Turbulência

Atila P. Silva Freire
Programa de Engenharia Mecânica
COPPE/UFRJ

Anderson Ilha
Diretoria de Metrologia Científica e Industrial
Inmetro

Marcelo J. Colaço
Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais
Instituto Militar de Engenharia

Editores

ABCM – Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica
COPPE/UFRJ – Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia
IME – Instituto Militar de Engenharia

Coleção Cadernos de Turbulência
Turbulência, Volume 5, Tomo 1.

5ª Escola de Primavera em Transição e Turbulência
Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro
25 a 29 de setembro de 2006

Editores

Atila P. Silva Freire, *Programa de Engenharia Mecânica*, COPPE/UFRJ
Anderson Ilha, *Diretoria de Metrologia Científica e Industrial*, Inmetro
Marcelo J. Colaço, *Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais*, *IME*

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Processos Técnicos da
Biblioteca do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro

Escola de Primavera em Transição e Turbulência (5.:2006: Rio de Janeiro, RJ)
Turbulência: Anais da V Escola de Primavera em Transição e Turbulência,
Rio de Janeiro, 25 a 29 de setembro de 2006 /editores Atila P. Silva Freire,
Anderson Ilha e Marcelo J. Colaço. Rio de Janeiro: ABCM, 2006.
XVI, 466 p.; 23,5 cm – (Coleção Cadernos de Turbulência. Turbulência, V. 5, Tomo 1)
Inclui bibliografias
1. Turbulência. 2. Mecânica dos fluidos. 3. Fenômenos de transporte.
I. Freire, Atila P. Silva II. II. V EPTT (5.:2006: Rio de Janeiro, RJ).
III. Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica. IV. Título. II.
Série
629.1332
E74t
ISBN (10 dígitos): 85-85769-24-6
ISBN (13 dígitos): 978-85-85769-24-6

Copyright 2006, Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica, ABCM.
A ABCM não autoriza a reprodução de qualquer parte desta publicação para sua distribuição em geral, para promoções, para a criação de novas publicações ou para a venda. Apenas através de prévia solicitação, por escrito, e em casos.
Documento preparado pelos Editores em LaTeX.
Impresso no Brasil pela Gráfica Graffito.

ISBN 85-85769-24-6
9 788585 769246

Conteúdo

1 Mecânica do Contínuo e Turbulência **1**
1.1 Introdução 1
1.2 Descrição do movimento 2
1.3 Conjuntos materiais 4
1.4 Gradiente de deformação, estiramento, cisalhamento e rotação . . . 5
1.5 Gradiente de velocidades, taxa de deformação e giro 7
1.6 Equações de transporte para os tensores gradiente de velocidade, taxa de deformação e vorticidade 10
1.7 Convecção e difusão da vorticidade 10
1.8 Mudança de observador 11
1.9 Identificação de vórtices 12
1.10 Referências 14

2 Estimativas rigorosas para escoamentos turbulentos baseadas nas equações de Navier-Stokes **17**
2.1 Introdução 17
2.2 As equações de Navier-Stokes 18
2.3 Quantidades médias, médias amostrais e soluções estatísticas . . . 19
2.4 Teoria de Kolmogorov e alguns resultados rigorosos 21
2.4.1 A lei de dissipação de energia de Kolmogorov 21
2.4.2 Cascata de energia 22
2.5 Escoamento em um canal liso sob um gradiente de pressão (e em outras geometrias) 24
2.5.1 Estimativa por baixo para C_f 26
2.5.2 Estimativa por cima para C_f 27
2.6 Referências 31

3 Introdução à teoria estatística da turbulência **37**
3.1 Introdução 37
3.2 Descrição estatística da turbulência 40
3.2.1 Aspectos cinéticos 40
3.2.2 Aspectos dinâmicos 55
3.3 Fenomenologia de Kolmogorov 63

3.3.1 Leis de escala na faixa inercial 63
3.3.2 Complexidade computacional das DNS 66
3.3.3 Decaimento temporal da energia 68
3.3.4 Dispersão de Richardson 69
3.4 O fenômeno da intermitência 73
3.4.1 Anomalias de escala 73
3.4.2 Densidades de probabilidade 74
3.4.3 Modelos fenomenológicos 76
3.4.4 Formalismo multifractal 83
3.4.5 Auto-similaridade estendida 90
3.5 Projeto de conclusão 91
3.6 Referências 92

4 Princípios de anemometria térmica 99
4.1 Introdução 99
4.2 Princípios básicos 101
4.2.1 Modos de operação 102
4.2.2 A ponte de Wheatstone 103
4.2.3 Tipos de sensores 106
4.2.4 A transferência de calor entre o fio-quente e o fluido 107
4.2.5 Leis de calibração 109
4.3 Anemômetro de corrente constante 110
4.3.1 Princípio de funcionamento 110
4.3.2 Filtragem do sinal 112
4.4 Anemômetro de temperatura constante 112
4.4.1 O circuito de controle 113
4.4.2 A taxa de sobreaquecimento 117
4.4.3 Controle digital 119
4.5 Resposta dinâmica da ponte CTA 121
4.5.1 Modelos da dinâmica do anemômetro 125
4.5.2 Teste de resposta em freqüência e teste de resposta transitória 127
4.6 Medição de velocidade 130
4.6.1 Sensibilidade direcional 132
4.6.2 Medição de duas componentes de velocidade 134
4.6.3 Medição do vetor velocidade 136
4.7 Medição simultânea de velocidade e temperatura 138
4.7.1 Calibração de temperatura para o fio-frio 139
4.7.2 Calibração direta de velocidade e de temperatura para o sensor de fio-quente 140
4.7.3 Métodos de compensação analítica 142
4.7.4 Aparato experimental 143
4.7.5 Comparação entre os métodos 146
4.8 Aquisição e tratamento de dados 148
4.8.1 Condicionamento e aquisição do sinal 149
4.8.2 Cálculo das estatísticas do escoamento 151

4.9 Análise de incertezas 155
4.9.1 Tipos de erros associados à medição 155
4.9.2 Incerteza da medição 156
4.9.3 Incerteza dos resultados 157
4.10 Aplicações 157
4.10.1 Escoamento ao redor de um cilindro 158
4.10.2 Escoamento sobre placa plana 159
4.10.3 Escoamento sobre superfície rugosa 162
4.11 Agradecimentos 167
4.12 Referências 167

5 Fundamentos de anemometria laser-Doppler 173
5.1 Preâmbulo 173
5.2 Introdução 175
5.3 Princípios básicos 179
5.3.1 Fonte de luz coerente 180
5.3.2 O efeito Doppler 181
5.3.3 O modelo de franjas 185
5.3.4 Resolução do sentido da velocidade 187
5.3.5 Ajuste do desvio de freqüência 189
5.4 Teoria de reflexão da luz por partículas pequenas 191
5.4.1 A teoria de Lorenz-Mie 193
5.4.2 Características reflexivas do feixe de laser 195
5.4.3 Partículas em anemometria laser-Doppler 195
5.4.4 Detecção posterior ou anterior ao volume de controle 198
5.5 Geração do sinal 201
5.5.1 Detecção da luz refletida 201
5.5.2 Características do sinal da anemometria laser-Doppler . . . 203
5.6 Aquisição e tratamento do sinal 205
5.6.1 Processadores de sinal 205
5.6.2 Cálculo das estatísticas do escoamento 211
5.6.3 Estimativa do espectro e funções de correlação 213
5.7 Sistemas de anemometria laser-Doppler 221
5.7.1 Sistemas unidirecionais 221
5.7.2 Sistemas bidimensionais 223
5.7.3 Sistemas tri-dimensionais 225
5.7.4 Outros componentes ópticos e acessórios 226
5.8 Análise de incertezas 228
5.8.1 Cálculo dos erros associado a uma medida 229
5.8.2 Incerteza dos resultados 232
5.8.3 Cálculo do erro associado às medidas de velocidade 233
5.9 Aplicações 235
5.9.1 Jato livre 235
5.9.2 Escoamento sobre variação de topografia 238
5.10 Agradecimentos 246

5.11 Referências 246

6 Turbulência em fluidos não-newtonianos 253
6.1 Introdução 253
6.1.1 Escoamentos turbulentos de fluidos não-newtonianos 253
6.1.2 Breve revisão do estado da arte 254
6.1.3 Organização do curso/capítulo 258
6.2 Propriedades reológicas de fluidos não newtonianos 259
6.2.1 Fluidos inelásticos: a viscosidade de corte, viscosimétrica ou de cisalhamento 259
6.2.2 Comportamento dependente do tempo 261
6.2.3 Fluidos com tensão de cedência 263
6.2.4 Fluidos viscoelásticos 265
6.3 Modelos constitutivos reológicos 269
6.3.1 Introdução e equações fundamentais 269
6.3.2 Modelos inelásticos 271
6.3.3 Modelos para fluidos com tensão de cedência 275
6.3.4 Modelos viscoelásticos explícitos 276
6.3.5 Modelos viscoelásticos implícitos na tensão 277
6.3.6 Modelos multímodo 284
6.4 Escoamento turbulento em dutos 285
6.4.1 Introdução 285
6.4.2 Fluidos viscosos 286
6.4.3 Fluidos viscoelásticos 289
6.4.4 Efeitos de escala 293
6.5 Filosofias de modelagem da turbulência 295
6.6 Fechamento de turbulência para modelo reológico de tensão pseudo-elástica 297
6.6.1 Introdução 297
6.6.2 Equação constitutiva 298
6.6.3 Equações de transporte 300
6.6.4 Fechamento para a viscosidade molecular média 303
6.7 Modelo $\kappa - \varepsilon$ anisotrópico de baixo número de Reynolds 306
6.8 Vários aspectos da modelagem 308
6.8.1 Função de amortecimento viscoso 308
6.8.2 A função de amortecimento f_μ 308
6.8.3 Modelo para a tensão pseudo-elástica 312
6.8.4 Resultados e discussão 317
6.9 Modelos de turbulência com base no modelo FENE-P 324
6.9.1 Introdução 324
6.9.2 Equações de governo e necessidades de modelação 324
6.9.3 Desenvolvimentos futuros 330
6.9.4 Modelos para outras equações constitutivas de fluidos . . . 330
6.10 Referências 331

7 Transferência de calor em escoamentos turbulentos parietais 341
7.1 Introdução 341
7.2 As equações instantâneas 342
7.2.1 Introdução 342
7.2.2 Fluxo turbulento de calor em escoamentos parietais dilatáveis 343
7.2.3 A adimensionalização das equações instantâneas 345
7.2.4 Escoamentos dilatáveis 347
7.3 Formulação estatística para escoamentos dilatáveis 348
7.3.1 Funções estatísticas 351
7.3.2 Um modelo estatístico para escoamentos dilatáveis 353
7.3.3 As equações médias 354
7.3.4 As equações médias adimensionais 355
7.4 O problema de fechamento 356
7.4.1 Formulação evolutiva para o problema de fechamento . . . 356
7.4.2 Formulação constitutiva para o problema de fechamento . 365
7.4.3 Modelos de turbulência de origem constitutiva 368
7.5 Leis de parede 372
7.5.1 Introdução 372
7.5.2 A camada limite turbulenta de temperatura 373
7.5.3 Dedução da lei de parede para a camada limite térmica . . 378
7.5.4 O número de Prandtl turbulento 383
7.5.5 Determinação analógica dos fluxos turbulentos parietais de calor 386
7.6 Resultados 388
7.6.1 Introdução 388
7.6.2 Resultados 392
7.6.3 Conclusão 398
7.7 Agradecimentos 398
7.8 Referências 399

8 Simulação numérica de escoamentos complexos 405
8.1 Introdução 405
8.2 O conceito de decomposição de campos 409
8.2.1 A equação de Reynolds 410
8.2.2 Equações de transporte para o tensor de Reynolds 414
8.2.3 A equação para o transporte de escalares 417
8.2.4 Equações de transporte para o fluxo turbulento de escalares 418
8.3 Modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta 419
8.3.1 O conceito de viscosidade turbulenta 419
8.3.2 O modelo $\kappa - \varepsilon$ 422
8.3.3 O modelo $\kappa - \omega$ 429
8.3.4 O modelo *shear stress transport* (SST) 431
8.4 Modelos para a equação de transporte do tensor de Reynolds . . . 432
8.4.1 O modelo LRR 435
8.4.2 O modelo SSG 438

8.4.3 O modelo *BSL* $\kappa - \omega$ 439
8.5 Aplicações 440
8.5.1 Escoamento sobre colinas abruptas 440
8.5.2 Jato impingente sobre placa plana 453
8.6 Referências 460

Prefácio

O ato quase solene de escrever o Prefácio de um livro necessariamente provoca em seu escritor momentos de profunda reflexão. Afinal, o objeto de tanta dedicação intelectual se mostra por completo, desnudo, em suas virtudes e defeitos.

Em sua forma definitiva, que não pode ser modificada, o livro deveria não apenas transmitir aos seus leitores a letra fria do rigor de suas construções teóricas, mas, principalmente, o espírito de toda a sofisticação intelectual que se pretende alcançar.

O presente texto pertence a uma já extensa e exitosa família. A série de escolas dedicadas exclusivamente à investigação da turbulência de fluidos deu origem a outros textos que marcaram época. A manutenção da alta estirpe, pois, poderia causar sérios embaraços a novas contribuições.

A Turbulência é uma matéria com sabidas dificuldades conceituais, que exige de seus militantes especializações múltiplas e sofisticadas. Esse texto, sem dúvida, preencherá lacunas importantes no arcabouço de métodos e técnicas que se pretendem disponíveis para um ataque consistente às dificuldades de natureza teóricas e práticas impostas pela Turbulência àqueles que a ambicionam assaltar. Temas do mais alto grau de complexidade e importância são dissecados em dois tomos que formam uma obra com doze capítulos. Um julgamento honesto dos Editores classifica a presente contribuição como da maior relevância tanto para iniciantes como para pesquisadores experientes no assunto.

A dedicação dos autores e seu compromisso com o resultado final dessa jornada foram da maior sensibilidade. Os Editores, sinceramente, esperam que os leitores reconheçam as muitas horas de trabalho abnegado que permitiram a existência desta obra.

Finalmente, talvez devêssemos agora nos inquirir sobre o propósito de tudo isso. Por que trabalhar com tamanho afinco para a existência dessa obra? A resposta é simples e singela: para a construção de uma sociedade melhor. Um objetivo que nos tem sido caro e que nos possibilitou encontrar aliados importantes na ABCM, na FAPERJ e no CNPq. Este projeto é, sobretudo, uma iniciativa feliz da ABCM e do Pronex "Núcleo de Excelência em Turbulência" um projeto apoiado pela FAPERJ e pelo CNPq (Processo No E-26/171.198/2003).

Os Editores

Agradecimentos

PRONEX Edital 2003

FAPERJ

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

CAPES

UFRJ COPPE

PEM

IME

INMETRO

ABCM
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ENGENHARIA E CIÊNCIAS MECÂNICAS

Relação de Autores

Capítulo 1 **página 1**

Fernando Pereira Duda
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 2 **página 17**

Fábio Ramos
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Ricardo Rosa
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Roger Temam
Department of Mathematics
Indiana University, Bloomington
IN 47405-5701
USA

Capítulo 3 **página 37**

Luca Moriconi
Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 4 **página 99**

Juliana B. R. Loureiro
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

José Luiz da Silva Neto
Programa de Engenharia Elétrica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 5 **página 173**

Juliana B. R. Loureiro
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Fernando T. Pinho
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade do Porto
Porto 4200-465
Portugal

Capítulo 6 **página 253**

Daniel Cruz
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade Federal do Pará
Belém 66075-970 Brasil

Fernando Pinho
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade do Porto
Porto 4200-465
Portugal

Capítulo 7 **página 341**

José Luiz Fontoura
Depto. de Engenharia Mecânica
Universidade de Brasília
Brasília, D.F. 70910-900
Brasil

Capítulo 8 **página 405**

Alexandre T. P. Alho
Depto. Engenharia Naval e Oceânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Anderson Ilha
Diretoria de Metrologia Científica
Instituto Nacional de Metrologia
Duque de Caxias, 22050-050
Rio de Janeiro Brasil

Capítulo 8

Simulação numérica de escoamentos complexos

8.1 Introdução

Os escoamentos turbulentos estão presentes em nossas experiências cotidianas. De fato, nos deparamos diariamente, quase sempre sem perceber, com manifestações de nossa relação com os fluidos: a brisa que sopra, as ondas que quebram, as nuvens que se dissipam, anunciando a chegada do sol. A observação natural do escoamento de fluidos revela imediatamente a notável complexidade de suas estruturas. Tal complexidade, cuja riqueza de nuances a muitos fascina, a outros desafia a desvendá-la (Figura 8.1).

A complexidade de certos escoamentos é, portanto, essencialmente aparente. Tal afirmação constitui para alguns, ao menos em princípio, uma enorme contradição. Ao formular a relação entre as taxas de deformação de um fluido e as respectivas tensões internas resultantes, Isaac Newton (1643-1727) demonstrou que alguns fluidos são entidades muito simples do ponto de vista constitutivo. A quebra do código de comportamento das propriedades moleculares dos fluidos proporcionou a visão de uma larga avenida para o desenvolvimento tecnológico. No entanto, a história mostrou, e ainda mostra, que os fluidos também têm seus humores. Ao escoarem, os fluidos encerram um equilíbrio muito sensível que se rompe facilmente, resultando em um comportamento imprevisível de difícil modelação. Embora complexos, os escoamentos turbulentos devem ser observados, compreendidos e resolvidos.

Claude-Louis Navier (1785-1836) e George G. Stokes (1819-1903) formularam o arcabouço matemático fundamental para a descrição do escoamentos dos fluidos newtonianos. Apesar da generalidade das equações de Navier-Stokes (ENS), a diversidade de escalas presentes ainda hoje limita, a alguns casos, a simulação numérica direta de escoamentos turbulentos. Osborne Reynolds (1842-1912), no entanto, forneceu uma alternativa viável para a solução das ENS. Percebendo

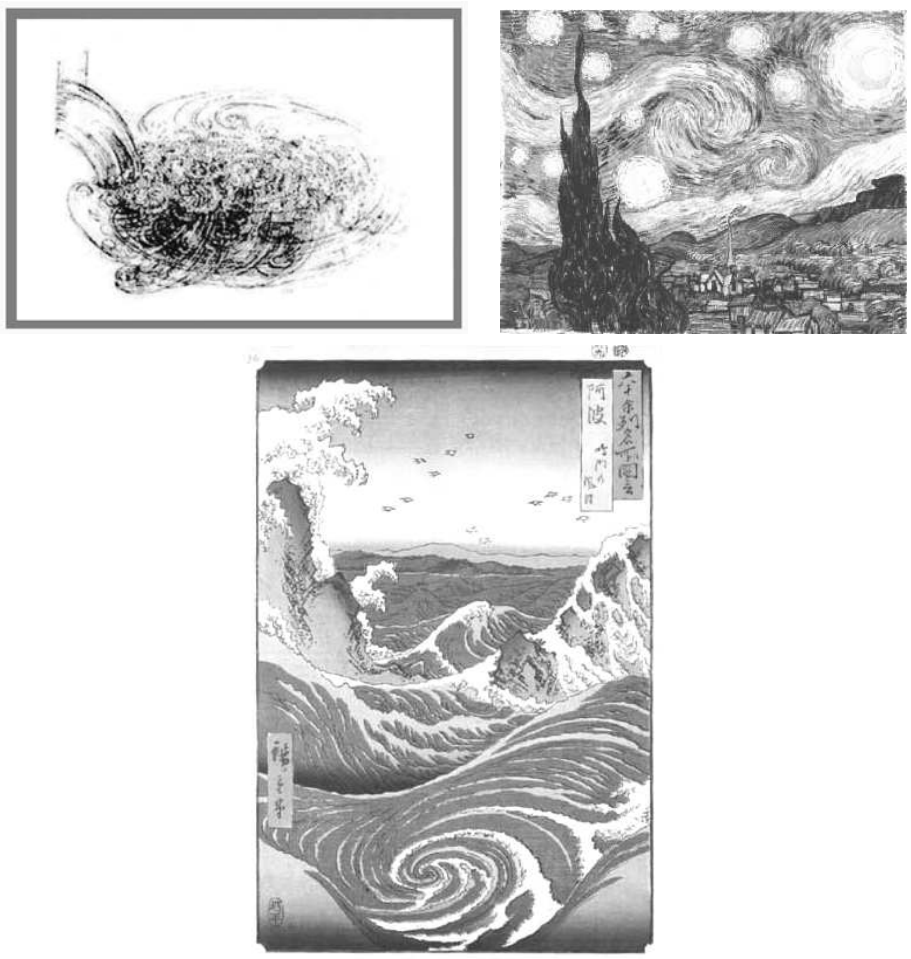

Figura 8.1: Representações da complexidade de escoamentos turbulentos: em sentido horário, esboço de Leonardo da Vinci (1452-1519); *La Nuit Étoilée*, de Vincent van Gogh (1853-1890); *Vue des Tourbillons de Naruto à Awa*, de Hiroshige Utagawa (1797-1858).

que as propriedades dos escoamentos turbulentos podem ser descritas pela superposição de um termo flutuante a um valor médio, Reynolds sugere que os campos presentes nas equações governantes fossem divididos em componentes médias e componentes flutuantes, ou turbulentas.

O resultado formal desse procedimento consiste, naturalmente, em uma nova equação na qual os efeitos do campo turbulento estão isolados dos termos descritivos do escoamento médio. Apesar de atraente, essa estratégia de solução impõe um difícil obstáculo: sua aplicação leva ao surgimento de novas variáveis dinâmicas. Desse modo, a modelação das propriedades dos escoamentos turbulentos em componentes médias e estocásticas dá origem a um número de variáveis dinâmicas independentes maior do que o número de equações governantes disponíveis. A estratégia de Reynolds resulta, então, em um problema matematicamente indeterminado, o qual é usualmente referenciado como o problema de "fechamento´´ da turbulência. Em um procedimento rigoroso, manipulações algébricas aplicadas às ENS fornecem equações adicionais, que, por sua vez, apresentam novas incógnitas de ordem superior. Tal comportamento é tipicamente observado nos sistemas estocásticos não-lineares.

Existe na literatura uma variedade de modelos propostos para o fechamento das equações governantes do escoamento turbulento de fluidos. Genericamente, é possível classificar os modelos de turbulência em quatro classes distintas - *Impressionista*, *Física*, *Racional* e *Ad Hoc*, cada qual com objetivos e abordagens próprias para o tratamento do problema de fechamento da turbulência (Tabela 8.1). Atualmente, não se dispõe de modelos racionais genéricos para a descrição dos escoamentos turbulentos, tendo sido propostos apenas alguns poucos modelos impressionistas e físicos. Os modelos utilizados para a solução dos problemas de engenharia são exclusivamente *Ad Hoc*, pois têm o propósito de resolver problemas específicos relacionados às aplicações de interesse científico e tecnológico. Todavia, considerando que os modelos de fechamento *Ad Hoc* contemplam fenomenologias restritas a determinados regimes de escoamento, cada qual apresenta vantagens e desvantagens específicas. Ainda que os modelos *Ad Hoc* sejam, em alguns casos, considerados incompletos, eles constituem o elemento central do desenvolvimento de soluções numéricas para os escoamentos turbulentos.

Os modelos de fechamento podem ser normalmente classificados como:

I. Modelos algébricos. Esses modelos são baseados na hipótese de Boussinesq, que estabelece o conceito de viscosidade turbulenta, ν_t. Nesses modelos, uma equação algébrica, baseada em escalas turbulentas características, é empregada para a determinação do valor da viscosidade turbulenta.

II. Modelos a uma equação. Nesses modelos, uma equação diferencial de transporte é resolvida para uma determinada propriedade turbulenta. Em geral, a energia cinética turbulenta – κ – é adotada como a propriedade turbulenta de referência. Uma segunda propriedade, normalmente um comprimento de escala, ℓ, é então fornecido por meio de uma expressão algébrica. Os modelos a uma equação empregam, igualmente, a hipótese de viscosidade turbulenta.

Tabela 8.1: As diferentes classes de modelos empregados no fechamento do problema da turbulência (Narasimha, 1989).

Classe	**Objetivo**
Impressionista	Obter uma representação da estrutura do escoamento e sua solução, sem a preocupação de se alcançar respostas exatas.
Física	Predizer quantidades de interesse a partir de hipóteses coerentes, tendo por base observações experimentais e a física conhecida. Os parâmetros livres são fixados através de dados experimentais, quando necessário.
Racional	Investgar a natureza do problema e de suas soluções através de modelos simples, baseados em teorias mais completas.
Ad hoc	Fornecer estimativas de quantidades de interesse (quase sempre no contexto da engenharia sem impor, necessariamente, que todas as hipóteses empregadas sejam plenamente justificáveis fisica ou matematicamente.

III. Modelos a duas equações. Os modelos a duas equações utilizam duas equações diferenciais de transporte de propriedades turbulentas, configurando-se, assim, como modelos de fechamento completos. Esses modelos adotam, tipicamente, uma equação de transporte para a energia cinética turbulenta, κ, juntamente com uma equação de transporte para a taxa de dissipaçãp da energia cinética trubulenta por unidade de massa, ε, ou, mesmo, em alguns casos, uma freqüência de passagem de grandes estruturas turbulentas, ω). Tais modelos, em conjunto com os modelos algébricos e os modelos de uma equação, formam os chamados *modelos de viscosidade turbulenta*.

IV. Modelos para as tensões de Reynolds. Também chamados de *modelos de fechamento de segunda ordem*, esses modelos utilizam equações de transporte explícitas para o tensor de Reynolds. Entretanto, mesmos nesses modelos, ainda se faz necessária a adoção de uma equação de transporte complementar para ε ou ω de modo a se obter o fechamento completo do problema.

Este capítulo apresenta uma breve descrição dos modelos de fechamento atualmente mais utilizados para a simulação numérica de escoamentos turbulentos, incluindo os principais modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta (seção 8.3) e na formulação direta de equações de transporte das tensões de Reynolds (seção 8.4). Na seção 4.10 são apresentadas aplicações dos modelos descritos. O escoamento sobre colinas abruptas e o escoamento de um jato impingente sobre uma placa plana são adotados como casos de aplicação. Tais exemplos representam um importante teste para os modelos de turbulência quanto ao seu desempenho na simulação de escoamentos complexos.

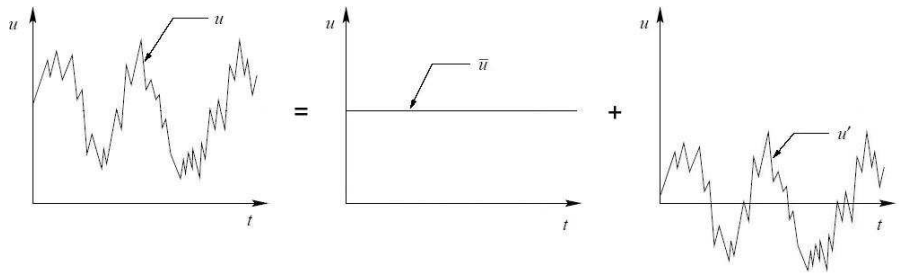

Figura 8.2: A decomposição de Reynolds para o campo de velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

8.2 O conceito de decomposição de campos

A aleatoriedade da dinâmica turbulenta, juntamente com seu número praticamente infinito de graus de liberdade, levou a idéia de que somente tratamentos estatísticos seriam capazes de formular modelos preditivos de escoamentos. Esta visão começou a se estabelecer na comunidade científica primordialmente a partir de um artigo seminal de Osborne Reynolds, publicado ainda no século XIX (Reynolds, 1895). Neste trabalho, Reynolds concluiu que fenômenos turbulentos eram demasiadamente complexos para que houvesse qualquer esperança de um entendimento detalhado de sua dinâmica. Por esse motivo, ele introduziu uma decomposição dos parâmetros que caracterizam o escoamento (i.e. velocidade, pressão, temperatura, etc.) em componentes "médias" e "flutuantes" (estocásticas). Por exemplo, para um campo de velocidade instantâneo turbulento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, tem-se

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)\,, \tag{8.1}$$

onde $\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ é a velocidade média (estatisticamente estacionária) e $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ a componente flutuante. Na Figura 8.2 tem-se a representação de uma medição típica de uma componente de velocidade instantânea local e sua decomposição estatística em um valor médio e flutuações estocásticas. A razão para tal decomposição é abrir a possibilidade de tratar as propriedades dos escoamentos turbulentos em termos de soluções bem comportadas $\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, e de contribuições flutuantes de caráter complexo, as quais são tratadas separadamente.

Nota-se que, na decomposição de Reynolds, é a parte flutuante que essencialmente carrega toda a dinâmica do escoamento via sua dependência temporal, ou seja, esta componente é a responsável pela modelagem das flutuações características dos escoamentos turbulentos. Vale observar que as porções de fluido que realizam tais flutuações nas propriedades do escoamento não constituem moléculas individuais, tal como assumido na teoria cinética do gases, mas, sim, quantidades macroscópicas de fluido de escala reduzida.

A decomposição de campos de Reynolds, Eq.(8.1), é usualmente baseada em

médias *temporais*, sendo definidas por

$$\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\, dt\,, \tag{8.2}$$

onde T é um intervalo de tempo suficientemente longo para que a média represente de fato o comportamento estacionário do escoamento. Como conseqüência desta definição, tomando a média temporal da decomposição (8.1), segue que a média das flutuações $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$ é zero:

$$\overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)} = 0\,, \tag{8.3}$$

uma vez que a média da média de $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ é a própria média: $\overline{\overline{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$. Isto está ilustrado qualitativamente na Figura 8.2. Assim como a velocidade instantânea, outras propriedades como pressão, temperatura e densidade instantâneas também podem ser descritas em termos da decomposição (8.1)

$$p(\mathbf{x},t) = \overline{p}(\mathbf{x}) + p'(\mathbf{x},t)\,; \quad \rho(\mathbf{x},t) = \overline{\rho}(\mathbf{x}) + \rho'(\mathbf{x},t)\,; \quad T(\mathbf{x},t) = \overline{T}(\mathbf{x}) + T'(\mathbf{x},t)\,,$$

onde a média temporal de suas flutuações é também zero

$$\overline{p'(\mathbf{x},t)} = 0\,; \qquad \overline{\rho'(\mathbf{x},t)} = 0\,; \qquad \overline{T'(\mathbf{x},t)} = 0\,.$$

A decomposição de campos de Reynolds representa uma maneira de introduzir uma formulação estatística para a descrição da dinâmica dos escoamentos turbulentos, possibilitando, assim, sua modelagem numérica. Entretanto, como em toda descrição estatística, há, necessariamente, a perda de informações potencialmente importantes ao se adotar uma quantidade restrita de parâmetros, em geral, a média ou algum outro momento estatístico. É possível, então, inferir que a relação abaixo não é inversível:

$$\boxed{\text{dinâmica real}} \Longrightarrow \boxed{\text{modelagem estatística}}$$

Na relação acima, ainda que, em princípio, tenha sido encapsulada toda a complexidade da dinâmica real de uma quantidade turbulenta $q(\mathbf{x},t)$ nas flutuações $q'(\mathbf{x},t)$, o número de equações para a dscrição da física do problema é o mesmo que o disponível para a modelagem estatística. Ou seja, a decomposição introduz um número extra de variáveis – as flutuações – que não é acompanhado por um igual número de equações adicionais. Portanto, a dinâmica real modelada estatisticamente não é em si completa: as flutuações precisam ser tratadas separadamente por meio de hipóteses *ad hoc* que não fazem parte da construção teórica original, levando, assim, ao que se convenciona chamar de "problema de fechamento" da turbulência.

8.2.1 A equação de Reynolds

Conforme visto na seção anterior, a decomposição de Reynolds permite uma análise numérica (estatística) dos escoamentos turbulentos. Um caso particular de interesse consiste na aplicação do conceito de campos para a descrição do escoamento

de fluidos incompressíveis através da equação de Navier-Stokes. O objetivo é obter soluções médias bem comportadas (estacionárias), e, ao mesmo tempo, aplicar um tratamento apropriado para os campos de flutuação estocásticos.

O escoamento adiabático de um fluido viscoso e newtoniano é completamente descrito pela equação de continuidade, a qual estabelece o princípio de conservação da massa

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0\,, \tag{8.4}$$

e pela equação de Navier-Stokes, que traduz o princípio da conservação da quantidade de movimento no escoamento de fluidos

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\,, \tag{8.5}$$

onde σ_{ij} representa o tensor de tensões, dado por

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\,. \tag{8.6}$$

Nas Equações (8.4), (8.5) e (8.6), ρ representa a densidade (constante ao longo das linhas de corrente para escoamentos incompressíveis), $p = p(\mathbf{x}, t)$ a pressão hidrodinâmica instantânea, μ a viscosidade dinâmica (assumida como sendo constante) e $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$ a velocidade instantânea do escoamento.

Tal como descrito na seção anterior, para um escoamento turbulento as prorieedades u_i e p podem ser decompostas em componentes médias e flutuantes. Tomando, então, a média da equação de continuidade,

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0\,, \tag{8.7}$$

conclui-se que a componente estacionária do escoamento também é incompressível. Do mesmo modo, a componente flutuante equivale a

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial(\overline{u}_i + u_i')}{\partial x_i} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0\,. \tag{8.8}$$

Nas operações acima, o valor médio da derivada espacial de uma quantidade foi assumido como sendo igual à derivada espacial do valor médio dessa mesma quantidade. Este resultado é válido quando a média é tomada pela integração temporal sobre um intervalo de tempo suficientemente longo, Eq.(8.2). A equação de Navier-Stokes pode ser, portanto, reescrita usando a regra da cadeia no segundo termo do lado esquerdo da Eq.(8.5)

$$u_j\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} - u_i\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\,,$$

onde o segundo termo no lado direito é zero pela equação da continuidade. Usando a igualdade acima e tomando a média temporal da equação de Navier-Stokes,

obtém-se

$$\overline{\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}\right)}=\overline{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}} \qquad \Longrightarrow \qquad \rho\,\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\overline{u_i u_j})}{\partial x_j}=\frac{\partial \overline{\sigma}_{ij}}{\partial x_j}\,. \tag{8.9}$$

Uma vez que a média de $u_i(\mathbf{x},t)$ é estatísticamente estacionária, o primeiro termo do lado esquerdo da última equação é zero. Para determinar o termo de correlação cruzada entre as velocidades, $\overline{u_i u_j}$, se considera inicialmente que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho\,(\overline{u}_i+u_i')(\overline{u}_j+u_j')\right]=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho\,(\overline{u}_i\overline{u}_j+\overline{u}_i u_j'+u_i'\overline{u}_j+u_i'u_j')\right]\,.$$

Tomando a média temporal dessa equação,

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j)}&=\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho\,(\overline{u}_i\overline{u}_j+\overline{u}_i u_j'+u_i'\overline{u}_j+u_i'u_j')\right]}\,,\\ \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{u_i u_j})&=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho\,(\overline{\overline{u}_i\overline{u}_j}+\overline{\overline{u}_i u_j'}+\overline{u_i'\overline{u}_j}+\overline{u_i'u_j'})\right]\,,\end{aligned} \tag{8.10}$$

se obtém quatro termos de correlação temporal: $\overline{\overline{u}_i\overline{u}_j}$, $\overline{\overline{u}_i u_j'}$, $\overline{u_i'\overline{u}_j}$ e $\overline{u_i'u_j'}$. Uma vez que $\overline{u}_i(\mathbf{x})$ é estacionário (sem dependência temporal), esta quantidade é totalmente independente (do ponto de vista de correlações temporais) das flutuações $u_i'(\mathbf{x},t)$. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned}\overline{\overline{u}_i\overline{u}_j}&=\overline{u}_i\overline{u}_j\,,\\ \overline{\overline{u}_i u_j'}&=\overline{u}_i\overline{u'}_j=0\,,\\ \overline{u_i'\overline{u}_j}&=\overline{u'}_i\overline{u}_j=0\,,\end{aligned}$$

uma vez que a média temporal das flutações é zero (veja a seção anterior). Nota-se que o termo $\overline{u_i'(\mathbf{x},t)u_j'(\mathbf{x},t)}$ é em geral não nulo, uma vez que ambos u_i' e u_j' possuem dependência temporal, e, portanto, podem apresentar correlações temporais entre si. Levando estes resultados de volta na Eq.(8.10),

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{u_i u_j})=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho\left(\overline{u}_i\overline{u}_j+\overline{u_i'u_j'}\right)\right]\,. \tag{8.11}$$

e este, por sua vez, de volta na Eq.(8.9), tem-se, finalmente, as equações de Navier-Stokes escritas em termos da decomposição de campos de Reynolds,

$$\rho\,\overline{u}_j\,\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\sigma}_{ij}-\rho\overline{u_i'u_j'}\right]\,. \tag{8.12}$$

As equações (8.12) são usualmente chamadas de *equações médias de Reynolds* (em inglês, *RANS - Reynolds Averaged Navier-Stokes equations*). Observa-se que a Eq.(8.12) é exatamente igual à equação de Navier-Stokes para escoamentos laminares e estacionários, Eq.(8.5), à exceção do último termo do lado direito,

$\overline{u_i'(\mathbf{x},t)u_j'(\mathbf{x},t)}$, que representa a contribuição turbulenta ao escoamento médio $\overline{u}_i(\mathbf{x})$. Nota-se também que os efeitos turbulentos se dão na forma de tensões adicionais $\rho\overline{u_i'u_j'}$ à tensão viscosa do escoamento médio, $\overline{\sigma}_{ij}$, de modo que a tensão efetiva passa a ser

$$\tau_{ij} = \overline{\sigma}_{ij} - \rho\overline{u_i'u_j'}\,.$$

Essas novas tensões são chamadas de *tensões de Reynolds*, as quais são interpretadas fisicamente como os termos de transporte médio de quantidade de movimento devido às flutuações turbulentas de velocidade. É possível demonstrar isso considerando a forma integral da equação de Navier-Stokes, Eq.(8.5):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho u_i)\,dV = -\oint_S u_i(\rho\mathbf{u}\cdot d\mathbf{S}) + \oint_S \sigma_{ij}\,dS_j\,. \tag{8.13}$$

Esta equação representa o balanço total das forças que agem sobre um volume fixo V (chamado de volume de controle) com área superficial S, uma vez que o lado esquerdo representa a taxa total de variação do momento sobre todo o volume de controle. Como $\rho\mathbf{u}\cdot d\mathbf{S}$ é o fluxo de massa através de um elemento de área $d\mathbf{S}$, a primeira integral no lado direito expressa o fluxo líquido de momento através de V. A última integral no lado direito representa a força líquida exercida pela pressão ou por forças viscosas agindo sobre a superfície S. Desta maneira, a equação acima nos diz que o momento linear total em V é devido ao transporte de momento através da superfície S e pelas forças de pressão e/ou viscosas que agem nesta superfície.

Tomando a média temporal da Eq.(8.13), temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho\overline{u}_i)\,dV = -\oint_S \rho\overline{u_iu_j}\,dS_j + \oint_S \overline{\sigma}_{ij}\,dS_j\,,$$

onde a segunda integral do lado direito representa o transporte médio de momento linear através de V. Utilizando a decomposição $u_i = \overline{u}_i + u_i'$, podemos reescrever este transporte como

$$\oint_S \rho\overline{u_iu_j}\,dS_j = \oint_S \rho\overline{u}_i\overline{u}_j\,dS_j + \oint_S \rho\overline{u_i'u_j'}\,dS_j\,.$$

Portanto, as flutuações turbulentas induzem o aparecimento de um transporte de momento dado por

$$\oint_S \rho\overline{u_i'u_j'}\,dS_j\,,$$

onde $\rho\overline{u_i'u_j'}$ são as tensões de Reynolds. Essas tensões são cruciais para a modelação dos escoamentos turbulentos, afinal, elas representam as flutuações estocásticas nas equações de Reynolds. Entretanto, a incorporação dos termos de flutuação resulta em um conjunto de dez variáveis independentes – três componentes de velocidade $\overline{u}_i$, o termo de pressão $\overline{p}$ e as seis componentes do tensor de Reynolds, para apenas três equações de governo. Esse fato caracteriza o chamado *problema de fechamento da turbulência*.

Tal como discutido no final da seção anterior, o desenvolvimento teórico através da decomposição de Reynolds não comporta uma formulação implícita para as flutuações turbulentas. Faz-se necessário, portanto, recorrer a análises de escala ou fenomenologias *ad hoc* para o fechamento das equações de Reynolds. Infelizmente, tais hipóteses adicionais são válidas apenas para determinadas escalas, regimes ou regiões específicas do escoamento, o que inviabiliza a obtenção de uma formulação teórica universal para a física da turbulência.

Para fins de engenharia, entretanto, o interesse recai não em formulações fundamentais com validade universal, mas sim, em casos particulares que sejam aptos a descrever problemas específicos de interesse tecnológico. Isso possibilita que fenomenologias restritas à modelagem das tensões de Reynolds possam ser perfeitamente adequadas para a análise dos problemas encontrados na engenharia. Desse modo, a equação de Reynolds, juntamente com modelos apropriados de fechamento, tornam-se ferramentas indispensáveis para a análise e modelagem numérica de escoamentos complexos.

8.2.2 Equações de transporte para o tensor de Reynolds

A partir do desenvolvimento da seção anterior torna-se claro que a determinação explícita do tensor de Reynolds é crucial para a predição quantitativa de escoamentos turbulentos. Fisicamente, as tensões de Reynolds são geradas, transportadas, difundidas e dissipadas à diferentes taxas ao longo do escoamento. De modo a se obter equações de transporte que descrevam estes processos explicitamente, é necessário manipular as equações para as flutuações de velocidade $u_i'(\mathbf{x},t)$ e $u_j'(\mathbf{x},t)$. Inicialmente, a equação de Navier-Stokes, Eq.(8.5) e a de Reynolds, Eq.(8.12) podem ser reescritas da seguinte forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + f_i \,, \tag{8.14}$$

onde ν representa a viscosidade cinemática e $f_i = f_i(\mathbf{x},t)$ as forças instantâneas de corpo, tais como a força de Coriolis, empuxo, etc. Igualmente, para a equação de Reynolds, tem-se

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \overline{f}_i \,. \tag{8.15}$$

Subtraindo (8.15) de (8.14), obtém-se uma equação para a flutuação $u_i'(\mathbf{x},t)$,

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + u_k' \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} - \overline{u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k \partial x_k} + f_i' \,, \tag{8.16}$$

e de modo similar para $u_j'(\mathbf{x},t)$,

$$\frac{\partial u_j'}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} + u_k' \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} + u_k' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} - \overline{u_k' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_k \partial x_k} + f_j' \,. \tag{8.17}$$

Multiplicando agora (8.16) por u'_j e (8.17) por u'_i, somando estas duas equações e, finalmente, obtendo a média temporal dessa soma, obtém-se a *equação de transporte do tensor de Reynolds*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} + \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_j} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_i u'_j u'_k} \right) \\
= -\frac{1}{\rho} \left(\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right) + \nu \left(\overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k} + u'_j \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k}} \right) \\
+ \left(\overline{u'_i f'_j + u'_j f'_i} \right) \\
= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\overline{\frac{p'}{\rho} \left(u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik} \right)} + \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right) + \overline{\frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} \\
- \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \left(\overline{u'_i f'_j + u'_j f'_i} \right) .
\end{aligned}$$

Em termos dos processos discutidos no início desta seção, é possível reescrever a equação acima da seguinte forma,

$$\frac{D\overline{u'_i u'_j}}{Dt} = \mathcal{D}_{ij} + \mathcal{P}_{ij} + \mathcal{F}_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} , \tag{8.18}$$

onde

$$\frac{D\overline{u'_i u'_j}}{Dt} \equiv \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} , \tag{8.19}$$

representa o transporte convectivo do tensor de Reynolds (ou seja, da turbulência) ao longo do escoamento médio $\overline{u}_k(\mathbf{x})$. Naturalmente, esse movimento convectivo advém do balanço de todos os processos presentes do lado direito da equação de transporte;

$$\mathcal{D}_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} - \overline{\frac{p'}{\rho} \left(u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik} \right)} - \overline{u'_i u'_j u'_k} \right] . \tag{8.20}$$

A Eq. (8.20) é a taxa de difusão do tensor de Reynolds devido à viscosidade molecular ν do fluido, às flutuações $p'(\mathbf{x}, t)$ da pressão e à própria turbulência (em realidade uma convecção ao nível das flutuações de velocidade, representadas pelo termo de correlação tripla $\overline{u'_i u'_j u'_k}$). Sendo um processo difusivo, $\mathcal{D}_{ij}$ promove, portanto, uma redistribuição espacial das tensões de Reynolds, onde

$$\mathcal{P}_{ij} \equiv -\left[\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \right] , \tag{8.21}$$

$$\mathcal{F}_{ij} \equiv \overline{u'_i f'_j + u'_j f'_i} , \tag{8.22}$$

O termo $\mathcal{P}_{ij}$ representa a taxa de produção (criação ou destruição) da tensão turbulenta à medida que esta é transportada ao longo do escoamento, sendo afetada

pelos gradientes da velocidade média $\partial\overline{u}_j/\partial x_k$. $\mathcal{F}_{ij}$ representa a taxa de criação refente às forças instantâneas de corpo $f_i'(\mathbf{x},t)$. Uma vez que os gradientes de velocidade média são maiores em algumas direções do que em outras, e que a existência de contornos físicos ou forças de empuxo causam um amortecimento seletivo das flutuações turbulentas em direções específicias, a turbulência gerada pelos termos acima é, em geral, anisotrópica;

$$\Phi_{ij} \equiv \overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}, \tag{8.23}$$

onde Φ_{ii} representa o termo de correlação entre as flutuações de pressão e velocidade. Como pela equação da continuidade, $\Phi_{ii} = \overline{p'/\rho(\partial u_i'/\partial x_i)} = 0$, esse termo não contribui para o nível global da energia turbulenta, servindo apenas como um agente de redistribuição da energia entre os componentes normais da tensão de Reynolds. Finalmente, o termo

$$\varepsilon_{ij} \equiv \nu\left(\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\frac{\partial u_k'}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_k'}{\partial x_j}}\right), \tag{8.24}$$

representa a taxa de dissipação do tensor de Reynolds devido à viscosidade ν. De um modo geral, a turbulência é inicialmente produzida através de instabilidades no escoamento, relacionadas aos gradientes da velocidade média $\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ (e descritas pelo termo de produção $\mathcal{P}_{ij}$), que, por sua vez, originam novas instabilidades em escalas menores. Este processo continua até que as escalas se tornam suficientemente pequenas (e os gradientes das flutações de velocidade $\partial u'/\partial x$ suficientemente grandes) a tal ponto que efeitos viscosos se tornam importantes, e, então, a energia turbulenta é dissipada na forma de energia interna e calor. Este processo, no qual a energia turbulenta é continuamente transferida das grandes escalas para menores até sua dissipação viscosa final, é conhecido como a *cascata de energia turbulenta*.

Na equação (8.18), os termos de produção e convecção são exatos, e não precisam ser modelados, uma vez que dependem apenas das componentes do tensor de Reynolds. Por outro lado, os termos de redistribuição, difusão e dissipação não são exatos, e requerem uma modelagem fenomenológica extensiva, como será visto nas próximas seções.

Como um resultado final, nota-se que, a tentativa de se obter uma equação para o tensor de Reynolds $-\rho\,\overline{u_i'u_j'}$ resulta em uma equação que contém um termo de correlação tripla entre as flutuações de velocidade, $\overline{u_i'u_j'u_k'}$. De modo semelhante, ao tentar se obter uma equação para esta correlação tripla, chega-se a

$$\overline{\frac{D}{Dt}}\left(\overline{u_i'u_j'u_k'}\right) = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\overline{u_i'u_j'u_k'u_m'}\right) + (\cdots)\ .$$

Ou seja, cada equação para um momento estatístico de ordem N envolve necessariamente um termo com um momento de ordem $N+1$. Isso é uma característica geral de sistemas estocásticos não-lineares, e ilustra mais uma vez o problema de fechamento da turbulência.

8.2.3 A equação para o transporte de escalares

Na modelagem numérica de escoamentos complexos freqüentemente estamos interessados na dinâmica, ou seja, nos fenômenos de transporte de outras propriedades além do campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, tais como a transferência de calor e de massa, entalpia, temperatura, etc. Todas essas propriedades tem em comum o fato de serem *escalares*, sendo descritas por uma equação dada por

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\varphi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\varphi) + S_\varphi \,. \tag{8.25}$$

Neste caso, $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ é a quantidade escalar instantânea de interesse. A equação acima representa simplesmente uma lei de conservação generalizada para φ, podendo ser derivada a partir do balanço do fluxo de φ em um volume de controle infinitesimal. De fato, os termos acima podem ser interpretados do seguinte modo:

- $\partial(\rho\varphi)/\partial t$, termo transiente que responde pela concentração de φ no volume de controle.
- $\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\varphi)$, termo convectivo que responde pelo transporte de φ devido ao movimento do fluido (Nota-se o campo de velocidade $\mathbf{u}$ do fluido multiplicando φ).
- $\nabla \cdot (\Gamma\nabla\varphi)$, termo difusivo que responde pelo difusão de φ devido ao seu gradiente ao longo do volume de controle. Γ é o coeficiente de difusão, ou difusividade, de φ.
- S_φ, termo de fonte que responde por possíveis fontes ou sumidouros de φ. Quaisquer outros termos não classificados como convectivos ou difusivos são incluídos nesse termos.

A dinâmica do transporte turbulento de um escalar é, então, descrita tomando a média temporal da equação (8.25),

$$\frac{\partial(\rho\overline{\varphi})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\overline{\mathbf{u}}\overline{\varphi}) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\overline{\varphi}) + \overline{S}_\varphi \,,$$

onde a quantidade escalar instantânea $\varphi(\mathbf{x}, t)$ é dada por

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \overline{\varphi}(\mathbf{x}) + \varphi'(\mathbf{x}, t) \,.$$

Para o termo envolvendo $\overline{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}, t)}$, tem-se

$$\overline{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}, t)} = \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\overline{\varphi}(\mathbf{x}) + \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)\varphi'(\mathbf{x}, t)} \,,$$

Nota-se que o termo de correlação temporal cruzada entre as flutuações de velocidade e do escalar, $\overline{u'\varphi'}$ é, em geral, não nulo, uma vez que as flutuações turbulentas de velocidade provocam flutuações em φ à medida em que este último é transportado ao longo do fluido. É possível interpretar esta correlação como sendo uma contribuição adicional à difusividade de φ devido à turbulência.

A equação que descreve os fenômenos turbulentos de transporte para quantidades escalares é dada, então, por

$$\nabla \cdot (\rho \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\, \overline{\varphi}(\mathbf{x})) + \nabla \cdot \left(\rho \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\varphi'(\mathbf{x},t)} \right) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \overline{\varphi}(\mathbf{x})) + \overline{S}_{\varphi}(\mathbf{x})\,, \tag{8.26}$$

uma vez que $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(\mathbf{x})$ é estacionário e sendo considerada a hipótese de fluido incompressível ($\rho =$ constante). O segundo termo do lado esquerdo da equação acima é a divergência do fluxo de Reynolds, $\rho\overline{\mathbf{u}'\varphi'}$. Tal como as tensões de Reynolds, essa construção teórica, através da decomposição de Reynolds e da equação de transporte (8.25), não contempla uma formulação implícita para os fluxos de Reynolds. Esses fluxos precisam então ser modelados separadamente para que se possa utilizar a equação (8.26) em simulações numéricas.

8.2.4 Equações de transporte para o fluxo turbulento de escalares

Assim como obtido para o tensor de Reynolds, é possível determinar uma equação explícita para o transporte turbulento dos fluxos escalares $\rho\overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\varphi'(\mathbf{x},t)}$. Desse modo se obtém uma visão mais precisa para os processos físicos de produção, transporte, difusão e dissipação desses fluxos. Multiplicando a equação (8.25) pela flutuação de velocidade $u_i'(\mathbf{x},t)$, multiplicando a equação de Navier-Stokes (8.5) pela flutuação do campo escalar $\varphi'(\mathbf{x},t)$, adicionando essas duas equações resultantes, tirando sua média temporal e utilizando a decomposição de Reynolds para o fluxo escalar,

$$\rho \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\varphi(\mathbf{x},t) = \rho \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\overline{\varphi}(\mathbf{x}) + \rho \mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\varphi'(\mathbf{x},t)\,,$$

tem-se a seguinte equação para o transporte do fluxo escalar turbulento,

$$\frac{D}{Dt}\overline{u_i'\varphi'} = \mathcal{D}_i + \mathcal{P}_i + \mathcal{F}_i + \Phi_i - \varepsilon_i\,. \tag{8.27}$$

Os termos acima representam processos físicos análogos aos descritos na equação de transporte de Reynolds. Eles são definidos por

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_i &\equiv \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_i'u_k'\varphi'} + \frac{1}{\rho}\overline{p'\varphi'}\delta_{ik} - \nu\,\overline{\varphi'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} - \gamma\,\overline{u_i'\frac{\partial \varphi'}{\partial x_k}} \right)\,,\\
\mathcal{P}_i &\equiv -\left(\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \overline{u_k'\varphi'}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)\,,\\
\mathcal{F}_i &\equiv \frac{1}{\rho}\overline{f_i'\varphi}\,,\\
\Phi_i &\equiv \overline{\frac{p'}{\rho}\frac{\partial \varphi'}{\partial x_i}}\,,\\
\varepsilon_i &\equiv (\gamma+\nu)\,\overline{\frac{\partial \varphi'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}\,,
\end{aligned}$$

onde $\gamma \equiv \Gamma/\rho$. Neste caso, tal como na equação de Reynolds, os termos de difusão ($\mathcal{D}_i$), distribuição (Φ_i) e dissipação (ε_i) necessitam de tratamentos fenomenológicos apropriados (Launder *et al.*, 1984; Schiestel, 1993).

8.3 Modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta

8.3.1 O conceito de viscosidade turbulenta

A decomposição das propriedades do escoamento em campos de valores médios e de flutuações representa uma alternativa conveniente para o tratamento numérico da equação de Navier-Stokes. No entanto, conforme demonstrado, a dedução da média temporal das equações governantes introduz novos termos desconhecidos, contendo produtos de flutuações de velocidade - $\overline{u_i'u_j'}$. Estes termos representam fluxos de quantidade de movimento que atuam como tensões adicionais no escoamento, sendo, assim, denominados de "tensões turbulentas" ou "tensões de Reynolds".

O tensor de tensões turbulentas consiste em um tensor de segunda ordem simétrico, já que $\overline{u_i'u_j'} = \overline{u_j'u_i'}$. Logo, a obtenção da média temporal da equação de Navier-Stokes resulta na introdução de seis incógnitas adicionais - $\overline{u'u'}$, $\overline{v'v'}$, $\overline{w'w'}$, $\overline{u'v'}$, $\overline{u'w'}$ e $\overline{v'w'}$, o que configura um problema matematicamente indeterminado, ou de fechamento, ao se dispor de um número de equações menor do que o número de incógnitas. Conseqüentemente, as tensões de Reynolds precisam ser modeladas por equações adicionais de modo a se obter o fechamento do problema.

O primeiro modelo para a descrição matemática dos termos de tensões turbulentas foi apresentado por Boussinesq (1877). Boussinesq propôs que a contribuição das tensões turbulentas na transferência de quantidade de movimento fosse descrita de forma análoga à observada pela ação da viscosidade molecular do fluido, introduzindo, assim, o conceito de viscosidade turbulenta, ν_t. Considerando um escoamento unidirecional ao longo de uma placa plana infinita, a hipótese de Boussinesq estabelece que

$$-\overline{u_i'(\mathbf{x},t)u_j'(\mathbf{x},t)} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \right) , \tag{8.28}$$

onde u' e v' representam flutuações de velocidade associadas às componentes de velocidade U e V, respectivamente, e y a direção normal à superfície da placa. Observa-se, claramente, uma analogia direta entre o modelo proposto por Boussinesq e o modelo de viscosidade molecular, ν, para fluidos newtonianos. No entanto, ao contrário da viscosidade molecular, a viscosidade turbulenta não é uma propriedade do fluido, mas do escoamento, devendo, portanto, embutir em sua formulação parâmetros que caracterizem adequadamente as tensões turbulentas.

Ao longo dos últimos anos, a hipótese de Boussinesq, em uma forma generalizada proposta por Kolmogorov (1942), tem sido amplamente utilizada para a

modelação de escoamentos turbulentos. Segundo Kolmogorov, o tensor de Reynolds, em sua forma geral, é expresso por

$$-\overline{u_i'(\mathbf{x},t)u_j'(\mathbf{x},t)} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\,\kappa\,\delta_{ij}\,, \tag{8.29}$$

onde δ_{ij} representa o delta de Kronecker e κ a energia cinética turbulenta por unidade de massa, dada por

$$\kappa = \frac{1}{2}\,\overline{u_i'(\mathbf{x},t)u_i'(\mathbf{x},t)}\,. \tag{8.30}$$

Um importante aspecto da hipótese de Boussinesq é que sua formulação subentende um comportamento isotrópico das tensões normais para o caso de gradientes de velocidade nulos ou de pequena magnitude. Nestas condições, a Equação (8.29) fornece

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \cong 0 \qquad \therefore \qquad \overline{u_i'(\mathbf{x},t)u_j'(\mathbf{x},t)} = \frac{2}{3}\,\kappa\,\delta_{ij}\,, \tag{8.31}$$

ou seja

$$\overline{u'u'} = \overline{v'v'} = \overline{w'w'} = \frac{2}{3}\,\kappa\,. \tag{8.32}$$

Evidências experimentais indicam que este comportamento isótropico não é verificado em várias classes de escoamento, como, por exemplo, o escoamento plenamente desenvolvido em dutos e o escoamento em camadas limite bidimensionais.

Os modelos de turbulência baseados na hipótese de Boussinesq requerem, essencialmente, a avaliação do valor da viscosidade turbulenta, ν_t. Em termos dimensionais, a viscosidade turbulenta pode ser expressa como um produto entre valores característicos de velocidade, $\mathcal{U}$, e comprimento, ℓ

$$\nu_t \propto \mathcal{U}\,\ell\,. \tag{8.33}$$

A análise do espectro de energia cinética turbulenta demonstra que a maior parcela de energia está contida nas grandes escalas. Portanto, a escala de comprimento ℓ deve ser capaz de representar adequadamente a relação entre as estruturas presentes nas grandes escalas e o campo médio do escoamento. Considerando que exista uma estreita correlação entre as características das estruturas presentes nas grandes escalas e as propriedades do campo médio do escoamento, é possível estabelecer uma escala característica de velocidade dada por

$$\mathcal{U} = \ell \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right|\,. \tag{8.34}$$

Na Equação (8.34), o módulo do gradiente de velocidades é adotado a fim de garantir um valor positivo para a escala característica de velocidade independentemente do sinal do gradiente de velocidade. Combinando as Equações (8.33) e (8.34), obtém-se finalmente

$$\nu_t = \ell_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right|\,. \tag{8.35}$$

Tabela 8.2: Comprimento de mistura, ℓ_m, para escoamentos turbulentos bidimensionais.

Escoamento	ℓ_m	L
Camada de mistura	0,07L	largura da camada
Jato	0,09L	1/2 largura do jato
Esteira	0,16L	1/2 largura da esteira
Camada limite	$\kappa_* y \left[1 - \exp\left(y^+/26\right)\right]$	espessura camada limite

A Equação (8.35) representa o modelo de comprimento de mistura proposto por Prandtl (1925), onde ℓ_m representa a escala característica de comprimento.

Na literatura, o modelo de comprimento de mistura é usualmente denominado como um modelo algébrico ou a zero equação. Por definição, um modelo de n-equações significa um modelo que requer a resolução de n equações diferenciais de transporte adicionais às equações de governo que expressam a conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia.

O valor de ℓ_m pode ser obtido através de expressões algébricas simples para diversas categorias de escoamentos turbulentos. Na Tabela 8.2, são apresentados alguns exemplos de expressões para a determinação do comprimento de mistura característico de escoamentos turbulentos básicos (Rodi, 1980). Nas expressões apresentadas, y representa a distância da parede e κ_* a constante de von Kàrmàn ($\kappa_* = 0{,}41$).

Escoamentos submetidos a mudanças de direção suaves representam uma aplicação típica na qual o modelo de comprimento de mistura fornece bons resultados. Mudanças suaves de direção do escoamento permitem um ajuste local das propriedades turbulentas, minimizando, assim, a contribuição dos mecanismos de convecção e difusão no transporte das propriedades turbulentas. Esta característica justifica, por exemplo, o bom desempenho dos modelos algébricos para a descrição das propriedades dos escoamentos turbulentos ao redor de perfis aerodinâmicos. Os modelos algébricos desenvolvidos por Cebeci e Smith (1974) e Baldwin e Lomax (1978) são exemplos de modelos de comprimento de mistura amplamente utilizados na indústria aeronáutica.

No entanto, nos casos em que a convecção e a difusão das propriedades turbulentas são relevantes, como, por exemplo, em escoamentos com recirculação, um modelo baseado no conceito de comprimento de mistura não é mais considerado aplicável. No sentido de se obter uma melhor predição das propriedades dos escoamentos turbulentos, Prandtl (1945) propôs um modelo no qual a viscosidade turbulenta é descrita com uma função da energia cinética turbulenta,

$$\nu_t = C_\mu L_\mu \kappa^{1/2}\,, \tag{8.36}$$

onde C_μ representa uma constante adimensional empírica e L_μ uma escala de comprimento.

No modelo de Prandtl, o valor da energia cinética turbulenta, κ, é obtido através de uma equação diferencial de transporte, o que o configura como um modelo a uma equação. Em termos conceituais, a dependência em relação à energia cinética turbulenta representa a incorporação dos efeitos de "memória" do escoamento ao valor da viscosidade turbulenta. Entretanto, apesar de prover uma descrição matemática mais realista das tensões turbulentas, a necessidade de se especificar, *a priori*, uma escala de comprimento caracteriza o modelo de Prandtl como um modelo incompleto.

A limitação apresentada pelos modelos algébricos e a uma equação quanto a sua generalidade é evidente, ao exigirem o conhecimento prévio das propriedades turbulentas do escoamento para sua aplicação. Os modelos a duas equações surgiram, então, com o propósito de contornar as limitações quanto à generalidade e à dependência em relação aos dados experimentais apresentadas pelos modelos algébricos e a uma equação. Os modelos a duas equações são denominados de modelos completos, visto que sua aplicação não requer a definição prévia de uma escala turbulenta característica do escoamento, sendo necessário, apenas, a prescrição das condições de contorno e/ou iniciais do problema. É importante ressaltar, contudo, que a menor dependência dos modelos completos em relação aos dados empíricos não implica, necessariamente, em um melhor desempenho ou universalidade do modelo.

8.3.2 O modelo $\kappa - \varepsilon$

O modelo $\kappa - \varepsilon$ representa o modelo a duas equações mais amplamente difundido, sendo atualmente considerado o modelo de turbulência padrão em simulações industriais. Este modelo tem sido extensivamente validado para diversas aplicações de interesse prático, tendo demonstrado um bom equilíbrio entre precisão e robustez. Essencialmente, o modelo $\kappa - \varepsilon$ envolve a modelação de duas equações diferenciais de transporte, respectivamente, para a energia cinética turbulenta, κ, e para ε, que representa a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta por unidade de massa.

O mais extensivo trabalho desenvolvido sobre o modelo $\kappa - \varepsilon$ foi realizado por Launder e Spalding (1972, 1974), cujo modelo proposto é usualmente referenciado na literatura como o *modelo $\kappa - \varepsilon$ padrão*. Em seu modelo, os autores sugerem a formulação de equações de transporte para κ e ε com base nos processos físicos relevantes envolvidos em suas variações.

A equação exata para o transporte de κ pode ser obtida diretamente a partir da equação de Navier-Stokes. Multiplicando a Equação (8.12) por u_i' e, em seguida, tomando a média temporal dos termos da equação, é possível obter, após algumas manipulações, a seguinte expressão (Tennekes e Lumley, 1972):

$$\underbrace{\frac{\partial \kappa}{\partial t}}_{(I)} + \underbrace{\overline{u}_j \frac{\partial \kappa}{\partial x_j}}_{(II)} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left[\overline{\frac{p}{\rho} u_j'} + \underbrace{\frac{1}{2} \overline{\kappa u_j'}}_{(IV)} - \underbrace{\nu \frac{\partial \kappa}{\partial x_j}}_{(V)} \right]}_{(III)} - \underbrace{\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}}_{(VI)} - \underbrace{\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2}}_{(VII)} . \quad (8.37)$$

Na Equação (8.37), os termos (I), (II) e (V) representam, respectivamente, a taxa de variação local, o transporte convectivo e o transporte difusivo-molecular de κ, e não necessitam ser modelados. Os termos (III) e (IV) são associados ao transporte difusivo turbulento decorrente das flutuações presentes nos campos de pressão e velocidade. A difusão devido às flutuações turbulentas pode ser determinada por analogia à hipótese de Boussinesq, assumindo-se que a difusividade de qualquer propriedade escalar seja proporcional à difusividade da quantidade de movimento. Assim

$$\nu \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} = \Gamma_t \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \,, \tag{8.38}$$

onde Γ_t representa a difusividade turbulenta. Considerando que o transporte turbulento de quantidade de movimento, calor e massa seja realizado através dos mesmos mecanismos de difusão, é razoável prever que Γ_t esteja relacionado ao valor da viscosidade turbulenta. Introduzindo, então, o número de Prandtl turbulento, expresso por

$$\sigma_t = \frac{\nu_t}{\Gamma_t} \,, \tag{8.39}$$

a Equação (8.38) pode ser reescrita como

$$\nu \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} = \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \,. \tag{8.40}$$

Não se dispõe de modelo relativo ao transporte difusivo turbulento decorrente das flutuações de pressão. Todavia, sua contribuição para o transporte das propriedades turbulentas é, via de regra, pequena, sendo, em geral, desprezada.

O termo (VI), geralmente denominado de termo de produção, representa a taxa de transferência de energia do escoamento médio para o campo turbulento. Nos modelos baseados na hipótese da viscosidade turbulenta, o tensor $\overline{u_i' u_j'}$ é determinado utilizando-se a hipótese generalizada de Boussinesq (8.28). O termo (VII) descreve a transformação de energia cinética em energia interna nas pequenas escalas turbulentas. Este termo, usualmente referenciado pela letra grega ε, pode ser interpretado como a taxa de dissipação viscosa de κ, ou seja,

$$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2} \,. \tag{8.41}$$

O conceito da cascata de energia permite relacionar a dissipação de energia nas pequenas escalas às grandes escalas turbulentas. Por conseguinte, assumindo os valores de κ e ε como referência para a definição de escalas de velocidade, $\mathcal{U}$, e comprimento, ℓ, representativas das grandes escalas de turbulência, tem-se que

$$\mathcal{U} = \kappa^{1/2} \quad \text{e} \quad \ell = \frac{1}{\varepsilon} \kappa^{3/2} \,, \tag{8.42}$$

onde ℓ representa uma escala característica de comprimento. O valor da viscosidade turbulenta pode ser, então, calculado aplicando-se o conceito de comprimento

de mistura (8.36), obtendo-se

$$\nu_t = C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \,. \tag{8.43}$$

Tal como no caso da energia cinética turbulenta, a equação exata para o transporte da dissipação viscosa, ε, pode ser obtida diretamente da equação de Navier-Stokes (Wilcox, 1993), a saber:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \mathcal{P}_\varepsilon + \mathcal{D}_\varepsilon + d_\varepsilon \,, \tag{8.44}$$

onde $\mathcal{P}_\varepsilon$, $\mathcal{D}_\varepsilon$ e d_ε, representam, analogamente à modelagem de κ, os termos de produção, difusão e destruição de ε, respectivamente, e cujas expressões exatas são

$$\mathcal{P}_\varepsilon = -2\nu \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} \right) \,, \tag{8.45}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\varepsilon = & -2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial^2 u_k'}{\partial x_j \partial x_j} \right)^2} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \overline{u}_j \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right)} + 2\frac{\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}} - \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \,, \end{aligned} \tag{8.46}$$

$$d_\varepsilon = -2\nu \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_k} \,. \tag{8.47}$$

Como pode ser observado, a equação exata de transporte de ε possui um grande número de incógnitas, além de correlações duplas de flutuações de velocidade e gradientes de flutuações de velocidade e pressão. De modo a contornar a dificuldade para a obtenção de uma descrição exata, a modelagem dos termos acima é realizada, principalmente, através de técnicas de análise dimensional e da interpretação dos processos físicos envolvidos. Por exemplo, de acordo com Tennekes e Lumley (1972), o transporte difusivo molecular de ε pode ser desprezado para altos números de Reynolds. Assim sendo, difusão de ε é estimada através do gradiente

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] \,. \tag{8.48}$$

Os processos de produção e destruição da energia cinética turbulenta estão sempre acoplados. Por exemplo, a taxa de dissipação ε é alta onde a taxa de produção de κ é alta. Portanto, a modelagem dos termos de produção e destruição de ε deve incorporar uma relação de proporção entre os respectivos termos de produção e destruição presentes na equação de transporte de κ. O balanceamento entre os termos de produção de κ e ε pode ser obtido através da relação

$$\mathcal{P}_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{\kappa} \mathcal{P}_\kappa \,, \tag{8.49}$$

onde $C_{\varepsilon 1}$ representa uma constante de proporcionalidade. Igualmente, o modelo deve ser capaz de garantir uma estreita relação entre os termos de destruição de modo a evitar o cálculo de valores fisicamente incoerentes (negativos) para a energia cinética turbulenta. Logo

$$d_\varepsilon = C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{\kappa} \varepsilon \,. \tag{8.50}$$

Igualmente, $C_{\varepsilon 2}$ representa uma constante de proporcionalidade.

Aplicando as hipóteses e aproximações anteriormente discutidas, a formulação padrão do modelo $\kappa - \varepsilon$ para altos números de Reynolds é expressa por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] \\ &\quad + \left[\nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} \right] - \varepsilon \,, \end{aligned} \tag{8.51}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \kappa \varepsilon}{\partial x_i} \right] \\ &\quad + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{\kappa} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} \right] \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{\kappa} \,, \end{aligned} \tag{8.52}$$

sendo o valor da viscosidade turbulenta dado pela equação (8.43).

Na formulação padrão do modelo $\kappa - \varepsilon$, os valores constantes C_μ, σ_κ, σ_ε, $C_{\varepsilon 1}$ e $C_{\varepsilon 2}$ foram obtidos a partir da correlação de dados experimentais de diversos escoamentos turbulentos, sendo dados por:

$$C_\mu = 0,09 \qquad \sigma_\kappa = 1,00 \qquad \sigma_\varepsilon = 1,30 \qquad C_{\varepsilon 1} = 1,44 \qquad C_{\varepsilon 2} = 1,92 \,.$$

Regiões junto a superfícies são caracterizadas por intensos gradientes das propriedades do escoamento. Uma adequada descrição das propriedades do escoamento nestas regiões requer uma refinada discretização do domínio, cuja influência em relação ao esforço computacional requerido é obvia. Para altos números de Reynolds, é possível evitar a resolução das equações governantes nas regiões próximas à parede ao se assumir a hipótese de camada limite turbulenta completamente desenvolvida. Neste caso, o campo de velocidades na região logarítmica ($30 < y^+ < 100$) pode a ser descrito diretamente pela lei de parede clássica (Figura 8.3):

$$\frac{u}{u_\tau} = A \ln y^+ + B \,; \qquad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \,, \tag{8.53}$$

onde u_τ representa a velocidade de atrito, y a direção normal à superfície da parede e ν a viscosidade molecular, sendo os coeficientes A e B dados por

$$A = \frac{1}{\kappa_*} \,; \qquad B = \frac{1}{\kappa_*} \ln E \,. \tag{8.54}$$

Nas equações (8.54), κ_* representa a constante de von Kármán e E um parâmetro de rugosidade, cujo valor para superfícies lisas equivale a 9,8. Ao se adotar a

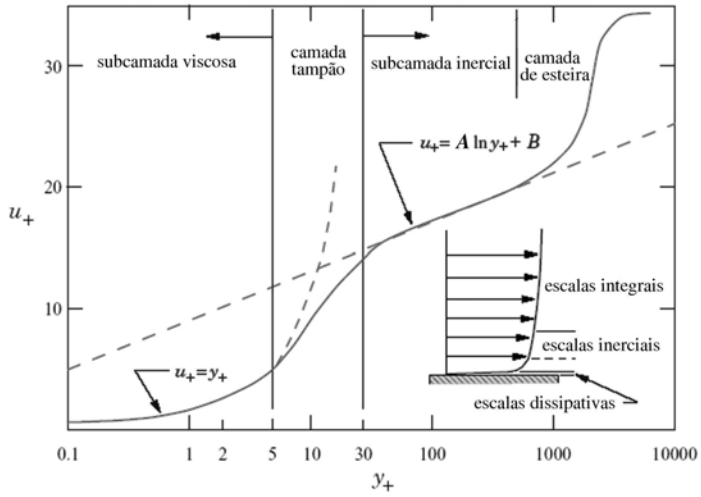

Figura 8.3: As diferentes regiões de um escoamento próximo à uma parede. Adaptado de MacDonough (2004).

hipótese de camada limite turbulenta completamente desenvolvida, os valores de κ e ε na superfície são diretamente calculados pelas seguintes funções de parede

$$\kappa = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}\,; \qquad \varepsilon = \frac{u_\tau^2}{\kappa_* y}\,. \tag{8.55}$$

Nas regiões próximas à parede onde $y^+ < 30$, o transporte difusivo molecular não pode ser desprezado e, conseqüentemente, sua contribuição deve ser incluída nas equações de transporte. Nos modelos a duas equações, as formulações para baixos números de Reynolds adotam como parâmetro um número de Reynolds turbulento, dado por

$$\mathrm{Re}_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}\,. \tag{8.56}$$

Normalmente, o transporte difusivo molecular torna-se relevante quando $\mathrm{Re}_t < 100$. A condição de não deslizamento na parede implica que $\kappa \to 0$ quando $y \to 0$. Mas, sabendo que na parede $\varepsilon \neq 0$, então, nessa região $\mathrm{Re}_t \to 0$.

Considerando que a dissipação da energia cinética turbulenta é expressa por (8.42) para a dissipação na parede, ε_w, a seguinte condição ocorre:

$$\varepsilon_w = \nu \left[\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial y}\right)^2} \right] = 2\nu \left(\frac{\partial \kappa^{1/2}}{\partial y}\right)^2\,, \tag{8.57}$$

onde u' e w' representam as duas componentes das flutuações de velocidade perpendiculares à parede. Da equação (8.57), é possível inferir que $\varepsilon(y = 0) \neq 0$. No

entanto, é conveniente definir uma nova dissipação tal que seu valor na parede seja identicamente nulo:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial \kappa^{1/2}}{\partial y} \right) . \tag{8.58}$$

O primeiro modelo $\kappa - \varepsilon$ para baixos números de Reynolds foi proposto por Jones e Launder (1972). Neste modelo, os autores adotam $\tilde{\varepsilon}$, ao invés de ε, com o objetivo de simplificar a condição de contorno na parede. Jones e Launder sugerem, também, a inclusão de um termo fonte na equação de dissipação, expresso por

$$2\nu\nu_t \left(\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_i \partial x_j} \right) . \tag{8.59}$$

Posteriormente, Launder e Sharma (1974), propõem algumas modificações com o objetivo de tornar o modelo mais adequado à previsão de escoamentos livres. A versão final do modelo apresenta a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right] + \left[\nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} \right] \\ & - \tilde{\varepsilon} - 2\nu \left(\frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right)^2 , \end{aligned} \tag{8.60}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \\ & + f_1 C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{\kappa} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} \right] \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \\ & - f_2 C_{\varepsilon 2} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\kappa} + 2\nu\nu_t \left(\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_i \partial x_j} \right) , \end{aligned} \tag{8.61}$$

sendo a viscosidade turbulenta calculada através de:

$$\nu_t = f_\mu C_\mu \frac{\kappa^2}{\tilde{\varepsilon}} . \tag{8.62}$$

Os termos f_1, f_2 e f_μ representam funções de amortecimento introduzidas ao modelo para um melhor ajuste da difusão nas regiões do escoamento onde os efeitos viscosos são expressivos. Lam e Bremhorst (1981) sugerem as seguintes expressões para as funções de amortecimento:

$$f_1 = \left(1 + \frac{0,05}{f_\mu} \right)^3 \tag{8.63}$$

$$f_2 = 1,0 - \exp\left(-\mathrm{Re}_t^2 \right) \tag{8.64}$$

$$f_\mu = \left[1 - \exp\left(-0,0165\, \mathrm{Re}_t \right) \right]^2 \left(1 + \frac{20,5}{\mathrm{Re}_t} \right) . \tag{8.65}$$

Apesar do comprovado desempenho em diversas aplicações, o modelo $\kappa - \varepsilon$ apresenta algumas deficiências. Escoamentos que possuem linhas de correste curvas

são um exemplo. Bradshaw (1972) mostrou que mesmo taxas de deformação pequenas, associadas a curvaturas suaves das linhas de corrente, acarretam um efeito pronunciado sobre as tensões de Reynolds. Mais recentemente, Muck *et al.* (1985), analisaram em detalhes os efeitos de curvaturas convexas e côncavas sobre camadas limite, concluindo que tais efeitos são totalmente diferentes entre si, mesmo qualitativamente. Os resultados obtidos demonstram que a estrutura da turbulência é mais sensível à curvatura de superfícies côncavas do que convexas.

Em regiões próximas ao ponto de separação do escoamento, o modelo $\kappa - \varepsilon$ prevê escalas de comprimento ($L_e = \kappa^{3/2}/\varepsilon$) muito elevadas. Conseqüentemente, os níveis de turbulência são superestimados e o escoamento tende a não se separar quando a evidência experimental indica o contrário. Esse problema, associado à equação de ε, é ainda mais crítico quando se adota o modelo $\kappa - \varepsilon$ para baixos números de Reynolds.

Observando os intensos gradientes de velocidade na direção principal do escoamento em bocais, Hanjalić e Launder (1980) propuseram que a energia através do espectro da turbulência seja transmitida preferencialmente pelas tensões normais. Os autores sugerem, então, uma reformulação do termo de produção $\mathcal{P}_e$, incluindo um coeficiente maior do que $C_{\varepsilon 1}$ para as tensões normais. A aplicação desse modelo mostrou uma melhora significativa na previsão de camadas limite e jatos sujeitos a gradientes de pressão adversos. Entretanto, para escoamentos com linhas de correntes curvas, o modelo $\kappa - \varepsilon$ modificado tem se mostrado bastante inadequado.

Mais recentemente também foi proposta uma outra variação do modelo $\kappa - \varepsilon$ (Orszag *et al.*, 1993), denominada RNG $\kappa - \varepsilon$. Neste modelo, diferentemente versão tradicional, é adotada uma abordagem numérica para a determinação das constantes e funções presentes nas equações de transporte. O modelo RNG $\kappa - \varepsilon$ tem se mostrado adequado à previsão de escoamentos em regiões internas de camadas limite (baixos números de Reynolds) sem a inclusão de termos de correção. Além disso, devido à natureza matemática do modelo RNG $\kappa - \varepsilon$, seus autores defendem que ele possui um espectro de aplicação maior que o modelo clássico. De fato, resultados preliminares indicam que o modelo RNG $\kappa - \varepsilon$ fornece previsões mais precisas do que o modelo $\kappa - \varepsilon$ em situações de linhas de corrente curvas, separação e estagnação.

Concluindo, pode-se dizer que o modelo $\kappa - \varepsilon$ é falho na previsão de escoamentos afastados da condição de equilíbrio local. Esta deficiência é séria o suficiente para que o modelo seja usado com cautela na previsão de escoamentos complexos. Basicamente, os erros no modelo $\kappa - \varepsilon$ originam-se pelo uso de uma relação entre tensões turbulentas e taxas de deformação do escoamento médio análoga à usada para o caso laminar e, também, devido a pouca fundamentação física da equação de transporte de ε, para a qual nenhuma das correções propostas até o momento fornece uma generalidade suficiente.

8.3.3 O modelo $\kappa - \omega$

O primeiro modelo completo de turbulência foi proposto por Kolmogorov (1942). Em adição à equação de transporte para a energia cinética turbulenta, Kolmogorov sugere como segundo parâmetro a taxa de dissipação de energia por unidade de volume e tempo, ω. Neste modelo, conhecido como modelo $\kappa - \omega$, Kolmogorov refere-se ao parâmetro ω como "uma freqüência média" determinada por:

$$\omega = c\frac{\kappa^{1/2}}{L}\,, \tag{8.66}$$

onde C representa uma constante. Sendo um parâmetro com dimensão de freqüência, o inverso de ω representa uma escala de tempo. Analogamente, a quantidade $\kappa^{1/2}/\omega$ pode ser interpretada como um comprimento de mistura. Considerando que a transformação de energia cinética turbulenta em energia interna se processa nas menores escalas, o parâmetro ω representa a taxa de transferência de energia cinética turbulenta das grandes escalas para as pequenas escalas. Logo, o valor de ω está associado às grandes escalas de κ e L. O argumento de Kolmogorov de que $\omega \propto \kappa^{/2}/L$ é consistente com a hipótese de Boussinesq, na qual se assume que a viscosidade turbulenta possa ser expressa como um produto entre escalas características de velocidade e comprimento.

Kolmogorov (1942) apresenta um desenvolvimento relativamente sucinto do modelo $\kappa - \omega$, cuja equação diferencial de transporte para ω é dada por:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = -\beta\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_t}{\sigma}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right)\,. \tag{8.67}$$

Observa-se nesta primeira versão da equação de transporte para ω que não há um termo de produção análogo ao presente na equação da energia cinética turbulenta. Este fato é consistente com a hipótese adotada por Kolmogorov de que ω é associada às menores escalas de turbulência, e, portanto, não tem interação direta com o campo médio do escoamento. Porém, a formulação de Kolmogorov falha nesse aspecto, uma vez que as grandes escalas são primordialmente responsáveis pela determinação das escalas de tempo turbulentas e pela taxa de dissipação propriamente dita. A Equação (8.67) também não possui um termo de difusão molecular. Neste caso, sua aplicação é restrita a escoamentos com altos números de Reynolds, não podendo ser integrada na região da subcamada viscosa próxima à parede.

Ao longo do tempo, diversos pesquisadores (Saffman, 1970; Wilcox e Rubesin, 1980; Speziale *et al.*, 1990; entre outros) têm se dedicado ao desenvolvimento do modelo $\kappa - \omega$. Wilcox e Alber (1972) apresentaram uma nova interpretação física para o parâmetro ω, identificando-o como sendo a raiz quadrada da média quadrática das flutuações de vorticidade. Por sua vez, Wilcox (1988) e Speziale *et al.* (1990) sugerem que ω seja interpretado como sendo a razão ε/κ, ou seja, a taxa de dissipação por unidade de energia cinética turbulenta.

A formulação proposta por Wilcox (1988) representa a versão mais extensivamente testada do modelo, sendo, portanto, usualmente referenciada na literatura

como o modelo $\kappa - \omega$ padrão:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\kappa 1}}\right)\frac{\partial \kappa}{\partial x_j}\right] + \left[\nu_t\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\kappa\delta_{ij}\right] - \beta_\kappa\,\kappa\,\omega\,, \tag{8.68}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\omega 1}}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + \alpha_1 \frac{\omega}{\kappa}\left[\nu_t\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\kappa\delta_{ij}\right]\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \beta_{\omega 1}\,\omega^2\,, \tag{8.69}$$

onde

$$\alpha_1 = 5/9 \qquad \beta_\kappa = 9/100 \qquad \beta_{\omega 1} = 3/40 \qquad \sigma_{\kappa 1} = 2 \qquad \sigma_{\omega 1} = 2\,.$$

Para evitar o acúmulo de energia cinética turbulenta em regiões de estagnação, Menter (1994) introduziu o limitador para o termo de produção:

$$\tilde{\mathcal{P}}_\kappa = \min\left(\mathcal{P}_\kappa, C_{\lim}\,\varepsilon\right)\,, \tag{8.70}$$

onde $C_{\lim} = 10$ para modelos baseados na equação de ω. Esse limitador não afeta o desempenho do modelo em camadas limite, mas evita o acúmulo de energia cinética turbulenta em regiões de estagnação.

A despeito de sua menor popularidade, o modelo $\kappa - \omega$ apresenta diversas vantagens em relação ao modelo $\kappa - \varepsilon$. Em particular, o modelo fornece predições bastante acuradas do escoamento em camada limite bidimensional, incluindo ambas as condições de gradientes de pressão favoráveis e adversos. Diferentemente do modelo $\kappa - \varepsilon$, o modelo $\kappa - \omega$ não requer, necessariamente, formulações específicas para baixos números de Reynolds, evitando, assim, a utilização de complexas funções de amortecimento. De fato, as equações de transporte do modelo podem ser diretamente integradas na sub-camada laminar. Formulações de baixos números de Reynolds para o modelo $\kappa - \varepsilon$ requerem tipicamente uma resolução de elementos próxima à parede da ordem de $y^+ < 0,2$, enquanto que para o modelo $\kappa - \omega$ uma resolução em torno de $y^+ < 2$ já é considerada satisfatória. Em conseqüência, a discretização do domínio no modelo $\kappa - \omega$ apresenta uma densidade de elementos comparativamente menor do que a requerida pelo modelo $\kappa - \varepsilon$.

Embora as equações de transporte do modelo $\kappa - \omega$ padrão possam ser utilizadas para a descrição do escoamento nas regiões próximas à parede, alguns autores propuseram formulações específicas para baixos números de Reynolds. Wilcox (1994) adiciona funções de amortecimento ao modelo $\kappa - \omega$ padrão, demonstrando que o modelo é capaz de predizer a transição, sendo, inclusive, apto a descrever efeitos de rugosidade (Patel e Yoon, 1995). Variações do modelo $\kappa - \omega$ padrão para baixos números de Reynolds também são apresentadas por Peng *et al.* (1997) e Bredberg *et al.* (2002).

A principal limitação apresenta pelo modelo $\kappa - \omega$ está relacionada a sua bem conhecida sensibilidade a variações nas condições de corrente livre. Em alguns

casos, pequenas variações no valor de ω nas condições de contorno de entrada levam a variações significativas nos resultados.

8.3.4 O modelo *shear stress transport* (*SST*)

As deficiências apresentadas pelo modelo $\kappa - \omega$ quanto à sensibilidade a variações nas condições de corrente livre representa uma característica indesejável do modelo. Como solução para este problema foi desenvolvida uma variação do modelo $\kappa - \omega$, a qual ficou conhecida como modelo *Baseline* $\kappa - \omega$ (BSL $\kappa - \omega$). O modelo *Baseline* $\kappa - \omega$ não representa, em si, um novo modelo de turbulência, mas a composição entre os modelos de $\kappa - \omega$ e $\kappa - \varepsilon$. Originalmente proposto por Menter (1994), o modelo *Baseline* $\kappa - \omega$ envolve a transformação da equação de transporte para ε em uma formulação de tipo $\kappa - \omega$, constituindo, assim, um modelo com dois conjuntos de equações de transporte. Na aplicação do modelo, as equações de transporte para $\kappa - \omega$ são utilizadas na região próxima à parede, enquanto as equações transformadas de transporte para $\kappa - \varepsilon$ são adotadas na região externa. A ponderação da contribuição de cada modelo é realizada através de uma função de mistura do tipo

$$\Phi_3 = F_1\, \Phi_1 + (1 - F_1)\, \Phi_2\,. \tag{8.71}$$

A função de mistura F_1 equivale a unidade na parede, decaindo para o valor zero na região externa à camada limite. Os termos Φ representam as contribuições de cada modelo.

Na Equação (8.71), a função de mistura é definida por

$$F_1 = \tanh\left(\arg^4\right)\,, \tag{8.72}$$

sendo

$$\arg = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\beta_\kappa \omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega}\right), \frac{4\rho\kappa}{\mathrm{CD}_\omega \sigma_{\omega 2} y^2}\right] \tag{8.73}$$

e

$$\mathrm{CD}_\omega = \max\left[2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega 2}\omega}\frac{\partial\kappa}{\partial x_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}, 10^{-10}\right]\,, \tag{8.74}$$

onde ρ representa a massa específica e y representa a distância em relação à parede.

As equações de transporte do modelo *Baseline* $\kappa - \omega$ são expressas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial\kappa}{\partial t} + \overline{u}_j\frac{\partial\kappa}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\kappa 2}}\right)\frac{\partial\kappa}{\partial x_j}\right] \\ &\quad + \left[\nu_t\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\kappa\delta_{ij}\right] - \beta_\kappa\,\kappa\,\omega\,,\end{aligned} \tag{8.75}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial t} + \overline{u}_j\frac{\partial\omega}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\omega 2}}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}\right] + \frac{2}{\sigma_{\omega 2}\omega}\left(\frac{\partial\kappa}{\partial x_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right) \\ &\quad + \alpha_2\frac{\omega}{\kappa}\left[\nu_t\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\kappa\delta_{ij}\right]\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} - \beta_{\omega 2}\,\omega^2\,,\end{aligned} \tag{8.76}$$

onde as constantes assumem os valores

$$\alpha_2 = 0,44 \qquad \beta_{\omega 2} = 0,0828 \qquad \sigma_{\kappa 2} = 1,00 \qquad \sigma_{\omega 2} = 1/0,856\,.$$

O modelo *Baseline* $\kappa - \omega$ combina as vantagens dos modelos $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \omega$, mas ainda falha na previsão do ponto de separação do escoamento em superfícies lisas (Menter, 1994). De modo a corrigir esta deficiência do modelo *Baseline* $\kappa - \omega$, Menter sugere a adoção de um limitador para o valor da viscosidade turbulenta:

$$\nu_t = \frac{\alpha\kappa}{\max\left(\alpha\omega, S\,F_2\right)}\,, \tag{8.77}$$

onde S representa uma medida invariante da taxa de deformação e F_2 uma função de mistura semelhante a F_1.

Este modelo *Baseline* $\kappa - \omega$ modificado é referenciado na literatura como modelo *SST - Shear Stress Transport*. A concepção do modelo *SST* permite um adequado transporte das tensões cisalhantes, resultando, assim, em predições acuradas da separação sob condições de gradiente de pressões adverso. As equações de transporte do modelo *SST* são escritas, na forma indicial, como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\kappa}{\partial t} + \overline{u}_j\frac{\partial\kappa}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \nu_t\left(\frac{1}{F_1^{-1}\sigma_{\kappa 1}} + \frac{1}{\left(1-F_1\right)^{-1}\sigma_{\kappa 2}}\right)\right)\frac{\partial\kappa}{\partial x_j}\right] \\ &\quad + \mathcal{P}_\kappa\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} - \beta_\kappa\,\kappa\,\omega\,, \end{aligned} \tag{8.78}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial t} + \overline{u}_j\frac{\partial\omega}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \nu_t\left(\frac{1}{F_1^{-1}\sigma_{\omega 1}} + \frac{1}{\left(1-F_1\right)^{-1}\sigma_{\omega 2}}\right)\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right] \\ &\quad + \left(1-F_1\right)\frac{2}{\sigma_{\omega 2}\omega}\left(\frac{\partial\kappa}{\partial x_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right) - \left[F_1\beta_{\omega 1} + \left(1-F_1\right)\beta_{\omega 2}\right]\omega^2 \\ &\quad + \left[F_1\alpha_1 + \left(1-F_1\right)\alpha_2\right]\frac{\omega}{\kappa}\,\mathcal{P}_\kappa\,, \end{aligned} \tag{8.79}$$

onde

$$\mathcal{P}_\kappa = \nu_t\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\,\kappa\,\delta_{ij}\,. \tag{8.80}$$

Bardina *et al.* (1997) desenvolveram um extenso estudo de validação do modelo *SST*, cujos resultados demonstraram um desempenho comparativamente superior em relação aos modelos $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \omega$ em simulações acuradas do escoamento em camadas limite. Em particular, o modelo *SST* apresentou boa capacidade de predição da separação em escoamentos sob gradientes de pressão adversos.

8.4 Modelos para a equação de transporte do tensor de Reynolds

Os modelos de turbulência baseados no conceito de viscosidade turbulenta representam uma solução consolidada para o problema do fechamento das equações

médias de Navier-Stokes. No entanto, apesar do reconhecido desempenho na solução de diversas categorias de escoamentos turbulentos, tais modelos apresentam algumas deficiências, geralmente associadas às limitações impostas pela hipótese de Boussinesq. Escoamentos nso quais o comportamento anisotrópico da turbulência mostra-se relevante, representam um exemplo típico em que a hipótese de Boussinesq é falha.

Uma alternativa para o fechamento das equações médias de Navier-Stokes consiste na obtenção de equações diretas para o transporte das tensões de Reynolds. Em virtude, tais modelos são usualmente referenciados na literatura como modelos de fechamento diretos ou de segunda ordem. Conforme visto na seção 8.2.2 que na equação de transporte para o tensor de Reynolds, Eq.(8.18), os termos correspondentes aos processos de difusão ($\mathcal{D}_{ij}$), redistribuição (Φ_{ij}) e dissipação (ε_{ij}) possuem quantidades desconhecidas, e, portanto, necessitam de uma modelação específica. Comumente, a modelação dos termos de difusão e dissipação apresenta um caráter mais geral, sendo basicamente idêntica nos principais modelos existentes. Por sua vez, a modelagem do termo de redistribuição tem sido objeto de diversos trabalhos, representando um tema central no desenvolvimento desses modelos de fechamento de segunda ordem. Nesta seção serão abordados três dos principais modelos para Φ_{ij} mais difundidos atualmente: os modelos *LRR*, *SSG* e *BSL* $\kappa - \omega$).

Embora os modelos de turbulência baseados no conceito de viscosidade turbulenta tenham alcançado sucesso na solução de diversas categorias de escoamentos, algumas deficiências são ainda encontradas, geralmente associadas a situações onde a hipótese de Bussinesq é falha, como, por exemplo, no caso de escoamentos com linhas de corrente curvas.

Dissipação ε_{ij}

O tratamento do termo dissipativo é, em geral, semelhante ao empregado no modelo $\kappa - \varepsilon$, sendo assumido, igualmente, que o processo de dissipação viscosa ocorra de uma forma isotrópica nas menores escalas. Isso implica matematicamente que

$$\varepsilon_{ij} = \mathcal{C}\, \varepsilon\, \delta_{ij}\,.$$

Contraindo ambos os lados da expressão acima, e usando a convenção de soma de Einstein, obtém-se que $\mathcal{C} = 2/3$. Então, para altos números de Reynolds, onde a hipótese de Kolmogorov sugere dissipações isotrópicas em microescalas, a fenomenologia dissipativa é dada por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\, \varepsilon\, \delta_{ij}\,. \tag{8.81}$$

A taxa de dissipação da energia cinética turbulenta, ε, continua sendo uma quantidade desconhecida, que precisa ser determinada a partir de sua própria equação de transporte (Hanjalić, 1994),

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \mathcal{P} \frac{\varepsilon}{\kappa} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{\kappa} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right], \tag{8.82}$$

onde κ é a energia cinética turbulenta por unidade de massa. Cabe ressaltar que na dedução da equação acima faz-se necessário o emprego de uma fenomenologia extensiva devido à falta de informações a respeito da complexidade dos processos físicos envolvidos na dissipação turbulenta. Cabe aqui ressaltar a possibilidade de se usar ω, a taxa de dissipação específica por unidade de energia cinética ao invés de ε, de maneira análoga à utilizada no modelo $\kappa-\omega$ é utilizado no lugar de $\kappa-\varepsilon$ (veja a seção (8.4.3)).

Difusão $\mathcal{D}_{ij}$

Um dos problemas inerentes à elaboração de fenomenologias para o processo de difusão turbulenta é a presença do termo de correlação tripla entre as flutações de velocidade, $\overline{u_i'u_j'u_k'}$. Entre as várias alternativas disponíveis na literatura para tratar este termo (Hanjalić & Launder, 1972; Lumley, 1978; Dekeyser & Launder, 1983; Hanjalić, 1994) a mais popular é a hipótese da difusão gradiente generalizada (Daly & Harlow, 1970). Considerando uma determinada quantidade $\phi(\mathbf{x},t)$, sua correlação temporal com as flutuações de velocidade é dada por

$$\overline{u_k'(\mathbf{x},t)\phi'(\mathbf{x},t)} \propto -\frac{\kappa}{\varepsilon}\,\overline{u_k'(\mathbf{x},t)u_l'(\mathbf{x},t)}\,\frac{\partial\overline{\phi}(\mathbf{x})}{\partial x_l}\,.$$

A forma dessa expressão tem origem nos termos exatos (ou fechados) presentes nas equações de Reynolds e nas equações de transporte dos fluxos turbulentos de escalares. Nessas equações, os termos correspondentes aos processos convectivos e de produção descrevem o transporte das propriedades turbulentas em função dos seus respectivos gradientes.

O conceito de difusão gradiente se sustenta na hipótese de que as correlações estatísticas entre flutuações se tornam cada vez mais irrelevantes à medida que sua ordem aumenta. Isso é chamado de *princípio da influência recedente*. Por esse motivo, correlações de ordem quatro ou maiores são freqüentemente ignoradas nas modelagens. Identificando $\phi \to u_i'u_j'$, tem-se, então, que

$$\overline{u_i'u_j'u_k'} = -C_s\frac{\kappa}{\varepsilon}\,\overline{u_k'u_l'}\,\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial x_l}\,,$$

onde C_s é um parâmetro livre que necessita ser ajustado *a posteriori*. Nota-se que a simetria na troca dos índices i, j e k do lado esquerdo não é preservada no lado direito, de modo que este modelo perde a invariância por rotações. De fato, o modelo *LRR* adota uma expressão diferente, que preserva a simetria dos índices, como será visto a seguir.

Os termos difusivos correspondentes às flutuações de pressão apresentam problemas de modelagem mais complexos. A dificuldade está no reduzido volume de dados experimentais disponíveis na literatura. Entretanto, algumas estimativas teóricas da interação das flutuações pressão-velocidade e simulações numéricas diretas (DNS) indicam que essa contribuição não é significativa, de modo que a

maioria dos modelos não a leva em consideração (Hanjalić, 1994). A expressão fechada para o termo difusivo é então dada por

$$\mathcal{D}_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\nu\delta_{kl} + C_s\frac{\kappa}{\varepsilon}\overline{u'_k u'_l}\right)\frac{\partial\overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l}\right]. \tag{8.83}$$

8.4.1 O modelo *LRR*

O modelo *LRR* (Launder, Reece & Rodi, 1975) foi um dos primeiros modelos de fechamento de segunda ordem a ser formulado, sendo bastante difundido literatura. tal como nos demais modelos, a modelação do termo de redistribuição Φ_{ij}, Eq.(8.23) no modelo (LRR) adota como referefência condições de escoamento turbulento livre. Logo, a partir da equação de Navier-Stokes (8.5), é possível obter uma equação de Poisson para a pressão instantânea $p(\mathbf{x}, t)$,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(u_i u_j\right),$$

e o mesmo para a pressão média $\overline{p}(\mathbf{x})$, a partir da equação de Reynolds (8.12),

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\overline{u}_i\overline{u}_j + \overline{u'_i u'_j}\right).$$

Em ambas as equações acima, os termos viscosos foram eliminados através da equação da continuidade. Subtraindo a componente média da instantânea, obtém-se uma equação para as flutuações $p'(\mathbf{x}, t)$,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j}\right) - 2\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_j}{\partial x_i},$$

cuja solução formal, basead na teoria da equação de Poisson, é dada por

$$\frac{1}{\rho}p'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi}\int_V\left[-\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j}\right) - 2\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial y_j}\frac{\partial u'_j}{\partial y_i}\right]\frac{dV}{|\mathbf{r}|}. \tag{8.84}$$

onde $dV = dy_1 dy_2 dy_3$ e $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$. Devido à inexistência de fronteiras sólidas, o limite da integral de superfície dessa solução pode ser convenientemente tomado como infinito, onde os campos são nulos. Dessa maneira, os termos de superfície podem ser desprezados. Então, levando essa solução para $p'(\mathbf{x}, t)$ de volta na expressão para Φ_{ij}, obtém-se

$$\Phi_{ij} \equiv \overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)}. \tag{8.85}$$

A equação (8.85) pode ser decomposta em dois termos distintos da correlação pressão-velocidade (Chou, 1945),

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^{(1)} + \Phi_{ij}^{(2)},$$

onde

$$\Phi_{ij}^{(1)} = -\frac{1}{4\pi}\int_V \left[\overline{\left(\frac{\partial^2 u_l' u_m'}{\partial y_l \partial y_m}\right)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}\right]\frac{dV}{|\mathbf{r}|}\,,$$

$$\Phi_{ij}^{(2)} = -\frac{1}{4\pi}\int_V 2\left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial y_m}\right)\overline{\frac{\partial u_m}{\partial y_l}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}\frac{dV}{|\mathbf{r}|}\,.$$

$\Phi_{ij}^{(1)}$ representa a contribuição puramente turbulenta para a redistribuição, e $\Phi_{ij}^{(2)}$ a contribuição dependente do gradiente da velocidade média do escoamento. Modelos avançados usam diretamente a expressão acima, tentando aproximar as integrais triplas.

Fisicamente, o termo de redistribuição age no sentido de distribuir a energia turbulenta entre as diversas componentes do tensor de Reynolds. Inicialmente, a turbulência é altamente anisotrópica, com determinadas componentes de $\rho\overline{u_i' u_j'}$ apresentando magnitudes superiores que às demais. Entretanto, através dos processos descritos pelos termos $\Phi_{ij}^{(1)}$ e $\Phi_{ij}^{(2)}$, observa-se uma tendência da energia turbulenta ser distribuida de um modo equilibrado entre todas as componentes do tensor de Reynolds, levando, portanto, a um comportamento isotrópico da turbulência. Naturalmente, quanto maior a anisotropia, maior a importância de Φ_{ij}; quanto mais isotrópica a turbulência, menor a influência da redistribuição.

Considerando que δ_{ij} representa o tensor isotrópico de segunda ordem, dado um tensor genérico a_{ij}, é possível separar a parcela anisotrópica por meio da subtração da parcela isotrópica. Desse modo, um tensor genérico anisotrópico é dado por $a_{ij} - \mathcal{C}\delta_{ij}$, onde $\mathcal{C} = \text{const}$. Por outro lado, sabendo que o tensor de redistribuição é proporcional à anisotropia, é razoável assumir que (ignorando por um momento constantes dimensionais),

$$\Phi_{ij} \propto (a_{ij} - \mathcal{C}\delta_{ij})\ .$$

O mesmo raciocício pode ser aplicado para as componentes de Φ_{ij}. Uma vez que $\Phi_{ij}^{(1)}$ está relacionado essencialmente à turbulência, e $\Phi_{ij}^{(2)}$ ao gradiente da velocidade média, é possível escrever (Rotta, 1951; Naot *et al.*, 1970; Launder *et al.*, 1975),

$$\Phi_{ij}^{(1)} = -C_1\frac{\varepsilon}{\kappa}\left(\overline{u_i' u_j'} - \frac{2}{3}\kappa\delta_{ij}\right)\,, \tag{8.86}$$

$$\Phi_{ij}^{(2)} = -C_2\left(\mathcal{P}_{ij} - \frac{1}{3}\mathcal{P}_{kk}\delta_{ij}\right)\,. \tag{8.87}$$

O modelo *LRR* adota uma modificação na modelagem do termo de correlação tripla de modo a torná-lo invariante por rotações (simétrico na permutação dos índices i, j e k em ambos os lados da igualdade):

$$\overline{u_i' u_j' u_k'} = -C_s\frac{\kappa}{\varepsilon}\left(\overline{u_i' u_l'}\,\frac{\partial\overline{u_j' u_k'}}{\partial x_l} + \overline{u_j' u_l'}\,\frac{\partial\overline{u_k' u_i'}}{\partial x_l} + \overline{u_k' u_l'}\,\frac{\partial\overline{u_i' u_j'}}{\partial x_l}\right)\,.$$

Tabela 8.3: Parâmetros livres do modelo *LRR*.

Constante	Valor	Método de determinação
C_1	1,50	tensões normais em escoamentos quase homogêneos
C_2	0,40	tensões normais em escoamentos quase homogêneos
C_s	0,11	otimização computacional
C_ε	0,18	consistência do valor de $\kappa_* \approx 0,41$
$C_{\varepsilon 1}$	1,44	otimização computacional
$C_{\varepsilon 2}$	1,90	decaimento turbulento em malha

Assim sendo, o modelo *LRR* de fechamento para as equações de transporte de Reynolds é dado por

$$\begin{aligned}\frac{D\overline{u_i'u_j'}}{Dt} &= (1-C_2)\mathcal{P}_{ij} + \frac{C_2}{3}\mathcal{P}_{kk}\delta_{ij} - C_1\frac{\varepsilon}{\kappa}\left(\overline{u_i'u_j'} - \frac{2}{3}\kappa\delta_{ij}\right)\\ &+ C_s\frac{\kappa}{\varepsilon}\left(\overline{u_i'u_l'}\,\frac{\partial\overline{u_j'u_k'}}{\partial x_l} + \overline{u_j'u_l'}\,\frac{\partial\overline{u_k'u_i'}}{\partial x_l} + \overline{u_k'u_l'}\,\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial x_l}\right)\\ &- \frac{2}{3}\,\varepsilon\,\delta_{ij} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2\overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k^2}\,,\end{aligned} \tag{8.88}$$

onde Re é o número de Reynolds. O único parâmetro desconhecido é representado por ε, o qual pode ser determinado pela seguinte equação modificada (Hanjalić e Launder, 1972):

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_j\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1}\mathcal{P}\frac{\varepsilon}{\kappa} - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{\kappa} + C_\epsilon\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\kappa}{\varepsilon}\overline{u_k'u_l'}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right)\,. \tag{8.89}$$

O modelo *(*LRR) possui ao todo seis constantes livres, cujo conjunto de valores padrão é apresentado na Tabela 8.3 (Launder, 1992).

O modelo *LRR* foi posteriormente modificado (Gibson e Launder, 1978) a fim de serem incorporados os efeitos de parede. Neste caso, não é possível adotar limites de integração infinitos, e, portanto, a integral de superfície

$$\frac{1}{4\pi\rho}\int_S\left[\frac{1}{|\mathbf{r}|}\frac{\partial p'}{\partial n} - p'\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right]dS\,,$$

precisa ser adicionada à solução formal de $p'(\mathbf{x},t)$, Eq.(8.84), o que resulta em

$$\begin{aligned}\Phi_{ij}^{(w)} = \frac{1}{4\pi}\int_S\Bigg[&\frac{1}{|\mathbf{r}|}\frac{\partial}{\partial n(\mathbf{y})}\overline{p'(\mathbf{y},t)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}\\ &-\overline{p'(\mathbf{y},t)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}\frac{\partial}{\partial n(\mathbf{y})}\frac{1}{|\mathbf{r}|}\Bigg]\,dS\,.\end{aligned}$$

onde $\partial/\partial n$ representa a derivada na direção normal à superfície de contorno.

A forma do termo de redistribuição é dada, então, por (Shir, 1973; Gibson e Launder, 1978)

$$\Phi_{ij}^{(w)} = \Phi_{ij}^{(w1)} + \Phi_{ij}^{(w2)} ,$$

onde

$$\Phi_{ij}^{(w1)} \equiv C_{w1} \frac{\varepsilon}{\kappa} \left(\overline{u'_k u'_m}\, n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u'_k u'_j}\, n_k n_i - \frac{3}{2} \overline{u'_k u'_i}\, n_k n_j \right) f_w ,$$

$$\Phi_{ij}^{(w2)} \equiv C_{w2} \left(\Phi_{km}^{(2)} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{ik}^{(2)} n_k n_j - \frac{3}{2} \Phi_{jk}^{(2)} n_k n_i \right) f_w .$$

cujas constantes livres equivalem $C_{w1} = 0,5$ e $C_{w2} = 0,3$. A função de escala de comprimento f_w tem o objetivo de amortecer a contribuição dos termos $Phi_{ij}^{(w1)}$ e $\Phi_{ij}^{(w2)}$ a medida que o escoamento se afasta da parede, sendo definida por

$$f_w = \frac{\kappa^{3/2}/\varepsilon}{2.5 w_p n_p} ,$$

onde w_p representa a distância da parede e n_p o vetor unitário normal à parede. Os termos de parede falham em determinadas situações, e nesses casos correções devem ser impostas em $\Phi_{ij}^{(w1)}$ e $\Phi_{ij}^{(w2)}$ (Craft e Launder, 1992; Schiestel, 1993; Hanjalić, 1994).

8.4.2 O modelo *SSG*

O modelo *LRR* assume que a correlação pressão-velocidade seja uma função linear do tensor de anisotropia $b_{ij} = \overline{u'_i u'_j}/2\kappa - (1/3)\delta_{ij}$. Diferentemente, o modelo *SSG* (Speziale, Sarkar e Gatski, 1991) generaliza o modelo *LRR* por meio de termos quadráticos em b_{ij} na fenomenologia de redistribuição Φ_{ij}, chamada agora de *modelo de correlação pressão-velocidade SSG*:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = & -\left(C_1\, \varepsilon + C_1^*\, \mathcal{P}\right) b_{ij} + C_2\, \varepsilon \left(b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} \mathcal{I}\, \delta_{ij} \right) + \left(C_3 + C_3^* \sqrt{\mathcal{I}} \right) \kappa S_{ij} \\ & + C_4\, \kappa \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{kl} S_{kl}\, \delta_{ij} \right) + C_5\, \kappa \left(b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik} \right) , \end{aligned} \quad (8.90)$$

onde $\mathcal{I}$ representa o segundo invariante do tensor de anisotropia, $\mathcal{I} \equiv b_{kl} b_{kl}$; W_{ij} é o tensor de rotação absoluta,

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) + \epsilon_{ijk} \Omega_k ,$$

onde ϵ_{ijk} representa o tensor de Levi-Civita e Ω_i a i-ésima componente da velocidade angular. Finalmente, S_{ij}, o tensor de tensões médio, é definido por

$$S_{ij} \equiv \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} .$$

Tabela 8.4: Parâmetros livres do modelo *SSG*.

Constante	Valor	Método de determinação
C_1	3,40	retorno à isotropia
C_1^*	1,80	otimização computacional
C_2	0,20	retorno à isotropia
C_3	0,80	resultado da teoria de distorção rápida
C_3^*	1,30	otimização computacional
C_4	1,25	otimização computacional
C_5	0,40	otimização computacional

O modelo *SSG* possui ao todo sete parâmetros livres referentes à modelagem do termo de redistribuição, em adição aos quatro outro parâmetros provenientes da modelagem dos processos de dissipação e difusão. A Tabela 8.4 fornece os valores dos sete parâmetros adicionais do modelo *SSG* (Speziale, Sarkar e Gatski, 1991). Por fim, o sendo o modelo *SSG* quadrático em b_{ij}, é possível reduzi-lo ao modelo linear *LRR* através da seguinte escolha dos coeficientes:

$$C_1 = 3,00 \qquad C_1^* = 0,00 \qquad C_2 = 0,00 \qquad C_3 = 0,80$$
$$C_3^* = 0,00 \qquad C_4 = 1,745 \qquad C_5 = 1,309.$$

8.4.3 O modelo *BSL* $\kappa - \omega$

Um problema importante na formulação dos modelos *LRR* e *SSG* envolve a equação de transporte para a dissipação de energia turbulenta ε, Eq.(8.82). Conforme já comentado, a extensiva fenomenologia empregada em sua dedução resulta, em certos casos, em um efeito negativo no desempenho dos modelos quanto à adequada predição das propriedades turbulentas do escoamento. Uma alternativa atraente consiste na utilização da equação de transporte para ω, ao invés da equação para ε,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = C_{\omega 1}^{(1)} \frac{\omega}{\kappa} \mathcal{P} - C_{\omega 2}^{(1)} \, \omega^2 + C_{\omega}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{C_\mu \, \omega} \, \overline{u_k' u_l'} \, \frac{\partial \omega}{\partial x_l} \right) . \tag{8.91}$$

Desse modo, tem-se o análogo do par $\kappa - \varepsilon / \kappa - \omega$ no contexto de modelos de fechamento de segunda ordem. Assim como o modelo *SST*, as formulações *LRR* ou *SSG* (chamadas aqui genericamente de $\mathcal{S}$) baseadas em ε e ω podem ser reformuladas em termos de um único modelo, o qual conjuga as soluções $\mathcal{S} - \omega$ próximas à paredes com as soluções $\mathcal{S} - \varepsilon$ em regiões de escoamento livre. A composição das soluções é realizada de forma análoga à utilizada no modelo *SST*. Esse modelo recebe a denominação de *Baseline BSL* $\kappa - \omega$.

No modelo $\mathcal{S}-\varepsilon$, a equação de transporte para ε, reformulada em termos de ω, é dada por

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = C_{\omega 1}^{(2)} \frac{\omega}{\kappa} \mathcal{P} - C_{\omega 2}^{(2)}\, \omega^2 + C_{\omega}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{C_\mu\, \omega}\, \overline{u_k' u_l'}\, \frac{\partial \omega}{\partial x_l} \right) + \frac{2}{\omega\, \sigma_w^{(2)}} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \,. \tag{8.92}$$

Multiplicando a Eq. (8.91) por F_1 e a Eq. (8.92) por $(1-F_1)$, e, finalmente, somando as duas equações, obtém-se a equação de transporte para ω adotada no modelo *Baseline BSL* $\kappa-\omega$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = C_{\omega 1}^{(3)} \frac{\omega}{\kappa} \mathcal{P} - C_{\omega 2}^{(3)}\, \omega^2 + C_{\omega}^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{C_\mu\, \omega}\, \overline{u_k' u_l'}\, \frac{\partial \omega}{\partial x_l} \right) + (1-F_1)\, \frac{2}{\omega\, \sigma_w^{(2)}} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \,, \tag{8.93}$$

onde os coeficientes $C_x^{(3)}$ são definidos por uma interpolação linear entre os coeficientes $C_x^{(1)}$ (válidos para $\mathcal{S}-\omega$) e $C_x^{(2)}$ (válido para $\mathcal{S}-\varepsilon$),

$$C_x^{(3)} \equiv F_1\, C_x^{(1)} + (1-F_1)\, C_x^{(2)} \,.$$

Um procedimento análogo é empregado para a dedução das respectivas equações de transporte do tensor de Reynolds, $\rho\, \overline{u_i' u_j'}$.

8.5 Aplicações

8.5.1 Escoamento sobre colinas abruptas

Colinas, montes, pequenas montanhas; são os nomes comumente atribuídos às elevações orográficas cujas dimensões verticais variam, aproximadamente, entre 100 e 500 m. Em geral, estas variações de orografia estão completamente imersas na camada limite atmosférica (CLA) e exercem um grande impacto no escoamento, afetando de forma significativa as transferências de quantidade de movimento, energia e umidade entre a atmosfera e a superfície terrestre. A estrutura do campo turbulento de uma camada limite não-perturbada se altera lentamente, e, por isso, diz-se que a turbulência está em equilíbrio local. Entretanto, as mudanças induzidas por variações orográficas na camada limite ocorrem ao longo de um curto comprimento longitudinal e durante um pequeno intervalo de tempo. Esses fatores provocam uma distorção do campo turbulento, impedindo que o estado de equilíbrio local seja alcançado (Figura 8.4).

Uma colina é descrita basicamente por dois parâmetros característicos, a altura H e o comprimento característico L_H (vide Figura 8.5). Sua presença dá origem a perturbações no campo médio, incluindo variações de velocidade horizontal e vertical, de pressão e de tensões cizalhantes. Em colinas de inclinação suave,

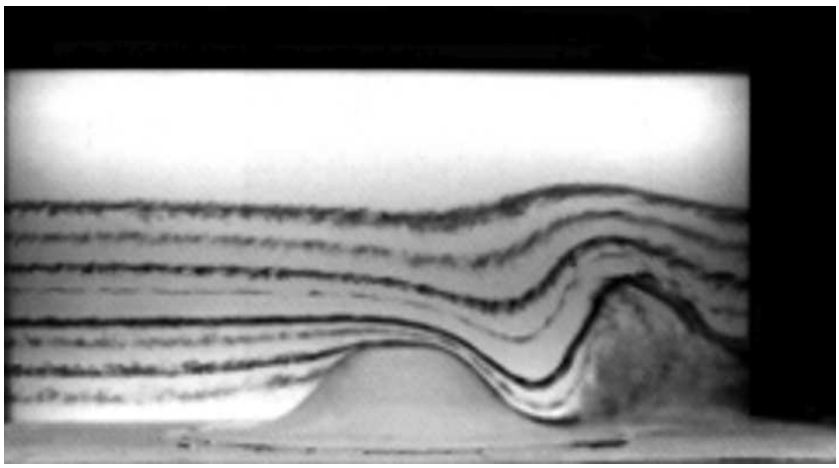

Figura 8.4: Visualização de um escoamento sobre um modelo de colina submersa em um canal de água (da esquerda para a direita).

tal que $H/L_H << 1$, as perturbações introduzidas no escoamento incidente são pequenas e podem ser calculadas por equações linearizadas. Por sua vez, em colinas de inclinação abrupta, um forte gradiente de pressão adverso é gerado à jusante do topo, resultando na separação escoamento. Para colinas suaves típicas, onde $H/L_H = 0,3$, a espessura da região de separação é comparável à espessura da região interna (Taylor e Teunissen, 1987), onde a região externa não é modificada significativamente. À medida que a inclinação aumenta, o escoamento tende a se separar. Quanto maior a inclinação, mais a separação tende a se aproximar do topo. Como descrito em Belcher e Hunt (1998), para escoamentos turbulentos em encostas íngremes, a altura da região descolada torna-se comparável à altura da colina.

O escoamento sobre colinas abruptas representa um difícil teste para os modelos de turbulência. Ao evoluir em direção ao topo da colina, o escoamento é submetido a uma forte aceleração, causada pelo campo de pressões que se desenvolve ao seu redor. Essa perturbação age sobre o fluido provocando um aumento de velocidade ΔS , onde a magnitude e distribuição espacial deste aumento dependem da forma da colina.

Para aplicações práticas, costuma-se definir a fração ΔS como o fator "speed-up" fracionário:

$$U(\Delta z) = (1 + \Delta S)\, U_r(\Delta z) \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta S = \frac{U - U_r}{U_r}\,, \tag{8.94}$$

onde U é a velocidade média do escoamento, e U_r representa o perfil de velocidades de referência.

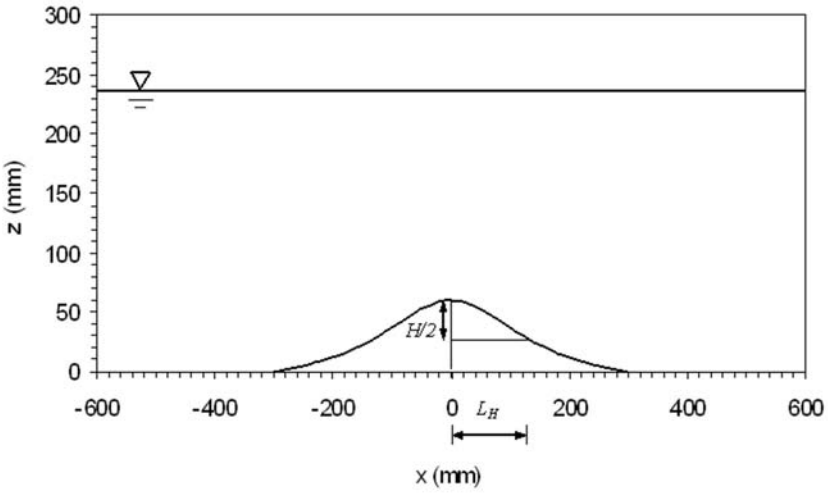

Figura 8.5: Geometria da colina abrupta e seus comprimentos característicos.

Previsões teóricas do comportamento do fator "speed-up" para cada região da camada limite sobre colinas podem ser encontradas nos trabalhos de Hunt (1973). O fator ΔS acima definido é, naturalmente, de grande interesse prático para diferentes fins, como, por exemplo, a correta localização de turbinas eólicas, de modo a se obter um melhor aproveitamento da dinâmica do vento local.

Em colinas com inclinação acentuada, o intenso gradiente adverso de pressão à jusante do topo induz a separação do escoamento (Figura 8.6). A região de separação estende-se por um comprimento equivalente a várias alturas da colina. Como resultado, toda a região de recirculação apresenta características turbulentas muito semelhantes a uma camada de mistura, cujo comportamento difere significativamente das características de uma camada limite turbulenta clássica. Como descrito em Simpson (1991), Kaimal e Finnigan (1994) e Belcher e Hunt (1998), estão presentes na região de recirculação escalas turbulentas da ordem da altura da camada de mistura, e altos níveis de intensidade turbulenta. Observações provenientes tanto de túneis de vento quanto de canais de água mostram que, mesmo no caso de colinas bidimensionais, as elevações abruptas levam a configurações de escoamento cujas propriedades estatísticas variam ao longo da direção transversal ao escoamento (Athanassiadou e Castro, 2001; Gong *et al.*, 1996). A grande dimensão dos vórtices turbulentos, em comparação com as escalas onde ocorre a variação da taxa de deformação, garante que a turbulência seja altamente não-homogênea, o que implica um transporte turbulento significativo e ausência de equilíbrio local. A uma dada distância a jusante da esteira turbulenta, o escoamento relaxa e tende a retornar à condição de equilíbrio.

De fato, Wang *et al.* (2004) discutem as dificuldades encontradas para a cor-

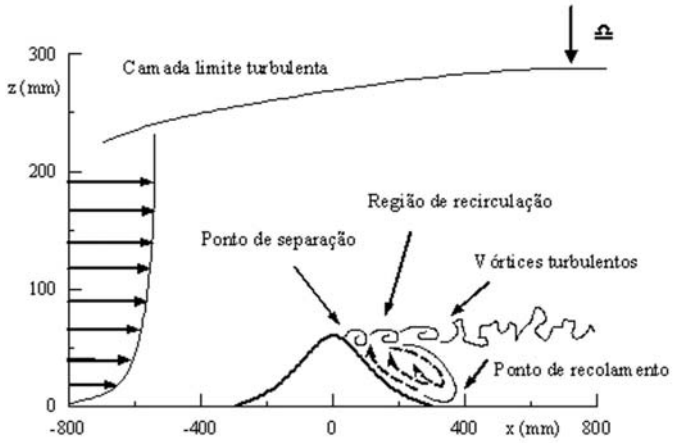

Figura 8.6: Características do escoamento sobre colinas abruptas.

reta predição da separação em escoamentos sobre superfícies curvas. Comparando resultados de simulações de escoamentos sobre colinas bidimensionais, os autores demonstram que a maioria dos modelos de turbulência superestima a extensão da região de recirculação. Wang *et al.* sugerem que este comportamento esteja possivelmente associado à incapacidade dos modelos em reproduzir a intensidade das tensões cisalhantes na região de separação.

O problema da simulação do escoamento sobre colinas tem sido amplamente discutido na literatura nos anos recentes. Hurley (1997) conduziu um estudo numérico sobre o desempenho de diferentes modelos de turbulência, incluindo modelos a uma e a duas equações. O autor conclui que os campos médios foram satisfatoriamente previstos por todos os modelos adotados. Porém, para uma adequada predição dos campos turbulentos, o autor sugere a utilização de modelos a duas equações.

Ying e Canuto (1997) adotaram um modelo de turbulência de segunda ordem para a simulação de escoamentos turbulentos sobre colinas bidimensionais com diferentes inclinações. Os resultados foram comparados com dados experimentais obtidos em túnel de vento, em cujos ensaios foram simuladas condições características de camada limite atmosférica (Khurshudyan *et al.*, 1981). Os autores também avaliaram o desempenho do modelo utilizado em relação aos resultados obtidos com modelos a duas equações e modelos algébricos do tensor de Reynolds. Tal como descrito por outros autores, Ying e Canuto concluem que a predição das propriedades do campo médio é relativamente satisfatória independentemente do modelo de turbulência utilizado. No entanto, os autores recomendam a adoção de modelos de segunda ordem a fim de se obter uma melhor representação das contribuições de origem turbulenta.

Castro e Apsley (1997) utilizam o mesmo conjunto de dados experimentais para a validação de simulações numéricas baseadas em um modelo $\kappa - \varepsilon$ modificado. Igualmente ao verificado por Ying e Canuto (1997), o modelo adotado por Castro e Apsley demonstrou uma boa capacidade de predição das propriedades do campo médio, sendo observados, no entanto, resultados subestimados para os valores de energia cinética turbulenta. Segundo os autores, as modificações aplicadas ao modelo $\kappa - \varepsilon$ padrão permitiram ao modelo capturar os efeitos de curvaturas das linhas de corrente.

Um modelo de turbulência não-linear foi adotado por Hewer (1998) para a simulação do escoamento sobre a colina de nome Blashaval (Mason e King, 1985). Neste trabalho, o autor adota um valor de comprimento de mistura e a energia cinética turbulenta como escalas de referência na implementação de um modelo baseado na hipótese de viscosidade turbulenta. Hewer avalia o desempenho do modelo em relação a modelos lineares quanto à predição do escoamento tanto à montante quanto à jusante do topo da colina. Na região à montante, os resultados obtidos com ambos os modelos não-linear e linear foram considerados comparáveis. Contudo, na região à jusante, o modelo não-linear superestimou os valores de velocidades do escoamento, apesar do melhor desempenho apresentado em relação ao modelo linear.

Kim e Patel (2000) estudaram o desempenho de modelos a duas equações conjugados a funções de parede. Cinco modelos de turbulência foram avaliados para os casos de escoamento em camada limite neutra sobre uma placa plana, escoamento sobre modelos de colinas bi e tridimensionais e escoamento em terreno real. De acordo com os autores, os melhores resultados quanto à predição dos perfis de velocidade e da extensão da região de seperação foram obtidos com o modelo RNG $\kappa - \varepsilon$.

Castro *et al.* (2002) investigaram a influência da discretização espacial e as limitações do modelo $\kappa - \varepsilon$ para a simulação numérica de um escoamento estratificado neutro sobre a colina Askervein (Escócia). De modo a capturar as características relevantes do escoamento à jusante da colina, os autores implementaram uma formulação transiente conjugada a uma discretização de terceira ordem dos termos advectivos. O fator "speed up" previsto pelos autores foi 10% menor do que o observado experimentalmente. Cabe ressaltar que o valor da rugosidade no topo da colina foi ajustado a fim de melhorar a concordância entre os resultados numéricos e os dados experimentais.

Escoamentos neutros e estratificados estáveis sobre colinas bidimensionais abruptas também foram estudados por Ross *et al.* (2004). Em seu trabalho, os autores adotaram modelos de turbulência de ordem $1\frac{1}{2}$ e 2 para a predição dos campos de velocidade e turbulento. Os resultados numéricos foram comparados com dados de ensaios em túnel de vento referentes a duas colinas com inclinações diferentes. No caso, uma das colinas adotadas como referência para o trabalho apresentava inclinação suficiente para a ocorrência da separação do escoamento. Os autores citam uma boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais para o campo médio do escoamento em ambos os casos. Entretanto, grandes discrepâncias foram observadas na região de seperação à jusante das colinas.

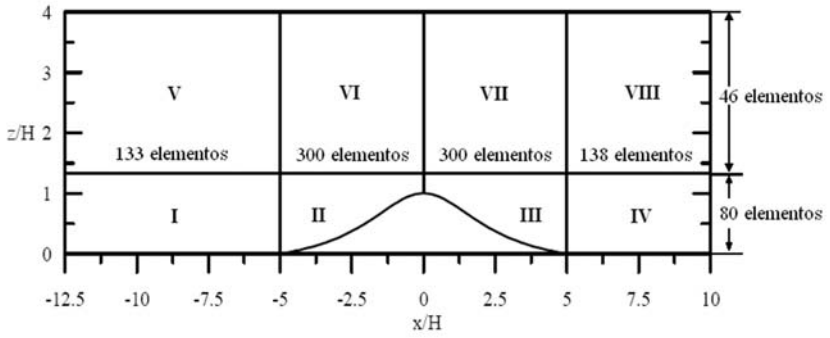

Figura 8.7: Configuração do domínio numérico.

O comportamento essencialmente turbulento, aliado à presença de uma região de recirculação, aumenta consideravelmente a complexidade dos escoamentos atmosféricos sobre colinas abruptas. Todavia, é evidente o interesse em se dispor de modelos aptos a predizer corretamente a dinâmica do escoamento na camada limite atmosférica, em especial, em sua região interna. A investigação das características dessa região do escoamento é de reconhecida dificuldade, particularmente nos experimentos de campo, onde as escalas envolvidas representam um fator fortemente limitante. Neste sentido, é de fundamental importância a disponibilidade de dados experimentais que contribuam não só para uma melhor compreensão dos fenômenos envolvidos, mas, também, para a validação dos modelos numéricos aplicados à predição das características do escoamento.

Um extenso trabalho de caracterização experimental do escoamento sobre colinas abruptas foi desenvolvido por Loureiro *et al.* (2006), envolvendo, principalmente, uma rigorosa descrição do campo turbulento, em especial, na região de separação do escoamento. Considerando as inerentes limitações da anemometria térmica em avaliar escoamentos com separação e regiões de recirculação, Loureiro utiliza um canal de água circulante para a simulação do escoamento sobre uma colina abrupta em condições de atmosfera neutra. A autora utiliza a técnica de anemometria laser-Doppler para a medição das componentes longitudinal e transversal de velocidade média, bem como das respectivas componentes de flutuação turbulenta.

Os dados experimentais obtidos por Loureiro formam uma base de dados experimentais particularmente útil para a validação de modelos de turbulência quanto ao seu desempenho na simulação dos mecanismos que regem tanto o campo de velocidade média quanto o campo turbulento dos escoamentos sobre de colinas abruptas. Os modelos de turbulência a serem testados incluem modelos a duas equações, bem como modelos diretos de transporte do tensor de Reynolds, a saber: (i) o modelo $\kappa - \varepsilon$ padrão, (ii) o modelo $\kappa - \omega$, (iii) o modelo de transporte das tensões turbulentas SST, (iv) o modelo baseado na Teoria do Grupo de Renorma-

Tabela 8.5: Características da região de separação.

Modelo	Ponto de separação (x/H)	Ponto de recolamento (x/H)	(L/H)
$\kappa - \omega$	0,50	5,60	5,10
SST	0,53	5,53	5,00
$BSL\ \kappa - \omega$	0,47	5,33	4,86
Experimentos	0,50	6,67	6,17

lização RNG $\kappa - \varepsilon$; e os modelos de transporte do tensor de Reynolds (v) SSG (Speziale *et al.*, 1991) e (vi) Baseline $\kappa - \omega$. O pacote comercial de fluidodinâmica computacional ANSYS CFX, versão 5.7, foi adotado neste trabalho como o código de referência para a execução das simulações numéricas.

Os dados experimentais apresentados por Loureiro *et al.* (2006) foram obtidos a partir de ensaios com um modelo de colina abrupta bidimensional, axissimétrico e aerodinamicamente liso. A geometria de colina adotada por Loureiro segue a equação de uma curva de Agnesi modificada (Arya *et al.*, 1987), descrita pela Equação (8.95). Esta geometria é amplamente utilizada na literatura, tendo sido adotada em dois trabalhos importantes desenvolvidos por Britter e Hunt (1981) e Arya *et al.* (1987)

$$z = \frac{75}{1 + (x/150)^2} - 15\,, \tag{8.95}$$

onde as dimensões são apresentadas em milímetros. A Figura 8.5 ilustra a geometria da colina segundo os parâmetros presentes na Equação (8.95). Segundo Loureiro *et al.* (2006), a geometria da colina foi escolhida de forma a gerar uma região de recirculação pronunciada, levando em consideração as dimensões do canal de água e a altura da camada limite passível de ser simulada.

O modelo desenvolvido para a simulação numérica do escoamento sobre a colina consistiu em um modelo bidimensional, cujas dimensões são apresentadas na Figura 8.7. De modo a se obter uma maior flexibilidade no refinamento da malha, o domínio fluido foi dividido em quatro blocos, cada qual subdividido em uma parte inferior e uma parte superior (Figura 8.7). Este arranjo permite o refinamento da malha exclusivamente nas regiões de maior interesse, garantindo, assim, a obtenção de malhas computacionalmente eficientes. Desse modo, a discretização das regiões próximas à parede, compreendidas pelas partes inferiores de cada bloco, pode ser refinada independentemente das demais regiões do domínio.

As regiões de maior interesse II e III foram discretizadas por uma malha estruturada formada por $300 \times 1 \times 80(x, y, z)$ elementos hexaédricos. Com esta configuração, a razão de aspecto dos elementos nestas regiões equivale a $1,0 \times 1,0 \times 1,0$, sendo que o afastamento vertical do primeiro nó varia entre 0,25 mm, para $x =$ 0 mm, até 1,00 mm para $x = 300$ mm. Esta discretização do domínio próximo à parede resulta em valores do coeficiente z^+ entre 1,1 e 1,7, respectivamente.

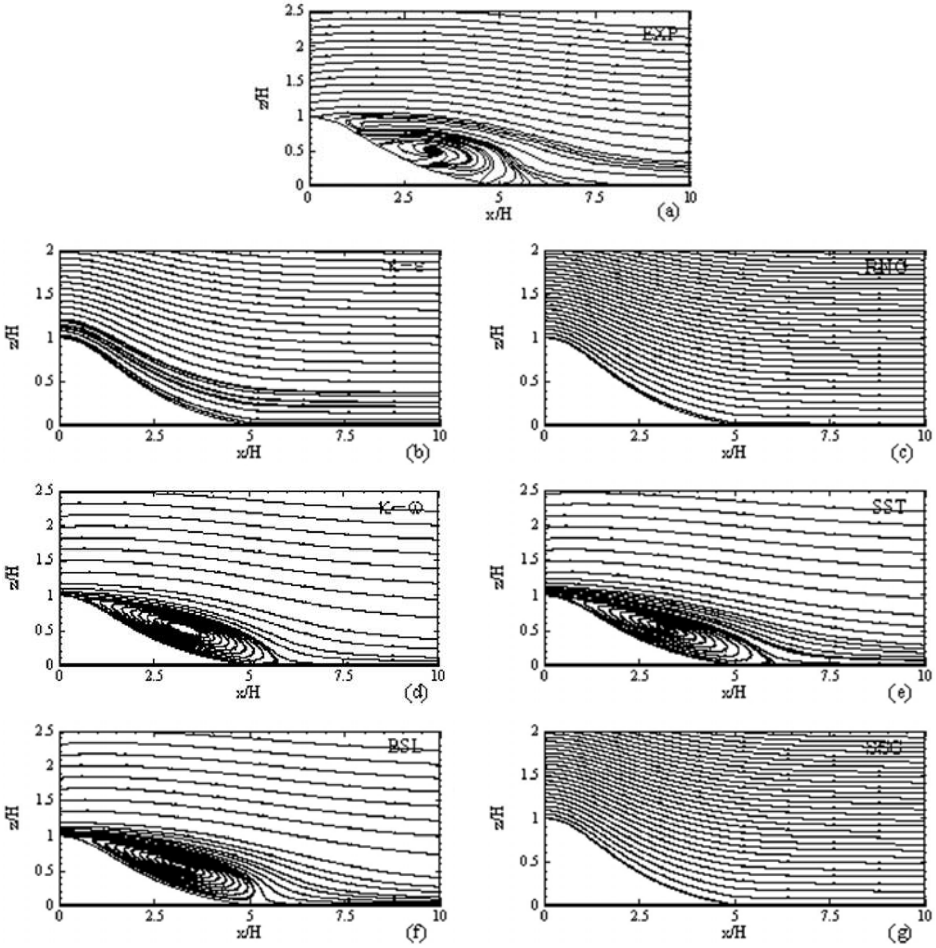

Figura 8.8: Padrões de escoamento à jusante do topo da colina.

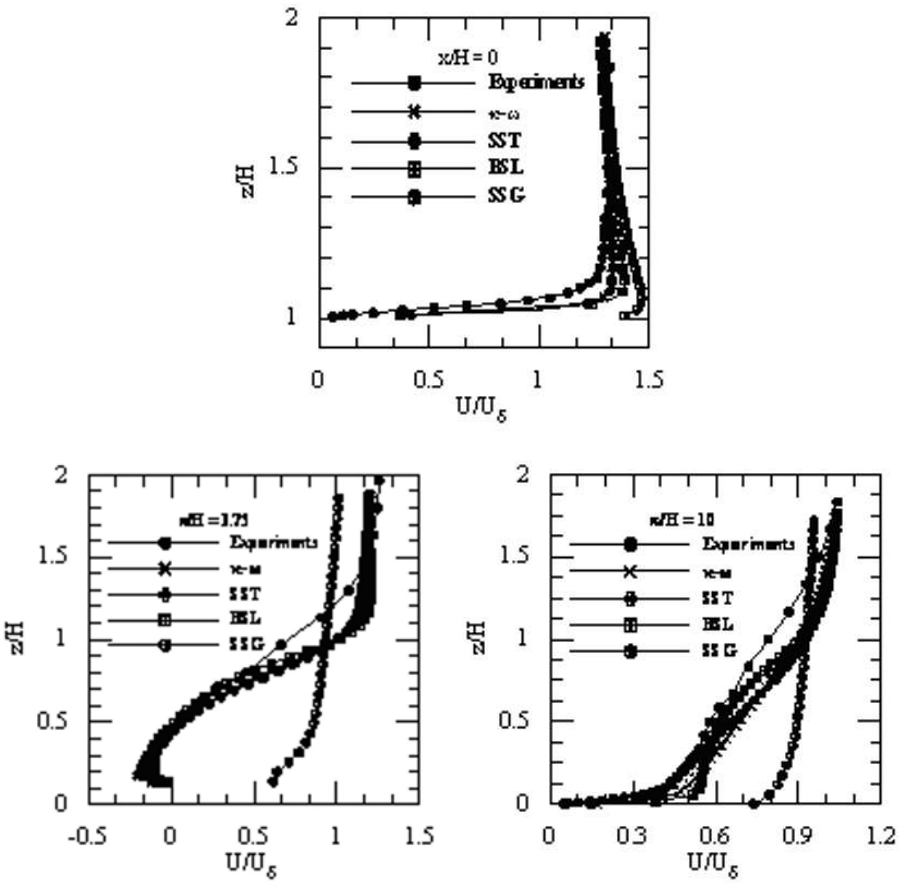

Figura 8.9: Perfis de velocidade nas estações $x/H = 0$, 3,75 e 10.

Nas regiões superiores do domínio (V..VIII), a malha apresenta um menor grau de refinamento, sendo observada uma razão de aspecto máxima equivalente a $8,0 \times 1,0 \times 4,0$. O número total de elementos da malha, incluindo todas as regiões do domínio, é da ordem de $1,1 \times 10^5$ elementos.

As condições de contorno para o perfil de velocidades e a intensidade turbulenta na entrada do domínio foram preescritas de acordo com os dados experimentais apresentados por Loureiro *et al.* (2006). A redução da dimensão do problema para o espaço bidimensional impôs a adoção de uma condição de contorno de simetria nas faces laterais do domínio. A condição de não-deslizamento foi adotada em toda face inferior do domínio, sendo preescrita uma condição de contorno aberta para a face superior. Não foram preescritas condições de contorno de velocidade e intensidade turbulenta na face de saída, tendo sido definido, apenas, o valor de

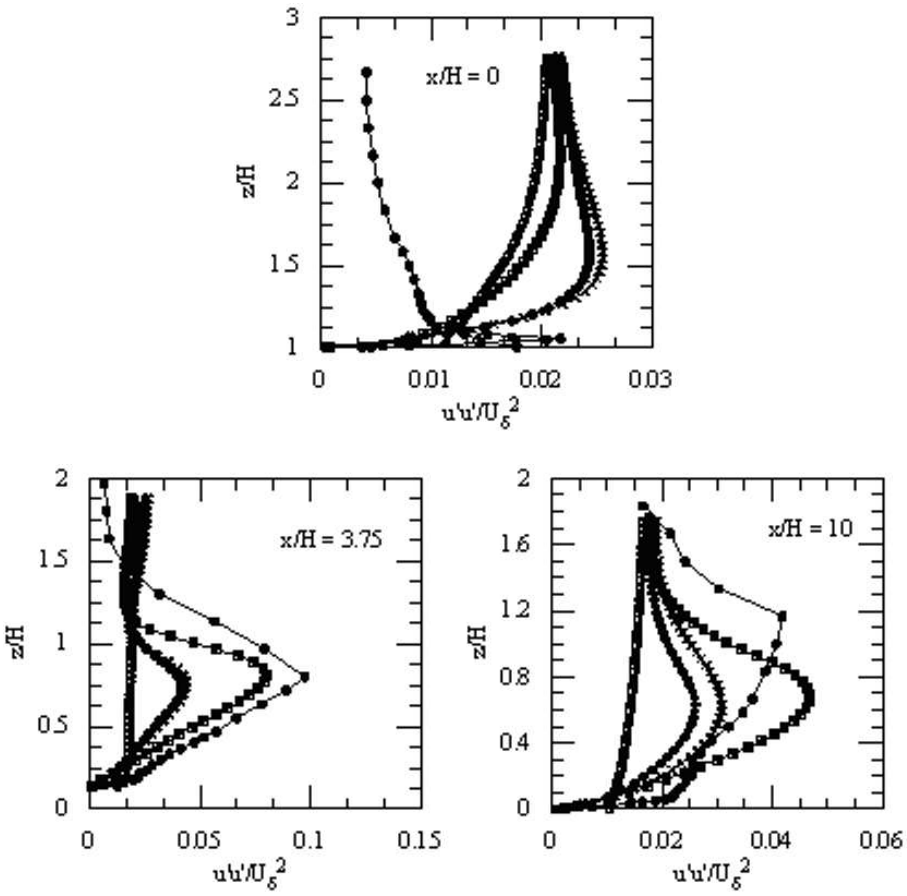

Figura 8.10: Perfis de tensão $u'u'$ nas estações $x/H = 0$, 3,75 e 10.

pressão relativa (0 Pa).

Na Figura 8.8, o padrão do escoamento à jusante da colina (a), obtido experimentalmente por Loureiro *et al.* (2006), é apresentado juntamente com os respectivos padrões de escoamento previstos através das simulações numéricas, (b)..(g). Observa-se que os modelos de turbulência baseados na equação de transporte de ε não foram capazes de predizer a ocorrência de separação do escoamento. Este resultado difere daqueles descritos por Castro e Apsley (1997), Kim e Patel (2000) e Castro *et al.* (2002). Distintamente da abordagem utilizada por esses autores, caracterizada pela implementação de modificações à formulação padrão do modelo $\kappa - \varepsilon$, o programa ANSYS CFX 5.7 adota a solução clássica baseada na aplicação das equações de transporte para κ e ε acopladas a funções de parede para de descrição do escoamento próximo à parede. Os resultados obtidos indicam

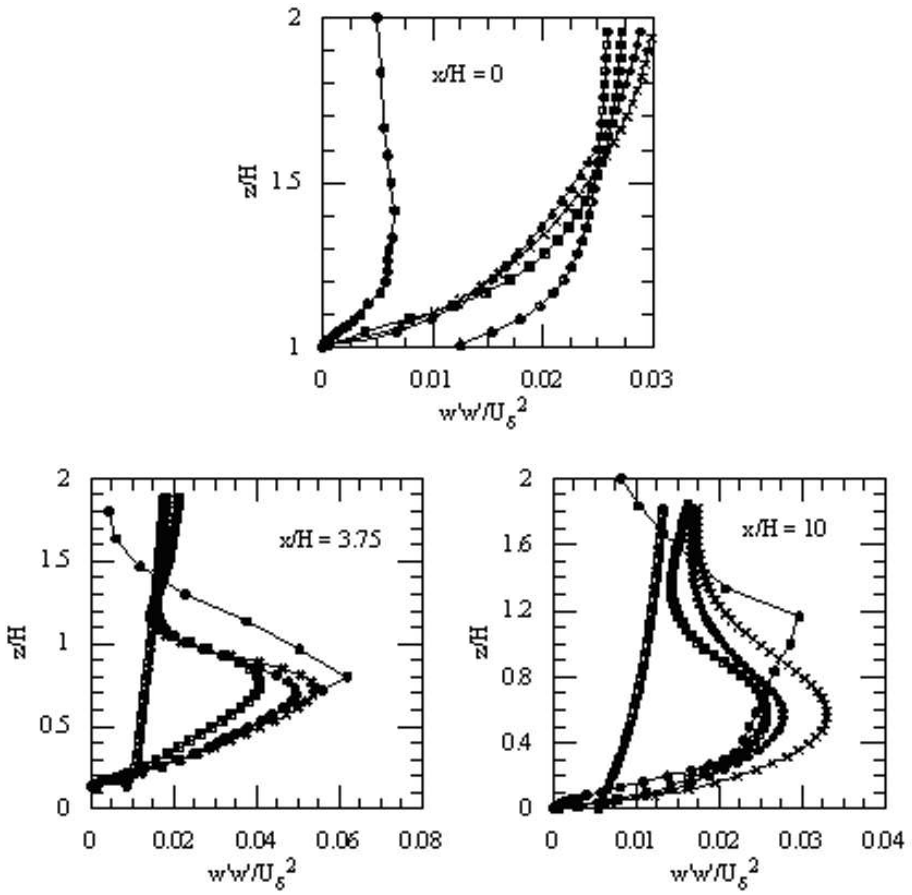

Figura 8.11: Perfis de tensão $w'w'$ nas estações $x/H = 0$, 3,75 e 10.

que esta abordagem não proporciona bons resultados quanto à caracterização do escoamento sobre colinas abruptas.

Na Tabela 8.5 é apresentado um resumo com os resultados experimentais e numéricos referentes às características da região de separação do escoamento. Nota-se que todos os modelos baseados na equação de transporte de ω apresentaram um bom desempenho quanto à predição do ponto de separação. No entanto, alguma discrepância é observada em relação aos valores calculados para o ponto de recolamento. Todos os modelos previram uma localização do ponto de recolamento anterior à obtida experimentalmente, sendo as menores discrepâncias apresentadas pelos modelos a duas equações $\kappa - \omega$ e *SST*.

Os perfis de velocidade para as estações de medição localizadas em $x/H = 0$, 3,75 e 10 são apresentados na Figura 8.9. Os resultados demonstram que nenhum

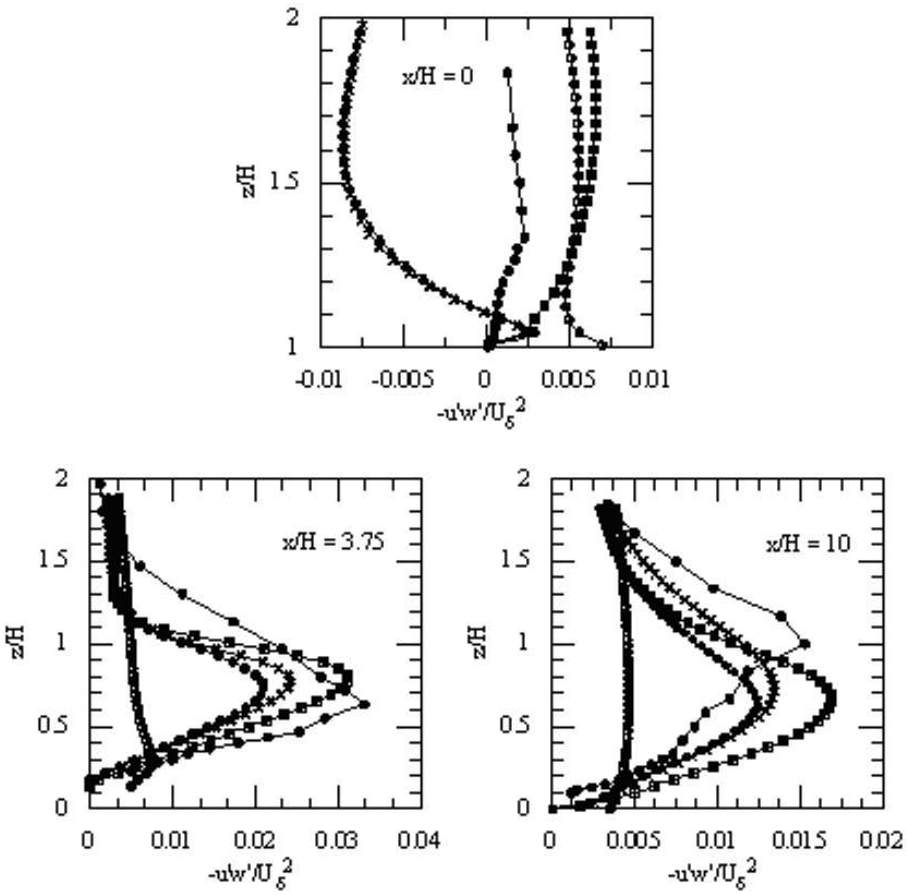

Figura 8.12: Perfis de tensão $u'w'$ nas estações $x/H = 0$, 3,75 e 10.

dos modelos previu adequadamente a aceleração do escoamento no topo da colina ($x/H = 0$), tendo sido obtidos valores superestimados de velocidade na região próxima à parede. Este comportamento foi igualmente observado por Castro e Aspley (1997) e Ross *et al.* (2004). Na região de recirculação ($x/H = 3,75$), nota-se uma boa concordância dos resultados obtidos com os modelos $\kappa-\omega$, *SST* e *RSM BSL* $\kappa-\omega$ em relação aos dados experimentais, particularmente, para $z/H < 0,8$. Comportamento semelhante é observado para a estação $x/H = 10$.

Os resultados obtidos para as componentes $u'u'$, $w'w'$ e $u'w'$ do tensor de Reynolds são apresentados nas Figuras 8.10, 8.11 e 8.12. Tal como observado na predição do campo de velocidades médias, os valores previstos de flutuação turbulenta no topo da colina apresentam grande discrepância em relação aos dados experimentais. Observa-se que o comportamento quase uniforme das tensões

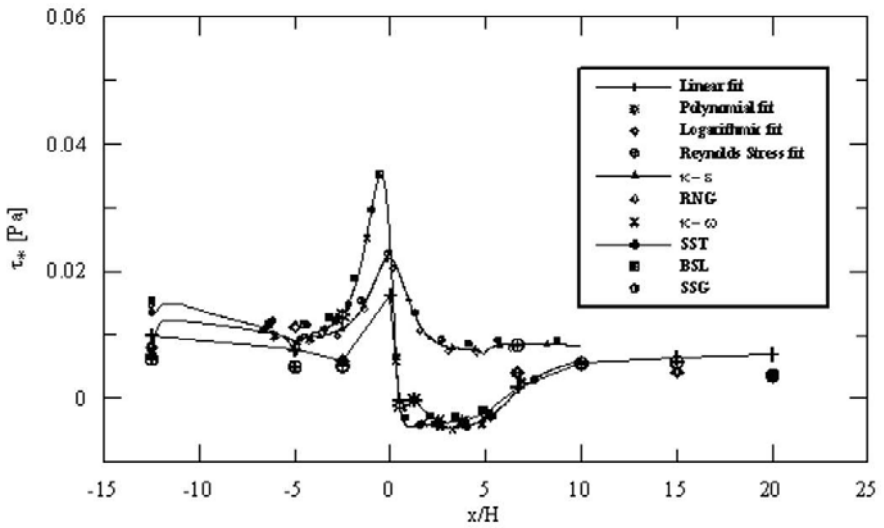

Figura 8.13: Distribuições de tensões na superfície da colina.

turbulentas para $z/H > 1,5$ não foi capturado por nenhum dos modelos para nenhuma das componentes de flutuação. Por sua vez, nas estações $x/H = 3{,}75$ e 10, as soluções obtidas pelos modelos $\kappa - \omega$, *SST* e *RSM BSL* $\kappa - \omega$ apresentaram um melhor desempenho. É possível afirmar que as expressivas variações das tensões turbulentas no interior da região de recirculação na direção vertical foram relativamente bem previstas em termos qualitativos. Em termos quantitativos, no entanto, os valores previstos pelos modelos baseados na equação de transporte de ω foram, em geral, inferiores aos verificados experimentalmente. A discrepância entre os valores numéricos e experimentais é particularmente marcante na predição dos valores de $u'u'$. A predição dos valores de $w'w'$ e $u'w'$ apresenta resultados satisfatórios, em particular, na estação $x/H = 3{,}75$. Nesta estação, a localização do valor máximo de tensão é razoavelmente bem prevista por todos os modelos, a menos do modelo *RSM SSG*. Entretanto, este resultado não é verificado na estação $x/H = 10$.

A distribuição de tensão na parede, τ_*, é mostrada na Figura 8.13. Observa-se que na região à jusante do topo da colina, todos os modelos fornecem resultados satisfatórios para o valor de tensão na parede. Obviamente, os valores com maior discrepância em relação ao resultado experimental são aqueles obtidos através dos modelos baseados na equação de transporte de ε, visto que estes modelos foram incapazes de prever a separação do escoamento. Porém, a excessiva intensidade calculada para os gradientes de velocidade no topo da colina resultou na predição de valores elevados de tensão na parede nesta região.

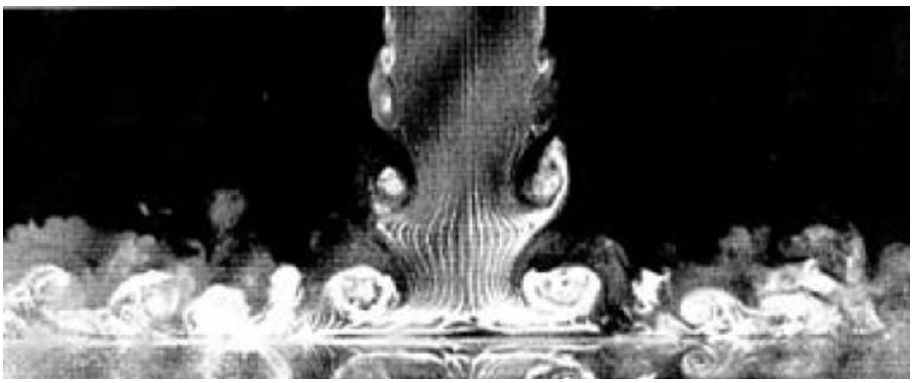

Figura 8.14: Visualização do escoamento de um jato impingente.

8.5.2 Jato impingente sobre placa plana

O escoamento de um jato que incide diretamente sobre uma superfície representa um tema de interesse em diversas aplicações de engenharia. De fato, os jatos impingentes possuem várias aplicações relacionadas às indústrias aeronáutica, metalúrgica, química e eletroeletrônica. Alguns exemplos típicos das aplicações de jatos incidentes incluem a sustentação de veículos, a limpeza e o tratamento de superfícies, a promoção de reações químicas e o resfriamento, em geral, de máquinas, equipamentos e circuitos elétricos/eletrônicos.

Um jato impingente consiste em um escoamento tridimensional bastante complexo. A configuração inicial do escoamento apresenta características típicas de jato livre. Entretanto, ao incidir sobre uma superfície, o jato é defletido radialmente, alcançando uma configuração de jato de parede a alguma distância à jusante da região de incidência. A Figura 8.14, de Lee e Lee (2000), mostra uma visualização do escoamento típico de um jato incidente.

Dentre as três regiões características do escoamento de um jato impingente, a região de estagnação é aquela na qual se concentra a maior parte da atividade térmica. Contudo, por ser uma região de dimensões reduzidas, a medição direta das propriedades do escoamento em seu interior não constitui uma tarefa simples. Conseqüentemente, a simulação numérica representa uma alternativa atraente para a determinação das propriedades do escoamento de um jato impingente, sendo imediato reconhecer que o principal interesse está relacionado à obtenção dos coeficientes de atrito e troca térmica na parede.

Conforme ilustrado nas Figura 8.14, em um jato impingente, as estruturas coerentes de vórtices originadas no bocal são defletidas ao atingirem a superfície, originando uma região de grande curvatura das linhas de corrente logo após a região de incidência. A estrutura de um jato impingente pode ser dividida, então, em três regiões de interesse (Figura 8.15): a região de jato livre, localizada após bocal; a região de estagnação, situada no entorno da seção de incidência; e a

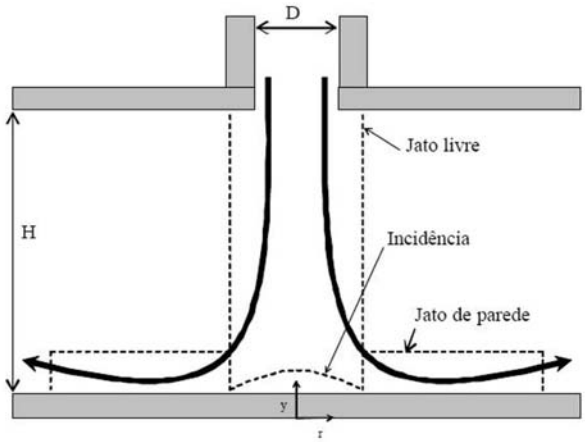

Figura 8.15: Diagrama das regiões de interesse de um jato impingente.

região de jato de parede, na qual o fluido evolui até um estado de equilíbrio local. Na maior parte de sua espessura, o jato de parede resultante é dominado pelas estruturas de grandes escalas. Assim sendo, as contribuições de origem viscosa e turbulenta às propriedades do escoamento estão confinadas a uma região muito pequena, adjacente à parede.

O problema do jato impingente sobre placa plana tem sido objeto de diversos estudos. Craft *et al.* (1993) desenvolveram um extenso trabalho a respeito da aplicação de modelos de turbulência para a predição das propriedades do escoamento de jatos impingentes. Os autores avaliaram o desempenho de quatro modelos de turbulência, incluindo o modelo $\kappa - \varepsilon$ e três modelos baseados no transporte das tensões de Reynolds. Craft *et al.* adotaram como referência para o trabalho os dados experimentais obtidos por Cooper *et al.* (1993) para os perfis de velocidade média e as tensões de Reynolds. Os resultados obtidos indicaram valores excessivamente altos para o coeficiente de transferência de calor. Igualmente, nenhum dos modelos previu com sucesso o efeito do número de Reynolds no escoamento. Os autores concluíram que a qualidade dos resultados depende em grande medida de uma adequada descrição das propriedades do escoamento na sub-camada viscosa.

Tal como Craft *et al.*, Dianat *et al.* (1996) utilizaram o modelo $\kappa - \varepsilon$ e um modelo de transporte das tensões de Reynolds para a predição das propriedades do escoamento de jatos impingentes, concentrando suas avaliações, no entanto, às regiões de jato livre e de estagnação. Na tentativa de obter uma melhor descrição da influência da parede nas flutuações do campo de pressões, os autores adotaram uma formulação modificada do modelo de transporte das tensões de Reynolds. Os resultados obtidos indicaram que as modificações introduzidas permitiram uma melhor previsão das flutuações de velocidade normais.

O desempenho de uma solução baseada no modelo $\kappa-\varepsilon$, associado a uma lei de parede logarítmica, foi avaliado por Ashforth-Frost e Jambunathan (1996) para o caso de um jato impingente parcialmente confinado. Na região de jato de parede, os autores encontraram discrepâncias significativas entre os resultados numéricos e as medições experimentais obtidas através de anemometria a laser-Doppler e termografia com cristal líquido. As discrepâncias na região de estagnação foram ainda mais expressivas, tendo sido observada uma superestimativa no valor da transferência de calor da ordem de 300%. Os resultados obtidos por Ashforth-Frost e Jambunathan demonstram claramente as limitações apresentadas pelos modelos baseados em leis de parede para a correta descrição das características do escoamento de jatos impingentes na região próxima à parede.

A complexidade dos fenômenos envolvidos na transferência de calor de um jato turbulento incidindo sobre uma superfície plana foi avaliada experimentalmente por Lee e Lee (1999). Os autores verificaram que para uma razão, onde H representa a distância entre as placas e D o diâmetro do bocal, a variação do número de Nusselt é proporcional a $\sqrt{\mathrm{Re}}$. Por sua vez, para valores de $H/D > 6$, o número de Nusselt diminui monotonicamente conforme o aumento da distância em relação ao ponto de estagnação.

Nesta mesma linha de investigação, o campo de velocidades e a transferência de calor local de um jato impingente foram caracterizados por Angioletti *et al.* (2003) por meio da técnica de velocimetria por imagem de partícula (PIV). Os autores concluíram que as não-uniformidades locais na transferência de calor decorrem dos efeitos destrutivos que a incidência das grandes estruturas coerentes originadas no bocal causa sobre a camada limite.

A simulação numérica de jatos impingentes envolve, portanto, a descrição de um escoamento turbulento complexo, essencialmente anisotrópico, resultante da interação entre o jato e a superfície. Tais características impõem a utilização de modelos de turbulência aptos a descrever as propriedades turbulentas tanto na região do escoamento livre quanto na região próxima à parede. Neste sentido, é razoável prever que, o modelo a duas equações *SST* e o modelo direto do tensor de Reynolds *Baseline* $\kappa-\omega$ sejam particularmente adequados para a simulação numérica de jatos impingentes. Conforme discutido, ambos os modelos, apesar de conceitualmente distintos, combinam as vantagens da equação para ω no tratamento de escoamento próximo à parede ao reconhecido desempenho da equação modificada para ε na predição das propriedades dos escoamentos livres.

Guerra *et al.* (2005) desenvolveu em extenso trabalho de caracterização experimental do escoamento de jatos impingentes. O trabalho de Guerra *et al.* (2005) envolveu a medição dos campos de velocidade, turbulento e de temperatura referentes ao escoamento de um jato de ar impingente, confinado entre duas placas horizontais paralelas afastadas de uma altura, H, equivalente a 87 mm. No aparato experimental utilizado, o jato de ar é admitido verticalmente entre as placas a partir de um bocal de seção circular com 43,5 mm de diâmetro ($H/D = 2$), instalado na placa superior. Durante a realização dos ensaios, a instalação foi alimentada por um fluxo de ar constante com velocidade máxima na descarga do bocal da ordem de 12 m/s, equivalendo a um número de Reynolds de, aproximadamente,

$3,5 \times 10^4$. Um fluxo de calor constante de 330 W/m^2 foi mantido por um sistema de aquecimento elétrico instalado na placa inferior. As medições dos valores de velocidade e de flutuação turbulenta foram realizadas através da técnica de anemometria a fio-quente, utilizando sensores de um canal. Os dados de pressão foram obtidos com o auxílio de um manômetro inclinado, sendo empregados termopares para a medição dos perfis de temperatura do escoamento.

A configuração das componentes de velocidade do jato impingente permite uma representação simplificada do domínio. Um jato impingente possui duas direções preferenciais. Inicialmente, na região de jato livre, a velocidade do escoamento é maior na direção vertical, apresentando uma pequena componente na direção radial. Entretanto, na região de jato de parede, a direção preferencial é a radial, coexistindo uma pequena componente na direção vertical. Na região de incidência, o jato impingente não apresenta uma direção preferencial. Considerando a hipótese de que a componente de velocidade na direção tangencial seja desprezível, o domínio fluido pode ser reduzido a apenas a um setor de cilindro. Esta mesma hipótese também pode ser adotada para a redução da dimensão do problema para o espaço bidimensional. Tais simplificações possibilitam uma redução significativa do esforço computacional. Porém, convém ressaltar que a redução da dimensão do problema compromete, em certa medida, a análise do comportamento anisotrópico da turbulência.

O modelo numérico utilizado para a simulação do jato impingente consistiu, então, em um modelo bidimensional, com 87 mm de altura e 200 mm de raio. O domínio fluido foi discretizado através de uma malha estruturada, composta, aproximadamente, por 6×10^5 elementos hexaédricos. A razão de aspecto dos elementos varia radialmente entre 1 e 8. Esta configuração do domínio resulta em valores do coeficiente y^+ entre 1,1 e 1,9 na superfície correspondente a placa inferior.

O perfil de velocidades na condição de contorno de entrada do domínio foi prescrito de acordo com os dados experimentais apresentados por Guerra *et al.* (2005). Igualmente ao caso da colina abrupta, a redução da dimensão do problema para o espaço bidimensional requer a adoção de uma condição de contorno de simetria nas faces laterais do domínio. A condição de não-deslizamento foi adotada em toda a placa inferior do domínio, sendo preescrita uma condição de contorno aberta para a face superior. Na face de saída, as condições de contorno prescritas incluíram, apenas, a definição do valor de pressão relativa (0 Pa).

Nas Figuras 8.16 são apresentados resultados obtidos para os perfis de velocidade média em coordenadas primitivas para as estações $x = 80$, 90, 100, 120 e 140 mm. Os resultados obtidos apresentaram, em geral, boa aderência aos valores experimentais medidos por Guerra *et al.* (2005). Os valores de velocidade referentes à região próxima à parede ($y < 2,0$ mm) obtiveram uma melhor concordância nas primeiras estações em relação às demais. Observa-se, também, que os resultados para $y > 12,0$ mm mostram uma maior discrepância em relação aos dados experimentais. Possivelmente, este comportamento seja devido a uma resolução de malha deficiente nestas regiões. O melhor desempenho quanto à predição do campo de velocidades na região próxima à parede é apresentado pelo modelo *RSM*

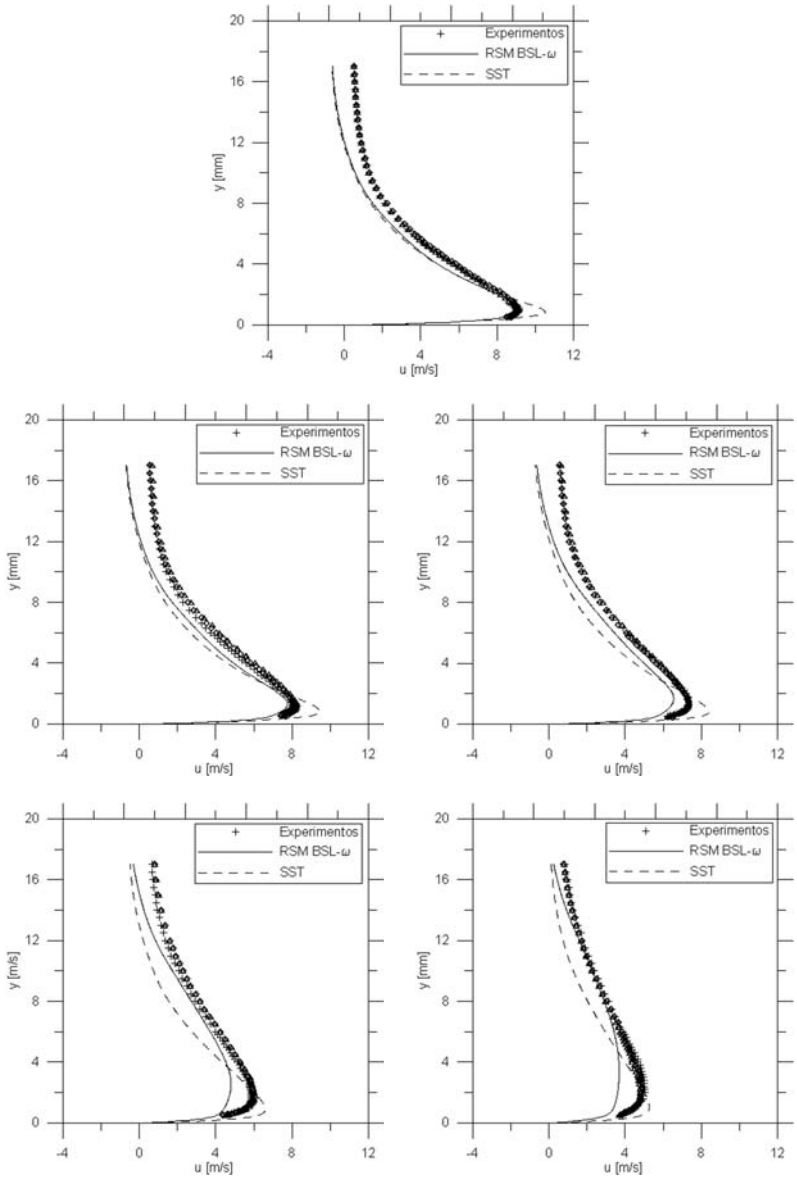

Figura 8.16: Perfis de velocidade média em x = 80, 90, 100, 120 e 140 mm.

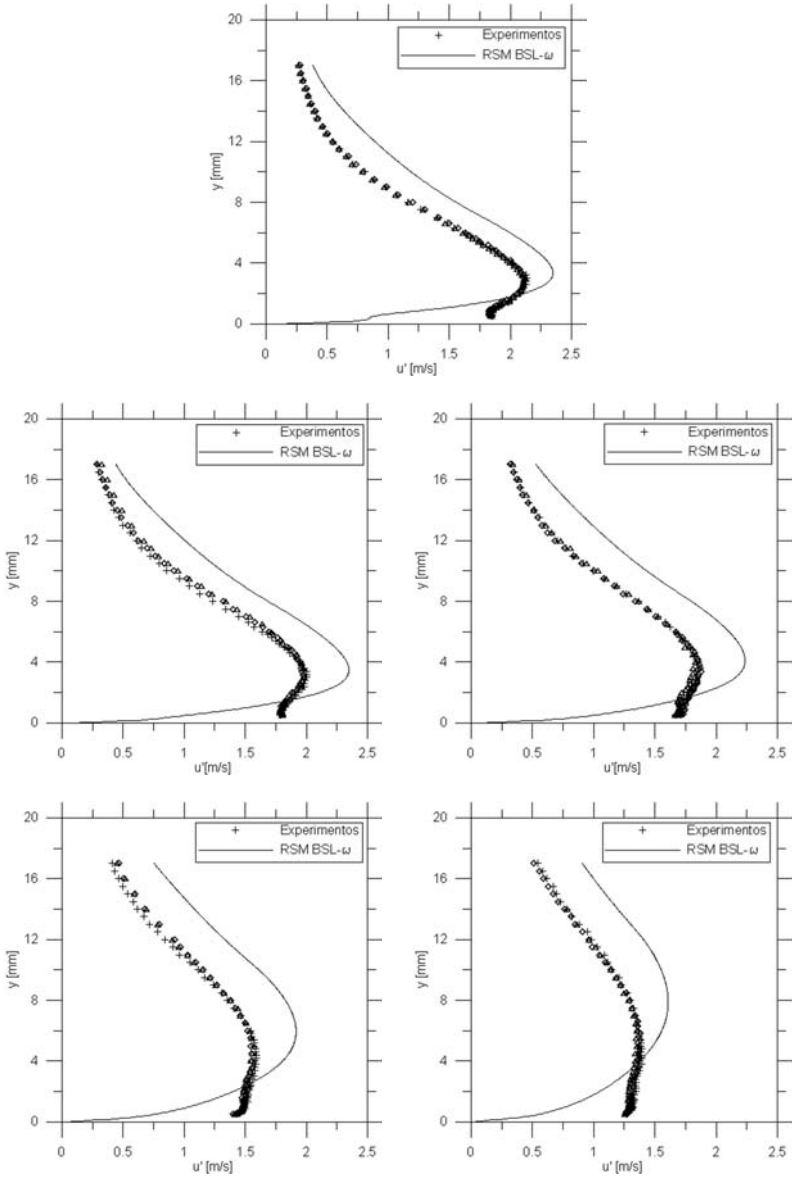

Figura 8.17: Perfis de $u'u'$ em $x = 80$, 90, 100, 120 e 140 mm.

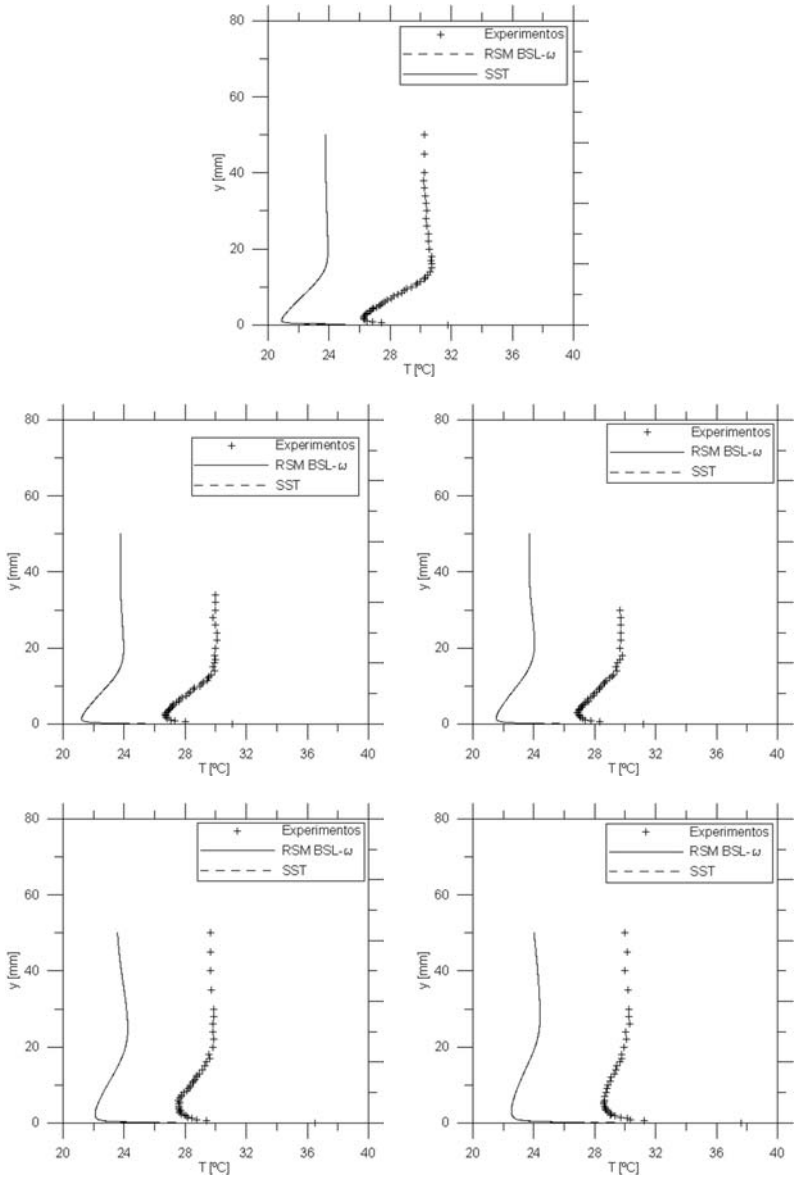

Figura 8.18: Perfis de temperatura em x = 80, 90, 100, 120 e 140 mm.

BSL $\kappa - \omega$. Em particular, os resultados relativos às estações em $x = 80$ e 90 mm mostram uma excelente aderência aos dados experimentais. Os resultados obtidos com o modelo a duas equações *SST* são comparativamente inferiores.

Os gráficos nas Figuras 8.17 mostram os resultados obtidos com o modelo *RSM BSL* $\kappa - \omega$ para o campo turbulento. Verifica-se que os perfis experimentais de flutuação turbulenta apresentam um intenso gradiente na região próxima à superfície, não sendo possível, no entanto, capturar este comportamento em toda sua extensão. Observando os perfis numéricos de flutuação nas estações $x = 80$, 90 e 100 mm, vê-se que para $y > 2,0$ mm o modelo *RSM BSL* $\kappa - \omega$ previu valores de intensidades de flutuações turbulentas sistematicamente superiores ao observado experimentalmente, ainda que, do ponto de vista qualitativo, o padrão geral dos perfis pode ser considerado satisfatório. Contrariamente, os resultados obtidos para o campo turbulento junto à parede mostram que o modelo não foi capaz de prever a correta intensidade dos gradientes de flutuação presentes nesta região.

Os resultados obtidos para os perfis de temperatura são apresentados na Figura 8.18. Tal como observado por outros autores (Craft *et al.*, 1993; Ashforth-Frost e Jambunathan, 1996), as simulações realizadas superestimaram a taxa de transferência de calor. Nota-se, entretanto que os resultados obtidos com o modelo *SST* apresentam discrepâncias maiores do que aqueles observados com o modelo *RSM BSL* $\kappa - \omega$. Na região próxima a parede ($y < 5$ mm), os valores de temperatura previstos através do modelo *RSM BSL* $\kappa - \omega$ são, em média, 7% inferiores aos obtidos nas medições experimentais. Por sua vez, os resultados apresentados pelo modelo *SST* apresentam diferenças superiores a 20%.

Os resultados obtidos para a simulação do escoamento de jatos impingentes sugerem que o comportamento anisotrópico da turbulência tenha uma participação significativa na transferência de calor na região próxima à parede. Em princípio, esta hipótese está coerente com as discrepâncias apresentados pelos resultados obtidos pelo modelo a duas equações *SST*, visto que o conceito de viscosidade turbulenta subentende um comportamento isotrópico das tensões normais (vide seção 8.3). Neste sentido, a redução da dimensão do problema para o espaço bidimensional também é questionável ao eliminar as contribuições de $w'w'$, $u'w'$ e $v'w'$ nos processos de difusão de quantidade de movimento e calor.

8.6 Referências

Angioletti M, Nino E, Ruocco G; "CFD turbulent modelling of jet impingement and its validation by particle image velocimetry and mass transfer measurements", *Int. J. of Thermal Sciences* **46**, 1703-1713 (2004).

Ashforth-Frost S, Jambunathan K; "Numerical prediction of semi-confined jet impingement and comparison with experimental data," *Int. J. Num. Meth. in Fluids* **23**, 295-306 (1996).

Arya SPS, Capuano ME, Fagen LC; "Some Fluid Modeling Studies of Flow and

Dispersion Over Two-dimensional Low Hills," *Atmosph. Environment* **21**, 753-764 (1987).

Athanassiadou M, Castro IP; "Neutral Flow Over a Series of Rough Hills: A Laboratory Experiment," *Boundary-Layer Meteorology* **101**, 1-30 (2001).

Baldwin BS, Lomax H; "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flow," *AIAA Paper* 78-257 (1978).

Bardina JE, Huang PG, Coakley TJ; "Turbulence Modeling Validation," *AIAA Paper* 97-2121 (1997).

Belcher SE, Hunt JCR; "Turbulent Flow Over Hills and Waves," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **30**, 507-538 (1998).

Bodony DJ; "Turbulence model computations of an axial vortex," Dissertação de M.Sc., Universidade de Purdue (1999).

Bradshaw P; "The understanding and predictions of turbulent flow," *Aeronaut. J.* **76**, 403 (1972).

Bredberg J, Peng S-H, Davidson L; "An improved $\kappa - \omega$ turbulence model applied to recirculating flows," *Int. J. Heat and Fluid Flow* **23**, 731-743 (2002).

Britter RE, Hunt JCR, Richards KJ; "Airflow Over a Two-dimensional Hill: Studies of Velocity Speedup, Roughness Effects and Turbulence," *Q. J. R. Meteorological Society* **107**, 91-110 (1981).

Castro FA, Palma JMLM, Silva Lopes A; "Simulation of the Askervein flow. Part 1: Reynolds averaged Navier-Stokes equations $\kappa - \varepsilon$ turbulence models," *Boundary-Layer Meteorology* **107**, 501-530 (2002).

Castro IP, Apley DD; "Flow and dispersion over topography: a comparasion between numerical and laboratory data for two-dimensional flows," *Atmospheric Environment* **31**, 839-850 (1997).

Cebeci T, Smith AMO; "Analysis of Turbulent Boundary Layers," in *Applied Mathematics and Mechanics* **15**, Academic Press, New York (1974).

Chou PY; "On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation," *Quartely J. Appl. Math.* **3**, 38-54 (1945).

Cooper D, Jackson DC, Launder BE, Liao GX; "Impinging jet studies for turbulence model assessment - I: Flow-field experiments," *Int. J. Heat and Mass Transfer* **36**, 2675-2684 (1993).

Courant R, Hilbert D; "Methods of mathematical physics (volumes 1 e 2)," Interscience Publishers & John Wiley (1966).

Craft TJ, Launder BE; "New wall-reflection model applied to the turbulent impinging jet," *AIAA Journal* **30**, 2970-2972 (1992).

Daly BJ, Harlow FH; "Transport equations in turbulence," *Phys. Fluids* **13**, 2634-2649 (1970).

Dekeyser I, Launder BE; "A comparision of triple-moment temperature-velocity correlations in the asymmetric heated jet with alternative closure models," *Turbulent Shear Flows* **4**, 102. L. J. S. Bradbury *et al.* (editores), Springer-Verlag (1983).

Dianat M, Fairweather M, Jones WP; "Predictions of axysimmetric and two-dimensional impinging turbulent jets," *Int. J. of Heat and Fluid Flow* **17**, 530-538 (1996).

Gibson MM, Launder BE; "Ground effects on pressure fluctuatings in the atmospheric boundary layer," *J. Fluid Mechanics* **86**, 491-511 (1978).

Gong W, Taylor PA, Dörnbrack A; "Turbulent Boundary Layer Flow Over Fixed Aerodinamically Rough Two-dimensional Sinusoidal Waves," *J. Fluid Mech.* **312**, 1-37 (1996).

Guerra DRS, Su J, Silva Freire AP; "The near wall behaviour of an impinging jet," *Int. J. Heat and Mass Transfer* **48**, 2829-2840 (2005).

Hanjalić K; "Advanced turbulent closure models: a view of current status and future prospects," *Int. J. Heat and Fluid Flow* **15**, 178-203 (1994).

Hanjalić K; "Closure problems for incompressible turbulent flows," *Introduction to turbulence modelling*, Beeck JPAJ e Benocci C (editores), von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1-75 (2004).

Hanjalić K, Jakirlić S; "A second-moment closure for non-equilibrium and separating high- and low-Re-number flows," *Proc. 10th Symp. Turbulent Shear Flows*, Pennsylvania State University, August 14-16 (1995).

Hanjalić K, Launder BE; "Sensitizing the dissipation equation to irrotational strains," *ASME J. Fluids Eng.* **102**, 34 (1980).

Hanjalić K, Launder BE; "A Reynolds stress model of turbulence and its applications to thin shear flows," *J. Fluid Mech.* **52**, 609-638 (1972).

Hewer FE; "Non-linear numerical model predictions of flow over an isolated hill of moderate slope," *Boundary-Layer Meteorology* **87**, 381-408 (1998).

Hurley PJ; "An evaluation of several turbulence schemes for the prediction of mean and turbulent fields in complex terrain," *Boundary-Layer Meteorology* **83**, 43-47 (1997).

Hunt JCR; "A Theory of Two-dimensional Flow Around Two-dimensional Bluff Bodies," *J. Fluid Mech.* **61**, 625-706 (1973).

Jones W, Launder BE; "The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence," *Int. J. Heat Mass Transfer* **15**, 301-314 (1972).

Kaimal JC, Finnigan JJ; "Atmospheric Boundary Layer Flows, Their Structure and Measurement," Oxford University Press (1994).

Khurshudyan LH, Snyder WH, Nekrasov IV; "Flow and Dispersion of Polluants Over Two Dimensional Hills," Env. Prot. Agency Rpt. No. EPA-600/4-81-067, Research Triangle Park, NC, 130 (1981).

Kim HG, Patel VC; "Test of Turbulence Models For Wind Flow over Terrain with Separation and Recirculation," *Boundary-Layer Meteorology* **94**, 5-21 (2000).

Lam CKG, Bremhorst KA; "Modified Form of the $\kappa - \varepsilon$ Model for Predicting Wall Turbulence," *Trans. ASME, J. Fluids Eng.* **103**, pp.456-460 (1981).

Launder BE (editor); "Fifth Biennial Colloquium on Computational Fluid Dynamics," Manchester Institute of Science and Technology (1992).

Launder BE; "Second-moment closure: present ... and future?" *Int. J. Heat and Fluid Flow* **10**, 282-300 (1989)

Launder BE, Reynolds WC, Rodi W, Mathieu J e Jeandel D; "Turbulence models and their applications (volume 2)," *Collection de la direction des études et recherches d'électricité de France*, Editions Eyrolles (1984).

Launder BE, Reece GJ, Rodi W; "Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure," *J. Fluid Mech.* **68**, 537–566 (1975).

Launder BE, Sharma B; "Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc," *Lett. Heat and Mass Transfer* **1**, 131-138 (1974).

Launder BE, Spalding DB; "The Numerical Computation of Turbulent Flows," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **3**, pp.269-289 (1974).

Launder BE, Spalding DB; "Mathematical Models of Turbulence," Academic Press, London (1972).

Launder BE, Spalding DB; "Mathematical Models of Turbulence," Academic Press, London (1972).

Launder BE, Sandham ND (editores); "Closure strategies for turbulent and transitional flows," Cambridge University Press (2001).

Lee J, Lee SJ; "Stagnation region heat transfer of a turbulent axisymmetric jet impingement," *Exp. Heat Transfer* **12**, 137-156 (1999).

Lee J, Lee SJ; "The effects of nozzle aspect ratio on stagnation region heat transfer characteristics of elliptic impinging jets," *Int. J. of Heat and Fluid Flow* **43**, 555-575 (2000).

Leschziner M; "Modelling engineering flows with Reynolds stress turbulence closure," *J. Wind Engng. and Ind. Aerodyn.* **35**, 21-47 (1991).

Loureiro JBR, Soares DV, Fontoura Rodrigues JLA, Pinho FT, Silva Freire AP; "Water tank and numerical model studies of flow over steep smooth two-dimensional hills," *Boundary-Layer Meteorol.*, DOI: 10.1007/s10546-006-9100-6, (a ser publicado, disponível on line) (2006).

Lumley JL; "Computational modelling of turbulent flows," *Adv. Appl. Mech.* **18**, 123-176 (1978).

Naot D, Shavit A, Wolfshtein M; "Interactions between components of the turbulent velocity correlation tensor," *Israel J. Tech.* **8**, 738 (1970).

MacDonough JM; "Introductory lectures on turbulence: physics, mathematics and modeling," Department of Mechanical Engineering and Mathematics, Universidade de Kentucky (2004).

Mason PJ, King JC; "Measurements and Predictions of Flow and Turbulence over an Isolated Hill of Moderate Slope," *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **111**, 617-640 (1985).

Menter FR; "Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications," *AIAA Journal* **32**, 1598-1605 (1994).

Muck KC, Hoffman PH, Bradshaw P; "The effect of convex surface curvature on turbulent boundary layers," *J. Fluid Mech.* **161**, 347 (1985).

Orszag SA, Yakhot V, Flannery WS, Boysan F, Choudhury D, Maruzewski J, Patel B; "Renormalization group modeling and turbulence simulation," *Proc. Near-Wall Turbulent Flows*, So RMC *et al.* (editor). Elsevier, Amsterdam, 1031-1046 (1993).

Patel V, Yoon J; "Application of turbulence models to separated flows over rough surfaces," *ASME: Journal of Fluids Engineering* **117**, 234-241 (1995).

Peng S-H, Davidson L, Holmberg S; "A modified low-Reynolds-number model for recirculating flows," *ASME: Journal of Fluids Engineering* **119**, 867-875 (1997).

Pope SB; "Turbulent flows," Cambridge Univesity Press (2000).

Reynolds O; "On the dynamical theory of turbulent incompressible viscous fluids and the determination of the criterion," *Phil. Trans. R. Soc. London Ser. A* **186**, 123-164 (1895).

Rodi W; "Turbulence Models and Their Application in Hydraulics - A State of Art Review," *IAHR*, Delft, The Netherlands (1980).

Ross AN, Arnold S, Vosper SB, Mobbs SD, Dixon N, Robins AG; "A Comparison of Wind-Tunnel Experiments and Numerical Simulations of Neutral and Stratified Flow over a Hill," *Boundary-Layer Meteorology* **113**, 427-459 (2004).

Rotta J; "Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz," *Z. Phys.* **129**, 547–572 (1951).

Schlichting H; "Boundary Layer Theory," 6ª edição, McGraw-Hill (1968).

Schiestel R; "Modélisation et simulation des écoulements turbulents," *Traité des nouvelles technologies - série Mécanique*, Hermes (1993).

Shima N; "Low-Reynolds-number second-moment closure without wall-reflection redistribution terms," *Int. J. Heat and Fluid Flow* **19**, 549-555 (1998).

Shir CC; "A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows in the idealized planetary boundary layer," *J. Atmos. Sci.* **30**, 1327-1339 (1973).

Simpson RL; "The Structure of The Near-wall Region of Two-dimensional Turbulent Separated Flow," in *Turbulent Flow Structure Near Walls*, 1-30, The Royal Society (1991).

So R, Lai Y, Zhang H; "Second-order near-wall turbulence closures: a review," *AIAA Journal* **29**, 1819-1835 (1991).

Speziale CG; Sakar S, Gatski TB; "Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach," *J. Fluid Mechanics* **227**, 245-272 (1991).

Taylor PA, Teunissen HW; "The Askervein Hill Project: Overview and Background Data," *Boundary-Layer Meteorology* **39**, 15-39 (1987).

Tennekes H, Lumley JL; "A first course in turbulence," MIT Press (1973).

Wang C, Jang YJ, Leschziner MA; "Modeling two- and three-dimensional separation from curved surfaces with anisotropy-resolving turbulence closures," *Int. J. Heat and Fluid Flows* **25**, 449-512 (2004).

Wilcox DC; "Turbulence modelling for CFD," DCW Industries Inc., segunda edição (1998).

Wilcox DC; "Simulation of transition with a two-equation turbulence model," *AIAA Journal* **32**, 247-255 (1994).

Ying R, Canuto VM; "Numerical simulation of the flow over two-dimensional hills using a second-order turbulence closure models," *Boundary-Layer Meteorology* **85**, 447-474 (1997).