investigação e desenvolvimento de fechos adequados aos termos alisados obtidos em LES e RANS. Se recordarmos a forma das equações constitutivas reológicas da Seção 6.3, vemos então que para fluidos viscoelásticos o custo da simulação DNS se torna ainda mais proibitivo. De fato, enquanto que as simulações DNS para fluidos newtonianos tiveram o seu início há mais de vinte anos, para escoamentos de fluidos viscoelásticos as simulações verdadeiramente consistentes só aparecem há 10 anos, como ficou já documentado na descrição da Seção 6.1.

As equações médias de quantidade de movimento necessárias para o método RANS com fluidos não newtonianos apresentam também as tensões de Reynolds, que necessitam de ser adequadamente modeladas como no caso dos fluidos newtonianos. Apresentam ainda uma tensão extra que vai aparecer na forma de uma tensão média. O cálculo desta tensão média depende da equação constitutiva reológica adotada que é uma equação não-linear. Por isso, no contexto dos fluidos não newtonianos será também necessário apresentar fechos para a tensão média extra que será tanto mais complexo quanto mais complexas forem as equação de partida, i.e., a equação constitutiva reológica adotada. Finalmente, é ainda necessário não esquecer que as equações de transporte das tensões de Reynolds e da dissipação de energia cinética de turbulência, que estão na base dos métodos usados para a modelação das tensões de Reynolds, virão também alteradas em relação às suas versões newtonianas, devido à utilização de um modelo constitutivo reológico diferente. Os modelos constitutivos reológicos verdadeiramente viscoelásticos até á data investigados por DNS foram os modelos de Maxwel convectivo (UCM), Giesekus e sobretudo o FENE-P.

No contexto dos modelos de turbulência do tipo RANS já desenvolvidos para fluidos de características não newtonianas, têm sido sobretudo adotadas equações constitutivas do tipo modelo newtoniano generalizado devido à sua maior simplicidade. Se é verdade que numa perspectiva de escoamento em regime laminar este tipo de modelos é muito restritivo, não permitindo por exemplo considerar efeitos de memória com fluidos viscoelásticos, num contexto de escoamentos em

[24]RANS tem origem na designação inglesa "Reynolds average Navier-Stokes".

[25]LES tem origem na designação inglesa "Large eddy simulation" e traduz-se como "Simulação das grandes escalas".

regime turbulento eles apresentam como grande vantagem um menor número de termos a necessitar de modelagem, para além do fato desses termos apresentarem uma forma matemática e física mais semelhante à dos termos equivalentes existentes para fluidos newtonianos e sobre os quais a comunidade científica mais se tem debruçado. É sobre esta família de modelos de turbulência, que constituem atualmente o único conjunto disponível para utilização corrente, que nos concentraremos na Seção 6.6. De notar que estes modelos são aplicáveis não só a escoamentos de fluidos puramente viscosos mas também de fluidos viscoelásticos, uma vez que a equação constitutiva reológica, do tipo modelo newtoniano generalizado, foi modificado para incluir o efeito das propriedades reológicas elásticas consideradas relevantes em regime turbulento. No entanto, uma vez que este tipo de equações constitutivas não apresentam efeitos de memória estamos de fato perante uma equação constitutiva pseudo-elástica.

As falhas deste tipo de modelos constitutivos reológicos na previsão do escoamento de fluidos elásticos, quer em regime laminar quer em regime turbulento, tem motivado inúmeros trabalhos de investigação fundamental ao nível do DNS com modelos reológicos mais adequados ao tratamento dos fluidos elásticos. Por esta razão começaram também a ser desenvolvidos esforços de I&D no sentido de desenvolver os primeiros modelos de turbulência assentes em equações constitutivas diferenciais viscoelásticas. É o assunto que trataremos na Seção 6.9 embora com alguma limitação dado não existirem ainda modelos operacionais deste tipo. Como veremos isso resulta da maior complexidade da equação constitutiva reológica a qual coloca maiores necessidades ao nível do esforço de modelação.

Em suma, estamos perante duas metodologias diferentes: ou partimos de uma equação constitutiva reológica mais realista, mais correta em regime laminar, mas que origina um maior número de termos novos flutuantes a necessitar de fechos adequados e difíceis para lidar com escoamentos turbulentos, ou então adotamos uma equação mais simples, e menos capaz de boas previsões em regime laminar, mas que no contexto dos escoamentos turbulentos origina o aparecimento de um menor número de termos a fechar, os quais para além disso são mais semelhantes aos existentes para fluidos newtonianos e relativamente aos quais há muito saber adquirido. No tratamento que se segue começaremos exatamente por considerar primeiro este segundo caso.

6.6 Fechamento de turbulência para modelo reológico de tensão pseudo-elástica

6.6.1 Introdução

Como explicado na seção anterior, os fechos de turbulência apresentados nesta seção baseiam-se numa equação constitutiva reológica do tipo fluido newtoniano generalizado que é modificado por forma a incluir efeitos da elasticidade, não com o objetivo de prever escoamentos em regime laminar, mas em regime turbulento. Os modelos de turbulência desta seção baseiam-se nos desenvolvimentos recentes

de Pinho (2003), Cruz e Pinho (2003), Cruz *et al.* (2004), Mendes *et al.* (2005) e Resende *et al.* (2006). Estes modelos podem simplificar-se em modelos anteriores existentes na literatura para fluidos puramente viscosos de Malin (1997) e Cruz *et al.* (2000) quando se eliminam os efeitos da razão de Trouton.

Esta seção está estruturada da seguinte forma: começaremos por apresentar as equações de governo, explicando o modelo constitutivo adotado e identificando os novos termos que necessitam de ser modelados. Depois os fechos desenvolvidos para esses termos são apresentados, o modelo é calibrado por comparação com resultados experimentais numa conduta de secção circular com um único fluido viscoelástico e aplicado então num estudo paramétrico e posterior comparação das previsões com informações experimentais da literatura da especialidade.

No que se segue, as quantidades médias no tempo estão representadas em maiúsculas ou com uma barra superior, enquanto que as flutuações estão representadas por letras minúsculas ou com uma apóstrofe. Valores instantâneos utilizam um acento circunflexo.

6.6.2 Equação constitutiva

A propriedade reológica mais importante das soluções poliméricas é a viscosidade viscosimétrica como discutido na seção 6.2. Uma vez que as soluções poliméricas apresentam normalmente um comportamento reofluidificante, um modelo reológico do tipo newtoniano generalizado é adequado para descrever esta propriedade de forma precisa. Este modelo será daqui para a frente designado pela sigla GNF[26]. Não vamos aqui entrar na controvérsia de qual a propriedade reológica relevante, já discutida anteriormente nas seções 6.1 e 6.4. Uma discussão sobre esta questão está elaborada em Oliveira and Pinho (1999) e a relevância da viscosidade extensional está relativamente bem documentada em simulações DNS (Dimitropoulos *et al.*, 1998, 2001; De Angelis *et al.*, 2002).

Experimentalmente, Escudier *et al.* (1999) foram provavelmente os primeiros a medir detalhadamente a redução do arrasto de soluções poliméricas, em termos de perfis de velocidade e factor de fricção, para as quais apresentaram dados experimentais da viscosidade extensional medida no reómetro de jactos opostos. As suas medições da viscosidade viscosimétrica para várias soluções poliméricas mostraram que os fluidos utilizados são reofluidificantes e confirmaram que a razão de Trouton é reoespesssante, o que é considerado uma das principais causas da redução de arrasto.

A equação constitutiva reológica aqui adotada é simples: o modelo GNF modificado para imitar o reoespessamente da razão de Trouton. Esse foi o modelo já utilizado por Oliveira e Pinho (1999), mas com a introdução de pequenas modificações. A viscosidade extensional é introduzida no modelo GNF tornando-o uma função da velocidade de deformação normal $\dot{\varepsilon}$ como explicado em detalhe em Oliveira e Pinho (1999). O modelo GNF, com dependência nas velocidades de

[26]GNF vem do inglês "Generalised Newtonian Fluid".

deformação de corte $\dot{\gamma}$ e normal $\dot{\varepsilon}$, escreve-se como

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} \,, \tag{6.66}$$

onde μ é a função viscosidade e S_{ij} é o tensor velocidade de deformação já definido na Equação (6.11). A função de viscosidade aqui utilizada é

$$\mu = \mu(\dot{\gamma}, \dot{\varepsilon}) \,, \tag{6.67}$$

que depende de $\dot{\gamma}$ e $\dot{\varepsilon}$, os quais estão relacionados com os invariantes de S_{ij} da seguinte forma:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{-4II_s} = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \,, \tag{6.68}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{6\det S}{\operatorname{tr} S^2} = \frac{2\operatorname{tr} S^3}{\operatorname{tr} S^2} = \frac{2(S_{ik}S_{kj})S_{ij}}{S_{ij}S_{ij}} \,. \tag{6.69}$$

Uma forma algébrica da função de viscosidade (6.67) pode ser um equação do tipo Bird-Carreau

$$\mu = \mu_0 \left[1 + (\lambda_s \dot{\gamma})^2\right]^{\frac{n-1}{2}} \left[1 + (\lambda_e \dot{\varepsilon})^2\right]^{\frac{p-1}{2}} \,, \tag{6.70}$$

mas, para simplificar a derivação do modelo de turbulência, uma lei de potência é utilizada em alternativa. Assim, a equação adotada para a viscosidade é

$$\mu = K_\nu \left[(\dot{\gamma})^2\right]^{\frac{n-1}{2}} K_e \left[(\dot{\varepsilon})^2\right]^{\frac{p-1}{2}} \,. \tag{6.71}$$

Há algumas limitações nos vários parâmetros que serão analisados adiante. O modelo é produto de um termo que depende da velocidade de deformação de corte por outro termo que depende da velocidade de deformação normal. Os dois termos não precisam de ser dimensionalmente idênticos, mas o seu produto tem de resultar numa viscosidade, obedecer a limites de comportamento e ser capaz de ser utilizado para representar dados de medições experimentais. Os parâmetros apresentam o seguinte significado (para detalhes ver Cruz e Pinho, 2003): K_v e n são os índices de consistência e de potência da lei da viscosidade viscosimétrica enquanto que K_e e p traduzem o mesmo efeito para a razão de Trouton. São assim parâmetros conhecidos para cada fluido, que só dependem de medições da sua reologia. Inclui a reofluidificação da viscosidade viscosimétrica em função de $\dot{\gamma}$ $(n < 1, p = 1)$ e o reoespessamento da razão de Trouton em função de $\dot{\varepsilon}$ $(n = 1, p > 1)$ como se esboça na Figura 6.22.

Para esta equação constitutiva é agora necessário deduzir as correspondentes equações médias de conservação para escoamento turbulento, tendo em consideração que há flutuações da viscosidade devido à não-linearidade da sua dependência da cinemática. As expressões que se seguem são gerais, i.e., não dependem da forma específica adotada para a função de viscosidade μ. Mais adiante, quando se desenvolverem fechos para termos específicos, será então necessário adotar uma forma particular para μ e, como mencionado, adotaremos nessa altura a Equação (6.71).

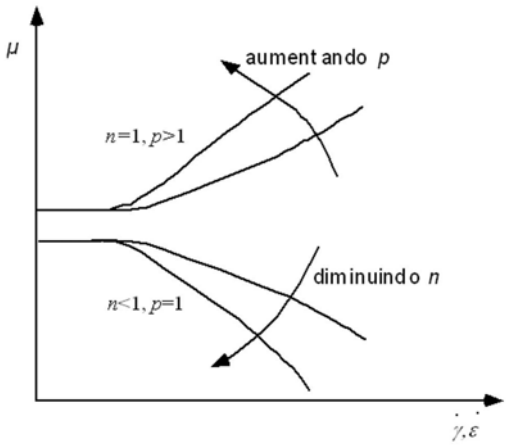


Figura 6.22: Representação esquemática dos efeitos de n e p na variação da viscosidade com as velocidades de deformação de corte e normal em coordenadas log-log.

6.6.3 Equações de transporte

Equação de conservação de quantidade de movimento linear

A equação de Cauchy instantânea escrita em notação indicial é

$$\rho \frac{D\hat{U}_i}{Dt} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{\tau}_{ik}}{\partial x_k}\,, \tag{6.72}$$

onde τ_{ik} é o tensor desviatório das tensões e D/Dt representa a derivada material $D/Dt \equiv (\partial/\partial t) + U_k \partial/\partial x_k$. Aplicando a decomposição de Reynolds e fazendo a média no tempo, após substituição da equação constitutiva, resulta a seguinte equação geral

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial (2\overline{\mu} S_{ik} + 2\overline{\mu' s_{ik}} - \rho \overline{u_i u_k})}{\partial x_k}\,. \tag{6.73}$$

A Equação (6.73) é a equação de conservação de quantidade de movimento para fluidos GNF apresentando um termo extra em relação à equação para fluidos newtoniansos $\left(2\overline{\mu' s_{ik}}\right)$ e um termo modificado relacionado com a viscosidade molecular média $\overline{\mu}$, que inclui efeitos de turbulência.

A dedução de expressões adequadas para estes dois termos será levada a cabo mais adiante. Relativamente à tensão de Reynolds, esta também terá de ser calculada por um fecho adequado inspirado na modelação newtoniana e que depende da sua equação de transporte. Contudo, a equação de transporte da tensão de Reynolds também vem afetada pela equação constitutiva adotada.

Equações de transporte da tensão de Reynolds e da energia cinética de turbulência

A dedução desta equação segue as recomendações de Hinze (1975) e apresenta-se detalhadamente no Apêndice de Pinho (2003). O resultado final é a Equação (6.74) que apresenta uma série de novos termos relativamente ao seu equivalente newtoniano. Os termos que são novos são os que envolvem flutuações de viscosidade (as flutuações denotam-se por apóstrofes), e há também termos modificados pela presença da viscosidade média, a qual depende da turbulência, como já foi mencionado,

$$\begin{aligned}
\rho\frac{D\overline{u_iu_j}}{Dt} &+ \rho\overline{u_ju_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \rho\overline{u_iu_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} = -\rho\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_iu_ju_k} - \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p'u_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{p'u_i}\right) \\
&+ \overline{p'\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} + \overline{\mu}\frac{\partial^2\overline{u_iu_j}}{\partial x_k\partial x_k} - 2\overline{\mu}\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \frac{\partial\overline{\mu}}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{u_iu_j}}{\partial x_k} \\
&+ \frac{\partial\overline{\mu}}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\overline{u_ku_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial\overline{u_ku_i}}{\partial x_j} - 2\overline{u_ks_{ij}}\right) + \overline{\mu'\frac{\partial^2u_iu_j}{\partial x_k\partial x_k}} - 2\overline{\mu'\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial\mu'}{\partial x_k}\frac{\partial u_iu_j}{\partial x_k}} \\
&+ \overline{\frac{\partial\mu'}{\partial x_k}\left(u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)} + \overline{\mu'u_j}\frac{\partial^2U_i}{\partial x_k\partial x_k} + \overline{\mu'u_i}\frac{\partial^2U_j}{\partial x_k\partial x_k} \\
&+ \overline{u_j\frac{\partial\mu'}{\partial x_k}}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) + \overline{u_i\frac{\partial\mu'}{\partial x_k}}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right).
\end{aligned} \tag{6.74}$$

A equação de transporte da energia cinética de turbulência pode obter-se a partir da Equação (6.74) por contração de índices e divisão por 2 (para ter em consideração a definição de κ, $\kappa \equiv \overline{u_iu_i}/2$. Daí resulta a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\rho\frac{D\kappa}{Dt} = &-\rho\overline{u_iu_k}S_{ik} - \frac{\overline{\partial u_ip'}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[2\,\overline{\mu}(\,\overline{u_is_{ik}}\,) + 2\overline{\mu'u_i}S_{ik} + 2\overline{\mu'u_is_{ik}} - \overline{k'u_k}\right] \\
&- 2\,\overline{\mu}(\,\overline{s_{ik}s_{ik}}\,) - 2\overline{\mu's_{ik}s_{ik}} - 2\overline{\mu's_{ik}}S_{ik}\,.
\end{aligned} \tag{6.75}$$

Novamente, identificam-se termos idênticos, novos termos e termos modificados por comparação com a equação correspondente para fluidos newtonianos.

A taxa de dissipação de energia cinética de turbulência

Para fluidos newtonianos, a taxa média de dissipação específica (ε) de energia cinética de turbulência (κ) é definida por

$$\rho\varepsilon_n \equiv 2\mu\overline{s^2{}_{ij}}\,, \tag{6.76}$$

onde o índice inferior n foi utilizado para o distinguir da taxa de dissipação de κ para fluidos GNF. A Equação (6.76) é a média no tempo da taxa de dissipação instantânea que se define como

$$\rho\hat{\varepsilon}_n \equiv 2\mu s_{ij}^2\,. \tag{6.77}$$

Por analogia, pode-se definir uma taxa de dissipação instantânea para fluidos não newtonianos obedecendo ao modelo GNF, que depende da viscosidade instantânea:

$$\rho\hat{\varepsilon} \equiv 2\hat{\mu}{s^2}_{ij}\,. \tag{6.78}$$

Fazendo a média da Equação (6.78), obtêm-se a definição da taxa média de dissipação de κ para um fluido GNF

$$\rho\varepsilon = 2\overline{\hat{\mu}s^2{}_{ij}} = 2\overline{(\overline{\mu}+\mu')s^2{}_{ij}} = 2\overline{\mu}\overline{s^2{}_{ij}} + 2\overline{\mu' s^2{}_{ij}}\,. \tag{6.79}$$

De notar que estas definições de taxas de dissipação instantânea e média são idênticas às utilizadas por Politis (1989) na sua derivação de um modelo $\kappa-\varepsilon$ para fluidos puramente viscosos com comportamento reofluidificante.

Equação de transporte da dissipação de energia cinética de turbulência

Esta equação de transporte, a Equação (6.80) foi também deduzida em Pinho (2003) e apresenta-se como

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial\epsilon}{\partial t} + \rho U_k\frac{\partial\epsilon}{\partial x_k} &= -2\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\overline{\left[(\overline{\mu}+\mu')\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial u_k}{\partial x_m}\right]} \\
&- 2\frac{\partial U_k}{\partial x_m}\overline{\left[(\overline{\mu}+\mu')\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right]} - 2\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k\partial x_m}\overline{\left[(\overline{\mu}+\mu')\,u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right]} \\
&- 2\overline{(\overline{\mu}+\mu')\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_m}} - \overline{(\overline{\mu}+\mu')\frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right]} \\
&- 2\overline{(\overline{\nu}+\nu')\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial p'}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right]} + \overline{\frac{(\overline{\mu}+\mu')^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right)\right]} \\
&- 2\overline{\frac{(\overline{\mu}+\mu')^2}{\rho}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_m}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_m}} + 4\overline{(\overline{\nu}+\nu')\frac{\partial^2(\overline{\mu}+\mu')}{\partial x_m\partial x_k}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_m}s_{ik}\right]} \\
&+ 4\overline{(\overline{\nu}+\nu')\frac{\partial(\overline{\mu}+\mu')}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial s_{ik}}{\partial x_m}} + 2\overline{(\overline{\nu}+\nu')\frac{\partial(\overline{\mu}+\mu')}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)} \\
&+ 4S_{ik}\overline{\left[(\overline{\nu}+\nu')\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial^2\mu'}{\partial x_m\partial x_k}\right]} + 4\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_m}\overline{\left[(\overline{\nu}+\nu')\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial\mu'}{\partial x_k}\right]} \\
&+ 2\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k\partial x_k}\overline{\left[(\overline{\nu}+\nu')\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial\mu'}{\partial x_m}\right]} + 2\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k\partial x_k}\right)\overline{\left[(\overline{\nu}+\nu')\mu'\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right]} \\
&- 4\nu'\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_m}}\frac{\partial}{\partial x_m}\overline{\left[\frac{\partial\mu'}{\partial x_k}s_{ik}\right]} - 2\nu'\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_m}}\frac{\partial}{\partial x_m}\overline{\left[\mu'\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_k}\right]} \\
&+ 2\mu'\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_m}}\frac{\partial}{\partial x_m}\left[\frac{\partial\overline{u_i u_k}}{\partial x_k}\right] + \overline{\frac{\partial(\overline{\mu}+\mu')}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}} + U_k\overline{\frac{\partial(\overline{\mu}+\mu')}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}}\,.
\end{aligned} \tag{6.80}$$

Na Equação (6.80) utilizam-se as seguintes definições de taxa de dissipação média e instantânea, $\rho\varepsilon \equiv \overline{(\overline{\mu}+\mu')\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}}$ e $\rho\hat{\varepsilon} \equiv (\overline{\mu}+\mu')\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}$, respectivamente.

Estas duas definições de taxa de dissipação são equivalentes às das equações (6.78) e (6.79) somente em condições de turbulência homogênea. Por conveniência, na Equação (6.80) utiliza-se também o conceito de viscosidade cinemática ($\nu = \mu/\rho$).

Para concluir, é agora necessário providenciar fechos para os termos novos e modificados das equações de transporte anteriores. Começaremos exatamente pela segunda parte, i.e., por apresentar um modelo para a viscosidade molecular média que aparece em vários dos termos modificados. No entanto, antes de prosseguir temos de ver que temos à nossa disposição a possibilidade de desenvolver fechos de primeira ou segunda ordem. No que se segue apresenta-se um modelo de primeira ordem, mas já numa versão não-linear capaz de prever a anisotropia das tensões de Reynolds normais. Esse modelo pode ser reduzido a uma versão mais simples, como veremos, eliminando os termos de ordem superior no fecho das tensões de Reynolds. Quanto a fechos de segunda ordem, no momento da redação deste texto um modelo das tensões de Reynolds está basicamente concluído, mas não tendo ainda passado nem pelo crivo de alguns testes mais exigentes nem pelo processo de *peer review*, decidimos não incluí-lo aqui.

6.6.4 Fechamento para a viscosidade molecular média

Em escoamento turbulento a viscosidade molecular de um fluido GNF que apresenta uma viscosidade variável depende das flutuações das taxas de deformação de corte e extensional (ou normal), sendo esta a principal diferença relativamente ao comportamento de um fluido newtoniano. Assim, é necessário relacionar esta viscosidade molecular média e outras quantidades turbulentas e do escoamento médio de forma a assegurar um conjunto fechado de equações. É para se chegar a esta relação que agora teremos de adotar a forma da lei de potência para a lei da viscosidade, i.e., o desenvolvimento de um modelo para a viscosidade média já não é absolutamente geral e depende da expressão adotada para a viscosidade, Equação (6.71). O modelo para a viscosidade molecular média aqui apresentado foi desenvolvido por Pinho (2003).

Em termos de valores instantâneos, a viscosidade é dada por

$$\hat{\mu} = K_\nu \left[\hat{\dot{\gamma}}^2\right]^{\frac{n-1}{2}} K_e \left[\hat{\dot{\varepsilon}}^2\right]^{\frac{p-1}{2}} , \tag{6.81}$$

onde $\hat{\dot{\gamma}}$ e $\hat{\dot{\varepsilon}}$ representam valores instantâneos das quantidades nas Eqs.(6.68) e (6.69). O valor máximo de $\hat{\dot{\varepsilon}}$ foi estimado por Oliveira e Pinho (1999) em

$$\hat{\dot{\varepsilon}}_{max} = \sqrt{\frac{2}{3}\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij}} . \tag{6.82}$$

Para escoamentos turbulentos de elevado número de Reynolds, Tennekes e Lumley (1972) mostraram que $\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij} = s_{ij}s_{ij}$, pelo que Oliveira e Pinho (1999) concluíram que

$$\hat{\dot{\varepsilon}}_{max} = \sqrt{\frac{2}{3}s_{ij}s_{ij}} . \tag{6.83}$$

Como os valores típicos de $\hat{\varepsilon}$ são inferiores, assuma-se que em regra geral

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\sqrt{s_{ij}s_{ij}}}{A_\varepsilon}\,, \tag{6.84}$$

onde o valor de A_ε deve ser superior a $\sqrt{3/2}$. Substituindo estas definições na expressão a viscosidade e após simplificação, obtém-se

$$\hat{\mu} = \left(\frac{K_\nu K_e}{A_\varepsilon^{p-1}}\right) 2^{\frac{n-1}{2}} \left[s_{ij}^2\right]^{\frac{n+p-2}{2}}\,. \tag{6.85}$$

Esta expressão pode agora ser usada para calcular a taxa de dissipação instantânea

$$\rho\hat{\varepsilon} = 2^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{K_\nu K_e}{A_\varepsilon^{p-1}}\right) \left[s_{ij}^2\right]^{\frac{n+p}{2}}\,. \tag{6.86}$$

Combinando as equações (6.85) e (6.86) para eliminar s_{ij}^2 obtêm-se uma relação entre a viscosidade instantânea e a taxa de dissipação instantânea.

$$\hat{\mu} = \left(\frac{K_\nu K_e}{A_\varepsilon^{p-1}}\right)^{\frac{2}{n+p}} 2^{\frac{1-p}{n+p}} \left(\rho\hat{\varepsilon}\right)^{\frac{n+p-2}{n+p}}\,. \tag{6.87}$$

Introduzindo os parâmetros

$$m \equiv \frac{n+p-2}{n+p}\,, \tag{6.88}$$

e

$$B \equiv \left(\frac{K_\nu K_e}{A_\varepsilon^{p-1}}\right)^{1-m} 2^{\frac{(n-1)-m(n+1)}{2}} \rho^m\,, \tag{6.89}$$

a Equação (6.87) simplifica-se para

$$\hat{\mu} = B\hat{\varepsilon}^m\,. \tag{6.90}$$

A viscosidade média e a taxa de dissipação média podem ser calculadas a partir das respectivas funções de distribuição de probabilidade. Por definição, a viscosidade média é

$$\overline{\mu} = \int_0^\infty B\hat{\varepsilon}^m P(\hat{\varepsilon}) d\hat{\varepsilon}\,. \tag{6.91}$$

Como a viscosidade instantânea é sempre uma quantidade positiva, a taxa de dissipação instantânea ($\hat{\varepsilon}$) é positiva-definida e está associada a movimento ao nível das pequenas escalas, assumido aqui como localmente isotrópico em escoamentos a elevados números de Reynolds. Assim, como explicado por Monin e Yaglom (1975), $\hat{\varepsilon}$ obedece uma distribuição log-normal,

$$P\left(\hat{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\hat{\varepsilon}\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\hat{\varepsilon} - M}{\sigma}\right)^2\right\}. \tag{6.92}$$

com M e σ representando a média e o desvio padrão de $\hat{\varepsilon}$. Seguindo Monin e Yaglom (1975) (páginas 614-615),

$$\int_o^\infty \frac{\hat{\varepsilon}^m}{\hat{\varepsilon}\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\hat{\varepsilon}-M}{\sigma}\right)^2\right\} d\hat{\varepsilon} = \exp\left(mM + \frac{m^2\sigma^2}{2}\right), \tag{6.93}$$

pelo que a viscosidade média vem igual a

$$\overline{\mu} = B\exp\left(mM + \frac{m^2\sigma^2}{2}\right). \tag{6.94}$$

A taxa de dissipação média também é obtida a partir da função distribuição de probabilidades de $\hat{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \varepsilon = \int_o^\infty \hat{\varepsilon} P(\hat{\varepsilon})\, d\hat{\varepsilon} &= \int_o^\infty \hat{\varepsilon}\frac{1}{\hat{\varepsilon}\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\hat{\varepsilon}-M}{\sigma}\right)^2\right\} d\hat{\varepsilon}_k \\ &= \exp\left(M + \frac{\sigma^2}{2}\right). \end{aligned} \tag{6.95}$$

Agora, $\overline{\mu}$ e ε podem relacionar-se resolvendo Eq.(6.94) em ordem a e^M para substituição na Equação (6.95). O resultado é

$$\overline{\mu} = B\varepsilon^m \exp\left(\frac{m\sigma^2(m-1)}{2}\right), \tag{6.96}$$

com m e B dados pelas equações (6.88) e (6.89) Na Equação (6.96), σ^2 é a variância da distribuição de $\ln\hat{\varepsilon}$, que é dada por

$$\sigma^2 = A_1 + A_2 \ln\left(\frac{L}{\eta}\right), \tag{6.97}$$

com L a representar uma escala de turbulência externa, uma grande escala como o tamanho característico dos grandes turbilhões, e η representando uma escala internal como a microescala de Kolmogorov (Monin e Yaglom, 1975). A_1 é um parâmetro que depende da macroestrutura de turbulência e A_2 é uma constante universal. Uma discussão extensa sobre estas quantidades, nas páginas 612 a 626 de Monin e Yaglom (1975), sugere que $A_2 \approx 0.3$ a 0.5, embora os valores mais adequados estejam no intervalo entre 0.4 e 0.5, pelo que aqui utilizaremos o valor de 0.45. Relativamente ao parâmetro A_1 há pouca informação (ver página 634 de Monin e Yaglom (1975)), pelo que aqui consideramos $A_1 = 0$. Assim, σ^2 é dada por

$$\sigma^2 = A_2 \ln\left(\frac{L}{\eta}\right). \tag{6.98}$$

A escala de Kolmogorov é

$$\eta \equiv \left[\frac{\overline{\nu}^3}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{\overline{\mu}^3}{\rho^3\varepsilon}\right]^{\frac{1}{4}}, \tag{6.99}$$

onde a viscosidade molecular média é utilizada. A escala característica das entidades transportadoras de energia turbulenta é quantificada a partir da estimativa invíscida da taxa de dissipação $\kappa^{1.5}/\varepsilon$. Uma equação freqüentemente utilizada para quantificar L, deduzida a partir de argumentos da teoria invíscida e dada por Younis (1996) é aqui adotada

$$L \approx \frac{2C_\mu^{0.75}\kappa^{1.5}}{\varepsilon}\,, \tag{6.100}$$

onde C_μ é uma constante universal que normalmente assume o valor de 0.09 para fluidos newtonianos. Finalmente, combinando as equações (6.96) a (6.100) conduz à expressão pretendida, a forma final de uma equação explícita para $\overline{\mu}$

$$\begin{aligned}\overline{\mu} = (C_\mu\rho)^{\frac{3m(m-1)A_2}{8+3m(m-1)A_2}}\, 2^{\frac{4m(m-1)A_2}{8+3m(m-1)A_2}}\, \kappa^{\frac{6m(m-1)A_2}{8+3m(m-1)A_2}} \\ \times\, \varepsilon^{\frac{[8-3(m-1)A_2]m}{8+3m(m-1)A_2}}\, B^{\frac{8}{8+3m(m-1)A_2}}\,,\end{aligned} \tag{6.101}$$

com m e B definido anteriormente. No caso limite de um fluido newtoniano ($n = p = 1$) recupera-se uma viscosidade molecular média constante igual a $\overline{\mu} = K_\nu K_e$.

Uma vez que a Equação (6.101) foi deduzida assumindo argumentos válidos para valores elevados do número de Reynolds turbulento, alguns ajustes devem ser inseridos na formulação visando estendê-la para a região da sub camada viscosa. Junto à parede não existem flutuações e o escoamento é unidimensional, além disso, nessa região a viscosidade molecular média deve assumir os valores independentes do efeito da turbulência. Deste modo, uma função de amortecimento f_ν deve ser utilizada na quantificação da viscosidade molecular média com o objetivos de permitir uma transição suave entre a região da parede e a região completamente turbulenta. A equação da viscosidade fica então definida como:

$$\overline{\mu} = f_\nu\overline{\mu}_h + (1 - f_\nu)\eta_\nu\,. \tag{6.102}$$

O papel da função f_ν é semelhante ao da função f_μ presente no modelo $\kappa-\varepsilon$ para suavizar a transição da viscosidade turbulenta entre as mesmas duas regiões do escoamento, portanto decidiu-se assumir que $f_\nu = f_\mu$ após uma extensa série de testes.

6.7 Modelo $\kappa-\varepsilon$ anisotrópico de baixo número de Reynolds

Os modelos desenvolvidos necessitam de ser testados em escoamentos de referência, mas por outro lado é também necessário que existam na literatura dados reológicos e hidrodinâmicos suficientes para calibrá-los e testá-los. Infelizmente, são escassos os dados experimentais que reunam todas estas características; de fato há somente o conjunto providenciado por Escudier *et al.* (1999) e Resende *et al.* (2006)

que se referem exclusivamente a escoamentos desenvolvidos em condutas de seção circular. Por esta razão, daqui para diante as equações irão assumir freqüentemente uma forma simplificada e consistente com esse escoamento.

Para escoamento desenvolvido numa conduta de seção circular, alinhada na direção x e de coordenada radial r, tem de se resolver a equação de conservação da quantidade de movimento, Eq.(6.103), aqui escrita em coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\overline{\mu}\frac{dU}{dr} + 2\overline{\mu' s_{xr}} - \rho\overline{\mu\nu}\right)\right] - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = 0\,. \tag{6.103}$$

Nesta equação, s_{xr} representa a componente xr flutuante do tensor velocidade de deformação, que aparece combinada com a flutuação de viscosidade definindo assim uma tensão de origem não newtoniana, que foi recentemente modelada por Cruz *et al.* (2004). Quanto à tensão de Reynolds de corte, $-\rho\overline{\mu\nu}$, esta é dada por um modelo adequado. Como um dos objetivos deste trabalho é a quantificação das tensões normais, embora elas não apareçam diretamente na equação de conservação de quantidade de movimento para escoamento desenvolvido, o modelo adotado é não-linear de segunda ordem, sendo dado pela Equação (6.104). O modelo aqui apresentado ao longo das próximas páginas é o de Resende *et al.* (2006),

$$\begin{aligned} -\rho\,\overline{\mu_i\mu_j} = 2\nu_t S_{ij} - \frac{2}{3}\kappa\delta_{ij} - f_{1n}\,\tilde{\beta}_2\,\kappa\left(S^*_{ik}S^*_{kj} - \frac{1}{6}S^{*2}\delta_{ij}\right) \\ - f_{2n}\,f_{3n}\,\tilde{\beta}_3\,\kappa\left(\Omega^*_{ik}S^*_{kj} - S^*_{ik}\Omega^*_{kj}\right)\,, \end{aligned} \tag{6.104}$$

onde os tensores velocidade de deformação (S_{ij}) e vorticidade (Ω_{ij}) se definiram nas equações (6.11) e (6.28) respectivamente.

A difusividade turbulenta v_T é calculada pela equação de Prandtl-Kolmogorov

$$\nu_T = C_\mu f_\mu \frac{\kappa^2}{\tilde{\varepsilon}}\,, \tag{6.105}$$

que impõe a necessidade de se determinar κ e $\tilde{\varepsilon}$ através de equações de transporte adequadas. Para a energia cinética de turbulência (κ) usa-se uma modificação do modelo de baixo número de Reynolds de Cruz *et al.* (2004)

$$0 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\frac{\overline{\mu}}{\rho} + f_t\frac{\nu_T}{\sigma_\kappa}\right)\frac{d\kappa}{dr}\right] - \frac{2}{\rho}\overline{\mu' s_{xr}}\frac{dU}{dr} - \overline{\mu\nu}\frac{dU}{dr} - \tilde{\varepsilon} + D\,, \tag{6.106}$$

onde as novidades são a inclusão de uma nova função f_t na difusão turbulenta, e a alteração dos valores numéricos de σ_κ e C_μ. A difusão turbulenta foi anteriormente modelada segundo uma hipótese de gradiente de difusão com coeficiente σ_κ = 1.0. Para fluidos newtonianos, descobriu-se que essa hipótese resultava numa contribuição demasiado baixa da difusão turbulenta para o balanço da energia cinética de turbulência junto a paredes e demasiado elevada longe da parede (Nagano e Shimada, 1993). Por outro lado, se o valor de σ_κ diminuir resulta uma grande diferença nas previsões em relação a dados de simulação numérica direta longe da parede, de forma que a solução deste problema passa pelo recurso a um

coeficiente σ_κ variável, adotando-se para esse efeito a função f_t. Também aqui se verificam melhorias nas previsões de escoamento com fluidos não newtonianos, após a adoção da função apresentada por Park e Sung (1995) (Eq.(6.107))

$$f_t = 1 + 3.5 \exp\left[-\left(R_T/150\right)^2\right] , \tag{6.107}$$

além de que se alterou o valor de σ_κ para 1.2, como recomendado em Nagano e Shimada (1993) e Park e Sung (1995). Quanto a C_μ, a sua modificação de 0.09 para 0.08 vem melhorar as previsões do factor de fricção, velocidade média e energia cinética de turbulência para fluidos newtonianos, não tendo grande influência sobre as previsões para fluidos não newtonianos, uma vez que com estes fluidos a função f_μ é que é determinante. Contudo, na parte não linear do modelo de turbulência não houve alteração, daí a introdução do coeficiente 1.125 a multiplicar C_μ.

A modificação da difusão turbulenta também afeta a equação de transporte da dissipação modificada de energia cinética de turbulência ($\tilde{\varepsilon}$), que se apresenta de seguida.

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\overline{\mu} + \rho f_t \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dr}\right] + \rho f_1 C_{\varepsilon 1}\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa}P \\ & - \rho f_2 C_{\varepsilon 2}\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\kappa} + \rho\overline{\nu}\nu_T\left(1 - f_\mu\right)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)^2 + C_{\varepsilon 4}\frac{\nu_t}{\sigma_E\overline{\nu}}\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dr}\frac{d\overline{\mu}}{dr} . \end{aligned} \tag{6.108}$$

6.8 Vários aspectos da modelagem

6.8.1 Função de amortecimento viscoso

Nas seções anteriores duas funções de amortecimento foram introduzidas para as viscosidades: a função de amortecimento viscosa f_ν e a função de amortecimento turbulenta f_μ. Ambas são propostas com o objetivo de adequar a performance do modelo para as regiões próximas da parede. Ambas são funções diferentes, contudo neste trabalho foram consideradas idênticas após uma serie de testes e de avaliações do desempenho do modelo. A equivalência dessas funções não é totalmente surpreendente uma vez que ambas estão relacionadas com a influência do efeito viscoso molecular na tensão total, embora de formas diferentes.

6.8.2 A função de amortecimento f_μ

A função f_μ reduz a influência das tensões turbulentas na região próxima de parede, aumentando a influência relativa da tensão puramente viscosa, a qual é dominante na sub camada viscosa. Como foi mostrado por outros autores Patel *et al.* (1985), na maioria dos modelos turbulentos essa função foi obtida através de justes computacionais ao invés de recorrer ao uso de dados experimentais. Uma excepção é a função de Nagano e Hishida (1987) a qual é equivalente ao modelo semi-empirico de comprimento de mistura proposto por Van Driest (1956). Essa pode ser uma razão para a superioridade do modelo de Nagano e Hishida em relação a outros

modelos na previsão do escoamento em canais e dutos e aqui, esse modelo possibilita a dedução de um procedimento sistemático para a obtenção da função de amortecimento.

A função f_μ deve ser modificada de forma consistente com a reologia adotada aqui e para esse propósito a metodologia desenvolvida por Van Driest será utilizada. Van Driest assumiu que existe uma similaridade entre a física do amortecimento dos turbilhões turbulentos junto da parede com o fenômeno do escoamento resultante de uma placa oscilando em condições laminares. Esse problema de escoamento laminar (segundo problema de Stokes) tem uma solução conhecida, na qual a amplitude das oscilações decai proporcionalmente a $\exp(-y/A)$, onde y representa a distância até à parede e o parâmetro A depende da freqüência das oscilações e das propriedades do fluido. Uma vez que no escoamento turbulento a presença de uma parede estacionária amortece as flutuações, Van Driest assumiu que a intensidade dos turbilhões turbulentos deveriam ser proporcionais a um fator do tipo $1 - \exp(-y/A)$. Desta forma VanDriest propôs o seu modelo de comprimento de mistura após obter um valor de 26,5 para o parâmetro A através da comparação com dados experimentais.

Para modificar a função f_μ de acordo com o modelo reológico adotado aqui, a mesma metodologia será utilizada. Como no caso do modelo reológico a função de amortecimento f_μ será o produto de uma função de amortecimento viscométrica $f_{\mu\nu}$ e de uma função de amortecimento elongacional $f_{\mu e}$ ou seja:

$$f_\mu = f_{\mu\nu}\, f_{\mu e}\,. \tag{6.109}$$

Para deduzir a função de amortecimento $f_{\mu\nu}$ Cruz e Pinho (2003) analisaram o segundo problema de Stokes para um fluido tipo lei de potência com o objetivo de obterem uma lei de variação do amortecimento com a distância até à parede y. Posteriormente realizaram uma análise semelhante para deduzir a função de amortecimento extensional. Ambas as deduções apresentam-se de seguida.

A função de amortecimento viscométrica $f_{\mu\nu}$

No segundo problema de Stokes para um fluido tipo lei de potência, a equação de quantidade de movimento é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{Re}_{ap}} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \qquad (y > 0, t > 0)\,, \tag{6.110}$$

onde Re_{ap} é o numero de Reynolds aparente (a sua definição exata é irrelevante par os nossos propósitos) . A condição de contorno oscilante na parede está localizada em $y = 0$ e é dada por:

$$u\,(t, y = 0) = U_0 \cos\,(\omega t)\ . \tag{6.111}$$

O objetivo aqui não é obter uma solução completa para esta versão do segundo problema de Stokes, mas somente a forma que quantifique o decaimento das oscilações no fluido em função da distância da parede. Então a função de amortecimento será

obtida segundo a expressão $1 - f(y)$ de acordo com os argumentos de Van Driest. A Equação (6.110) é resolvida usando-se a seguinte separação de variáveis

$$u\left(t,y\right) = f(y)\, g\left(\phi\right) = f(y)\, g\left(\alpha_0 t + \alpha_1 \ln(f)\right) \ , \tag{6.112}$$

onde ϕ é uma variável composta e α_0 e α_1 são parâmetros. A seguinte notação será usada visando a concisão.

$$f' = \frac{\partial f}{\partial y}\,, \qquad g' = \frac{\partial g}{\partial \varphi}\,. \tag{6.113}$$

Substituindo as funções (6.112) e (6.113) na Equação (6.111) teremos:

$$\begin{aligned} \alpha_0 f g' = \frac{1}{\mathrm{Re}_{ap}} \Big[& n\left(g + \alpha_1 g'\right)^n f'' f'^{n-1} \\ & + n\alpha_1 \left(g + \alpha_1 g'\right)^{n-1} \left(g' + \alpha_1 g'\right) \frac{f'^{n-1}}{f} \Big] \ . \end{aligned} \tag{6.114}$$

Assumiremos que a função procurada tem a forma:

$$f\left(y\right) = \left(1 + by\right)^r \ , \tag{6.115}$$

e inserindo na Equação (6.114) obtém-se:

$$\begin{aligned} \alpha_0 g' \left(1 + by\right)^r = \frac{1}{\mathrm{Re}_{ap}} \Big[& n\left(g + \alpha_1 g'\right)'' r^n b^{n+1} \left(r - 1\right) \\ & + n\alpha_1 \left(g + \alpha_1 g'\right)^{n-1} \left(g' + \alpha_1 g''\right) r^{n+1} b^{n+1} \Big] \left[1 + by\right]^{n(r-1)-1} \ . \end{aligned} \tag{6.116}$$

Ambos os lados da Equação (6.116) devem depender identicamente da função (6.115), o que requer que o expoente r assuma a seguinte forma

$$r = -\frac{1+n}{1-n}\,, \tag{6.117}$$

onde b_0 é uma constante, a função $f(y)$ pode ser escrita agora na seguinte forma:

$$f\left(y\right) = \left(1 + \left|\frac{1-n}{1+n}\right| b_0 y\right)^{\frac{n+1}{n-1}} \ . \tag{6.118}$$

Devido ao fato de que a função (6.118) deve reduzir-se à forma exponencial quando $n = 1$ (caso newtoniano) e pela definição da função exponencial descrita abaixo:

$$\exp\left(-\beta\right) = \lim_{x \to 0} \left(1 + \beta\right)^{\frac{-1}{x}} \ . \tag{6.119}$$

Obtemos então a forma final da função $f_{\mu\nu}$:

$$f_{\mu\nu} = 1 - \left(1 + \left[\frac{1-n}{1+n}\right] y^+\right)^{-|(1+n)/(1-n)|\frac{1}{A^+}} \ . \tag{6.120}$$

A função de amortecimento viscoelástica $f_{\mu e}$

Para deduzir a função de amortecimento viscoelástica $f_{\mu e}$ faremos a análise considerando o caso em que os efeitos de cisalhamento são desprezados (n=1).

Uma dedução semelhante aquela proposta na seção anterior é necessária, mas para o presente caso uma relação envolvendo a tensão de cisalhamento τ e a taxa de deformação $\dot{\gamma}$ deve ser obtida primeiro. Considerando n=1 essa expressão pode ser obtida usando-se argumentos de ordem de grandeza. A taxa de dissipação instantânea da energia cinética turbulenta para o fluido não newtoniano aqui adotado foi obtida por Pinho (2003) como:

$$\rho\hat{\varepsilon} \equiv 2\hat{\mu}s_{ij}^2 \,. \tag{6.121}$$

A função de amortecimento é válida na região junto a parede onde o fluido está em condições de equilíbrio(produção$_{\mathrm{K}}$=dissipação$_{\mathrm{K}}$),

$$\rho\overline{u\nu}\frac{\partial u}{\partial y} \approx 2\eta_\nu K_e \left|\dot{\varepsilon}\right|^{p-1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \,. \tag{6.122}$$

Aqui foi assumido que $s_{ij} \sim \frac{\partial u}{\partial y}$ e $U \sim u$ na região de parede. Resolvendo esta equação em ordem a $\dot{\varepsilon}$:

$$\dot{\varepsilon} \approx \left[\frac{\rho\overline{u\nu}\left(\partial u/\partial y\right)^{p-2}}{2\eta_\nu K_e}\right]^{\frac{1}{(p-1)}} \frac{1}{\partial u/\partial y} \,. \tag{6.123}$$

Na região da parede a ordem de magnitude de $\overline{u\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{p-2}$ é estimada como: $(i)\, O\left(\overline{u\nu}\right) \approx u_\tau^2$ $(ii)\, O\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \approx \frac{u_\tau}{\overline{\nu}/u_\tau} = \frac{u_\tau^2}{\overline{\nu}}$. Substituindo novamente na (6.123) teremos:

$$\dot{\varepsilon} \approx C\frac{u_\tau^2}{\partial u/\partial y}\left[\frac{\rho}{2\eta_\nu K_e \overline{\nu}^{p-2}}\right]^{\frac{1}{p-1}} \,, \tag{6.124}$$

onde a constante de calibração C foi introduzida. Agora inserindo a Equação (6.124) na definição de μ com n=1, na região da parede:

$$\mu = \frac{\rho}{\overline{\nu}^{p-2}}\left(Cu_\tau^2\right)^{p-1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{p-1} \,. \tag{6.125}$$

Ou ainda, em termos da tensão de cisalhamento, o fluido se comporta de acordo:

$$\tau = K_p\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2-p} \qquad \text{onde} \qquad K_p = \frac{\rho}{\overline{\nu}^{p-2}}\left(Cu_\tau^2\right)^{p-1} \,. \tag{6.126}$$

Com essa expressão tipo lei de potência equacionando o tensão de cisalhamento com a taxa de deformação angular a função de amortecimento viscoelástica pode agora ser deduzida da mesma forma mostrada para a função viscométrica com 2-p no lugar de n. Portanto a função de amortecimento viscoelástica tem a forma

da Equação (6.120) contudo, a equação da tensão cisalhante também proporciona uma definição para a coordenada de parede a ser usada em $f_{\mu e}$. Na subcamada viscosa teremos:

$$K_p \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2-p} = \rho u_\tau^2 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\rho u_\tau^2}{K_p}\right)^{\frac{1}{(2-p)}} . \tag{6.127}$$

Portanto, usando a Equação (6.125) e rearmando a Equação (6.126) o perfil de velocidade junto a parede é dado por:

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{y u_\tau}{\overline{\nu}} C^{\frac{1-p}{2-p}} . \tag{6.128}$$

O lado direito da Eq.(6.127) é a coordenada de parede dessa solução especifica e representa o termo que deve ser usado na contribuição viscoelástica da função de amortecimento. Portanto a função de amortecimento viscoelastica considerando a nova definição da coordenada de parede e o expoente 2-p é:

$$f_{\mu e} = 1 - \left(1 + \left|\frac{p-1}{3-p}\right| y^+ C^{\frac{1-p}{2-p}}\right)^{-\left|\frac{3-p}{p-1}\right| \frac{1}{A^+}} , \tag{6.129}$$

a qual se reduz à função de Van Driest quando $p \rightarrow 1$. Finalmente, a função de amortecimento completa f_μ é descrita pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} f_\mu = & \left\{1 - \left(1 + \left|\frac{1-n}{1+n}\right| y^+\right)^{-\left|\frac{1-n}{1+n}\right| \frac{1}{A^+}}\right\} \\ & \times \left\{1 - \left(1 + \left|\frac{p-1}{3-p}\right| y^+ C^{\frac{1-p}{2-p}}\right)^{-\left|\frac{3-p}{p-1}\right| \frac{1}{A^+}}\right\} . \end{aligned} \tag{6.130}$$

O valor do parâmetro A^+ é 26,5 usado por Nagano e Hishida, o qual é muito próximo do valor adaptado por Van Driest. A constante C é fornecida na Tabela 6.2.

6.8.3 Modelo para a tensão pseudo-elástica

O fecho do conjunto das equações de governo governativas requer um modelo para o novo termo da equação de conservação da quantidade de movimento que surge devido à não linearidade dos termos difusivos viscosos $2\overline{\mu' s_{ij}}$. Este termo relaciona as flutuações da viscosidade com as flutuações do tensor velocidade de deformação. Para desenvolver um modelo para esta nova tensão, a modelagem das flutuações da viscosidade e das flutuações do tensor da taxa de deformação serão feitas separadamente. Posteriormente, elas serão agrupadas e multiplicadas por uma constante de ajuste. O modelo deve naturalmente ser dependente dos expoentes n e p, portanto, essa nova tensão deve desaparecer no limite newtoniano (n=1 e p=1).

Por definição (Pinho, 2003), a flutuação da viscosidade é proporcional a:

$$\mu' \propto K_\nu K_e \left(\dot{\varepsilon'}\right)^{p-1} \left(\dot{\gamma'}\right)^{n-1} , \tag{6.131}$$

onde os termos $\dot{\varepsilon'}$ e $\dot{\gamma'}$ são dados pelas seguintes expressões:

$$\dot{\gamma'} \approx \sqrt{s_{ij}s_{ij}} \quad \text{e} \quad \dot{\varepsilon'} \approx \frac{\sqrt{s_{ij}s_{ij}}}{A_\varepsilon} . \tag{6.132}$$

Fazendo $S \equiv \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$, que representa um termo invariante, teremos após a substituição em (6.132):

$$\mu' \propto \left(\frac{K_\nu K_e}{A_\varepsilon^{p-1}}\right) S^{p+n-2} . \tag{6.133}$$

E consequentemente,

$$\mu' s_{ij} \propto \left(\frac{K_\nu K_e}{A_\varepsilon^{p-1}}\right) S^{p+n-2} s_{ij} . \tag{6.134}$$

Agora devemos estimar S e s_{ij} como funções de quantidades conhecidas visando obter um conjunto fechado de equações. As estimativas para S e s_{ij} serão feitas no contexto da camada limite alem disso, duas hipóteses serão assumidas: (1) o escoamento está na região de equilíbrio (produção$_\text{K}$= dissipação$_\text{K}$) e (2) o novo termo não interfere de forma significativa com esse balanço. Uma vez que na camada limite $S \sim \partial u'/\partial y$ então:

$$P_\kappa = -\rho\overline{uv}\frac{dU}{dy} \approx \rho\varepsilon = 2\overline{\hat{\mu}s_{ij}^2} \approx 2\overline{\mu}S^2 . \tag{6.135}$$

Usando a hipótese da viscosidade turbulenta para as tensões de Reynolds, i.e., estamos a considerar só o primeiro termo do modelo anisotrópico, teremos:

$$\rho C_\mu f_\mu \frac{\kappa^2}{\tilde{\varepsilon}} \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 \sim 2\overline{\mu}S^2 . \tag{6.136}$$

Usando a Equação (6.136) podemos agora estimar S como sendo:

$$S = \sqrt{\frac{\rho C_\mu f_\mu (\kappa^2/\tilde{\varepsilon}) \left(dU/dy\right)^2}{2\overline{\mu}}} , \tag{6.137}$$

ou, em termos mais gerais,

$$S = \sqrt{\frac{\rho C_\mu f_\mu (\kappa^2/\tilde{\varepsilon}) S_{ij}S_{ij}}{2\overline{\mu}}} . \tag{6.138}$$

Dentro da camada limite $s_{ij} \approx \partial u_i/\partial x_j \sim \partial u/\partial y$ e $u_i = \sqrt{(\overline{u_i u_j})}$. Usando o modelo proposto para tensão de Reynolds a estimativa para a flutuação de velocidade é:

$$u_i \sim \sqrt{C_\mu f_\mu \frac{\kappa^2}{\tilde{\varepsilon}}} \sqrt{\frac{dU}{dy}} \tag{6.139}$$

e a estimativa para s_{ij} fica:

$$s_{ij} \sim \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sim \frac{u_i}{L_c} \,. \tag{6.140}$$

L_c é um parâmetro que está relacionado com a escala espacial da turbulência e que considera os efeitos de elevados números de Reynolds turbulento longe da parede e os efeitos de amortecimento junto desta. Longe da parede tem-se:

$$L_c = \frac{\kappa^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \,. \tag{6.141}$$

Próximo da parede L_c deve ser:

$$L_c = \frac{u_\tau^3}{\varepsilon} \,. \tag{6.142}$$

Para acoplar de forma suave ambas as expressões acima, a seguinte expressão geral foi usada:

$$\frac{1}{L_c} = \frac{\varepsilon}{u_R^3} \,, \tag{6.143}$$

onde

$$u_R^2 = \frac{\kappa}{\left|\exp\left[-\left(\kappa/u_\tau^2\right)^\alpha\right] - 1\right|^{\frac{1}{\alpha}}} \,. \tag{6.144}$$

Portanto a expressão final para a nova tensão fica:

$$2\overline{\mu' s_{ij}} = \tilde{C}\frac{K_v K_e}{A_\varepsilon^{p-1}}\left[\frac{\rho C_\mu f_\mu \kappa^2}{2\overline{\mu}\tilde{\varepsilon}} S_{ij} S_{ij}\right]^{\frac{p+n-2}{2}} \sqrt{C_\mu f_\mu \frac{\kappa^2}{\tilde{\varepsilon}}}\,\frac{1}{L_c}\,\frac{S_{ij}}{\sqrt[4]{S_{ij}S_{ij}}} \,, \tag{6.145}$$

onde L_c é dado pela Equação (6.144). Para um escoamento cisalhante completamente desenvolvido a Equação (6.145) assume a forma:

$$2\overline{\mu' s_{ij}} = \tilde{C}\frac{K_v K_e}{A_\varepsilon^{p-1}}\left[\frac{\rho C_\mu f_\mu \kappa^2}{2\overline{\mu}\tilde{\varepsilon}}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right]^{\frac{p+n-2}{2}} \sqrt{C_\mu f_\mu \frac{\kappa^2}{\tilde{\varepsilon}}}\,\frac{1}{L_c}\,\frac{\partial U/\partial y}{\sqrt{|\partial U/\partial y|}} \,. \tag{6.146}$$

Segundo a Equação (6.146), a nova tensão não desaparece no limite newtoniano como deveria, portanto um parâmetro de ajuste $\tilde{C}$ deve ser introduzido de forma a respeitar esse limite. Esse parâmetro e expresso como uma função de n e p e de uma constante C_0 da seguinte forma

$$\tilde{C} = (1 + C_0)^{p+n-2} - 1 \,. \tag{6.147}$$

Este conjunto de equações, sem os dois últimos termos do membro da direita da Eq.(6.104), constituem o modelo isotrópico de turbulência e asseguram o fecho do sistema de equações, onde os restantes parâmetros tomam os valores da Tabela 6.2 e as funções de amortecimento são

$$f_1 = 1.0 \qquad \text{e} \qquad f_2 = 1 - 0.3\exp\left(-R_T^2\right) \,, \qquad \text{com} \qquad R_T = \frac{\kappa^2}{\nu\tilde{\varepsilon}} \,. \tag{6.148}$$

Tabela 6.2: Alguns parâmetros do modelo de turbulência.

C_μ	σ_κ	σ_ε	C_{ε_1}	C_{ε_2}	C_{ε_3}	A_ε	A_2	C
0.08	1.2	1.3	1.45	1.90	1.0	10	0.45	70

Os dois últimos termos da Eq.(6.104) conferem ao modelo a capacidade de prever a anisotropia das tensões normais de Reynolds. O modelo não-linear aqui utilizado é de segunda ordem nos tensores S_{ij} e Ω_{ij} (Gatski e Speziale, 1993), em que os parâmetros e algumas das funções se baseiam no modelo não-linear de Park *et al.*, (2003). Contudo, as funções e parâmetros específicos apresentados em Park *et al.*, (2003) foram aqui modificados de duas maneiras: por um lado retiraram-se as correções de parede ($\tilde{\beta}_{2,wall}$ e $\tilde{\beta}_{3,wall}$), que criavam alguns problemas de realizabilidade; por outro lado introduziram-se as funções f_{1n}, f_{2n} e f_{3n} que tomam em consideração a reologia dos fluidos, o que deve acontecer sem prejuízo da realizabilidade do modelo como explicado mais adiante. Assim, os coeficientes $\tilde{\beta}_2$ e $\tilde{\beta}_3$ são dados por Park *et al.* (2003),

$$\tilde{\beta}_2 = 1.125\, C_\mu\, f_{S1}\, f_w^2 \qquad \text{e} \qquad \tilde{\beta}_3 = 1.125\, C_\mu\, f_{S2}\, f_w^2\,, \tag{6.149}$$

onde

$$f_{S1} = \frac{1+\eta_s\, f_{\mu 2}}{1+4\,\eta_s+4\,\eta_s^2} \qquad \text{e} \qquad f_{S2} = \frac{1+\eta_s\, f_{\mu 2}}{1+\eta_s+8\,\eta_s^2}\,, \tag{6.150}$$

$$\eta_s = 1.125\, C_\mu \max\left(\eta, \xi\right)\,, \tag{6.151}$$

$$\eta = f_w\, S^* \qquad \text{e} \qquad \xi = f_w\, W^*\,, \tag{6.152}$$

$$S^* = \sqrt{2 S_{ij}^* S_{ij}^*} \qquad \text{e} \qquad W^* = \sqrt{2 W_{ij}^* W_{ij}^*}\,. \tag{6.153}$$

Na Eq.(6.153), o asterisco designa valores normalizados por κ, $S_{ij}^* = (\kappa/\varepsilon) S_{ij}$ e $W_{ij}^* = (\kappa/\varepsilon)\Omega_{ij}$. A função $f_{\mu 2}$, que está definida na Eq.(6.154), necessita das quantidades definidas nas Eqs.(6.155) a (6.160), como explicado em Park *et al.* (2003) e aqui reproduzido:

$$f_{\mu 2} = \frac{(15/3)\,(1+g)}{g^2 + 1.125\, C_\mu\, g^3 + A_s}\,, \tag{6.154}$$

$$A_s = \tilde{\alpha}_3^2\, \xi^2 - \tilde{\alpha}_2^2\, \frac{\eta^2}{3}\,, \tag{6.155}$$

$$g = \begin{cases} \frac{1}{3} C_0 + \left(P_1 + \sqrt{P_2}\right)^{\frac{1}{3}} + \operatorname{sign}\left(P_1 - \sqrt{P_2}\right) \left|P_1 - \sqrt{P_2}\right|^{\frac{1}{3}} & P_2 \geq 0\,, \\ \frac{1}{3} C_0 + 2\left(P_1^2 - P_2\right)^{\frac{1}{6}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}}\right)\right) & P_2 < 0\,, \end{cases} \tag{6.156}$$

$$P_1 = C_0 \left[\frac{C_0^2}{27} - \frac{A_s + \tilde{\alpha}_1 \eta^2}{6} + \frac{1}{2}\right]\,, \tag{6.157}$$

Tabela 6.3: Alguns parâmetros dos termos não-lineares do modelo de turbulência.

A	C_0	$\tilde{\alpha}_1$	$\tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_3$
8.4	2.4	-0.48	-0.375	-0.8

$$P_2 = P_1^2 - \left[\frac{C_0^2}{9} - \frac{A_s + \tilde{\alpha_1}\eta^2}{3}\right] . \tag{6.158}$$

Para calcular f_w tem de se resolver a seguinte equação diferencial elíptica

$$\frac{\partial^2 f_w}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{R_t^{\frac{3}{2}}}{A^2 L^2}\left(f_w - 1\right) , \tag{6.159}$$

onde L é uma escala de comprimento de turbulência modificada junto à parede por inclusão da escala de Kolmogorov, sendo por isso dada pela Eq.(6.160) na versão adotada por Park *et al.* (2003),

$$L^2 = \frac{\kappa^3}{\tilde{\varepsilon}^2} + 70^2\sqrt{\frac{\overline{\nu}^3}{\tilde{\varepsilon}}} . \tag{6.160}$$

Os parâmetros restantes constam da Tabela 6.3.

As novas funções f_{1n}, f_{2n} e f_{3n} permitem tomar em consideração o comportamento reológico dos fluidos, e têm diferentes objetivos. Um primeiro modelo resulta de considerar todas estas funções como unitárias, o que conduz a um modelo não-linear de todo idêntico ao usado para fluidos newtonianos, exceto no efeito que a reologia já desempenha sobre o cálculo de κ e ε. Referiremos esta primeira opção como aquela em que as funções f_{1n}, f_{2n} e f_{3n} estão desligadas. Por outro lado, pode-se também melhorar o desempenho da componente não-linear do modelo adotando funções que introduzam a reologia dos fluidos e esta é a opção com as funções ligadas.

O trabalho realizado a este nível é ainda preliminar, mas, como se verá, é desde já possível averiguar das vantagens da segunda formulação, sobretudo junto à parede ($10 < y^+ < 100$). Contudo, é ainda necessário melhorar essas funções por forma a garantir a realizabilidade do modelo em condições de utilização mais alargadas, i.e., para gamas mais alargadas dos parâmetros reológicos.

Na segunda formulação, cujas funções estão definidas abaixo, enquanto f_{1n} e f_{2n} diminuem $\overline{v^2}$ e $\overline{w^2}$, corrigindo assim a anisotropia das tensões de Reynolds longe da parede, a função f_{3n} atua na região $10 < y^+ < 100$ para corrigir os comportamentos de $\overline{u^2}$ e $\overline{v^2}$. Quanto à componente $\overline{w^2}$, a função f_{1n} é suficiente para corrigir o seu comportamento também na região de parede.

Para garantir realizabilidade no modelo, i.e., a positividade de todas as tensões normais de Reynolds, basta considerar a menor das três tensões, $\overline{v^2}$. Para escoamento de corte puro as novas funções devem assim obedecer à seguinte condição

$$\left(\tilde{\beta}_2\, f_{1n} - \tilde{\beta}_3\, f_{2n}\, f_{3n}\right)\left(\frac{dU}{dr}\right)^2 \frac{\kappa^2}{\tilde{\varepsilon}^2} \geq -8 . \tag{6.161}$$

As funções f_{1n}, f_{2n} e f_{3n} aqui propostas são ainda provisórias e foram deduzidas empiricamente com base nos seguintes pressupostos: (i) para fluidos newtonianos (n= p= 1) as funções devem ser unitárias; (ii) as funções devem aumentar a anisotropia das tensões normais de Reynolds para fluidos reofluidificantes na viscosidade viscosimétrica ($n < 1$) e para fluidos reoespessantes na viscosidade extensional ($p > 1$), sendo o efeito de p claramente mais intenso que o de n (da mesma ordem de grandeza que os respectivos efeitos sobre a redução de fricção, ver [4]); (iii) o modelo deve ser realizável pelo menos até ao limite dos valores dos expoentes n e p para os quais existe uma redução de fricção superior ao máximo previsto por Virk *et al.* (1970). Este trabalho reporta uma primeira tentativa, que só realizou parcialmente estes pressupostos. Na derivação dessas funções teve-se em conta os resultados experimentais de Escudier *et al.* (1999) e as medições das tensões normais de Reynolds feitas por Presti (2000) para esses mesmos fluidos, vindo as funções f_{1n}, f_{2n} e f_{3n} definidas da seguinte forma:

$$f_{1n} = \left[|2-n-p| \, \frac{(1+K_e)}{K_e} - 1.125 C_\mu \right]^{-|2-n-p|} , \tag{6.162}$$

$$f_{2n} = (2.1-p)^{-|2-n-p|} , \tag{6.163}$$

$$f_{3n} = 1 + |2-n-p| \left(0.121 A^2 - 0.873 A + 1.671 \right) \times \left[\sqrt{\frac{50}{y^+}} + 500 \left(1 - f_w\right) \varepsilon^+ \right]^{0.45} , \tag{6.164}$$

em que $\tilde{\varepsilon}^+ \equiv (\tilde{\varepsilon}\nu)/u_\tau^4$ e $A = \frac{K_e^{|2-n-p|}}{|2-n-p|+0.1}$.

6.8.4 Resultados e discussão

A análise do comportamento deste modelo faz-se em três etapas: primeiro, estuda-se o caso newtoniano por comparação com resultados experimentais clássicos e de Durst *et al.* (1995); de seguida comparam-se as previsões com os resultados obtidos por Escudier *et al.* (1999) e Resende *et al.* (2006) para a solução aquosa de 0.125% PAA, que foi o fluido utilizado para aferir o modelo de turbulência; finalmente, efetuam-se comparações das previsões numéricas com os resultados experimentais de Escudier *et al.* (1999) e Resende *et al.* (2006) para os restantes fluidos viscoelásticos.

Fluidos newtonianos

Começamos por apresentar na Figura 6.23 a variação do fator de fricção em função do número de Reynolds, comparando-se os valores previstos pelo atual modelo com as previsões do modelo anterior (Cruz *et al.*, 2004) e a equação de Blasius. Os dois conjuntos de previsões estão muito próximos e concordam com a equação de Blasius. As correspondentes previsões dos perfis de velocidade média e da energia cinética de turbulência apresentam-se nas Figuras 6.24 e 6.25 em coordenadas de

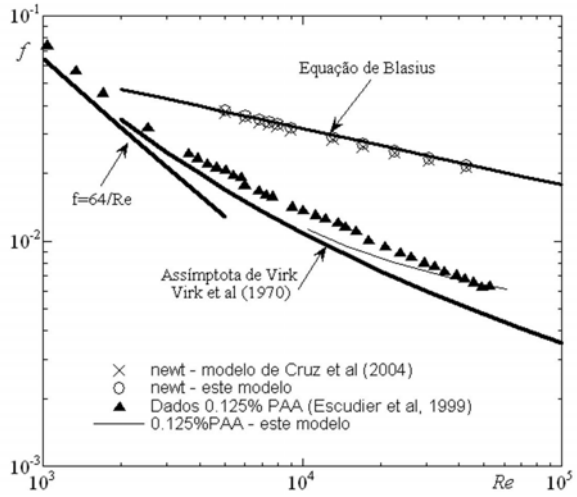


Figura 6.23: Variação do fator de fricção com o número de Reynolds.

parede. As Figuras 6.23 e 6.24 incluem também dados experimentais e previsões relativas à solução aquosa de referência de 0.125% PAA, a ser discutida adiante.

Relativamente aos perfis de velocidade média, a diferença entre as previsões do anterior modelo (Cruz *et al.*, 2004) e do modelo aqui proposto também é pequena e em qualquer dos casos os resultados estão próximos da lei logarítmica de parede. O pequeno afastamento que se observa nos dois casos deve-se ao efeito do baixo número de Reynolds utilizado nas simulações, que nesta gama tem tendência a fazer subir os valores de u^+ (Wei e Willmarth, 1989). O valor de Re = 7430 corresponde às medições de energia cinética de turbulência e das tensões normais de Reynolds de Durst *et al.* (1995) e utilizadas nas comparações da Figura 6.25. Note-se que as medições do coeficiente de fricção e da velocidade média de Durst *et al.* (1995) concordam com a equação de Blasius e aproximam-se da lei logaritmica, da mesma forma que as previsões, respectivamente.

Quanto à previsão de κ, o modelo anterior (Cruz *et al.*, 2004) e o atual prevêem bem o comportamento junto à parede e o pico máximo, mas longe da parede as previsões são mais elevadas que as medições. Para as tensões normais de Reynolds, os resultados são os que estão patentes na Figura 6.25(b), verificando-se que o modelo captura bem as tendências radiais de variação e a posição relativa das tensões. No entanto, enquanto que a tensão normal axial é prevista por excesso, as tensões tangencial e radial são previstas por defeito.

Embora o atual modelo possa ser considerado pior que o anterior em escoamento numa conduta, no caso de escoamento entre placas paralelas ele é francamente superior ao anterior já que foi parcialmente desenvolvido com base nos resultados de simulação numérica direta de Moser *et al.* (1999) com vista a oti-

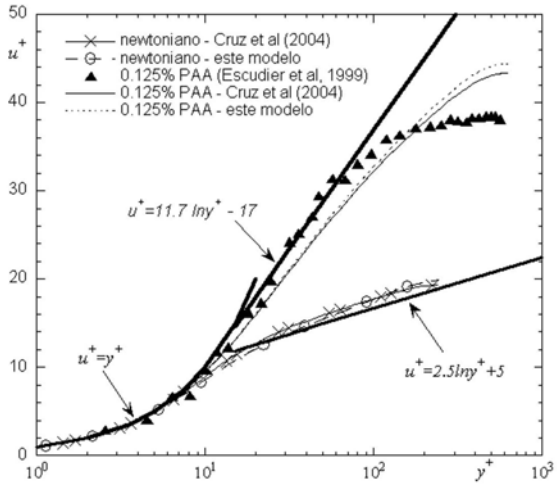


Figura 6.24: Perfis radiais da velocidade média normalizados em coordenadas de parede e comparação com resultados da literatura (Escudier *et al.*, 1999) para fluidos newtonianos (Re = 7430) e solução aquosa de referência de 0.125% PAA (Re = 42950).

mizar as previsões de κ e das tensões normais. Contudo, há aqui duas diferenças relativamente ao modelo otimizado. Em primeiro lugar, seria necessário utilizar as correções de parede $\widetilde{\beta}_{2,wall}$ e $\widetilde{\beta}_{3,wall}$ de Park *et al.* (2003), mas estas dão origem a problemas para o caso da conduta de seção circular e por isso foram retiradas do modelo. Por outro lado, na componente isotrópica do atual modelo essa otimização por comparação com resultados de simulação numérica direta para fluidos newtonianos também não foi feita, pois ele baseia-se no modelo viscoelástico geral de Cruz e Pinho (2003) em que a função f_μ se reduz à do modelo de Nagano e Hishida (1987) e não à função usada por Park *et al.* (2003). Por isso, há discrepâncias na previsão para fluidos newtonianos relativamente a modelos mais recentes e otimizados para estes fluidos, que são capazes de cálculos mais precisos do comportamento de κ e ε, implicando também uma melhor previsão das tensões de Reynolds.

Solução viscoelástica de referência: 0.125% PAA

Como foi referido acima, a componente isotrópica do modelo, antes das alterações aqui introduzidas, foi calibrada por Cruz *et al.* (2004) para fluidos viscoelásticos usando os resultados experimentais obtidos por Escudier *et al.* (1999) com a solução aquosa de 0.125% PAA a Re = 42,900. Por conseqüência, as previsões do modelo são consistentes com os resultados experimentais nessa região, como se observa para o coeficiente de fricção na Figura 6.23 e para a velocidade média na

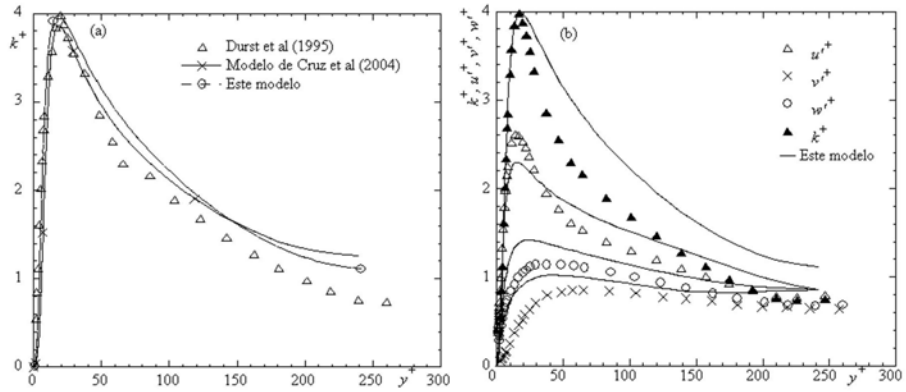


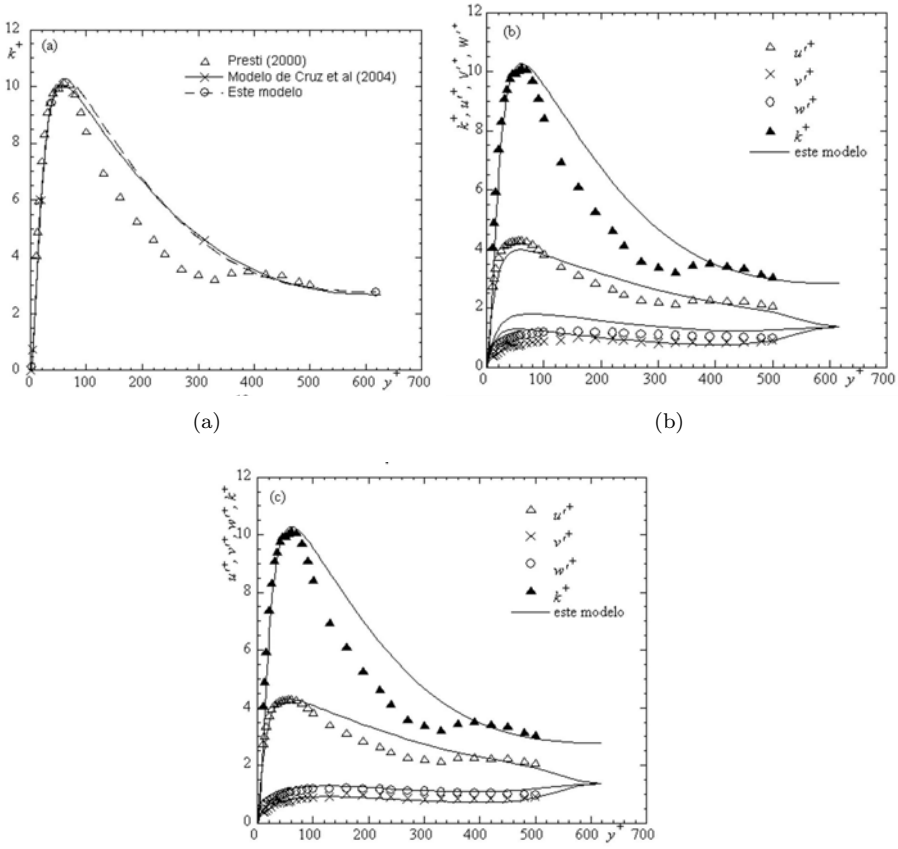
Figura 6.25: Perfis radiais da energia cinética de turbulência (esquerda) e tensões normais de Reynolds (direita) normalizados em coordenadas de parede e comparação com resultados da literatura (Durst *et al.*, 1995) para fluidos newtonianos a Re = 7430.

Figura 6.24.

Para as previsões da energia cinética de turbulência, a Figura 6.26(a) mostra pequenas diferenças relativamente ao modelo anterior, otimizado por Cruz *et al.* (2004), mas o novo modelo é capaz de prever um comportamento anisotrópico das tensões de Reynolds para fluidos viscoelásticos, como se vê na Figura 6.26(b) onde as funções f_{1n} a f_{3n} são unitárias (desligadas). Isto não significa que não exista um efeito da reologia sobre a distribuição das tensões, pois os termos não-lineares nas tensões dependem não linearmente de κ e ε que são fortemente modificados relativamente a um modelo para fluidos newtonianos (Cruz *et al.*, 2004). É possível regular melhor essa dependência ao modificar f_{1n}, f_{2n} e f_{3n} em função da reologia dos fluidos, como se mostra na Figura 6.26(c): as comparações são claramente melhores sobretudo para v' e w', e na região de parede.

Outros fluidos viscoelásticos

Os outros fluidos viscoelásticos aqui testados foram as soluções aquosas de 0.25% CMC, 0.2% XG e a mistura 0.09%/0.09% de XG/CMC medidos nos trabalhos de Escudier *et al.* (1999) e Resende *et al.* (2006). A comparação das previsões dos fatores de fricção com resultados experimentais apresentam-se na Figura 6.27 onde se vê que o novo modelo aqui proposto traz vantagens relativamente ao modelo anterior de Cruz *et al.* (2004), já que aproxima os valores numéricos dos valores experimentais. Mesmo assim, as previsões para a solução de goma de xantano (XG) continuam excessivamente elevadas. Como já tinha sido observado anteriormente (Cruz *et al.*, 2003,2004), as alterações nos perfis de velocidade média são semelhantes aos observados com o coeficiente de fricção, e novamente o modelo



(a) (b)

(c)

Figura 6.26: Perfis radiais de κ (a) e tensões normais de Reynolds em coordenadas de parede e comparação com resultados da literatura (Resende *et al.*, 2006) para 0.125% PAA, Re = 42950: (b) funções f_{1n} a f_{3n} desligadas; (c) funções ligadas.

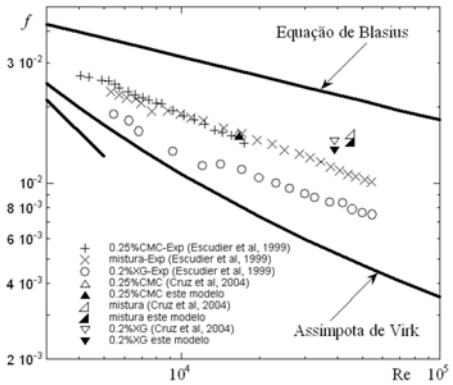


Figura 6.27: Comparação entre valores experimentais e numéricos da variação do factor de fricção com o número de Reynolds para 0.25% CMC, 0.09% CMC/0.09% XG e 0.2% XG.

aqui proposto traz vantagens. Por limitações de espaço os perfis de velocidade média não são aqui apresentados.

Quanto às previsões de quantidades turbulentas, a Figura 6.28 mostra os perfis de energia cinética turbulenta e tensões normais de Reynolds quando as funções f_{1n} a f_{3n} estão desligadas (coluna da esquerda) e ligadas (coluna da direita), respectivamente. As discrepâncias na previsão de κ^+ já ocorriam nos modelos anteriores (Cruz *et al.*, 2003, 2004), embora aqui tenham sido diminuídas. As maiores diferenças em termos de pico ocorrem nas comparações com fluidos contendo goma de xantano (XG) e devem-se fundamentalmente à incapacidade do modelo prever corretamente a elevada redução de arrasto para esses fluidos.

Quanto às tensões normais de Reynolds, a sua anisotropia é capturada razoavelmente bem mesmo quando as funções estão desligadas (valor unitário). É novamente clara a vantagem em utilizar estas funções, que melhoram significativamente a previsão das tensões v'^+ e w'^+. No entanto, as atuais funções apresentam problemas de realizabilidade para valores muito elevados do parâmetro reológico p, e que se acentuam para valores baixos do parâmetro reológico K_e, pelo que são ainda necessárias melhorias ao modelo. De qualquer das formas, o atual modelo de turbulência constitui um avanço importante dado tratar-se do único modelo existente na literatura capaz de prever a anisotropia das tensões de Reynolds para fluidos viscoelásticos, e que foi desenvolvido em conjunto com um modelo reológico.

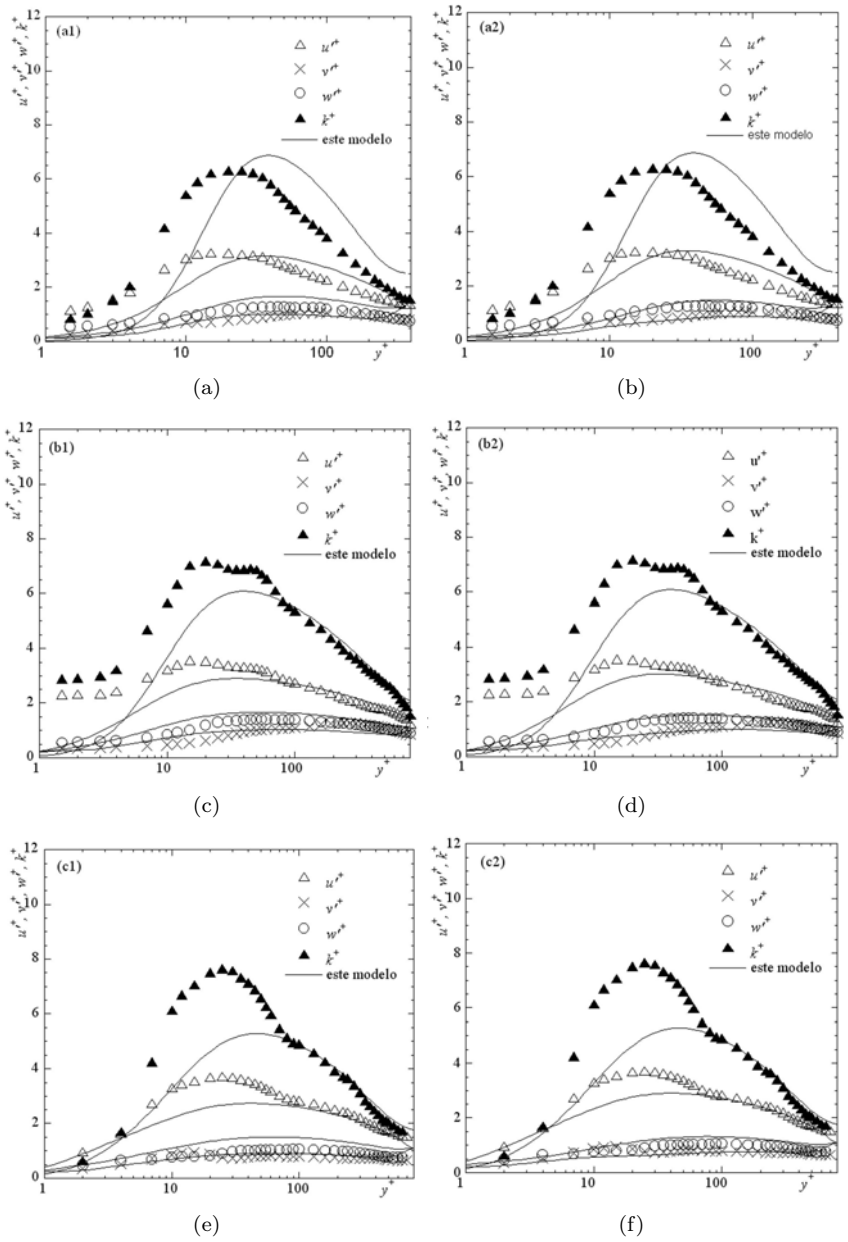


Figura 6.28: Perfis radiais de κ e tensões normais de Reynolds em coordenadas de parede e comparação com literatura (Resende *et al.*, 2006): (a) 0.25% CMC (Re = 16,600); (b) 0.09%/0.09% CMC/XG (Re = 45,200); (c) 0.25XG (Re = 39,000); Coluna esquerda: funções f_{1n} a f_{3n} desligadas; Coluna direita: funções ligadas.

6.9 Modelos de turbulência com base no modelo FENE-P

6.9.1 Introdução

Numa questão tão complexa como a redução de arrasto e as características de escoamentos turbulentos de fluidos viscoelásticos, que ao longo de tantos anos mobilizou tantos investigadores e esforços, é natural que os resultados publicados de simulações DNS abra uma janela que permita o desenvolvimento de novos tipos de fechos de turbulência, agora mais realistas pois baseados em equações constitutivas reológicas verdadeiramente viscoelásticas. Esse esforço está hoje a ser realizado por alguns grupos de investigação, um dos quais dos autores deste documento, mas não há ainda resultados publicados de qualquer um dos grupos. Por isso aquilo que se segue é uma perspectiva da abordagem em curso, e não desemboca ainda num modelo utilizável. É compreensível que a informação aqui disponibilizada seja ainda escassa dado tratar-se de assunto em curso de investigação.

Os trabalhos de DNS publicados, e já revistos anteriormnte neste capítulo, têm-se debruçado sobre algumas modelos, nomeadamente os modelos UCM, Giesekus e FENE-P. É sobre este último modelo que se baseiam as equações que se vão seguir, as quais podem ser facilmente adaptadas a outros modelos.

6.9.2 Equações de governo e necessidades de modelação

Começaremos por apresentar as equações médias que devem ser calculadas num escoamento turbulento de fluidos viscoelásticos cuja reologia é representada pelo modelo FENE-P. Estas equações obtém-se fazendo a média de Reynolds das equações na sua forma instantânea. Algumas destas equações apresentam-se na literatura da especialidade (Dimitropoulos *et al.*, 2001, Housiadas e Beris, 2005), mas Resende e Pinho (2005) apresenta a sua dedução completa bem como a das restantes equações aqui apresentadas. Uma vez que os fluidos viscoelásticos se encontram no estado líquido, a condição de incompressibilidade é assumida em toda esta seção.

As equações fundamentais a resolver foram já apresentadas na Seção 6.3, mas são aqui recordadas. A solução do escoamento de um fluido incompressível requer a solução da equação de conservação da massa (Equação (6.165)), que é depois usada numa forma transformada para calcular a pressão,

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0\,, \tag{6.165}$$

e a equação de conservação de quantidade de movimento,

$$\rho\frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \eta_s\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial(\rho\overline{u_i u_k})}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{\tau}_{ij,p}}{\partial x_k}\,. \tag{6.166}$$

Nas equações (6.165) e (6.166), U_i é a velocidade média, $\overline{p}$ é a pressão média, ρ é a massa especifica do fluido e $-\rho\overline{u_i u_k}$ é o tensor das tensões de Reynolds. A reologia

do fluido é descrita pelo modelo FENE-P em que a tensão extra do fluido é a soma de uma contribuição newtoniana associada ao solvente de viscosidade visco-simétrica igual a η_s com uma contribuição polimérica, como descrito na Equação (6.167). A Equação (6.167) já se apresenta escrita na forma de uma quantidade média no tempo onde S_{ij} é a velocidade de deformação média, que está definida na Equação (6.168). De notar a definição da velocidade de deformação foi já implicitamente utilizada para contabilizar a contribuição do solvente na Equação (6.166),

$$\overline{\tau}_{ij} = 2\eta_s S_{ij} + \overline{\tau}_{ij,p}\,, \tag{6.167}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\,. \tag{6.168}$$

Nesta altura já é óbvio que será no mínimo necessário providenciar fechos para dois termos: a tensão de Reynolds $-\rho\overline{u_i u_k}$ e a tensão média polimérica, $\overline{\tau}_{ij,p}$.

Equação constitutiva reológica para fluidos viscoelásticos

Antes de apresentar uma expressão para a tensão polimérica média $\overline{\tau}_{ij,p}$ que obviamente já deve vir afetada de efeitos turbulentos, é vantajoso apresentar as equações originais instantâneas para o tensor das tensões poliméricas, para que a visão física seja mais completa e compreensível, o que trará benefícios na fase posterior de modelação. No modelo FENE-P (Bird *et al.*, 1980), a contribuição polimérica instantânea para a tensão total do fluido é dada pela seguinte expressão explícita, onde a tensão depende do tensor de conformação instantâneo $\hat{C}_{ij}$,

$$\hat{\tau}_{ij,p} = \frac{\eta_p}{\lambda}\left[f\left(\hat{C}_{kk}\right)\hat{C}_{ij} - f\left(L\right)\delta_{ij}\right]\,. \tag{6.169}$$

De notar que há definições alternativas devido às diferentes formas das funções de $f\left(\hat{C}_{kk}\right)$ e $f\left(L\right)$, que se discutirão mais abaixo.

Por sua vez, o tensor conformação obedece a uma equação diferencial que resulta de um balanço de forças efetuado a um conjunto de modelos moleculares do tipo esfera-mola[27] após a realização de uma adequada média de conjunto (mais detalhes em Bird *et al.*, 1987),

$$f\left(\hat{C}_{kk}\right)\hat{C}_{ij} + \lambda\left(\frac{\partial \hat{C}_{ij}}{\partial t} + \hat{U}_k\frac{\partial \hat{C}_{ij}}{\partial x_k} - \hat{C}_{jk}\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial x_k} - \hat{C}_{ik}\frac{\partial \hat{U}_j}{\partial x_k}\right) = f\left(L\right)\delta_{ij}\,. \tag{6.170}$$

Usando a Equação (6.169), a Equação (6.170) pode reescrever-se na seguinte forma alternativa

$$\left(\frac{\partial \hat{C}_{ij}}{\partial t} + \hat{U}_k\frac{\partial \hat{C}_{ij}}{\partial x_k} - \hat{C}_{jk}\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial x_k} - \hat{C}_{ik}\frac{\partial \hat{U}_j}{\partial x_k}\right) = \overset{\nabla}{\hat{C}}_{ij} = -\frac{\hat{\tau}_{ij,p}}{\eta_p}\,. \tag{6.171}$$

[27] do inglês "dumbbell".

Nestas duas equações, o termo no interior dos parêntesis representa a derivada conectiva superior de Oldroyd do tensor conformação molecular $\overset{\nabla}{\hat{C}}_{ij}$. Esta equação constitutiva introduz o tempo de relaxação do polímero λ, o coeficiente de viscosidade do polímero η_p e o comprimento máximo da cadeia molecular L, que aparece nas duas funções f. Estas várias funções podem ser definidas das seguintes três formas:

$$f\left(C_{kk}\right) = \frac{L^2}{L^2 - C_{kk}} \qquad \text{e} \qquad f\left(L\right) = \frac{L^2}{L^2 - 3}\,, \tag{6.172}$$

$$f\left(C_{kk}\right) = \frac{L^2}{L^2 - C_{kk}} \qquad \text{e} \qquad f\left(L\right) = 1\,, \tag{6.173}$$

$$f\left(C_{kk}\right) = \frac{L^2 - 3}{L^2 - C_{kk}} \qquad \text{e} \qquad f\left(L\right) = 1\,. \tag{6.174}$$

As primeiras duas expressões são as mais utilizadas, sendo a terceira forma menos usada pelas razões explicadas por Beris e Edwards (1994). Quando L^2 é muito superior a 3 os três conjuntos de funções são essencialmente idênticos. A maioria das simulações numéricas do tipo DNS têm sido obtidas pelas duas últimas formulações: a Equação (6.173) é usada mais freqüentemente por Beris e co-autores, enquanto que a formulação (6.174) é usada por Sureshkumar e seus colaboradores. Por uma questão de generalidade de formulação utilizaremos o mais possível as funções $f()$ e quando necessário optaremos pela formulação (6.174).

Daqui resulta que a tensão polimérica média na presença de turbulência $\overline{\tau}_{ij,p}$ é dada pela seguinte equação

$$\overline{\tau}_{ij,p} = \frac{\eta_p}{\lambda}\left[f\left(C_{kk}\right)C_{ij} - f\left(L\right)\delta_{ij}\right] + \frac{\eta_p}{\lambda}\overline{f\left(C_{kk} + c_{kk}\right)c_{ij}}\,. \tag{6.175}$$

Esta expressão contém um novo termo (compare-se com a Equação (6.169), o último termo da direita da Equação (6.175), que terá de ser modelado. Para compactar a notação, a nova quantidade $\left(\overline{f\left(C_{mm} + c_{mm}\right)c_{ij}}\right)$poderá ser escrita como $\overline{f' c_{ij}}$.

A forma média da equação do tensor conformação em regime turbulento é agora

$$\overset{\nabla}{C}_{ij} + \overline{u_k \frac{\partial c_{ij}}{\partial x_k}} - \left(\overline{c_{kj}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{c_{ik}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}\right) = -\frac{\overline{\tau}_{ij,p}}{\eta_p}\,, \tag{6.176}$$

a qual, após substituição da Equação (6.175), pode também ser escrita como

$$\lambda\,\overset{\nabla}{C}_{ij} + \lambda\left[\overline{u_k \frac{\partial c_{ij}}{\partial x_k}} - \left(\overline{c_{kj}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{c_{ik}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}\right)\right] = \\ -\left[f\left(C_{kk}\right)C_{ij} - f\left(L\right)\delta_{ij} + \overline{f\left(C_{kk} + c_{kk}\right)c_{ij}}\right]\,. \tag{6.177}$$

No membro da esquerda da Equações (6.176) e (6.177) há dois novos termos, a saber:

$$CT_{ij} = -\overline{u_k \frac{\partial c_{ij}}{\partial x_k}}\,,$$

representa a contribuição dos termos convectivos, na forma flutuante, para o tensor conformação. As simulações DNS de Housiadas *et al.* (2005) e Li *et al.* (2005), em escoamento turbulento entre duas placas paralelas, mostraram que este termo é desprezável, qualquer que seja a intensidade de redução do arrasto;

$$NLT_{ij} = \overline{c_{kj}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{c_{ik}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}$$

contabiliza a interação entre a flutuação do tensor conformação e a flutuação do gradiente de velocidade. NLT_{ij} não é desprezível, tem origem no termo de deformação da derivada de Oldroyd e necessita de ser modelado.

As Equações (6.176) e (6.177) contém um outro termo do mesmo tipo de NLT_{ij}, i.e. um termo de deformação da derivada de Oldroyd, mas que só envolve quantidades médias pelo que não necessita de modelação e que está incluído em $\overset{\nabla}{C}_{ij}$. O último termo no membro da direita da Equação (6.176) é a tensão polimérica média, que é dada pela Equação (6.175).

Equação de transporte das tensões de Reynolds

A equação de transporte das tensões de Reynolds é

$$\rho\frac{\partial\overline{u_iu_j}}{\partial t} + \rho U_k\frac{\partial\overline{u_iu_j}}{\partial x_k} = P_{ij} + Q_{ij} + Q_{ij}^V + D_{ij,N} + \Pi_{ij} - \rho\varepsilon_{ij}^N - \rho\varepsilon_{ij}^V\,, \qquad (6.178)$$

onde os seguintes quatro termos estão presentes numa equação escrita para fluidos newtonianos:

$$P_{ij} = -\rho\left(\overline{u_iu_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_ju_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)\,,$$

é a produção da tensão de Reynolds;

$$Q_{ij} = -\frac{\partial(\rho\overline{u_iu_ju_k})}{\partial x_k}\,,$$

é o transporte turbulento da tensão de Reynolds (também chamada de difusão turbulenta);

$$D_{ij}^N = \eta_s\frac{\partial^2\overline{u_iu_j}}{\partial x_k\partial x_k}\,,$$

é a difusão molecular associada com o solvente newtoniano;

$$\Pi_{ij} = -\left(\overline{u_i\frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u_j\frac{\partial p'}{\partial x_i}}\right)\,,$$

é o efeito das flutuações de pressão, que inclui quer o termo redistributivo designado por pressão-deformação,

$$\overline{p'\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{p'\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}\,,$$

e o termo normalmente associado com o transporte turbulento (difusivo) associado às flutuações de pressão,

$$-\frac{\partial \overline{p' u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{p' u_j}}{\partial x_i} .$$

Finalmente,

$$\varepsilon_{ij}^N = 2\nu_s \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} ,$$

é a dissipação viscosa direta devido ao solvente newtoniano. Por conveniência e semelhança com a turbulência de fluidos newtonianos, define-se aqui a dissipação viscosa com a viscosidade cinemática;

Embora estes termos sejam formalmente idênticos a termos presentes na correspondente equação para fluidos newtonianos, isso não significa que a sua modelação, quando necessária, seja idêntica à utilizada nos fechos para fluidos newtonianos. De fato, isso não tem de ser assim já que a elasticidade interfere também nestes termos. Naturalmente, que numa primeira aproximação, estes termos poderão ser fechados recorrendo a expressões de modelos de turbulência newtonianos, mas a melhoria do seu desempenho obrigará certamente à adopção/ desenvolvimento de formas modificadas.

Os dois novos termos da Equação (6.178), que logo à partida necessitam de um novo fecho são:

$$Q_{ij}^V = \frac{\partial\left(\overline{u_i \tau'_{jk,p}} + \overline{u_j \tau'_{ik,p}}\right)}{\partial x_k} ,$$

que é o transporte turbulento viscoelástico devido às flutuações das tensões poliméricas;

$$\varepsilon_{ij}^V = \frac{1}{\rho}\left(\overline{\tau'_{jk,p}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{\tau'_{ik,p}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}\right) ,$$

o trabalho viscoelástico, que representa a potência que as cadeias poliméricas dissipam ou armazenam como energia livre. De fato, este termo quantifica o trabalho das tensões elásticas. Alguns autores (Dimitropoulos *et al.*, 2001) chamam a este termo de dissipação viscoelástica devido à semelhança formal e conceitual com a dissipação viscosa do solvente ε_{ij}^N. Por conveniência o termo é definido por forma a ter as mesmas dimensões que ε_{ij}^N.

Podemos usar as definições das tensão polimérica para rescrever estes dois termos da seguinte forma:

- para o transporte turbulento viscoelástico, Q_{ij}^V

$$Q_{ij}^V = \frac{\eta_p}{\lambda}\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_k} , \tag{6.179}$$

onde

$$\begin{aligned} G_{ij} \equiv\ & C_{ik}\overline{f(C_{mm}+c_{mm})u_j} + C_{jk}\overline{f(C_{mm}+c_{mm})u_i} + \overline{f(C_{mm}+c_{mm})c_{ik}u_j} \\ & + \overline{f(C_{mm}+c_{mm})c_{jk}u_i} . \end{aligned} \tag{6.180}$$

• para o trabalho viscoelástico, ε_{ij}^V

$$\varepsilon_{ij}^V = \frac{\eta_p}{\rho\lambda}\left[C_{ik}\overline{f(C_{mm}+c_{mm})\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + C_{jk}\overline{f(C_{mm}+c_{mm})\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}\right.$$
$$\left. + \overline{f(C_{mm}+c_{mm})c_{ik}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{f(C_{mm}+c_{mm})c_{jk}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}\right]. \tag{6.181}$$

Equação de transporte da energia cinética de turbulência

Esta equação pode obter-se por contração dos índices da equação de transporte das tensões de Reynolds e usando a definição de κ (energia cinética de turbulência), de que resulta

$$\rho\frac{D\kappa}{Dt} + \rho\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\rho\overline{u_i\frac{\partial\kappa'}{dx_i}} - \frac{\partial\overline{p'u_i}}{\partial x_i} + \eta_s\frac{\partial^2\kappa}{\partial x_i\partial x_i} - \eta_s\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}$$
$$+ \frac{\partial\overline{\tau'_{ik,p}u_i}}{\partial x_k} - \overline{\tau'_{ik,p}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}. \tag{6.182}$$

Como na equação das tensões de Reynolds, a Equação (6.182) tem dois termos novos que necessitam de ser modelados: o transporte viscoelástico turbulento (aqui chamado Q^V) e a contração do trabalho viscoelástico (aqui chamado ε^V). Utilizando o tensor conformação, estas duas quantidades podem ser rescritas como

$$Q^V \equiv \frac{\partial\overline{\tau'_{ik,p}u_i}}{\partial x_k} = \frac{\eta_p}{\lambda}\frac{\partial\left[C_{ik}\overline{f(C_{mm}+c_{mm})u_i} + \overline{c_{ik}f(C_{mm}+c_{mm})u_i}\right]}{\partial x_k}, \tag{6.183}$$

$$\varepsilon^V \equiv \frac{1}{\rho}\overline{\tau'_{ik,p}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} = \frac{\eta_p}{\rho\lambda}\left[C_{ik}\overline{f(C_{mm}+c_{mm})\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}\right.$$
$$\left. + \overline{c_{ik}f(C_{mm}+c_{mm})\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}\right]. \tag{6.184}$$

O quarto termo no lado direito da Equação (6.182) é a dissipação viscosa de κ devido ao solvente e é designada por ε^N.

Equação de transporte da taxa de dissipação de energia cinética de turbulência

A equação deduzida por Resende e Pinho (2005) para a taxa de dissipação da energia cinética de turbulência devido ao solvente (ε^N) é

$$2\nu_s\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial(\rho\frac{Du_i}{Dt})}{\partial x_m}} + 2\nu_s\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial(\rho u_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k})}{\partial x_m}} + 2\nu_s\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial(\rho\frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k})}{\partial x_m}}$$
$$+ 2\nu_s\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial(\frac{\partial p'}{\partial x_i})}{\partial x_m}} - 2\rho{\nu_s}^2\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2})}{\partial x_m}} - 2\nu_s\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial(\frac{\partial\tau'_{ik,p}}{\partial x_k})}{\partial x_m}} = 0. \tag{6.185}$$

Aqui só há um termo novo, o último termo do lado direito, que necessita de modelação. Note-se, contudo, que no contexto da turbulência para fluidos newtonianos todos os termos desta equação são modelados. Novamente, e à semelhança do que já foi dito a propósito da equação de transporte das tensões de Reynolds, os termos presentes no contexto de um fluido newtoniano poderão ter que ser modelados de forma diferente devido à ação dos efeitos não newtonianos.

6.9.3 Desenvolvimentos futuros

O desafio que se coloca agora é o de simplificar estas equações a partir de uma compreensão física dos fenômenos moleculares ao nível dos polímeros, e de resultados de DNS. Para este esforço será útil analisar por exemplo, a relação entre c_{mm} e C_{mm}, ou a importância relativa de todos os termos do balanço de tensão polimérica, tensão de Reynolds ou energia cinética de turbulência. Poderá ser necessário formular equações exatas nas correlações cruzadas, que surgem entre os tensores flutuantes da conformação, da velocidade de deformação, gradiente de deformação e também do vector velocidade.

De qualquer das formas, o modelo a adotar integra-se num contexto estratégico semelhante ao que existe para fluidos newtonianos. De facto, continua a existir uma tensão de Reynolds e será necessário optar por uma formulação de 1ª ou 2ª ordem, ou por uma formulação algébrica, que virá modificada pela presença dos novos termos associados à contribuição polimérica. Para além destas modificações, será ainda necessário modelar os novos termos e haverá diferentes níveis de complexidade, desde modelos algébricos a equações de transporte das várias incógnitas.

O tema é muito convidativo e está incipiente, correspondendo a um esforço de investigação de diversos grupos, não havendo por enquanto resultados ou modelos publicados.

6.9.4 Modelos para outras equações constitutivas de fluidos

Outras equações constitutivas, como por exemplo os modelos de Giesekus, de Phan-Thien-Tanner, Larson, entre outros, podem escrever-se da mesma forma, i.e., pela Equação (6.167) a que se junta uma equação semelhante à Equação (6.169) e outras semelhantes às Equações (6.170) e (6.171), sendo que a diferença entre os modelos está na forma específica das funções $f(C_{kk})$ e na existência de alguns coeficientes ou de algum termo extra equivalentes às Equações (6.170) e (6.171).

Assim, no essencial os diferentes modelos acabam por envolver o tensor conformação, daí resultando que as equações de transporte e da tensão polimérica em regime turbulento possuem o mesmo tipo de termos que existem quando o modelo constitutivo reológico de base é o modelo FENE-P, i.e., as mesmas correlações entre quantidades flutuantes. É lógico pois que os fechos desenvolvidos para os novos termos, no âmbito de uma equação constitutiva FENE-P, serão também do mesmo tipo, diferindo nos valores numéricos das constantes de proporcionalidade

ou em pequenos ajustes, que poderão ser aferidas por comparação com resultados obtidos por DNS, ou eventualmente haverá o aparecimento de um ou outro novo termo. A tarefa estará pois simplificada, uma vez que aquilo que se afigura mais difícil no desenvolvimento deste novo tipo de modelos de turbulência não é a quantificação numérica das constantes de proporcionalidade, que é feita facilmente por comparação com resultados de DNS ou experimentais, mas sim encontrar as dependências adequadas entre as diversas quantidades médias que sejam capazes de reproduzir o verdadeiro comportamento do termo a modelar. Assim, encontrar a relação funcional entre diversas quantidades médias para quantificar um termo a necessitar de modelação é uma tarefa primordial para conseguir atingir o objetivo de desenvolver um modelo de turbulência para a equação constitutiva FENE-P.

6.10 Referências

Achia BU e Thompson DW; "Structure of the turbulent boundary layer in drag-reducing pipe flow," *J. Fluid Mech.* **81**, 439-464 (1977).

Alves MA, Pinho FT e Oliveira FT; "Study of steady pipe and channel flows of a single-mode Phan-Thien-Tanner fluid," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **101**, 55-76 (2001).

Aris R; "Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics," Dover Publications, Nova Iorque (1962).

Astarita G e Marrucci G; "Principles of non-Newtonian Fluid Mechanics," McGraw Hill, Nova Iorque (1974).

Azouz I e Shirazi SA; "Turbulent flow of drag-reducing fluids in annular passages," FED-Vol. 179, *Numerical Methods for Non-Newtonian Fluid Dynamics*, ASME 1994, 71-81.

Beris AN e Edwards BJ; "Thermodynamics of flowing systems with internal microstructure," Oxford University Press, New York (1994).

Bird RB, Armstrong RC e Hassager O; "Dynamics of Polymeric Liquids. Volume 1: Fluid Mechanics," Wiley, Nova Iorque (1987).

Bird RB, Curtiss CF, Armstrong RC e Hassager O; "Dynamics of Polymeric Liquids. Volume 2: Kinetic Theory," Wiley, Nova Iorque (1987).

Bird RB e Curtiss CF; "Thermoviscoelasticity: continuum-molecular connections," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **79**, 255-259 (1998).

Bird RB, Dotson PJ e Johnson NL; "Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain model," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **7**, 213-235 (1980).

Bird RB, Stewart WE e Lightfoot EN; *Transport Phenomena*, 2ª edição, John Wiley & Sons Inc, Nova Iorque (2002).

Boger DV e Walters K; "Rheology phenomena in focus," Elsevier Science, Amsterdam (1993).

Castro AG, Covas JA e Diogo AC; "Reologia e suas aplicações industriais," *Série Ciência e Técnica*, Instituto Piaget (2001).

Cruz, DOA, Maneschy CE, Macedo EN e Quaresma JNN; "A turbulence model for computing the flow of power law fluids within circular tubes," *Hybrid Methods in Engineering* **2**, 1-13 (2000).

Cruz DOA e Pinho FT; "Turbulent pipe flow predictions with a low Reynolds number $\kappa - \varepsilon$ model for drag reducing fluids," *J. Non-Newt. Fluid. Mech.* **114**, 109-148 (2003).

Cruz DOA, Pinho FT e Resende PR; "Modelling the new stress for improved drag reduction predictions of viscoelastic pipe flow," *J. Non-Newt. Fluid. Mech.* **121**, 127-141 (2004).

Cruz DOA e Pinho FT; "Fully-developed pipe and channel flows of multimode viscoelastic fluids," Artigo submetido à revista *J. Non-Newt. Fluid. Mech.* (2006).

Curtiss CF e Bird RB; "Thermal conductivity of dilute solutions of chainlike polymers," Relatório interno nº WIS-TCI-867 da University of Wisconsin-Madison, Theoretical Chemistry Institute (1997).

De Angelis E, Casciola CM e Piva R; "DNS of wall turbulence: dilute polymers and self-sustaining mechanisms," *Computers & Fluids* **31**, 495-507 (2002).

Den Toonder JMJ, Hulsen MA, Kuiken GDC e Nieuwstadt FTM; "Drag reduction by polymer additives in a turbulent pipe flow: numerical and laboratory experiments," *J. Fluid Mech.* **337**, 193-231 (1977).

Den Toonder JMJ, Nieuwstadt FTM e Kuiken GDC; "The role of elongational viscosity in the mechanism of drag reduction by polymer additives," *Appl Sci. Res.* **54**, 95-123 (1995).

Dimitropoulos CD, Sureshkumar R e Beris AN; "Direct numerical simulation of viscoelastic turbulent channel flow exhibiting drag reduction: effect of the variation of rheological parameters," *J. Non-Newt. Fluid. Mech.* **79**, 433-468 (1998).

Dimitropoulos CD, Sureshkumar R, Beris AN e Handler RA; "Budgets of Reynolds stress, kinetic energy and streamwise enstrophy in viscoelastic turbulent channel flow," *Phys. Fluids* **13**, 1016-1027 (2001).

Dodge DW e Metzner AB; "Turbulent flow of non-Newtonian systems," *AIChEJ* **5**(2), 189-204 (1959).

Durst F, Jovanovic J e Sender J; "LDA measurements in the near-wall region of a turbulent flow," *J. Fluid Mech.* **295**, 305-335 (1995).

Durst F, Keck T e Kleine R; "Turbulence quantities and Reynolds stress in pipe flow of polymer solutions measured," *6th Symposium on Turbulence in Liquids*, Chemical Eng. Dept., University of Missouri-Rolla, 55-65 (1979).

Durst F e Rastogi AK; "Calculations of turbulent boundary layer flows with drag reducing polymer additives," *Phys. Fluids* **20**, 1975-1985 (1977).

Edwards MF e Smith R; "The use of eddy viscosity expressions for predicting velocity profiles in Newtonian, non-Newtonian and drag reducing turbulent pipe flow," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **7**, 153-169 (1980).

Escudier MP, Gouldson I e Jones DM; "Taylor vortices in Newtonian and shear-thinning liquids," *Proc. R. Soc. London A* **449**, 155-176 (1995).

Escudier MP, Presti F e Smith S; "Drag reduction in the turbulent pipe flow of polymers," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **81**, 197-213 (1999).

Fuller GG, Cathey CA, Hubbard B e Zebrowski Be; "Extensional viscosity measurements for low-viscosity fluids," *J. Rheology* **31** (3), 235-249 (1987).

Gatski TB e Speziale CG; "On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows," *J. Fluid Mech.* **254**, 59-78 (1993).

Georgiou GC e Vlassopoulos D; "On the stability of the simple shear flow of a Johnson-Segalman fluid," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **75**, 77-97 (1998).

Gupta VK, Sureshkumar R e Khomami B; "Passive scalar transport in polymer drag-reduced turbulent channel flow," *A. I. Ch.E. J.* **51** (7), 1938-1950 (2005).

Li C-F, Gupta VK, Sureshkumar R e Khomami B; "Turbulent channel flow of dilute polymeric solutions: Drag reduction scaling and an eddy viscosity model," aceito para publicação no *J. Non-Newt. Fluid Mech.* (2006).

Gyr A e Bewersdorff HW; "Drag reduction of turbulent flow by additives," Kluwer Academic Publishers (1995).

Hassid S e Poreh M; "A turbulent energy model for flows with drag reduction," *Trans. ASME J. Fluids Eng.* **97**, 234-241 (1975).

Hassid S e Poreh M; "A turbulent energy dissipation model for flows with drag reduction," *J. Fluids Eng.* **100**, 107-112 (1978).

Hinch EJ; "Mechanical models of dilute polymer solutions in strong flows," *Phys. Fluids* **20**(10), S22-S30 (1977).

Hinze, JO; "Turbulence," 2nd edition, McGraw- Hill (1975).

Housiadas KD e Beris AN; "Characteristic scales and drag reduction evaluation in turbulent channel flow of nonconstant viscosity viscoelastic fluids," *Phys. Fluids* **16**(5), 1581-1586 (2004).

Housiadas KD e Beris AN; "An efficient fully implicit spectral scheme for DNS of turbulent viscoelastic channel flow," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **122**, 243-262 (2004).

Housiadas KD e Beris AN; "Viscoelastic effects on higher order statistics and on coherent structures in turbulent channel flow," *Phys. Fluids* **17**(3), pdf file 35106 (2005).

Hoyt JW; "The effect of additives on fluid friction," *Trans. ASME J. Basic Eng.* **94**, 258-285 (1972).

Hoyt JW e Sellin RHJ; "Scale effects in polymer solution pipe flow," *Exp. Fluids* **15**, 70-74 (1993).

Huilgol RR e Phan-Thien N; "Fluid Mechanics of Viscoelasticity," Elsevier, Amsterdam (1997).

Jones WP e Launder BE; "The prediction of laminarization with a two- equation model of turbulence," *Int. J. Heat and Mass Transfer* **15**, 301-314 (1972).

Larson RG; "Constitutive equations for polymer melts and solutions," Butterworths, Boston (1988).

Larson RG; "The structure and rheology of complex fluids," Oxford University Press, Oxford (1999).

Li C-F, Sureshkumar R e Khomami B; "Influence of rheological parameters on polymer induced turbulent drag reduction," artigo aceito para publicação no *J. Non-Newt. Fluid Mechanics* (2006).

Lielens G, Keunings R e Legat V; "The FENE-L and FENE-LS closure approximations to the kinetic theory of finitely extensible dumbbells," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **87**, 179-196 (1999).

Luchik TS e Tiederman WG; "Turbulent structure in low concentration drag reducing channel flows," *J. Fluid Mech.* **190**, 241-263 (1988).

Lumley JL; "Drag reduction in two-phase and polymer flows," *Phys. Fluids* **20**(10), S64-S71 (1977).

Malin MR; "Turbulent pipe flow of power-law fluids," *Int. Comm. Heat and Mass Transf.* **24**, 977-988 (1997).

Massah H, Kontomaris K, Schowalter WR e Hanratty TJ; "The configurations of a FENE bead-spring chain in transient rheological flows and in a turbulent flow," *Phys. Fluids A* **5**, 881-890 (1993).

Massah H e Hanratty TJ; "Added stresses because of the presence of FENE-P bead-spring chains in a random velocity field," *J. Fluid Mech.* **337**, 67-101 (1997).

Mendes MPC, Pinho FT e Cruz DOA; "A turbulence model for the prediction of the heat transfer reduction of viscoelastic fluid flows," Artigo 1706.pdf, COBEM 2005, *18th International Congress of Mechanical Engineering*, 6- 11 de Novembro de 2005, Ouro Preto, MG, Brasil.

Mizushina T, Usui H e Yoshida T; "Turbulent pipe flow of dilute polymer solutions," *J. Chem. Eng. Japan* **7**, 162-167 (1974).

Monin AS e Yaglom AM; "Statistic Fluid Mechanics," Volume 2, MIT Press, Cambridge (1975).

Moser RD, Kim J e Mansour NN; "Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $\mathrm{Re}_\tau = 590$," *Phys. Fluids* **11**, 943-945 (1999).

Nagano Y e Hishida M; Improved form of the $\kappa - \varepsilon$ model for wall turbulent shear flows," *J. Fluids Eng.* **109**, 156-160 (1987).

Nagano Y e Shimada M; "Modeling the dissipation rate equation for two-equation turbulence model," *Ninth Symposium on "Turbulent Shear Flows"*, Kyoto, Japão, 16-18 de Agosto de 1993, artigo 23-2 (1993).

Oldroyd JG; "On the formulation of rheological equations of state," *Proc. Royal Soc.* **A200**, 523-541 (1950).

Oliveira PJ e De Angelis E, Casciola CM e Piva R; "DNS of wall turbulence: dilute polymers and self-sustaining mechanisms," *Computers & Fluids* **31**, 495-507 (2002).

Orlandi P; "A tentative approach to the direct simulation of drag reduction by polymers," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **60**, 277-301 (1995).

Papenhuijzen JMP; "The role of particle interactions in the rheology of dispersed systems," *Rheol. Acta* **11**, 73-88 (1972).

Park TS e Sung HJ; "A nonlinear low-Reynolds-number $\kappa - \varepsilon$ model for separated and reattaching flows - I. Flow field computations," *Int. J. Heat Mass Transfer* **38**, 2657-2666 (1995).

Park TS, Sung HJ e Suzuki K; "Development of a nonlinear near-wall turbulence model for turbulent flow and heat transfer," *Int. J. Heat Fluid Flow* **24**, 29-40 (2003).

Patankar SV; "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," McGraw-Hill, Nova Iorque (1980).

Patel VC, Rodi W e Scheuerer G; "Turbulence models for near wall and low Reynolds number flows: a review," *AIAA J.* **23**(9), 1308-1319 (1985).

Pereira AS e Pinho FT; "Turbulent pipe flow characteristics of low molecular weight polymer solutions," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **55**, 321-344 (1994).

Pereira AS e Pinho FT; "Reologia de suspensões tixotrópicas de base argilosa (Laponite)," *Mecânica Experimental* **4**, 51-63 (1999).

Pereira AS e Pinho FT; "Turbulent pipe flow of thixotropic fluids," *Int. J. Heat Fluid Flow.* **23**, 36-51 (2002).

Peterlin A; "Hydrodynamics of macromolecules in a velocity field with longitudinal gradient," *J. Polymer Sci.* **4**, 287-291 (1966).

Peters GWM e Baaijens FPT; "Modelling of non-isothermal viscoelastic flows," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **68**, 205-224 (1997).

Phan-Thien N e Tanner RI; "A new constitutive equation derived from network theory," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **2**, 353-365 (1977).

Phan-Thien N; "A nonlinear network viscoelastic model," *J. Rheology* **22**(3), 259-283 (1978).

Pinho FT e Whitelaw JH; "Flow of non-Newtonian fluids in a pipe," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **34**, 129-144 (1990).

Pinho FT; "The finite-volume method applied to computational rheology: II-Fundamentals for stress-explicit fluids," *e-rheo.pt* **1**, 63-100 (2001).

Pinho FT; "A GNF framework for turbulent flow models of drag rducing fluids and proposal for a $\kappa - \varepsilon$ type closure," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **114**, 149-184 (2003).

Pinho FT; "A qualitative assessment of the role of a third invariant of the rate of deformation tensor dependent viscosity on turbulent flow," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **78**, 1-25 (1998).

Politis S; "Turbulence modelling on inelastic power law fluids," Internal report, Dep. Mech. Eng., Imperial College, UK, also Internal report of Brite project RIIB.0085.UK (H) (1989).

Poole RJ e Escudier MP; "Turbulent flow of non-Newtonian liquids over a backward facing step. Part II: Viscoelastic and shear-thinning liquids," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **109**, 193-230 (2003).

Poreh M e Dimant Y; "Velocity distributions and friction factor in pipe flows with drag reduction," *Proceedings of the Ninth International Symposium on Naval Hydrodynamics*, Office of Naval Research **2**, 1305-1323 (1972).

Poreh M e Hassid S; "Mean velocity and turbulent energy closures for flows with drag reduction," *Phys. Fluids* **20** (10), S193-S196 (1977).

Presti F; "Investigation of transitional and turbulent pipe flow of non-Newtonian fluids," Tese de doutoramento, Universidade de Liverpool, Reino Unido (2000).

Reischman MM e Tiederman WG; "Laser-Doppler anemometer measurements in drag-reducing channel flows," *J. Fluid Mech.* **70**, 369-392 (1975).

Resende PR, Escudier MP, Presti F, Pinho FT e Cruz DOA; "Numerical predictions and measurements of Reynolds normal stresses in turbulent pipe flow of polymers," *Int. J. Heat and Fluid Flow* **27**, 204-219 (2006).

Resende PMR e Pinho FT; "Time-average governing equations for turbulent flow of viscoelastic fluids represented with FENE-P model," Relatório interno do Centro

de Estudos de Fenómenos de Transporte (CEFT), Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal, 9 de Novembro de 2005.

Schlichting H e Gersten K; "Boundary-layer theory," 8ª edição, Springer-Verlag, Berlim (1999).

Sedov LI; "A course in continuum mechanics," Vol. 1, Walters-oordhoft Publishers, Gröningen, Holanda (1971).

Shin S e Cho YI; "Laminar heat transfer in a rectangular duct with a non-Newtonian fluid with temperature-dependent viscosity," *Int. J. Heat and Mass Transfer* **37**, 19-30 (1994).

Stokes JR, Graham LJW, Lawson NJ e Boger DV; "Swirling flow of viscoelastic fluids. Part 2: Elastic effects," *J. Fluid Mech.* **429**, 117-153 (2001).

Stelter M, Brenn G, Yarin AL, Singh RP e Durst F; "Validation and application of a novel elongational device for polymer solutions," *J. Rheol.* **44**(3), 595-616 (2000).

Stelter M, Brenn G, Yarin AL, Singh RP e Durst F; "Investigation of the elongational behavior of polymer solutions by means of an elongational rheometer," *J. Rheol.* **46**(2), 507-527 (2002).

Sureshkumar R, Beris AN e Handler RA; "Direct numerical simulation of the turbulent channel flow of a polymer solution," *Phys. Fluids* **9**, 743-755 (1997).

Tanner RI; "Engineeering Rheology," 2ª edição, *Oxford Eng. Science Series* **52**, Oxford University Press, Nova Iorque (2000).

Tennekes H e Lumley JL; "A first course in turbulence," MIT Press, Cambridge (1972).

Toms BA; "Some observations of the flow of linear polymer solutions through straight tube at large Reynolds numbers," *Proc. Int. Congress Rheology* **2**, Amsterdam: North- Holland, 135-141 (1948).

Wapperom P; "Non-isothermal flows of viscoelastic fluids. Thermodynamics, analysis and numerical simulation," Tese de doutoramento, Universidade Técnica de Delft, Holanda (1995).

Wapperom P e Hulsen MA; "Thermodynamics of viscoelastic fluids: The temperature equation," *J. Rheol.* **42**(5), 999-1019 (1998).

Warholic MD, Massah H e Hanratty TJ; "Influence of drag reducing polymers on turbulence: effects of Reynolds number, concentration and mixing," *Exp. in Flluids* **27**, 461-472 (1999).

Wei T e Willmarth WW; "Reynolds number effects on the structure of a turbulent channel flow," *J. Fluid Mech.* **204**, 57-95 (1989).

White FM; "Viscous Fluid Flow," 2ª edição, Mc Graw-Hill, Nova Iorque (1991).

Van Driest ER; "On turbulent flow near a wall," *J. Aeronautical Sci.* **23**, 1007-1011 (1956).

Virk PS, Merril EW, Mickley HS, Smith KA e Mollo-Christensen EL; "The Toms phenomenon: turbulent pipe flow of dilute polymer solutions," *J. Fluid Mech.* **30**, 305-328 (1967).

Virk PS, Mickley HS e Smith KA; "The ultimate asymptote and mean flow structure in Toms phenomenon," *ASME J. Applied Mech.* **92**, 488-493 (1970).

Virk PS; "Drag reduction fundamentals," *AIChEJ* **21**, 625-656 (1975).

Younis BA; "Progress in turbulence modelling for open channel flows," in *Floodplain Processes*, MG Anderson, DE Wallace, PD Bates (editors), Wiley, Nova Iorque, Chapter 9, 299-332 (1996).

Yu B e Kawaguchi Y; "Effect of Weissenberg number on the flow structure: DNS study of drag-reducing flow with surfactant additives," *Int. J. Heat Fluid Flow* **24**(4), 491-499 (2003).

Zhou Q e Akhavan R; "A comparison of FENE and FENE-P dumbbell and chain models in turbulent flow," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **109**, 115-155 (2003).

Zirnsak MA e Boger DV; "Axisymmetric entry flow of semi-dilute xanthan gum solutions," *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **79**, 105-136 (1998).