

# Conceitos Fundamentais de Mecânica dos Fluidos

**Sérgio Luís Villares Coelho**

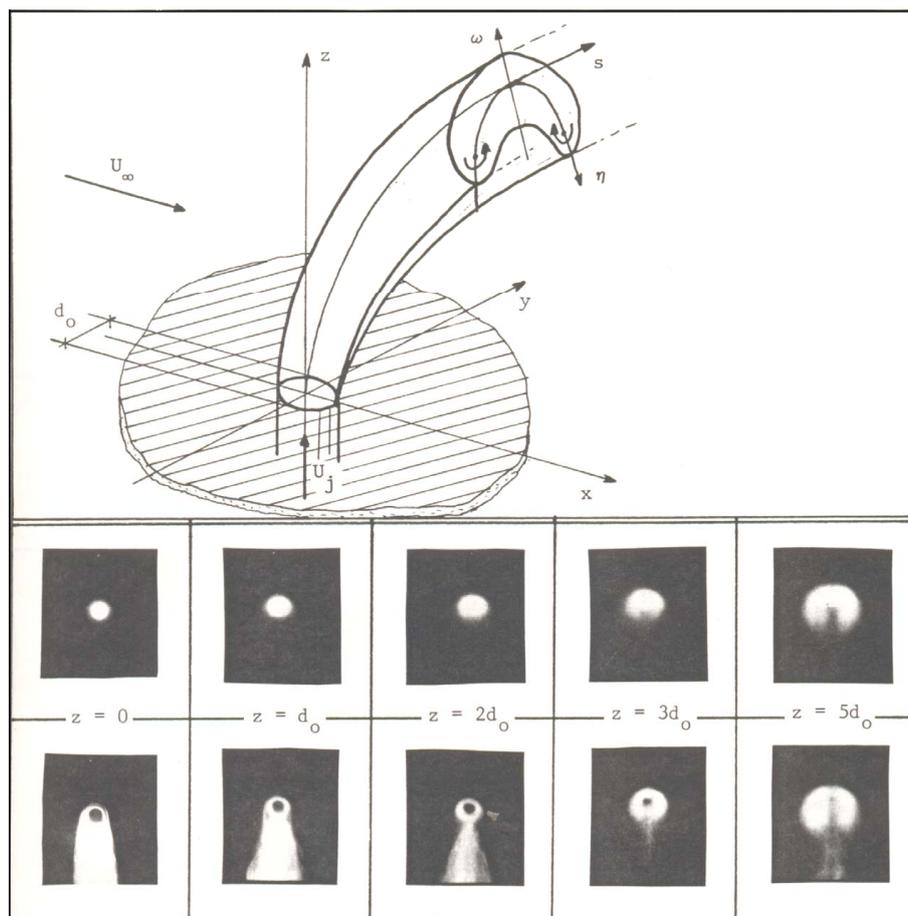
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

A Mecânica dos Fluidos é uma ciência de grande importância, cujo interesse geral tem atraído ao longo da história a atenção de grandes matemáticos e físicos. A fascinação provocada pela observação mesmo casual de escoamentos na natureza e na tecnologia – instigada pela diversidade de ocorrências físicas – bem como o intrincado comportamento das equações matemáticas que regem o movimento de fluidos, fazem desta classe de problemas um permanente objeto de interesse e reverência.

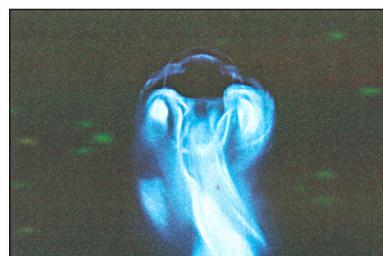
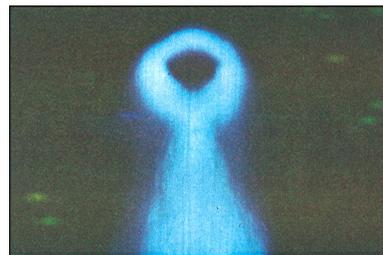
O propósito do texto apresentado a seguir é introduzir o leitor a uma formulação para o tratamento de um tipo específico de fluidos, os chamados fluidos newtonianos. Por serem o ar e a água fluidos newtonianos, são portanto aqui abrangidos os fluidos de maior importância na engenharia. As equações que governam o movimento de tais fluidos são deduzidas de modo cuidadoso, principalmente no que diz respeito às suas hipóteses constitutivas. O texto, como concebido inicialmente, é orientado para pesquisadores e estudantes avançados em Mecânica dos Fluidos; entretanto, dada sua clareza e qualidade, certamente ele será de utilidade para estudantes de graduação e iniciantes no assunto. Que seja do meu conhecimento, não existe qualquer texto em Mecânica dos Fluidos originariamente escrito em português que possua conteúdo próximo a este.

O texto completo foi escrito no verão de 1989, no exíguo prazo de 3 meses. Isto apenas enaltece a qualidade de seu autor, ceifado prematuramente de nosso convívio em outubro de 1989. Por não ter tido o autor a oportunidade de revisar o texto original modificando pequenas partes que o desagradasse, esta versão não condizirá certamente com sua expectativa. De fato, ela foi inicialmente pensada como um primeiro manuscrito, a partir do qual um livro básico sobre Mecânica dos Fluidos emergiria. A posição do editor ao formatar o manuscrito original foi de conservar em sua integridade as palavras do autor. Assim, nada foi alterado do texto original.

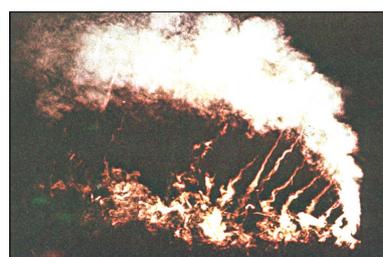
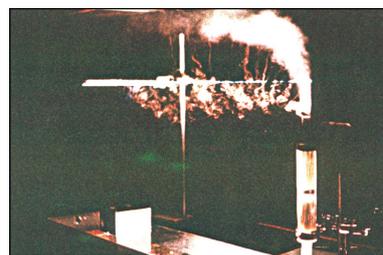
APSF



Visão esquemática de um jato em um escoamento cruzado uniforme



*Corte axial para um jato em escoamento cruzado*



*Vista lateral de um jato em escoamento cruzado  
mostrando a esteira de vórtices*

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Conceitos Fundamentais e Considerações Gerais</b>	<b>1</b>
1.1	Sólidos, Líquidos, Gases . . . . .	1
1.2	A Hipótese do Contínuo . . . . .	1
1.3	As Propriedades Físicas dos Fluidos . . . . .	2
1.4	Revisão de Alguns Elementos da Matemática . . . . .	4
1.4.1	Vetores e Operações Vetoriais . . . . .	4
1.4.2	Teoremas de Stokes, Gauss e Green . . . . .	7
1.4.3	Tensores e Operações Envolvendo Tensores . . . . .	7
1.4.4	Forças que Agem em um Fluido e o Tensor das Tensões . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Cinemática dos Escoamentos</b>	<b>11</b>
2.1	Sistemas de Referência para a Descrição dos Escoamentos . . . . .	11
2.2	A Derivada Material . . . . .	12
2.3	Deformação e Rotação Locais de um escoamento . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Os Princípios de Conservação e as Equações do Movimento</b>	<b>19</b>
3.1	Introdução . . . . .	19
3.2	O Teorema do Transporte de Reynolds . . . . .	19
3.3	Princípio da Conservação da Massa . . . . .	22
3.4	O Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento Linear . . . . .	22
3.5	O Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento Angular . . . . .	24
3.6	O Princípio da Conservação da Energia . . . . .	25
3.7	Equações e Variáveis Obtidas Através dos Princípios de Conservação . . . . .	27
3.8	As Equações Constitutivas . . . . .	27
3.8.1	As relações para o tensor das tensões . . . . .	27
3.8.2	As relações para o fluxo de calor . . . . .	30
3.8.3	A equação de estado para $\rho, p$ e $T$ . . . . .	32
3.9	Equações do Movimento e as Equações de Contorno . . . . .	35
3.9.1	A Condição de Não-Escorregamento . . . . .	37
3.9.2	A Condição de Impermeabilidade . . . . .	37
3.9.3	As Condições de Contorno para o Campo de Temperaturas . . . . .	38
3.9.4	Um Exemplo do Estabelecimento das Condições de Contorno . . . . .	38
3.9.5	Um Exemplo do Estabelecimento de um Problema de Valor de Contorno . . . . .	39

<b>4</b>	<b>Os Parâmetros que Governam os Escoamentos de Fluidos</b>	<b>44</b>
4.1	Introdução . . . . .	44
4.2	O Significado Físico do Número de Reynolds . . . . .	45
4.3	Número de Froude . . . . .	45
4.4	O Número de Mach . . . . .	46
4.5	Outros Grupos Adimensionais . . . . .	48
<b>5</b>	<b>As Simplificações das Equações do Movimento e as Diferentes Classes de Problemas em Mecânica dos Fluidos</b>	<b>50</b>
5.1	Escoamentos Incompressíveis . . . . .	50
5.1.1	Soluções Exatas para Escoamentos Incompressíveis . . . . .	51
5.2	Escoamentos onde $Re \rightarrow 0$ . . . . .	55
5.2.1	Escoamentos onde $Re \rightarrow \infty$ . . . . .	58
5.2.2	As Simplificações para os Escoamentos Bidimensionais . . . . .	68
5.3	A Linearização das Equações do Movimento . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Referências</b>	<b>74</b>
6.1	Bibliografia Básica . . . . .	74
6.2	Bibliografia Específica . . . . .	76
6.3	Bibliografia Complementar . . . . .	77

# Capítulo 1

## Conceitos Fundamentais e Considerações Gerais

### 1.1 Sólidos, Líquidos, Gases

A propriedade fundamental que caracteriza líquidos e gases é, sob o ponto de vista mecânico, a “facilidade” com que são deformados. Um corpo sólido (ou, pelo menos, a maioria deles) “resiste” a esforços externos que tendem a deformá-lo sendo as variações das posições relativas das várias partículas que o constituem “pequenas” quando for “pequena” a variação das forças externas.

Em líquidos e gases isso não acontece. Esforços externos arbitrariamente “pequenos” em magnitude podem induzir “extensas” deformações nos mesmos. Esta característica mecânica permite-nos agrupar a maioria dos líquidos e gases, no que se refere ao seu comportamento mecânico, em uma só classe: os fluidos.

Ao estudo do movimento macroscópico relativo dos vários elementos que compõe um corpo (ou uma região) fluido(a), em face a esforços externos nele(a) atuantes, dá-se o nome Mecânica dos Fluidos.

### 1.2 A Hipótese do Contínuo

A física moderna descreve as propriedades da matéria como grandezas quânticas. A massa de um corpo, por exemplo, não está continuamente distribuída ao longo de seu volume, mas concentrada nos núcleos de seus átomos. Entretanto, a Mecânica dos Fluidos normalmente se limita apenas ao estudo do movimento *macroscópico* dos fluidos, dispensando uma descrição precisa do movimento a nível molecular. Assim, em tais estudos, o fluido pode ser geralmente tratado como um meio *contínuo* que possui propriedades que variam *continuamente* ao longo do seu volume. Tais propriedades são expressões macroscópicas das propriedades quânticas das partículas que constituem o fluido.

A hipótese do contínuo pressupõe a existência de três escalas de comprimento características para os escoamentos de fluidos. Uma escala de comprimento,  $L_3$  característica das variações das propriedades do “contínuo”, uma escala de comprimento,  $L_2$ , onde as variações dessas propriedades são assintoticamente pequenas, e uma escala de compri-

mento a nível molecular,  $L_1$ , comparável ao caminho livre médio entre as moléculas do fluido. A hipótese do contínuo presuppõe, necessariamente, que:

$$L_1 \ll L_2 \ll L_3 \quad (1.1)$$

O significado das escalas de comprimento  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  são ilustrados na Figura 1.1.

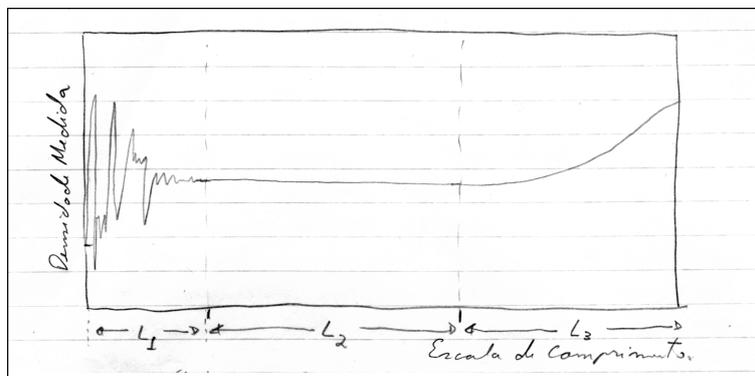


Figura 1.1: Escala característica de comprimento.

Suponha que pudéssemos medir a massa específica de um fluido com um instrumento que extraísse dele um volume parcial de dimensão arbitrária,  $L_3$ . Por definição, a massa específica local é dada por:

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{m}{V}, \quad (1.2)$$

onde  $m$  = massa,  $V$  = volume.

Entretanto, para um fluido “real”, o limite em (1.2) não converge, uma vez que, quando  $L \simeq L_1$ , a exclusão de moléculas individuais do volume de referência à medida que ele diminui provoca grandes variações na razão  $m/V$ . Assim, deve existir uma escala de comprimento  $L_2$ , onde a “exclusão de moléculas” à medida que  $L \rightarrow L_2$  não implique em variações sensíveis da razão  $m/V$  ( $L_1 \ll L_2$ ). Ao mesmo tempo, só existirá um limite para  $m/V$  em  $L_2$  quando as variações macroscópicas desta razão ocorrerem em uma escala de comprimento  $L_3 \gg L_2$ . Assim, só podem ser analisados como meios contínuos os escoamentos onde existem estas três diferentes escalas de comprimento para as variações das suas propriedades. Os escoamentos hipersônicos são um caso onde  $L_3 \simeq L_1$ , não podendo assim serem analisados como meios contínuos.

### 1.3 As Propriedades Físicas dos Fluidos

O movimento macroscópico de um fluido é condicionado pelas interações entre as moléculas que o constituem. Entretanto, o efeito a nível macroscópico dessas interações pode ser expresso através de *propriedades macroscópicas* (ou propriedades do contínuo, na idealização do fluido como um meio contínuo) tais como massa específica, viscosidade, compressibilidade, etc.

A *massa específica*  $\rho$  é definida como em (1.2), onde o limite é tomado somente até  $V \rightarrow L_2^3$ .

A *viscosidade* é a propriedade que um fluido possui de transmitir quantidade de movimento linear ao longo de direções normais à velocidade local do mesmo (local, em termos macroscópicos). O aumento da força eletromagnética repulsiva entre as moléculas quando elas se aproximam uma das outras explica a transmissão da quantidade de movimento linear na direção da velocidade local do escoamento. A explicação para o efeito viscoso, entretanto, não é tão simples: uma região fluida inicialmente em repouso pode ser vista, na verdade, como um grande número de moléculas que se movimentam com velocidades que variam estocasticamente. Se uma fronteira plana dessa região fluida é colocada em movimento na direção tangente a sua superfície, o movimento flutuante (ou Browniano) das moléculas faz com que algumas delas, que se encontram próximas ao contorno posto em movimento, se choquem contra o mesmo, adquirindo momento linear extra. Através deste mesmo movimento Browniano, moléculas que adquiriram momento linear extra interagem com outras moléculas no interior da região fluida, transferindo para elas parte deste momento extra. Através desse processo, ilustrado na Fig. 1.2, resulta uma transferência líquida de momento linear ao longo das direções normais à da velocidade média (macroscópica) local, chamada difusão viscosa.

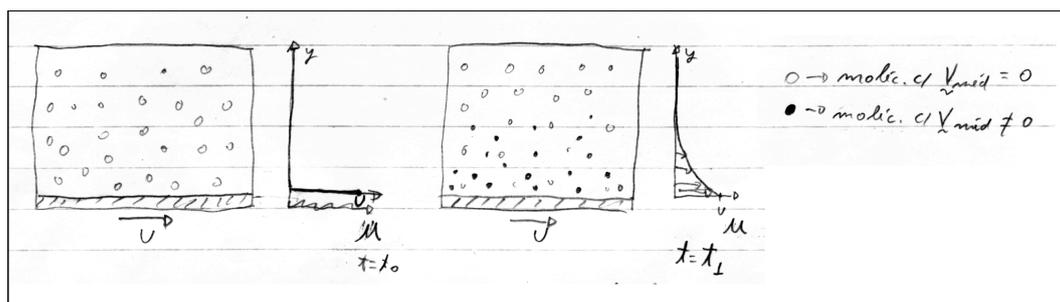


Figura 1.2: Difusão viscosa do momento linear

A intensidade com a qual a quantidade de movimento linear é transferido por difusão viscosa depende de características do fluido, tais como sua estrutura molecular, suas propriedades físicas, como a temperatura (energia cinética média das moléculas) e a massa específica, e também sua taxa de variação local da distribuição da velocidade “macroscópica”  $u$  ao longo da direção normal ao movimento ( $y$ ).

Para o fluido como um contínuo, este processo de difusão viscosa permite a associação de uma *tensão de cisalhamento local*, ao fluxo normal (por unidade de área) da componente da quantidade de movimento linear paralela ao escoamento local.

Sir Isaac Newton estudou experimentalmente o arrasto em placas planas em movimento através de meios fluidos, e introduziu o conceito do Coeficiente de Viscosidade, ou, simplesmente, Viscosidade,  $\mu$ . Newton assumiu que  $\mu$  é uma propriedade dependente unicamente da natureza do fluido, e que relaciona a tensão de cisalhamento ( $\tau$ ) e o gradiente normal da velocidade local do escoamento  $du/dy$ , através da expressão:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.3)$$

Fluidos onde  $\mu$  não varia com a taxa de cisalhamento  $\partial u/\partial y$  são denominados Fluidos Newtonianos. Neles,  $\tau$  é uma função linear de  $du/dy$ . Fluidos tais como a água e o ar podem ser considerados newtonianos pois suas viscosidades dependem apenas de seus estados termodinâmicos (pelo menos na maioria dos escoamentos de interesse prático). Por outro lado, existem vários fluidos que não satisfazem a relação (1.3): os óleos e as suspensões são exemplos de tais fluidos. Diferentes relações entre  $\tau$  e  $du/dy$  são ilustradas na Fig. 1.3:

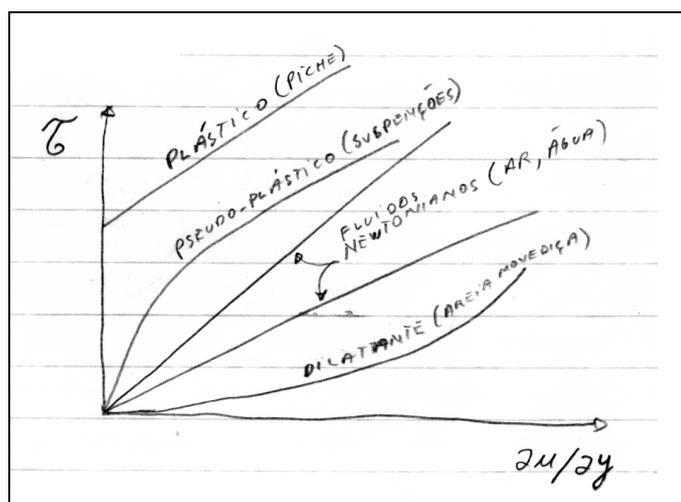


Figura 1.3: Relações tensão – taxa de deformação

A *compressibilidade* é a propriedade que traduz a sensibilidade da densidade de um fluido a variações na sua pressão termodinâmica. Escoamentos onde as variações de  $\rho$  são desprezíveis são chamados Escoamentos Incompressíveis. Nos escoamentos onde  $\partial\rho/\partial p$  é significativo, perturbações na pressão se propagam a velocidades comparáveis à do escoamento, permitindo a formação de ondas de choque, características de escoamentos supersônicos. Enquanto o módulo de elasticidade do ar é da ordem de 3.000 PSF, o módulo de elasticidade da água é da ordem de 40.000.000 PSF (praticamente "incompressível").

A compressibilidade e outras propriedades físicas, tais como a Tensão Superficial, serão discutidas em maiores detalhes em seções subsequentes.

## 1.4 Revisão de Alguns Elementos da Matemática

A análise teórica da dinâmica dos escoamentos envolve a aplicação de vários elementos da física matemática, alguns dos quais são aqui recordados.

### 1.4.1 Vetores e Operações Vetoriais

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3, \quad (1.4)$$

é um vetor onde  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  formam uma tríade de vetores unitários ortogonais, e  $A_1, A_2, A_3$  são escalares que representam a magnitude das componentes de  $\vec{A}$  nas direções  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  respectivamente.

Sendo  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  dois vetores,

$$\vec{A}\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta, \quad (1.5)$$

é o *produto escalar* de  $\vec{A}$  por  $\vec{B}$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ .

$$AB = C = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

é o *produto vetorial* de  $\vec{A}$  por  $\vec{B}$ , onde  $|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$  é o *produto vetorial triplo* de  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  e  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\vec{B})\vec{C}$ .

As operações de derivação envolvendo vetores podem, geralmente, ser expressas através de operações entre esses vetores e o *operador vetorial diferencial*  $\nabla$ ,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{e}_3, \quad (1.7)$$

onde

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3. \quad (1.8)$$

é o vetor posição. As operações envolvendo  $\nabla$  de maior importância são:

$$\nabla E = \text{grad } E = \frac{\partial E}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial E}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial E}{\partial x_3}\vec{e}_3, \quad (1.9)$$

onde  $E$  é um campo escalar,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}, \quad (1.10)$$

e

$$\nabla \times \vec{A} = \text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Assim,  $\text{grad } E$  é um vetor,  $\text{div } \vec{A}$  é um escalar e  $\text{rot } \vec{A}$  é um vetor.

Uma outra operação importante envolvendo  $\nabla$  e dois campos vetoriais  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  é (ver Kreyszig).

$$\nabla(\vec{A}\vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}. \quad (1.12)$$

Esta relação é de especial importância para a mecânica dos fluidos quando  $\vec{A} \equiv \vec{B} \equiv \vec{U}$  ( $\vec{U}$  = vetor velocidade),

$$\nabla(|\vec{u}|^2) = 2[(\vec{U}\cdot\nabla)\vec{U} + \vec{U} \times \vec{W}], \quad (1.13)$$

onde

$$\vec{W} = \text{rot } \vec{U}. \quad (1.14)$$

Os significados físicos associados a  $\text{grad } \vec{U}$ ,  $\text{div } \vec{U}$ ,  $\text{rot } \vec{U}$ , e à expressão (1.13) serão discutidos mais adiante.

Uma outra maneira de se representar o vetor  $\vec{x}$  em (1.8) é escrevê-lo na forma

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.15)$$

Esta é a notação indicial (ou de Einstein), que convencionou a indicação de somas através da utilização de índices repetidos. Assim, pode-se representar  $\text{grad } E$  e  $\text{div } \vec{A}$  nas formas:

$$\text{grad } E = \frac{\partial E}{\partial x_i} \vec{e}_i, \quad (1.16)$$

e

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}. \quad (1.17)$$

O produto escalar de um vetor unitário  $\vec{e}_k$  por  $\vec{x}$  pode ser escrito na forma

$$\vec{e}_k \cdot \vec{x} = \vec{e}_k \cdot \vec{e}_i \cdot x_i. \quad (1.18)$$

Como os vetores  $\vec{e}_i$  são ortogonais entre si,

$$\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i = 0 \quad \text{se } k \neq i, \quad \vec{e}_k \cdot \vec{e}_i = 1 \quad \text{se } k = i. \quad (1.19)$$

Uma notação concisa para  $\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i$  é o Delta de Kronecker definido por:

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases} \quad (1.20)$$

Assim,

$$\vec{e}_k \cdot \vec{x} = \delta_{ki} x_i = x_k. \quad (1.21)$$

A equação (1.21) é então uma forma condensada para se representar as três relações

$$x_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{x}; \quad x_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{x}; \quad x_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{x}. \quad (1.22)$$

Nos casos onde se deseja suprimir a convenção da soma ao se escrever índices repetidos, utiliza-se usualmente a notação

$$a_i = \lambda_i b_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.23)$$

que representa as três relações

$$a_1 = \lambda_1 b_1; \quad a_2 = \lambda_2 b_2; \quad a_3 = \lambda_3 b_3. \quad (1.24)$$

### 1.4.2 Teoremas de Stokes, Gauss e Green

Vários teoremas envolvendo integrais de funções e o operador  $\nabla$  são empregados na análise do escoamento de fluidos. Destes, três são de particular importância. O primeiro deles, o Teorema de Stokes, relaciona a integral ao longo de uma superfície  $S$  do rotacional de um campo vetorial, com a integral de linha ao longo do perímetro  $C$  que envolve  $S$ :

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} \, ds = \oint_C \vec{A} \cdot \vec{t} \, dc, \quad (1.25)$$

onde  $\vec{n}$  é normal à superfície  $S$  e  $\vec{t}$  é tangente à curva  $C$ .

O teorema da divergência de Gauss relaciona a integral do divergente de um campo vetorial ao longo de um volume  $V$ , com a integral de linha sobre a superfície  $S$  que envolve  $V$ :

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} \, dv = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, ds, \quad (1.26)$$

onde  $\vec{n}$  é normal à superfície  $S$ .

O teorema de Green é apresentado na literatura sob diferentes formas. A sua “primeira forma” é:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) \, dv = \int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds = \int_S \phi \vec{n} \cdot \nabla \psi \, ds, \quad (1.27)$$

onde  $\phi$  e  $\psi$  são funções escalares, e  $\partial/\partial n$  representa a derivada na direção normal à superfície  $S$ . A sua “segunda forma” é:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, dv = \int_S \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \, ds = \int_S \vec{n} \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \, ds \quad (1.28)$$

Quando  $\phi$  e  $\psi$  são funções harmônicas,

$$\int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds = \int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \, ds \quad (1.29)$$

O teorema de Green é de particular importância na análise de escoamentos irrotacionais, como será visto posteriormente.

### 1.4.3 Tensores e Operações Envolvendo Tensores

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (1.30)$$

é um *tensor* de ordem  $n$ , representado em notação indicial. Operações com tensores são geralmente escritas em notação indicial pela simplicidade com que esta notação as representa, e também pela forma direta com que ela denota a *ordem* do tensor.

$T_{ij}$  é um tensor de *segunda ordem*, que compreende  $i, j$ , componentes escalares. Similarmente,  $T_{ijk}$  é um tensor de *terceira ordem*, compreendendo  $i, j, k$  componentes escalares.

$T_{ij}$  pode ter a representação compacta  $T$ .  $T = R + S$  é o tensor formado pela soma de  $R$  e  $S$ , e

$$T_{ij} = R_{ij} + S_{ij}. \quad (1.31)$$

$$a = T_{ij}S_{ij}, \quad (1.32)$$

é o *produto interno* de dois tensores, onde  $a$  é um escalar.

$$u_i = T_{ij}v_j = v_jT_{ij}, \quad (1.33)$$

é o *produto vetorial* entre  $T$  e  $\vec{v}$ , ou seja,

$$\vec{u} = \mathbf{T} : \vec{v}, \quad (1.34)$$

é um vetor.

$$T_{ij} = u_iv_j, \quad (1.35)$$

é o *produto tensorial* de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$ , também representado por

$$\mathbf{T} = \vec{u} \otimes \vec{v} \quad (1.36)$$

O tensor

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; \text{ ou } 3, 1, 2 \\ 0 & \text{se quaisquer dos índices são iguais} \\ -1 & \text{se } i, j, k = 3, 2, 1; 2, 1, 3; \text{ ou } 1, 3, 2 \end{cases} \quad (1.37)$$

é chamado *tensor unitário alternado*. Este tensor é utilizado na representação indicial do produto vetorial entre dois vetores;  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$  pode ser representado por

$$w_i = \epsilon_{ijk}u_jv_k \quad (1.38)$$

O *gradiente de um campo vetorial* é um *tensor*, definido por

$$\nabla \vec{v} = \nabla \otimes \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (1.39)$$

O divergente de um tensor é um *vetor*, definido por

$$\nabla \mathbf{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1.40)$$

O gradiente de um *tensor* de ordem  $N$  é um *tensor* de ordem  $(N + 1)$ , e o divergente de um tensor de ordem  $N$  é um tensor de ordem  $N - 1$ . Vetores são tensores de primeira ordem e escalares são tensores de ordem zero. Assim, *não é definido o divergente de um escalar*.

### 1.4.4 Forças que Agem em um Fluido e o Tensor das Tensões

Pode-se distinguir dois tipos de forças que agem sobre uma região fluida arbitrária:

1. *Forças de corpo*, que atuam à distância através de um campo, tais como forças gravitacionais ou eletromagnética.
2. *Forças de superfície* ou *de contato*, resultantes do contato físico da superfície que delimita a região fluida com a matéria (sólida ou fluida) que o cerca.

Forças de corpo são representadas através de campos *vetoriais*, pois as direções e intensidades das mesmas são determinadas pelo próprio campo que as gera.

Forças de contato, por outro lado, possuem componentes *normais* e *tangenciais* que dependem da *orientação* da superfície de referência. Assim, forças de contato são representadas através de *tensores*. O *tensor de tensões* representa o *estado de tensões* local, e relaciona a tensão atuante em uma superfície localmente plana, com o vetor unitário normal à essa superfície.

Sendo  $\vec{T}$  a força de contato por unidade de área, área que atua através do elemento de área  $dA$ , no tempo  $t$ , e na posição  $\vec{X}$ ,

$$\vec{T}(\vec{n}, \vec{x}, t) \delta A = \sigma : \vec{n} \delta A, \quad (1.41)$$

representa a força de contato total que atua em  $\sigma \delta A$ , onde  $\vec{n}$  é o vetor unitário normal à superfície.  $\vec{T}$  é denominado *tensão* local, e se convencionou que  $\vec{T}$  é a tensão exercida pelo fluido existente no lado para o qual  $\vec{n}$  é direcionada, sobre o fluido do lado oposto da superfície. Assim,  $\vec{T}$  é uma função ímpar de  $\vec{n}$ , ou seja,

$$-\vec{T}(\vec{n}, \vec{x}, t) = \vec{T}(-\vec{n}, \vec{x}, t). \quad (1.42)$$

O estado de tensões local é representado pelo tensor de tensões  $\sigma$  cujas componentes representam as componentes normais e tangenciais de  $\vec{T}$  sobre os planos ortogonais definidos pelo sistema de coordenadas ortogonal local:

$$\sigma = \sigma_{ij}, \quad (1.43)$$

onde  $\sigma_{ij}$  = componente da tensão local na direção  $i$ , sobre o plano normal à direção  $j$ .

Os elementos diagonais de  $\sigma$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $i = j$ , representam as tensões normais sobre as superfícies ortogonais definidas por  $\vec{e}_i$  (unitários do sistema de referência ortogonal local), e os elementos  $\sigma_{ij}$ , para  $i \neq j$ , representam as tensões cisalhantes na direção  $j$  sobre as superfícies definidas por  $\vec{e}_i$ .

A Figura 1.4 ilustra a representação da tensão de contato  $\vec{T}$  que atua sobre a superfície  $S$  através das componentes do tensor de tensões  $\sigma$  e do unitário normal  $\vec{n}$ ,

É sempre possível encontrar-se uma orientação para os eixos ortogonais de referência para a qual os elementos  $\sigma_{ij}$  para  $i \neq j$  são todos nulos. As direções dos eixos  $x_i$  para esta orientação são chamadas *direções principais*, e os elementos  $\sigma_{ij}$  da diagonal ( $i = j$ ) do tensor de tensões são denominadas *tensões principais*  $\sigma'_{11}$ ,  $\sigma'_{22}$ ,  $\sigma'_{33}$  para o espaço tridimensional. A invariância do *traço* dos tensores de segunda ordem é uma propriedade bem conhecida, de maneira que

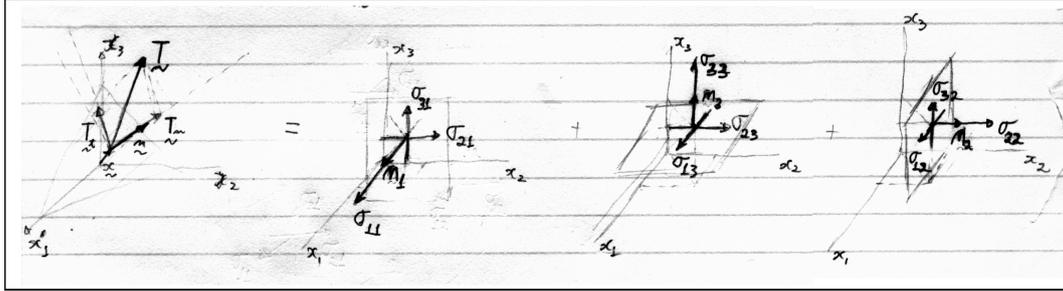


Figura 1.4: Representação da tensão de contato através do tensor de tensões

$$\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33} = \sigma_{ii}. \quad (1.44)$$

Escolhendo-se um sistema de coordenadas que coincide localmente com as direções principais, e escrevendo o tensor de tensões na forma

$$\begin{pmatrix} 1/3\sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 1/3\sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & 1/3\sigma_{ii} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma'_{11} - 1/3\sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} - 1/3\sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} - 1/3\sigma_{ii} \end{pmatrix}$$

pode-se separar a tensão local em duas componentes: uma *isotrópica*, devido ao primeiro tensor acima, que representa um esforço de *compressão uniforme* (o sinal de  $\sigma_{ii}$  é normalmente negativo) sobre um elemento infinitesimal de fluido local, e uma *anisotrópica*, onde a soma algébrica das tensões normais é zero, que representa um esforço de deformação sobre o elemento fluido.

Como um elemento de fluido não pode suportar esforços externos que tendem a deformá-lo, *todas as componentes* do segundo tensor mostrado acima devem ser iguais a zero para que um fluido permaneça em repouso. Isso significa que  $\sigma'_{11} = \sigma'_{22} = \sigma'_{33} = 1/3\sigma_{ii}$  para um fluido em repouso, ou seja, o tensor de tensões é *isotrópico* neste caso e apenas esforços normais agem sobre qualquer superfície escolhida. Fluidos em repouso estão normalmente em estado de compressão, de maneira que é conveniente se escrever

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (\text{para um fluido em repouso}), \quad (1.45)$$

onde  $p$  é denominada *Pressão Hidrostática*.

# Capítulo 2

## Cinemática dos Escoamentos

### 2.1 Sistemas de Referência para a Descrição dos Escoamentos

Os escoamentos de fluidos são caracterizados cinematicamente por um Campo de Velocidades. O Campo de Velocidades é um campo vetorial que associa a cada ponto do escoamento um vetor velocidade. Os campos de velocidade podem ser descritos através de dois sistemas de referência distintos:

1. no *Sistema Lagrangeano* de referência, as variáveis do escoamento são representadas como funções do tempo, e da especificação de elementos materiais do escoamento. A especificação de elementos materiais do fluido se faz através da descrição da posição  $\vec{x}$  do centro de massa do elemento, em um determinado tempo de referência  $t_0$ . Assim,  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}', t)$ , onde  $\vec{x}' = \vec{x}'(\vec{x}, t_0)$ ,  $\vec{x}$  = vetor posição.

O sistema Lagrangeano de referência tem a vantagem de descrever a história do movimento de partículas individuais do escoamento, mas torna complicada a análise do mesmo, principalmente por não fornecer diretamente os gradientes espaciais de velocidade.

2. no *Sistema Euleriano* de referência, a velocidade é expressa como uma função do vetor posição  $\vec{x}$  ( que define pontos no espaço ) e do tempo  $t$ , i.e.,  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ .

Neste sistema, descreve-se o escoamento através da *distribuição espacial* do vetor velocidade. Este sistema de referência leva a uma análise mais simples dos escoamentos, sendo largamente utilizado na descrição dos mesmos.

Na análise que se segue,  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  será a principal variável dependente, e as outras grandezas tais como a pressão ou a temperatura serão também descritas como funções de  $\vec{x}$  e  $t$ .

Em conexão com os métodos Lagrangeano e Euleriano de referência, surgem definições para determinadas linhas que se estendem ao longo de escoamentos, e que possuem importantes significados físicos.

Linhas de Corrente (Streamlines)

São linhas cujas tangentes são instantaneamente paralelas a  $\vec{u}(\vec{x}, t)$ . A família de linhas de corrente de um escoamento compreende as soluções de

$$\frac{dx_1}{u_1(\vec{x}, t)} = \frac{dx_2}{u_2(\vec{x}, t)} = \frac{dx_3}{u_3(\vec{x}, t)}, \quad (2.1)$$

onde  $u_1, u_2, u_3$  são as componentes de  $\vec{u}$  nas direções ortogonais  $x_1, x_2, x_3$  respectivamente.

Um tubo de corrente é a superfície formada instantaneamente por todas as linhas de correntes que passam por uma curva fechada qualquer  $C$ .

### Trajatórias (Pathlines)

São as linhas que representam as trajetórias das partículas de um escoamento. Enquanto as linhas de corrente podem ser calculadas diretamente a partir da descrição Euleriana de um escoamento, as trajetórias só podem ser diretamente avaliadas através da descrição Lagrangeana do mesmo. É interessante observar que linhas de corrente e trajetória são linhas distintas, que coincidem, entretanto, quando o escoamento é permanente (não varia com o tempo).

### Linhas de Emissão (Streaklines)

São linhas que contém as partículas do fluido que passam por um dado ponto do escoamento. Essas linhas também coincidem com linhas de corrente e trajetórias em escoamentos permanentes.

## 2.2 A Derivada Material

Sendo  $\alpha(\vec{x}, t)$  uma função descrita através de um sistema de referência Euleriano ( $\vec{x}$  = vetor posição, invariante em  $t$ ), a taxa de variação de  $\alpha$  com o tempo  $t$  em cada posição  $\vec{x}$  é chamada *Derivada Parcial* de  $\alpha$  com relação a  $t$ . Esta taxa de variação é representada por:

$$\frac{\partial \alpha(\vec{x}, t)}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Se  $\alpha(\vec{x}, t)$  é uma propriedade de um escoamento, por exemplo,  $\partial \alpha / \partial t$  representa a *taxa* com que  $\alpha$  varia ao longo do tempo, quando o escoamento é *observado* de um *ponto fixo* no espaço ( $\vec{x} = \vec{x}_0$ ).

Com relação a um segundo sistema de referência Euleriano ( $\vec{x}'$ ), que se move com uma velocidade  $\vec{U}$  com relação ao primeiro, a taxa de variação de  $\alpha$  na posição  $\vec{x}'$  é, evidentemente, *diferente* de  $\partial \alpha(\vec{x}, t) / \partial t$ . Assim, para se exprimir  $\partial \alpha(\vec{x}', t) / \partial t$  no sistema de referência ( $\vec{x}, t$ ) deve-se tomar o limite

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha[\vec{x} + \vec{U}\delta t + 0(\delta t^2), t + \delta t] - \alpha(\vec{x}, t)}{\delta t}, \quad (2.3)$$

em lugar de

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(\vec{x}, t + \delta t) - \alpha(\vec{x}, t)}{\delta t}. \quad (2.4)$$

O limite (2.3) é chamado *derivada total* de  $\alpha$  com relação ao tempo, é representado por  $d\alpha(\vec{x}, t)/dt$ , e pode ser avaliado através da soma

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial\alpha}{\partial t}(\vec{x}', t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(\vec{x} + \vec{U}\delta t, t + \delta t) - \alpha(\vec{x}, t + \delta t)}{\delta t} + \\ &\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(\vec{x}, t + \delta t) - \alpha(\vec{x}, t)}{\delta t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} 0(\delta t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

ou seja (aplicando-se a regra da cadeia para a diferenciação),

$$\frac{d\alpha}{dt}(\vec{x}, t) = \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial t}. \quad (2.6)$$

Como  $\vec{U} = dx_i/dt$ , então

$$\frac{d\alpha}{dt}(\vec{x}, t) = \vec{U}\nabla\alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial t}, \quad (2.7)$$

ou, em notação indicial,

$$\frac{d\alpha}{dt} = U_i \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial\alpha}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Novamente, se  $\alpha(\vec{x}, t)$  é uma propriedade de um escoamento,  $d\alpha/dt$  representa a *taxa* com que  $\alpha$  varia ao longo do tempo, quando o escoamento é observado de um *ponto que se move com velocidade*  $\vec{U}$ . Observe que  $d\alpha/dt$  é *uma função* de  $\vec{U}$ .

Um *caso particular* da relação (2.8) acontece quando se avalia  $d\alpha/dt$  para  $\vec{U} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ , onde  $\vec{u}$  é a *velocidade local* do escoamento. Neste caso  $d\alpha/dt$  é representado por  $D\alpha/Dt$ , recebendo o nome *Derivada Material* de  $\alpha$ . A expressão para a derivada material de  $\alpha$  é então

$$\frac{D\alpha}{Dt}(\vec{x}, t) = \vec{u}\nabla\alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Observe que (2.9) é a taxa de variação de  $\alpha$  com relação a  $t$ , quando o escoamento é representado através de um sistema Lagrangeano de referência, pois  $\vec{u} = d\vec{x}'/dt$ , onde  $\vec{x}'$  é o vetor de posição que acompanha as partículas de fluido. Assim, (2.9) descreve a variação de  $\alpha$  com  $t$ , vista por um observador *que se move com o fluido*. A Figura 2.1 ilustra o significado das três simbologias utilizadas para representar as diferentes taxas de variação de  $\alpha$ .

Em (2.9),  $\partial\alpha/\partial t$  é a taxa de variação *local* de  $\alpha$ . Para se determinar a taxa de variação de  $\alpha$  para um *elemento material de fluido* é preciso somar a  $\partial\alpha/\partial t$ , a taxa de variação *convectiva* de  $\alpha$ ,  $\vec{u}\nabla\alpha$ .

Derivadas materiais de grandezas vetoriais tem expressões similares a (2.9). A aceleração  $\vec{a}$  de uma partícula de fluido, por exemplo, é dada por:

$$\vec{a}(\vec{x}, t) = \frac{D\vec{u}}{Dt}(\vec{x}, t) = (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}, \quad (2.10)$$

ou, em notação indicial,

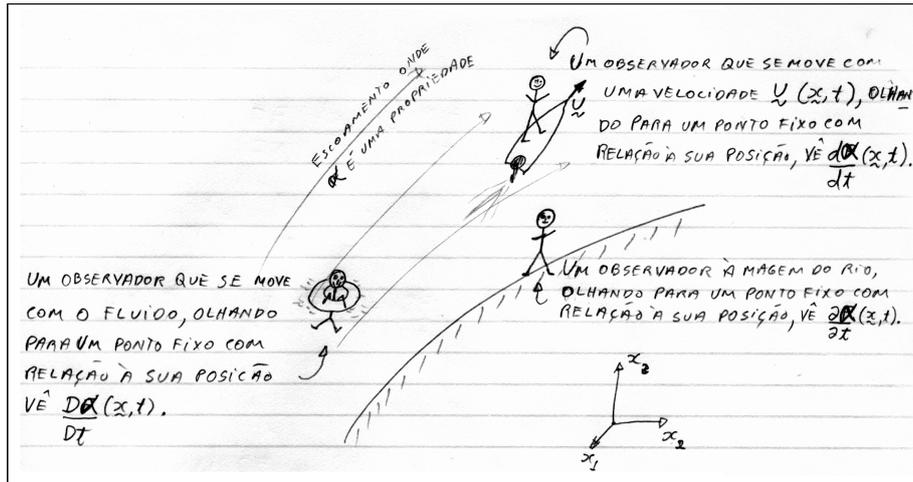


Figura 2.1: Ilustração do significado de  $\partial/\partial t$ ,  $d/dt$  e  $D/Dt$

$$a_i = \frac{Du_i}{Dt} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Uma outra aplicação do conceito de derivada material surge quando se quer exprimir a condição de que a grandeza  $\alpha$  é constante ao longo de uma superfície cuja geometria é descrita por uma equação do tipo  $F(\vec{x}, t) = 0$ . Neste caso,  $DF/Dt = 0$ , nos pontos onde  $F(\vec{x}, t) = 0$ .

### 2.3 Deformação e Rotação Locais de um escoamento

Os esforços exercidos entre porções adjacentes de um fluido dependem da deformação local imposta pelo escoamento. Assim, preliminarmente ao estudo da dinâmica dos escoamentos, uma análise cinemática do movimento relativo local se faz necessária. Considerando  $\vec{u}(\vec{x})$  um campo de velocidade que descreve um escoamento, a velocidade nas vizinhanças do ponto  $\vec{x}$ ,  $(\vec{x} + \delta\vec{x})$ , é  $\vec{u} + \delta\vec{u}$ , onde

$$\delta u_i = \delta x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + 0(\delta x^2). \quad (2.12)$$

O tensor  $\partial u_i/\partial x_j$  pode ser decomposto em duas componentes, uma simétrica e uma anti-simétrica, i.e,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \xi_{ij}, \quad (2.13)$$

onde

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \xi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.14)$$

que possuem significados físicos importantes.

O significado físico de  $e_{ij}$  torna-se evidente ao se analisar a deformação local de um elemento de um fluido:

Sendo  $\delta l$  a distância entre dois pontos materiais do fluido,

$$(\delta l)^2 = \delta x_i \delta x_i. \quad (2.15)$$

Assim,

$$\frac{D(\delta l)^2}{Dt} = 2\delta x_i \frac{D(\delta x_i)}{Dt} = 2\delta x_i \delta u_i, \quad (2.16)$$

ou ainda,

$$\frac{D(\delta l)^2}{Dt} = 2\delta x_i \delta x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta x_i \delta x_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.17)$$

pois a soma parcial dos termos de  $\delta x_i \delta x_j \partial u_i / \partial x_j$  que envolvem a componente anti-simétrica  $\xi_{ij}$  é nula.

Portanto, a *deformação* de um elemento fluido depende apenas de  $e_{ij}$ , uma vez que a variação da distância entre dois pontos quaisquer do elemento é independente de  $\xi_{ij}$ , sendo função apenas de  $e_{ij}$ .

A natureza da contribuição de  $\delta x_j e_{ij}$  para  $\delta u_i$  torna-se ainda mais clara ao se representar o tensor  $e_{ij}$  no sistema de coordenadas que coincide com os eixos principais de  $e_{ij}$ . As componentes  $e_{ij}^*$  desta nova representação são:

$$e_{ij}^* = \frac{\partial(\delta x_k)}{\partial(\delta x_i^*)} \frac{\partial(\delta x_i)}{\partial(\delta x_j^*)} e_{kl}, \quad (2.18)$$

que são nulas para  $i \neq j$  (tensores simétricos têm sempre três direções principais distintas), e satisfazem a relação invariante

$$e_{ii} = e_{ii}^* = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \quad (2.19)$$

Então, sendo  $a_1, a_2$  e  $a_3$  as componentes da diagonal de  $e_{ij}^*$ , a contribuição de  $\delta x_j e_{ij}$  para a velocidade relativa tem três componentes  $(a_1 \delta x_1^*, a_2 \delta x_2^*, a_3 \delta x_3^*)$  com relação aos eixos principais de  $e_{ij}$ . Assim, a distância entre dois pontos quaisquer ao longo da direção de  $\delta x_1^*$  varia à taxa  $\underline{a}_1$ , e estes pontos permanecem sobre esta direção. Similarmente, a distância entre pontos ao longo de  $\delta x_2^*$  varia à taxa  $\underline{a}_2$ , e ao longo de  $\delta x_3^*$ , à taxa  $\underline{a}_3$ . Linhas materiais não paralelas aos eixos principais são “esticadas” e mudam de direção, mas compativelmente com o “esticamento puro” para as linhas paralelas aos eixos principais.

Portanto,  $\delta x_j e_{ij}$  representa a contribuição à velocidade relativa  $\delta u_i$  em virtude da deformação local do fluido.

O tensor  $e_{ij}$  é, portanto, denominado *tensor taxa de deformação*, e a relação funcional entre ele e o tensor das tensões (Seção 1.5) é de fundamental importância no estabelecimento das equações que governam os escoamentos de fluidos.

É interessante observar que o campo de velocidades relativas

$$\delta u_i^{(s)} = \delta x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (2.20)$$

transforma um elemento de fluido, inicialmente esférico, em um elipsóide cujos diâmetros principais estão orientados segundo as direções principais de  $e_{ij}$  e que mantém essas orientações, cujas taxas de variação são  $a_1, a_2$  e  $a_3$ , respectivamente.

Como  $\partial u_i / \partial x_i = 0$  para um fluido incompressível (como veremos mais adiante) o elipsóide tem volume constante e  $e_{ij} = 0$ . Assim, para um fluido compressível, a deformação pura pode ser vista como a superposição de uma expansão isotrópica na qual a taxa de deformação de qualquer linha material é  $1/3 e_{ii}$ , e um cisalhamento puro (sem variação de volume) onde a deformação é descrita por  $(e_{kl} - 1/3 e_{ii} \delta_{kl})$ .

Quanto ao significado físico de  $\xi_{ij}$ , pode-se fazer a seguinte análise. Por ser um tensor anti-simétrico,  $\xi_{ij}$  pode ser representado na forma

$$\xi_{ij} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} h_k, \quad (2.21)$$

onde

$$h_k = \epsilon_{ijk} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.22)$$

A contribuição de  $\xi_{ij}$  para a velocidade relativa  $\delta u_i, \delta x_j \xi_{ij}$ , pode ser representada na forma

$$\delta u_i^a = \delta x_j \xi_{ij} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \delta x_j h_k. \quad (2.23)$$

Mas,  $-1/2 \epsilon_{ijk} \delta x_j h_k$  é a  $i$ -ésima componente do vetor  $1/2 \vec{h} \times \delta \vec{x}$ . Assim,  $\delta \vec{u}^a$  é a velocidade relativa (a  $\vec{x}$ ) na posição  $\delta \vec{x}$  devida a uma *rotação de corpo rígido* em torno do ponto  $\vec{x}$ , com velocidade angular  $1/2 \vec{h}$ .

De (2.22) tem-se a forma explícita para as componentes de  $\vec{h}$ ,

$$h_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad h_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad h_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (2.24)$$

Examinando-se (2.24) conclui-se que

$$\vec{h} = \nabla \times \vec{u}. \quad (2.25)$$

O vetor  $\vec{h}$  é o *rotacional do campo de velocidades*. Ele é denominado *vorticidade*, e seu módulo equivale *ao dobro da velocidade angular local do escoamento*.

Portanto, o campo de velocidades nas vizinhanças do ponto  $\vec{x}$  pode ser visto como a superposição de três efeitos (com erros da ordem de  $\delta \vec{x}^2$ ):

- uma translação uniforme com velocidade  $\vec{u}(x)$ ;
- uma deformação simples, caracterizada pelo tensor taxa de deformação,  $e_{ij}$ , que pode ser decomposta em uma dilatação isotrópica e uma deformação pura;

- uma rotação de corpo rígido com velocidade angular  $1/2h$ .

Assim, o vetor velocidade na posição  $\vec{x} + \vec{r}$  pode ser representado aproximadamente (erros de ordem  $0(\delta x^2)$ ) por:

$$u_i(\vec{x} + \vec{r}) = u_i(\vec{x}) + \frac{\partial \Psi}{\partial r_i} + 1/2 \epsilon_{ijk} h_j r_k, \quad (2.26)$$

onde  $\Psi = 1/2 r_j r_k e_{jk}$ , e  $e_{ij}$  e  $h_j$  são avaliados em  $\vec{x}$ .

É interessante observar que  $r_j e_{ij}$  pode ser escrito como  $\partial \Psi / \partial r_i$  por ser  $e_{ij}$  um tensor simétrico. Em forma vetorial (2.26) fica

$$\vec{u}(\vec{x} + \vec{r}) = \vec{u}(\vec{x}) + \nabla_r \Psi(\vec{x}) + 1/2 \vec{h}(\vec{x}) \times \vec{r}. \quad (2.27)$$

onde  $\vec{h} = \nabla_r \times \vec{u}$ , e  $\nabla_r$  envolve derivadas em  $\vec{r}$ . Desta maneira, o campo de velocidades relativas em torno de  $\vec{x}$  pode ser decomposto em uma soma de dois campos: um *irrotacional* (rotacional nulo),  $\nabla_r \Psi$ , pois  $\nabla_r \times (\nabla_r \Psi) = 0$ , e um *solenoidal* (divergência nula),  $1/2 \vec{h}(\vec{x}) \times \vec{r}$ , pois  $\nabla_r (\vec{h}(\vec{x}) \times \vec{r}) = (\nabla_r \times \vec{h}(\vec{x})) \vec{r} = 0$ .

Na verdade, a decomposição de um campo vetorial contínuo, cuja magnitude dos vetores e de suas primeiras derivadas tendem a zero no infinito, na soma de um campo irrotacional e um campo solenoidal, é um teorema fundamental da física matemática, apresentado por Stokes em 1849. De acordo com esse teorema, um campo de velocidades  $\vec{u}$  satisfazendo as condições acima pode ser escrito como

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}^{(i)}(\vec{x}) + \vec{u}^{(s)}(\vec{x}), \quad (2.28)$$

onde

$$\nabla \times \vec{u}^{(i)} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \vec{u}^{(s)} = 0. \quad (2.29)$$

Campos  $\vec{u}^{(i)}$  e  $\vec{u}^{(s)}$  satisfazendo a (2.30) podem ser representados como:

$$\vec{u}^{(i)} = \nabla \phi \quad , \quad \vec{u}^{(s)} = \nabla \times \vec{A}, \quad (2.30)$$

onde  $\phi$  é um campo escalar, denominado Potencial de Velocidade, e  $\vec{A}$  é um campo vetorial (solenoidal) denominado, geralmente, “Potencial Vetorial”. Como  $\vec{u} = \vec{u}^{(i)} + \vec{u}^{(s)}$ , então

$$\nabla \cdot \vec{u} = \nabla^2 \phi \equiv \Delta \text{ (taxa de expansão local)} \quad (2.31)$$

e

$$\nabla \times \vec{u} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} = \vec{h} \quad (2.32)$$

Desta forma, as distribuições da taxa de expansão local,  $\nabla_L$  e da vorticidade  $\vec{h}$ , contém bastante informação a respeito de  $\vec{u}$ .

A decomposição (2.28) pode ser estendida a campos de velocidade quaisquer, quando  $\vec{u}$  é decomposto na forma

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}^{(i)}(\vec{x}) + \vec{u}^{(s)}(\vec{x}) + \vec{v}(\vec{x}), \quad (2.33)$$

onde  $\vec{v}(\vec{x})$  satisfaz as condições não-homogêneas no infinito. Pode ser demonstrado que  $\vec{v}(x)$  é *irrotacional* e *solenoidal*, i.e.,

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \nabla \times \vec{v} = 0 \quad (2.34)$$

(ver Batchelor, Seção 2.4). Assim, as distribuições de  $\Delta$  e  $h$ , e as condições de contorno para  $\vec{u}$  estão relacionadas biunivocamente ao campo  $\vec{u}$ , sendo então suficientes para se especificar um escoamento.

# Capítulo 3

## Os Princípios de Conservação e as Equações do Movimento

### 3.1 Introdução

As equações do movimento para os meios contínuos são deduzidas a partir dos princípios de conservação aplicados a “volumes materiais”, i.e., volumes de controle definidos em sistemas Lagrangeanos de referência. Tais volumes envolvem “porções” definidas de matéria, comportando-se como corpos deformáveis.

Os princípios de conservação, quando aplicados aos volumes materiais, geram equações onde aparecem derivadas Lagrangeanas de quantidades integrais. Contudo, as equações do movimento para meios contínuos são preferencialmente descritas através de sistemas Eulerianos de referência, principalmente pela simplicidade e maior aplicabilidade a problemas de engenharia.

Assim, aplica-se os princípios de conservação a um volume matéria  $V(t)$  (um “corpo”) para se obter as equações do movimento em derivadas Lagrangeanas, e então se utiliza o “Teorema de Transporte de Reynolds” para se reescrevê-las sob a forma de equações integrais cujos integrandos envolvem apenas derivadas Eulerianas.

### 3.2 O Teorema do Transporte de Reynolds

Considerando-se  $\alpha$  uma propriedade extensiva específica (por unidade de volume) do contínuo, especificada através de um sistema Lagrangeano de referência, define-se a taxa de variação da integral de  $\alpha$  sobre o volume material  $V(t)$ , definido pela superfície  $S(t)$  (um “corpo deformável que se move”), através do limite:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dv = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{V(t+\delta t)} \alpha(t + \delta t) dv - \int_{V(t)} \alpha(t) dv \quad (3.1)$$

É interessante observar que como  $V(t)$  é um volume material, então a superfície  $S(t + \delta t)$  é formada pelos mesmos “pontos materiais” que formam a superfície  $S(t)$ . Assim, sendo  $S(t)$  definida pelos “pontos” cujos vetores posição são  $\vec{x}_{(s)}(t)$ , então  $S(t + \delta t)$ , quando  $\delta t \rightarrow 0$ , é definida pelos vetores posição

$$\vec{x}_S(t + \delta t) = \vec{x}_S(t) + \delta t \frac{d\vec{x}_S(t)}{dt} + 0(\delta t)^2, \quad (3.2)$$

(aproximação linear), onde

$$\frac{d\vec{x}_S}{dt} = \frac{\partial \vec{x}_S}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{x}_S, \quad (3.3)$$

i.e.,

$$\vec{x}_S(t + \delta t) = \vec{x}_S(t) + \delta t \frac{D\vec{x}_S}{Dt} + 0(\delta t)^2. \quad (3.4)$$

Por esse motivo se identifica a derivada total da equação (3.1) através da simbologia  $D/Dt$  (derivada material) em lugar de  $d/dt$ . A expressão (3.1) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dv &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{V(t+\delta t) - V(t)} \alpha(t + \delta t) dv + \\ &\int_{V(t)} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t + \delta t) - \alpha(t)}{\delta t} dv, \end{aligned} \quad (3.5)$$

(através de puro algebrismo), ou seja,

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dv = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{V(t+\delta t) - V(t)} \alpha(t + \delta t) dv + \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dv \quad (3.6)$$

O limite em (3.6) pode ser avaliado através de considerações geométricas: a Figura 3.1 mostra o volume de controle  $V(t)$  nos instantes  $t$  e  $t + \delta t$ . A integral de volume avaliada em  $V(t + \delta t) - V(t)$  (representado pela área hachurada) pode ser calculada através de uma integral de superfície em  $S(t)$ , pois

$$V(t + \delta t) - V(t) = \delta t \frac{dV(t)}{dt} + 0(\delta t^2), \quad (3.7)$$

e

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{S(t)} (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds, \quad (3.8)$$

Assim,

$$V(t + \delta t) - V(t) = \int_{S(t)} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \delta t ds. \quad (3.9)$$

Como

$$\int_{V(t+\delta t) - V(t)} dv = V(t + \delta t) - V(t) = \int_{S(t)} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \delta t ds, \quad (3.10)$$

então

$$\frac{dV}{dS} = (\vec{u}(t) \cdot \vec{n}(t)) \delta t; \quad (3.11)$$

e

$$\int_{V(t+\delta t)-V(t)} \alpha(t+\delta t) dv = \int_{S(t)} \alpha(t+\delta t) [\vec{u} \cdot \vec{n}] \delta t ds. \quad (3.12)$$

Substituindo (3.12) em (3.6), tem-se:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{V(t+\delta t)-V(t)} \alpha(t+\delta t) dv = \int_{S(t)} \alpha(t) \vec{u} \cdot \vec{n} ds, \quad (3.13)$$

e (3.6) pode ser avaliada através de uma soma de duas integrais avaliadas sobre regiões fixas (o domínio  $V$  e seu contorno  $S$  no instante  $t$ ), i.e.,

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha dv = \int_S \alpha \vec{u} \cdot \vec{n} ds + \int_V \frac{\partial \alpha}{\partial t} dv. \quad (3.14)$$

O Teorema da Divergência de Gauss pode ser aplicado à integral de superfície de (3.14), convertendo-a em uma integral de volume. Assim, (3.14) pode ser escrita na forma:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha dV = \int_V \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{u}) \right] dv, \quad (3.15)$$

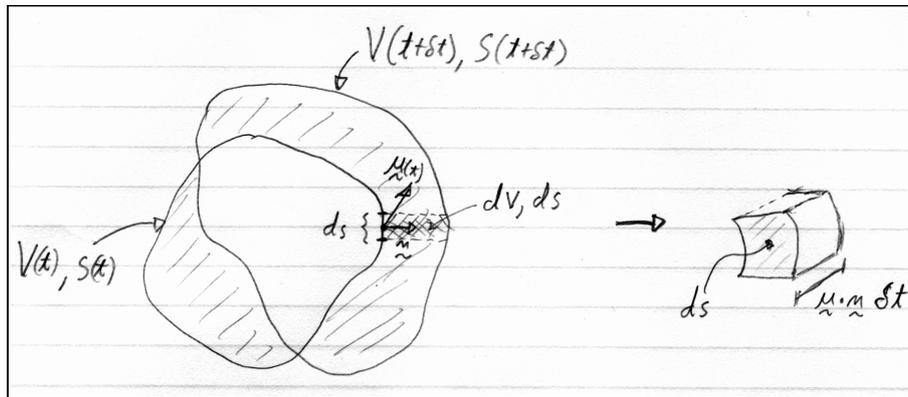


Figura 3.1: Representação do volume  $V$  nos instantes  $t$  e  $t + \delta t$ .

ou, em rotação tensorial,

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha dv = \int_V \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha u_i) \right] dv. \quad (3.16)$$

As expressões (3.14), (3.15) e (3.16) são formas alternativas do Teorema de Transporte de Reynolds.

### 3.3 Princípio da Conservação da Massa

Considerando a *massa* como uma propriedade conservada pela matéria (não é criada nem destruída), i.e., uma propriedade conservada por um volume material  $V(t)$  (definido por  $S(t)$ ), a expressão matemática para essa conservação pode ser estabelecida através da massa específica  $\rho$ , através da seguinte expressão:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \, dv = 0. \quad (3.17)$$

Esta expressão pode ser convertida através do Teorema de Transporte de Reynolds a uma expressão envolvendo somente integrais e derivadas Eulerianas:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv + \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = 0. \quad (3.18)$$

A expressão acima indica que o fluxo de massa através da superfície  $S$ , agora definida espacialmente (invariante com o tempo), é igual à taxa de variação da massa existente dentro do volume  $V$ , agora também definido espacialmente (invariante com o tempo).

A expressão (3.18) pode ser escrita como uma única integral de volume, ao se aplicar o Teorema da Divergência. Assim,

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) \right] dV = 0 \quad (3.19)$$

Como o volume  $V$  em (3.19) é arbitrário, então a equação diferencial que exprime a conservação da massa é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad (3.20)$$

ou seja,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (3.21)$$

ou ainda,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (3.22)$$

As equações diferenciais (3.20), (3.21) e (3.21) expressam o princípio da conservação da massa, sendo formas alternativas da *Equação da Continuidade*.

### 3.4 O Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento Linear

#### Movimento Linear

A quantidade de movimento linear (ou momento linear) de um volume material  $V(t)$  (definido por  $S(t)$ ), pode ser avaliada pela integral:

$$\int_{V(t)} \rho \vec{u} \, dv \quad (= \text{mov. linear corpo, } V(t)). \quad (3.23)$$

Sendo  $\vec{P}$  a resultante das forças de superfície por unidade de área, e  $\vec{f}$  a resultante das forças de corpo por unidade de massa que atuam sobre o “corpo”  $V(t)$ , pode-se escrever a segunda Lei de Newton para o volume material  $V(t)$  na seguinte forma:

$$\frac{d}{Dt} \int_{V(t)} \rho \vec{u} \, dv = \int_{S(t)} \vec{p} \, ds + \int_{V(t)} \rho \vec{f} \, dv. \quad (3.24)$$

Aplicando-se o Teorema do Transporte de Reynolds a (3.24) (3 equações escalares), esta equação vetorial pode ser escrita na forma:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) \, dv + \int_S (\rho \vec{u}) (\vec{u} \vec{n}) \, ds = \int_S \vec{P} \, ds + \int_V \rho \vec{f} \, dv, \quad (3.25)$$

ou, em notação indicial,

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) \, dv + \int_S (\rho u_j) u_k n_k \, ds = \int_S P_j \, ds + \int_V \rho f_j \, dv. \quad (3.26)$$

Representando-se a força de superfície por unidade de área,  $\vec{P}$ , que atua no elemento de área  $ds$ , em função das nove componentes do Tensor de Tensões,  $\sigma_{ij}$ , pode-se escrever (3.26) na forma:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) \, dv + \int_S (\rho u_j) u_k n_k \, ds = \int_S \sigma_{ij} n_i \, ds + \int_V \rho f_j \, dv. \quad (3.27)$$

Aplicando-se o Teorema da Divergência à expressão acima, tem-se:

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) \right] dv = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dv + \int_V \rho f_j dV. \quad (3.28)$$

Como  $V$  é arbitrário, então:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j, \quad (3.29)$$

ou seja,

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j. \quad (3.30)$$

Observando-se que, através da equação da continuidade,

$$u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0. \quad (3.31)$$

Então a equação diferencial para a conservação da quantidade de movimento linear é dada por:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j, \quad (3.32)$$

ou seja,

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u}\nabla)\vec{u} = \operatorname{div} \sigma + \rho\vec{f}, \quad (3.33)$$

ou ainda,

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \operatorname{div} \sigma + \rho\vec{f}. \quad (3.34)$$

### 3.5 O Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento Angular

A quantidade de movimento angular de um volume material  $V(t)$ , definida pela superfície fechada  $S(t)$ , com relação a um ponto genérico do espaço,  $\vec{x}_0$ , pode ser avaliada através da integral  $\int_{V(t)} \vec{r} \times (\rho\vec{u}) dV$  (= momento angular do “corpo”  $V(t)$  em relação ao ponto  $\vec{x}_0$ ), onde

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_0. \quad (3.35)$$

Sendo  $\vec{P}$  a resultante das forças de superfície por unidade de área, e  $f$  a resultante das forças de corpo por unidade de massa, pode-se representar o princípio da conservação do momento angular para o volume material  $V(t)$  na seguinte forma:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \vec{r} \times (\rho\vec{u}) dv = \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{P} ds + \int_{V(t)} \vec{r} \times \rho\vec{f} dv. \quad (3.36)$$

Aplicando-se o Teorema do Transporte de Reynolds a (3.36) (3 equações escalares), tem-se:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} [\vec{r} \times (\rho\vec{u})] dv + \int_S [\vec{r} \times (\rho\vec{u})] \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \int_S \vec{r} \times \vec{P} ds + \int_V \vec{r} \times \rho\vec{f} dv, \quad (3.37)$$

que em notação indicial, tem a forma:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon_{ijk} r_i u_j) dv + \int_S (\rho \epsilon_{ijk} r_i u_j) u_l n_l ds = \int_S \epsilon_{ijk} r_i P_j ds + \int_V \rho \epsilon_{ijk} r_i f_j dv. \quad (3.38)$$

Aplicando-se o Teorema da Divergência a (3.38), e representando as forças de superfície por unidade de área através do Tensor das Tensões (ver 1.43), tem-se:

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon_{ijk} r_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho \epsilon_{ijk} r_i u_j u_l) \right] dv = \int_V \left[ \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (r_i \sigma_{lj} + \rho \epsilon_{ijk} r_i f_j) \right] dv. \quad (3.39)$$

Como o volume  $v$  é arbitrário, e como

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho r_i u_j u_l) = \epsilon_{ijk} r_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_j u_l) + \epsilon_{ijk} \rho u_j u_i, \quad (3.40)$$

(observe que  $\partial r_i / \partial x_l = 0$  para  $i \neq l$  e  $= 1$  para  $i = l$ ), então

$$e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho r_i u_j u_l) = e_{ijk} r_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_j u_l), \quad (3.41)$$

pois

$$e_{ijk} \rho u_j u_i = \rho e_{ijk} u_j u_i = \rho (\vec{u} \times \vec{u}) = 0. \quad (3.42)$$

Então (3.39) pode ser reduzida a:

$$e_{ijk} r_i \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + e_{ijk} r_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_j u_l) = e_{ijk} r_i \frac{\partial \sigma_{lj}}{\partial x_l} + \mathbf{e}_{ijk} \sigma_{ij} + e_{ijk} r_i \rho f_i. \quad (3.43)$$

Tomando-se agora o ponto arbitrário de referência para os torques dentro do volume  $V$ , isto é,  $\vec{x}_0 \in V$ , e analisando (3.43) quando  $V \rightarrow 0$  ( $\vec{r} \rightarrow 0$ ), conclui-se que  $e_{ijk} \sigma_{ij} = 0$ , ou seja,  $\sigma$  é simétrico. i.e.,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

### 3.6 O Princípio da Conservação da Energia

O princípio da conservação da energia pode ser expresso matematicamente através da primeira Lei da Termodinâmica. A primeira Lei da Termodinâmica estabelece que a variação da energia "total" de um sistema durante um processo é igual à soma do trabalho total realizado sobre o mesmo e o calor total a ele transferido.

Considerando o volume material  $V(t)$  de um fluido um sistema termodinâmico que se transforma assumindo estados termodinâmicos "não muito distantes dos estados de equilíbrio", e cuja "energia total" é a soma de suas energias *cinética* ( $\int_{V(t)} 1/2 \rho \vec{u} \cdot \vec{u} dv$ ) e *interna* ( $\int_{V(t)} \rho e dv$ ), o princípio da conservação da energia pode ser então "aproximado" (supõe-se processos quase-estáticos) pela relação:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} (\rho e + 1/2 \rho \vec{u} \cdot \vec{u}) dv = \int_{S(t)} \vec{u} \cdot \vec{P} ds + \int_{V(t)} \vec{u} \cdot \rho \vec{f} dv - \int_{S(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} ds. \quad (3.44)$$

onde  $\vec{q}$  é o fluxo de calor por unidade de área da superfície, e  $e$  a energia interna específica (propriedade termodinâmica para sistemas em equilíbrio),  $\int_{S(t)} \vec{u} \cdot \vec{P} ds$ , é o trabalho realizado pelas forças de superfície e  $\int_{V(t)} \vec{u} \cdot \rho \vec{f} dv$  é o trabalho realizado pelas forças de corpo, ambas por unidade de tempo.

Torna-se interessante observar que a energia interna (por unidade de massa)  $e$  é uma grandeza definida na Termodinâmica Clássica, e se aplica, em princípio, somente a sistemas em equilíbrio termodinâmico. No entanto, os processos termodinâmicos pelos quais passam elementos materiais de fluido em escoamentos genéricos não são processos quasi-estáticos, envolvendo estados de inequilíbrio. Assim, a própria definição das grandezas termodinâmicas que se aplicam aos escoamentos de fluidos deve ser analisada cuidadosamente.

A massa específica  $\rho$  pode ser claramente definida, mesmo para sistemas em estado de inequilíbrio termodinâmico, uma vez que a massa e o volume de um sistema são grandezas mensuráveis mesmo nestes casos.

A energia interna, definida através da primeira lei da termodinâmica para processos quasi-estáticos, é um conceito que pode ser estendido a estados de inequilíbrio termodinâmico, ao se definir  $e$ , nestes casos, como sendo a energia interna do "sistema" (elemento material de fluido) após o mesmo ser "isolado" do fluido que o cerca, e atingir o equilíbrio termodinâmico sem realizar trabalho ou transferir calor através de sua superfície.

Assim, pelo menos duas propriedades termodinâmicas,  $\rho$  e  $e$ , podem ser associadas a processos irreversíveis, e (3.44) é uma relação satisfeita pelos escoamentos de fluidos. A extensão da definição de outras propriedades termodinâmicas, tais como a temperatura, para estados de inequilíbrio serão discutidas posteriormente.

Aplicando-se o Teorema do Transporte de Reynolds a (3.44) tem-se:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho e + 1/2 \rho u_j \cdot u_j) dv + \int_S (\rho e + 1/2 \rho u_j u_j) u_l n_l ds = \int_S u_j P_j ds + \int_V u_j \rho f_j ds - \int_S q_j n_j dv. \quad (3.45)$$

Através do Teorema da Divergência, (3.45) toma a forma (onde  $P_j$  é representado através de  $\sigma_{ij}$ ):

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho e + 1/2 \rho u_j u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} [(\rho e + 1/2 \rho u_j u_j) u_k] dv = \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j \sigma_{ij}) + u_j \rho f_j - \frac{\rho f_j}{\rho x_j} \right] dv. \quad (3.46)$$

Como o volume  $V$  é arbitrário, então,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e + 1/2 \rho u_j u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} [(\rho e + 1/2 \rho u_j u_j) u_k] = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j \sigma_{ij}) + u_j \rho f_j - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \quad (3.47)$$

Considerando a equação da continuidade, o membro esquerdo de (3.47) pode ser escrito como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e + 1/2 \rho u_j u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} [(\rho e + 1/2 \rho u_j u_j) u_k] = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + \rho u_j \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_j u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}. \quad (3.48)$$

Assim (3.47) pode ser representado na forma

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + \rho u_j \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_j u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + u_j \rho f_j - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \quad (3.49)$$

Considerando ainda a equação da conservação da quantidade de movimento linear, a expressão acima se reduz a:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}, \quad (3.50)$$

ou seja,

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla e = \sigma \cdot (\nabla \otimes \vec{U}) - \nabla \cdot \vec{q}, \quad (3.51)$$

ou ainda,

$$\rho \frac{De}{Dt} = \sigma(\nabla \otimes \vec{u}) - \text{div} \vec{q} \quad (3.52)$$

As expressões (3.50), (3.51) e (3.52) são formas alternativas da equação diferencial que exprime o princípio da conservação da energia.

## 3.7 Equações e Variáveis Obtidas Através dos Princípios de Conservação

As equações obtidas através da aplicação dos princípios de conservação da massa, quantidade de movimento (linear e angular) e energia perfazem um sistema de oito (8) equações escalares: 1 para a conservação da massa, 3 para a conservação da quantidade de movimento linear (1 para cada componente), 3 para a conservação da quantidade de movimento angular (1 para cada componente) e 1 para a conservação da energia. Entretanto, essas equações apresentam 17 variáveis:  $\phi$ ,  $e$ ,  $\sigma$ ,  $\vec{q}$  e  $\vec{u}$ .

Para se obter um sistema completo, devem ser estabelecidas mais  $n$  equações que introduzam  $m$  variáveis adicionais, de maneira que  $n - m = 9$ . Tais equações adicionais são obtidas através das *Equações Constitutivas*, que estabelecem relações de dependência entre o tensor de tensões  $\sigma$  e o fluxo de calor  $\vec{q}$ , e as outras variáveis do sistema.

O tensor de tensões  $\sigma$  é escrito como uma função do campo de velocidades (através do tensor taxa de deformação), introduzido mais seis equações ao sistema. A pressão hidrostática  $p$  é introduzida como uma função do traço de  $\sigma$  (ver 1.45), introduzindo mais uma equação e uma variável. O fluxo de calor  $\vec{q}$  é relacionado ao campo de temperaturas  $T$ , introduzindo mais três equações e uma variável ao sistema. Uma Equação de Estado envolvendo  $\rho$ ,  $p$  e  $T$  é utilizada (mais uma equação), completando o sistema de 19 equações e 19 variáveis ( $e$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{q}$  e  $\sigma$ ).

As Relações Constitutivas envolvendo  $\sigma$  e  $\vec{q}$  envolvem parâmetros que são *propriedades* do fluido (a viscosidade  $\mu$ , e a condutividade térmica  $k$ ). Para a solução do sistema de equações descritos acima,  $\mu$  e  $k$  devem ser funções conhecidas das variáveis do sistema.

## 3.8 As Equações Constitutivas

### 3.8.1 As relações para o tensor das tensões

A expressão (1.45) mostra que, em um fluido em repouso, não atuam esforços cisalhantes, e que a tensão normal é independente da direção da superfície sobre a qual ela atua. Por esse motivo, pode-se representar o campo de tensões para um fluido em repouso através de um campo escalar denominado *pressão fluido-estática* (ou hidrostática) como em (1.45).

Para um fluido movimento, entretanto, não se pode pressupor a isotropia do tensor de tensões. A própria noção de uma *pressão* atuando isotropicamente sobre um elemento de fluido é perdida neste caso. Entretanto, pode-se caracterizar o *esforço* de "compressão" ou "expansão" sobre um elemento de fluido através do escalar  $1/3\sigma_{ii}$  (ver Capítulo 1).  $\sigma_{ii}$  é o traço do tensor das tensões (invariante sob a rotação dos eixos de referência), e a constante

$1/3$  é utilizada pois  $1/3\sigma_{ii}$  representa a média das componentes normais da tensão local, i.e.,

$$\frac{1}{4\pi}\sigma_{ij}\int n_in_j d\Omega(\vec{n}) = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{ii}, \quad (3.53)$$

onde  $\delta\Omega(\vec{n})$  é um elemento de ângulo sólido cuja direção é determinada por  $\vec{n}$ .

Assim, o escalar  $1/3\sigma_{ii}$ , que se reduz à *pressão estática* (hidrostática) definida em (1.45), tem um significado físico apropriado à generalização do conceito de pressão estática a fluidos em movimento, onde

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii}. \quad (3.54)$$

É interessante observar que  $p$ , definido em (3.54), é uma grandeza *mecânica*, que não tem, necessariamente, conexão direta com a *pressão termodinâmica* definida na Termodinâmica Clássica para sistemas em equilíbrio termodinâmico. Elementos de fluido em movimento relativo *não estão em equilíbrio termodinâmico*. Assume-se, entretanto, a equivalência entre  $p$  e a pressão termodinâmica como uma aproximação satisfatória para um fluido em movimento por razões que serão discutidas em 3.8.3.

Desta forma, o tensor das tensões pode ser decomposto na soma de uma componente isotrópica e uma não-isotrópica

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}, \quad (3.55)$$

onde  $d_{ij}$  é denominado *Tensor das Tensões Desviatórias*, que existe unicamente em decorrência do movimento do fluido.

O tensor das tensões desviatórias pode ser relacionado ao tensor taxa de deformação, uma vez que este último tensor é o parâmetro do escoamento de maior relevância para as tensões desviatórias, uma vez que, localmente, as tensões podem ser tomadas como funções únicas dos gradientes de velocidades em um meio contínuo (ver Seção 1.3).

A relação entre  $d_{ij}$  e  $\partial u_i/\partial x_j$  depende das características de cada fluido. Para uma grande variedade de fluidos pode-se admitir que  $d_{ij}$  é uma função linear das várias componentes do gradiente de velocidades. Isso pode ser expresso na seguinte forma:

$$d_{ij} = A_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (3.56)$$

onde o tensor de quarta ordem  $A_{ijkl}$  depende do estado local do fluido, mas é independente da distribuição local de velocidades, e é, necessariamente, simétrico em  $i$  e  $j$  pois  $d_{ij}$  é simétrico.

Decompondo-se  $\partial u_k/\partial x_l$  em suas partes simétrica e anti-simétrica, tem-se:

$$d_{ij} = A_{ijkl}e_{kl} - \frac{1}{2}A_{ijkl}e_{klm}h_m. \quad (3.57)$$

Para fluidos cuja estrutura molecular é estatisticamente isotrópica, o tensor das tensões desviatórias deve ser isotrópico para um dado gradiente de velocidades. Desta forma,  $A_{ijkl}$  deve ser um tensor isotrópico, podendo ser escrito na forma:

$$A_{ijkl} = \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu'\delta_{il}\delta_{jk} + \mu''\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad (3.58)$$

onde  $\mu$ ,  $\mu'$  e  $\mu''$  são coeficientes escalares, e, como  $A_{ijkl}$  é simétrico em  $i$  e  $j$ ,

$$\mu' = \mu. \quad (3.59)$$

Assim,

$$A_{ijkl} = 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu''\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad (3.60)$$

e, conseqüentemente, o tensor  $A_{ijkl}$  é simétrico também em  $k$  e  $l$ .

A simetria de  $A_{ijkl}$  em  $k$  e  $l$  implica em

$$A_{ijkl}\epsilon_{klm}h_m = 0, \quad (3.61)$$

e (3.57) se reduz a

$$d_{ij} = A_{ijkl}e_{kl}, \quad (3.62)$$

uma vez que  $\epsilon_{klm}h_m$  é um tensor anti-simétrico.

Aplicando-se (3.60) a (3.62) tem-se:

$$d_{ij} = 2\mu e_{ij} + u\Delta\delta_{ij}, \quad (3.63)$$

onde,  $\Delta = e_{kk}$  é a taxa de expansão local definida em (2.31).

Como o traço de  $d_{ij}$  é nulo, então

$$d_{ii} = (2\mu + 3\mu'')\Delta = 0 \quad (3.64)$$

para qualquer valor de  $\Delta$ , implicando em

$$2\mu + 3\mu'' = 0. \quad (3.65)$$

Assim, a expressão para  $d_{ij}$  pode ser reduzida a

$$d_{ij} = 2\mu(e_{ij} - 1/3\Delta\delta_{ij}). \quad (3.66)$$

Torna-se interessante observar que o termo entre parênteses em (3.66) é a parte *não-isotrópica* do *tensor taxa de deformação*, discutido na seção 2.3.

Aplicando-se (3.66) ao escoamento simplesmente cisalhado onde  $\partial u_1/\partial x_2$  é a única derivada não nula da velocidade, tem-se que todas as componentes de  $d_{ij}$  são nulas, com exceção de

$$d_{12} = d_{21} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (3.67)$$

Comparando (3.67) com (1.2), tendo-se em vista (3.56), conclui-se que a constante  $\mu$  introduzida em (3.58) é a *viscosidade*, introduzida na Seção (1.3).

Observe-se que, para o caso de fluidos não-newtonianos, o tensor de coeficientes  $A_{ijkl}$  em (3.56) não é constante com relação a  $\partial u_k/\partial x_l$ . No caso de substâncias com estrutura

molecular estatisticamente anisotrópicas (óleos, por exemplo),  $A_{ijkl}$ , além de ser uma função da taxa de cisalhamento, é também um tensor anisotrópico. Assim, nestes casos, a viscosidade local não pode ser caracterizada por um escalar ( $\mu$ ), necessitando de um tensor para a definição precisa da “viscosidade’ local”.

Portanto, para fluidos newtonianos,

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - 1/3\Delta\delta_{ij}), \quad (3.68)$$

onde

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \Delta = e_{ii}. \quad (3.69)$$

A equação do momento (equação 3.30) para fluidos newtonianos (equação 3.68) toma então a forma

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{2\mu(e_{ij} - 1/3\Delta\delta_{ij})\}. \quad (3.70)$$

denominada *Equação de Navier-Stokes*. C. L. M. H. Navier (1785-1836) e G. S. Stokes (1819-1903) determinaram independentemente a expressão (3.70).

Para escoamentos onde  $\mu$  pode ser admitida como constante ao longo do mesmo, (3.70) pode ser reduzida a

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + 1/3 \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} \right). \quad (3.71)$$

Caso, adicionalmente, a compressibilidade do escoamento seja desprezível, (3.71) pode ser ainda reduzida à forma

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (3.72)$$

ou, em notação vetorial,

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (3.73)$$

A equação (3.73) é de particular importância em Mecânica dos Fluidos, uma vez que é extensa a classe de escoamentos que satisfaz esta equação. Por vezes, na literatura, se denomina “Equação de Navier-Stokes” a equação (3.73).

### 3.8.2 As relações para o fluxo de calor

O fluxo de calor instantâneo  $\vec{q}$  em um ponto  $\vec{x}$  do contínuo pode ser representado através da *Lei de Fourier* como (para fluidos termicamente isotrópicos):

$$\vec{q} = -k\nabla T, \quad (3.74)$$

onde  $k$  é o *Coefficiente de Condutibilidade Térmica* e  $T = T(\vec{x}, t)$  é o campo de temperaturas. Observe que  $K$  é uma *propriedade física* do fluido.

O conceito “Temperatura” é definido pela Termodinâmica Clássica para sistemas termodinâmicos em equilíbrio, mas pode ser estendido aos escoamentos de fluidos através de argumentação similar àquela utilizada para a energia interna  $e$ . Um elemento infinitesimal de fluido é um sistema termodinâmico irreversível, ao qual é associado, a cada instante, uma temperatura igual àquela do meio no qual o elemento pode ser instantaneamente inserido e deixado atingir o estado de equilíbrio, sem que realize trabalho ou troque calor com o meio.

Aplicando-se (3.74) à equação da conservação da energia (3.52) tem-se:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \sigma \cdot (\nabla \otimes \vec{u}) + \nabla \cdot (k \nabla T), \quad (3.75)$$

onde  $T$  é definido segundo o parágrafo acima.

A equação (3.75) descreve a variação da energia interna do fluido, sendo interessante observar que (3.75) pode ser representada na forma indicial

$$\rho \frac{De}{Dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right), \quad (3.76)$$

que, para fluidos newtonianos, se reduz a

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p\Delta + 2\mu(e_{ij}e_{ij} - 1/3\Delta) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right), \quad (3.77)$$

ou ainda,

$$\rho \frac{De}{Dt} = (-p\delta_{ij})(1/3\Delta\delta_{ij}) + 2\mu(e_{ij} - 1/3\Delta\sigma_{ij})(e_{ij} - 1/3\Delta\delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \quad (3.78)$$

mostrando separadamente as contribuições à variação da energia interna, providas pelo trabalho realizado pela parte isotrópica do tensor das tensões  $(-p\delta_{ij})(1/3\Delta\delta_{ij})$ , pela sua parte desviatória,  $d_{ij}(e_{ij} - 1/3\Delta_{ij})$  (quando  $d_{ij} = 2\mu(e_{ij} - 1/3\Delta\delta_{ij})$ ), e pelo fluxo de calor,  $\frac{\partial}{\partial x_i} (k \frac{\partial T}{\partial x_i})$ . Observe que a contribuição devida a parte desviatória do tensor de tensões é sempre positiva, indicando uma inevitável transferência de energia do escoamento para a energia interna do fluido.

Assim, o termo

$$\Phi = \frac{2\mu}{\rho} (e_{ij}e_{ij} - 1/3\Delta^2), \quad (3.79)$$

representa a *dissipação* de energia mecânica, por unidade de massa do fluido, devido à viscosidade. O efeito dessa dissipação de energia mecânica é uma adição irreversível de calor ao fluido.

### 3.8.3 A equação de estado para $\rho, p$ e $T$

As propriedades termodinâmicas  $\rho$  e  $T$ , definidas para estados de equilíbrio, foram entendidas para os estados de inequívrio termodinâmico ao se definir estas propriedades, nestes casos, como aquelas de sistemas em equilíbrio que não trocariam calor ou trabalho com o elemento infinitesimal de fluido instantaneamente em inequívrio.

Os mesmos argumentos utilizados para a extensão do conceito de “Pressão Termodinâmica” a sistemas em estado de inequívrio podem ser também aqui aplicados. Denotando-se esta pressão termodinâmica por  $p_e$ , pode-se observar que, sendo  $p$  a “pressão mecânica”, definida como sendo  $1/3\sigma_{ii}$ ,  $p = p_e$  para um fluido em repouso, pois, neste caso, o fluido está em equilíbrio termodinâmico. Entretanto, nos escoamentos de fluidos,  $p \neq p_e$ .

O valor aproximado de  $p - p_e$  para um elemento infinitesimal de fluido escoando pode ser determinado através de argumentos similares aos utilizados na determinação do tensor de tensões desviatórias. Assumindo-se que  $p - p_e$  dependa unicamente dos gradientes locais de velocidade,

$$p - p_e = B_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = B_{ij} e_{ij} - 1/2 B_{ij} \epsilon_{ijk} h_k. \quad (3.80)$$

Para um fluido estatisticamente isotrópico,  $B_{ij}$  é também isotrópico, podendo ser representado na forma

$$B_{ij} = -K \delta_{ij}, \quad (3.81)$$

onde  $K$  é um coeficiente escalar (com dimensões de viscosidade), que depende apenas do estado local do fluido. Assim,

$$p - p_e = -K \Delta, \quad (3.82)$$

sendo independente de  $\epsilon_{ijk} h_k$ .

O coeficiente  $K$  é suficientemente pequeno, para uma grande variedade de fluidos, para que  $p$  seja admitido como sendo idêntico a  $p_e$ , de maneira que a pressão mecânica e a pressão termodinâmica são usualmente admitidas como idênticas sendo denotadas simplesmente por  $p$ .

Admitindo-se então a igualdade entre  $p, p_e$  (em 3.82), pode-se relacionar  $\phi, \rho$  e  $T$  através de uma equação de estado, uma vez que o “meio fluido” utilizado para se estender as definições dessas propriedades a sistemas em inequívrio, se encontram em equilíbrio termodinâmico.

Para um gás ideal a equação de estado é

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (3.83)$$

onde  $R$  é a constante do gás. Entretanto, para gases a baixas temperaturas e para líquidos, a equação (3.83) não é satisfeita. As relações entre  $\rho, p$  e  $T$  nesses casos não podem ser representadas através de expressões simples como (3.83).

Como a maioria dos líquidos escoam incompressivelmente na maioria dos escoamentos de aplicação prática, as variações da energia interna do fluido, nestes casos, são determinadas apenas pela dissipação viscosa e pela transmissão de calor no meio fluido. A consequência deste fato é que os campos de temperatura e densidade (constante, neste caso) não estão mais relacionados, e o escoamento do fluido passa a ser um problema puramente mecânico, acoplado ao campo de temperaturas unicamente pela relação entre  $\mu$  e  $T$ . Nos vários casos onde  $\mu$  é constante, a equação da energia não é mais uma equação independente no que diz respeito às variáveis mecânicas do escoamento ( $\vec{u}$  e  $p$ ), e não sendo portanto necessária para a solução dos campos de velocidade e pressão.

Uma vez que se conheça a equação de estado envolvendo  $\rho$ ,  $p$  e  $T$  pode-se determinar relações envolvendo  $e$ ,  $p$  e  $T$  ou  $e$ ,  $\rho$  e  $T$  nas formas:

$$e = e(\rho, T) \quad (3.84)$$

e

$$e = e(p, T). \quad (3.85)$$

Tais relações permitem a representação da equação da energia através de relações nas quais a variável principal é  $T$ , em lugar de  $e$ . Considerando (3.84),

$$\frac{De}{Dt} = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_{\rho} \frac{DT}{Dt} + \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_{T} \frac{D\rho}{Dt}, \quad (3.86)$$

onde

$$\left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_{\rho} = C_v \quad (3.87)$$

e

$$\left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_{T} = \left( \frac{\partial e}{\partial s} \right)_{\rho} \left( \frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_{T} + \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_{s}. \quad (3.88)$$

onde  $C_v$  é o calor específico a  $\rho$  constante, e  $S$  é a entropia específica (propriedade termodinâmica), pois (3.84) pode ser representada como

$$e = e(s(\rho, T), \rho). \quad (3.89)$$

A relação (3.88) pode ser representada na forma

$$\left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_{T} = -\frac{T}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{\rho} + \frac{p}{\rho^2}, \quad (3.90)$$

pois, das equações de estado,

$$\left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_{s} = \frac{p}{\rho^2}, \quad \left( \frac{\partial e}{\partial s} \right)_{\rho} = T, \quad (3.91)$$

e, das relações de Maxwell,

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho. \quad (3.92)$$

Assim, combinando-se (3.86), (3.88), (3.90) e a equação da continuidade, tem-se:

$$\frac{De}{Dt} = C_v \frac{DT}{Dt} + \left[ \frac{p}{\rho^2} - \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_\rho \right] (-\rho \Delta), \quad (3.93)$$

ou seja,

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho C_v \frac{DT}{Dt} + [T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho - p] \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (3.94)$$

A expressão (3.94) pode ser agora substituída na equação da energia, fornecendo uma expressão envolvendo apenas as variáveis  $\rho, p, T, \vec{u}$  e  $d$ :

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \Delta + d_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right), \quad (3.95)$$

ou

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \Delta + d \cdot (\nabla \otimes \vec{u}) + \nabla \cdot (k \nabla T), \quad (3.96)$$

onde  $C_v$  e  $(\partial p / \partial T)_\rho$  são funções do estado termodinâmico do fluido.

No caso de escoamentos incompressíveis,  $p$  e  $T$  são variáveis independentes, e  $\partial p / \partial T = 0$ .

Alternativamente à expressão (3.96), pode-se utilizar o calor específico a  $p$  constante,  $C_p = (\partial h / \partial T)_p$ , onde  $h$  = entalpia específica =  $e + p / \rho$ , na representação da Equação da Energia, obtendo-se:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + d \cdot (\nabla \otimes \vec{u}) + \nabla \cdot (k \nabla T), \quad (3.97)$$

onde

$$\beta = \frac{-1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (3.98)$$

é denominado *Coefficiente de Expansão Térmica*.

Para *fluidos newtonianos* vale a relação (3.66) e as expressões (3.95) e (3.96) tomam as formas:

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \Delta + 2\mu(e_{ij}e_{ij} - 1/3\Delta^2) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right), \quad (3.99)$$

e

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + 2\mu(e_{ij}e_{ij} - 1/3\Delta^2) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \quad (3.100)$$

A expressão (3.100) é talvez a forma mais utilizada na solução de problemas aplicados, mas diversas outras formas para a representação da equação da energia podem ser obtidas. Bird, Stewart e Lightfoot apresentam uma extensa relação de formas para esta equação.

### 3.9 Equações do Movimento e as Equações de Contorno

O conjunto das equações diferenciais estabelecidas neste capítulo constitui um conjunto de “leis” que governam os escoamentos dos fluidos. Apesar de se desconhecer precisamente em que condições o tensor desviatório pode ser descrito como uma função linear da taxa de deformação, ou em que condições a desigualdade entre as pressões mecânica e termodinâmica pode ser realmente desprezada, este conjunto de equações tem se mostrado razoavelmente confiável, e a descrição de diversos escoamentos através de suas soluções tem sido largamente verificada.

Torna-se conveniente, neste caso, se rerepresentar essas equações, para o caso de fluidos newtonianos:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) = 0, \quad (\text{continuidade}) \quad (3.101)$$

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\{2\mu(e_{ij} - 1/3\Delta\delta_{ij})\}, \quad (\text{momento}) \quad (3.102)$$

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + \rho\Phi + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right), \quad (\text{energia}) \quad (3.103)$$

$$f(p, \rho, T) = 0, \quad (\text{equação de estado}) \quad (3.104)$$

onde  $f(p, \rho, T)$  representa a equação de estado do fluido. Em (3.101-3.104),  $\Phi$  é a taxa de dissipação de energia mecânica através de mecanismos viscosos, definida em (3.79),  $C_p$  é o calor específico a pressão constante,  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica, definido em (3.98),  $k$  é o coeficiente de condutibilidade térmica, e  $\mu$  a viscosidade do fluido.  $C_p$ ,  $\beta$ ,  $k$  e  $\mu$  são funções do estado termodinâmico do fluido.

Assim, os escoamentos teóricos de fluidos podem ser representados genericamente através de uma região fluida,  $D$ , que é a região do espaço ocupada pelo fluido, cujo escoamento satisfaz as equações (3.101-3.104), definidas pelo contorno  $\Gamma$ , onde as soluções que descrevem o escoamento satisfazem relações denominadas condições de contorno (figura 3.3).

O conjunto de equações diferenciais (3.101-3.104) tem diversas famílias de funções como soluções, e a função que descreve um determinado escoamento é a solução do Problema de Valor de Contorno formado pelas equações (3.101-3.104) e as Condições de Contorno Características do Escoamento.

As condições de contorno de um problema envolvem, geralmente, a determinação da *geometria* do contorno, isto é, a *localização* do contorno no espaço (que pode ser uma função do tempo), e as condições que devem ser satisfeitas pelas variáveis do problema (campos de velocidade e pressão, por exemplo) sobre esses contornos.

A geometria dos contornos de regiões fluidas pode ser, na maioria dos casos, determinada matematicamente através de uma função  $f$ , onde  $f = 0$  (ou uma constante qualquer) é uma curva de nível  $f$  que coincide geometricamente com o contorno  $\Gamma$ . Expressa-se a definição do contorno  $\Gamma$  pela curva de nível  $f = 0$  através da representação:

$$\Gamma : f = 0; \quad f = f(\vec{x}, t). \quad (3.105)$$

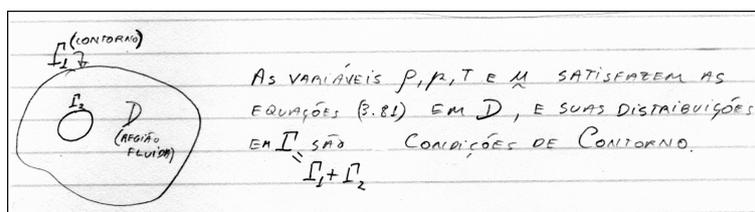


Figura 3.2: Representação Genérica do Problema de de Contorno Associado a um Escoamento Teórico. As variáveis  $\rho, p, T$  e  $\vec{u}$  satisfazem as equações (3.101-3.104) em  $D$ , e suas distribuições em  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  são Condições de Contorno.

A região  $D$  não é necessariamente simplesmente conexa, e parte do contorno  $\Gamma$  pode eventualmente se distanciar infinitamente de uma dada sub-região de  $D$ . No escoamento ao redor de uma esfera, por exemplo, a região fluida pode se estender indefinidamente para longe da esfera, onde o contorno infinitamente distante da mesma é representado pelo  $\lim \vec{r} \rightarrow \infty$  onde  $\vec{r}$  é o vetor posição no espaço. A Figura 3.3 ilustra essa representação. Aqui, a superfície da esfera,  $\Gamma_e$ , pode ser representada como:

$$\Gamma_e : f = 0, \quad f = |\vec{x}| - r_e = 0 \quad (3.106)$$

onde  $r_e$  é o raio da esfera.

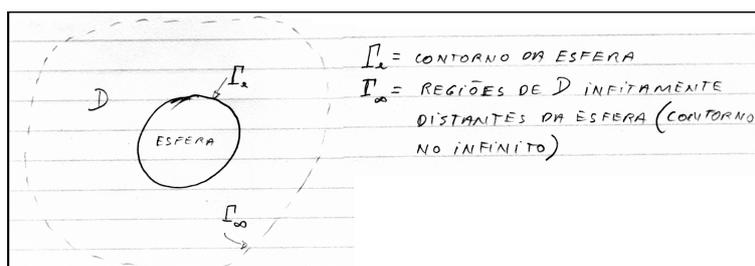


Figura 3.3: Representação de Contornos no Infinito.

Com relação à Figura 3.3, as distribuições de  $\vec{u}, \rho, p$  e  $T$  nos contornos  $\Gamma_e$  e  $\Gamma_\infty$  são as Condições de Contorno para o escoamento teórico ao redor de uma esfera. As funções que descrevem  $\vec{u}, \rho, p$  e  $T$  satisfazem as equações (3.101-3.104) em  $D$  e as condições de contorno em  $\Gamma = \Gamma_e + \Gamma_\infty$ .

Assim, na solução de escoamentos teóricos, o estabelecimento das Condições de Contorno a serem satisfeitas pelas funções que descrevem as variáveis dependentes em  $D$  é

de fundamental importância, uma vez que são elas que determinam qual solução, dentre as várias famílias de soluções possíveis para (3.101-3.104), descreve um determinado escoamento.

Não existem, na Matemática, teoremas demonstrando a existência e a unicidade de soluções para problemas de valor de contorno, a não ser para casos muito especiais (escoamentos simultaneamente incompressíveis, irrotacionais e não viscosos, por exemplo). Na verdade, existem várias classes de escoamentos teóricos onde as condições de contorno admitem uma multiplicidade de soluções (a convecção natural em uma região bidimensional retangular, por exemplo), onde a determinação da solução que representa o escoamento é atacada através da análise da *estabilidade* dessas múltiplas soluções.

Assim, a prescrição de condições de contorno para a solução de problemas de valor de contorno que pretendem descrever aproximadamente um escoamento real é uma questão delicada, uma vez que não existe uma teoria matemática desenvolvida a respeito do assunto (a não ser em casos particulares).

Entretanto, existem classes de condições de contorno de larga aplicação em problemas de engenharia, onde a argumentação física permite o estabelecimento dessas relações.

### 3.9.1 A Condição de Não-Escorregamento

Na interface entre dois fluidos, ou entre um fluido e uma superfície rígida, pode-se admitir a relação

$$\vec{u}|_w = \vec{v}|_w \quad \text{na interface} \quad (3.107)$$

onde  $\vec{u}|_w$  é a velocidade de um dos fluidos e  $\vec{v}|_w$  a velocidade do outro fluido ou da superfície material (com  $v$  restrito à superfície, neste caso).

Essa condição traduz o não-escorregamento entre as superfícies em contato, por ação da viscosidade.

### 3.9.2 A Condição de Impermeabilidade

Nos casos dos escoamentos teóricos onde os efeitos da viscosidade são desprezados, a condição de não-escorregamento não é mais satisfeita, e em lugar de (3.107) utiliza-se a condição de impermeabilidade, i.e.,

$$u_n = v_n \quad \text{na interface,} \quad (3.108)$$

onde  $u_n$  é a componente normal da velocidade com relação à superfície de contato, para um dos fluidos, e  $v_n$  a componente normal de  $\vec{v}$  do outro fluido, ou da superfície material de contato (com  $\vec{V}$  também restrito à superfície, neste caso).

A representação matemática da condição de impermeabilidade em um contorno  $\Gamma$ , definido pela curva de nível  $f(\vec{x}, t) = 0$ , tem uma forma particular, como é demonstrada a seguir:

$f(\vec{x}, t)$  é uma função definida em todo o domínio  $D$ , e sua taxa de variação com o tempo para um dado elemento material infinitesimal de fluido ( $f$  sendo avaliado em seu centro geométrico, por exemplo) é dada por  $Df/Dt$ ; a derivada material de  $f$ . Entretanto,

a condição de não-percolação implica na permanência desses elementos infinitesimais de fluido sobre a superfície  $\Gamma$ , definida por  $f = 0$ , pois esta condição requer que a componente normal da velocidade relativa entre o fluido e a superfície seja nula. Assim, o valor de  $f$  para pontos do fluido que se encontram sobre o contorno  $\Gamma$  ( $f = 0$ , por exemplo) é constante ao longo do tempo, de maneira que

$$\frac{Df}{Dt} = 0, \quad em \quad f = 0 \quad (\Gamma : f(\vec{x}, t) = 0) \quad (3.109)$$

Esta condição traduz matematicamente a condição (3.108).

A condição (3.109) tem a seguinte interpretação física: o gradiente de  $f$  em  $f = 0$  é um vetor *normal* ao contorno  $\Gamma$  de maneira que  $\nabla f/|\nabla f|$  é um unitário normal a  $\Gamma$ . Assim,  $-\vec{u}|_{f=0}(\nabla f/|\nabla f|)$  é a componente normal de  $\vec{u}$  sobre  $\Gamma$ . Por outro lado, a componente normal da velocidade com que o contorno  $\Gamma$  se move é  $(\partial f/\partial t)/|\nabla f|$ . Assim,  $u_n = v_n$  em  $\Gamma$  implica em  $(\partial f/\partial t)/|\nabla f| = -\vec{u}|_{f=0}(\nabla f/|\nabla f|)$ , ou ainda,  $Df/Dt = 0$

### 3.9.3 As Condições de Contorno para o Campo de Temperaturas

No caso da temperatura, geralmente se utiliza

$$T|_w = T_w, \quad (3.110)$$

onde  $T|_w$  é a temperatura do fluido junto à superfície  $w$ , e  $T_w$  é a temperatura da superfície, ou se prescreve um fluxo de calor através da superfície, i.e.,

$$k\nabla T|_w = k_w\nabla T_w = -\vec{q}_w, \quad (3.111)$$

onde  $k\nabla T|_w$  é o fluxo de calor que adentra a região fluida através da superfície  $w$ , e  $q_w$  é o fluxo de calor que deixa esta superfície ( $k_w$  é o coeficiente de condutibilidade térmica do material da superfície e  $\nabla T_w$  o gradiente da temperatura do material junto à superfície).

A determinação das condições de contorno a serem utilizadas no estabelecimento do Problema de Valor de Contorno que “pretende” fornecer uma solução teórica que descreva a essência de um escoamento real é um problema delicado, para o qual inexistem regras pré-estabelecidas, a não ser em casos particulares. De maneira geral, é a sensibilidade à “física do problema” que indica as condições de contorno a serem utilizadas.

Problemas de Valor de Contorno (PVC) “bem postos” tem solução única. PVCs “mal postos” podem admitir várias soluções, ou mesmo a inexistência de soluções.

### 3.9.4 Um Exemplo do Estabelecimento das Condições de Contorno

Seja uma região fluida bidimensional que se estende infinitamente ao longo das direções normais ao campo gravitacional  $g$ , limitada verticalmente pelas superfícies 1 e 2, conforme mostra a figura 3.4.

Admitindo-se que se possa manter a superfície superior à temperatura  $T_1$  e a inferior à temperatura  $T_2$ , uma solução que satisfaz às equações (3.101-3.104), onde  $\vec{f}$  existe

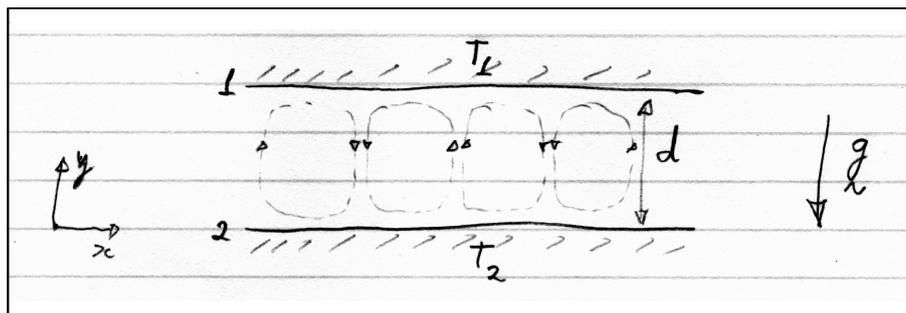


Figura 3.4: Nomenclatura e Definição para o Problema de Convecção Natural de Bénard.

unicamente devido ao campo  $g$ , e que satisfaz às condições  $T(y = d) = T_1$  e  $T(y = 0) = T_2$ , é a solução onde  $\vec{u} = 0$  e  $T = T_2 - (T_2 - T_1)y/d$ .

Entretanto, quando  $T_2 > T_1$  esta solução é instável (mas ainda existe) e o problema admite uma outra solução. O aumento de  $\rho$  com  $y$  causa a existência de forças de empuxo (ou flutuação) no fluido, causando um movimento circulatório alternado, cuja configuração é representada também na Figura 3.4 (as células de recirculação de Bénard). Assim, o PVC formado pelas equações (3.101-3.104), cujo domínio  $D$  é bidimensional, com  $0 \leq y \leq d$  e  $-\infty \leq x \leq \infty$ , e com as condições de contorno  $T(y = d) = T_1$  e  $T(y = 0) = T_2$  admite múltiplas soluções.

É interessante observar que apesar das duas soluções mencionadas acima satisfazerem o PVC em referência, o fluxo de calor através das superfícies 1 e 2 são *diferentes* para essas duas soluções. No primeiro caso  $\vec{q}$  é constante ao longo de  $\vec{x}$ , mas no caso da configuração de Bénard,  $\vec{q}$  é uma função periódica de  $\vec{x}$ . Assim, a primeira solução poderia ser igualmente obtida ao se modificar as condições de contorno para a temperatura, exigindo-se um fluxo de calor  $\vec{q}$  nas superfícies 1 e 2 em lugar de se prescrever  $T_1$  e  $T_2$ , mas a segunda solução mencionada não mais satisfaria o PVC modificado.

Evidentemente, os problemas físicos descritos pelas soluções dos PVCs envolvendo a prescrição de  $T$  ou  $\vec{q}$  no contorno são *diferentes* e, em princípio, envolvem campos para  $\vec{u}$  e  $T$  diferentes. Entretanto, o exemplo demonstra tanto a existência de soluções múltiplas mesmo para problemas aparentemente "bem postos", quanto a sensibilidade das soluções às condições de contorno.

Maiores discussões a respeito das condições de contorno apropriadas à cada classe de problemas serão discutidas mais adiante.

### 3.9.5 Um Exemplo do Estabelecimento de um Problema de Valor de Contorno

Considere o escoamento de um fluido ao redor de um corpo cilíndrico, como mostra a Figura 3.5.

Considerando ainda que, neste escoamento, a distribuição de velocidade é virtualmente uniforme longe do cilindro, e que a região fluida é praticamente ilimitada,  $\vec{u}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{U}$  quando  $\vec{x} \rightarrow \infty$ , onde  $\vec{U}$  é o vetor velocidade do escoamento "longe" do cilindro e  $\vec{x}$  é o

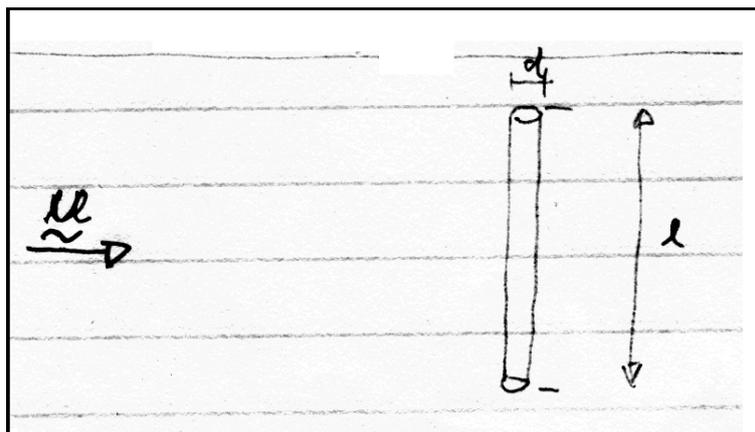


Figura 3.5: Escoamento de um fluido ao redor de um cilindro.

vetor posição.

Assim, a região fluida  $D$ , para o escoamento teórico que "pretende" descrever o escoamento real em questão, se estende desde as paredes do cilindro até o "infinito". Em toda a região  $D$ , as distribuições de  $\rho, p, \vec{u}$  e  $T$  satisfazem as equações diferenciais (3.101-3.104), caso o fluido em questão se comporte aproximadamente como um fluido newtoniano. Junto às paredes do cilindro, pode-se assumir a condição de não escorregamento, escrevendo-se

$$\vec{u}|_{\text{parede}} = 0. \quad (3.112)$$

ao se tomar o sistema de referência solidário ao corpo.

Suponha-se ainda que o fluido escoar incompressivelmente (um líquido, por exemplo), de maneira que a densidade é constante, e os campos de pressão e temperatura estão desacoplados. Nesse caso,  $\vec{u}$  é independente do campo de temperaturas, e a equação da energia está desacoplada das equações do momento e da continuidade. A determinação do escoamento passa a ser um problema puramente mecânico, cuja solução satisfaz o PVC

$$\text{div } \vec{u} = 0, \quad (3.113)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}, \quad (3.114)$$

onde  $f = 0$  por estarem sendo desprezados os efeitos das forças de corpo (supõe-se não existirem campos gravitacionais ou magnéticos), e

$$\vec{u}(\vec{x}, y) \longrightarrow \vec{U}, \quad (3.115)$$

e

$$\bar{p}(\vec{x}, t) \longrightarrow P, \quad (3.116)$$

quando  $|\vec{x}| \longrightarrow \infty$ ,  $\vec{u} = 0$ , nas paredes do cilindro onde  $P$  é a pressão quando  $|\vec{x}| \longrightarrow \infty$

A solução que satisfaz as equações (3.113) a (3.116) descreve em princípio o escoamento teórico em questão. Não se pode garantir, entretanto, que exista uma solução satisfazendo (3.113) a (3.116) simultaneamente, e nem mesmo se pode afirmar que, caso exista uma solução, que ela seja única. Por outro lado, ao se observar o escoamento real, verifica-se que *existe* o escoamento onde  $\vec{u} \rightarrow \vec{U}$  quando  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ , e, portanto, se as equações (3.101-3.104) e a condição de não-escorregamento exprimem “razoavelmente bem” o comportamento do fluido, uma solução para o PVC, mesmo que não seja única, deve existir.

A solução para o campo de temperaturas do escoamento depende dos campos de velocidades  $\vec{u}$ , e das temperaturas do fluido para  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ , e das paredes do cilindro. Uma vez obtida a distribuição de  $\vec{u}$  que satisfaz (3.113) a (3.116),  $T$  pode ser determinado através do PVC que tem a equação da energia como equação do domínio ( $\vec{u}$  conhecido) e as condições de contorno para a temperatura em  $\vec{x} \rightarrow \infty$  e nas paredes do cilindro.

Soluções para (3.113-3.114), sujeitas às condições de contorno (3.115-3.116) não podem ser descritas analiticamente devido à sua complexidade. No entanto, o escoamento ao redor de seções do cilindro da Figura 3.5 que se encontram “suficientemente” distantes das extremidades dos mesmos, i.e., no caso de cilindros longos ( $d/l \ll 1$ ), virtualmente bidimensional, e o PVC formado por (3.113) a (3.116) pode ser reduzido ao problema bidimensional (ver Figura 3.6)

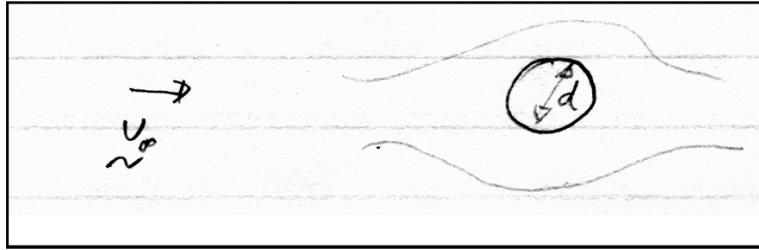


Figura 3.6: Escoamento bidimensional ao redor de um cilindro.

$$\nabla \vec{u} = 0, \quad (3.117)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}, \quad (3.118)$$

para

$$|\vec{x}| > \frac{d}{2} \quad (3.119)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{U}; \quad p(\vec{x}, t) \rightarrow P, \quad \text{para } |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad (3.120)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = 0, \quad \text{em } |\vec{x}| = \frac{d}{2} \quad (3.121)$$

onde  $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ .

As soluções para (3.117-3.121) dependem dos parâmetros  $\vec{U}$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  e  $d$ , uma vez que a equação do momento estabelece uma relação entre  $\vec{u}$  e  $\nabla p$ , e não entre  $\vec{u}$  e  $p$  diretamente. Assim, diferentes valores atribuídos a  $P$  não determinam diferentes campos  $\vec{u}$ , e os campos  $p$  diferem entre si através de uma constante apenas. Sendo  $\vec{u}$  e  $p$  as soluções do PVC (3.88) onde  $P = P_0$ , a solução de (3.117-3.121) onde  $P = P_1$  é  $\vec{u}$  e  $p + (P_1 - P_0)$ .

Assim,  $\vec{U}$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  e  $d$  são parâmetros característicos do escoamento, podendo ser utilizados para se adimensionalizar o PVC (3.117-3.121) através da Velocidade de Referência  $|\vec{U}|$ , da Pressão de Referência  $\rho|\vec{U}|^2$ , do Comprimento de Referência  $d$ , e do Tempo de Referência  $d/|\vec{U}|$ . O PVC (3.117-3.121) toma então a forma

$$\nabla \vec{u} = 0, \quad (3.122)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{\mu}{|\vec{U}|\rho d} \nabla^2 \vec{u}, \quad (3.123)$$

para

$$|\vec{x}| > \frac{1}{2}; \quad (3.124)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) \longrightarrow \vec{1}; \quad p(\vec{x}, t) \longrightarrow \frac{P}{\rho|\vec{U}|^2}, \quad \text{para } |\vec{x}| \longrightarrow \infty \quad (3.125)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = 0, \quad \text{em } |\vec{x}| = \frac{1}{2} \quad (3.126)$$

onde todas as variáveis são agora variáveis *adimensionais*.

Assim, o processo de adimensionalização mostra que, essencialmente as soluções para o problema (3.117-3.121) dependem somente do parâmetro

$$Re = \frac{\mu}{U\rho d}. \quad (3.127)$$

denominado número de Reynolds (em (3.127),  $U = |\vec{U}|$ ), pois os escoamentos com a mesma relação  $\mu/U\rho d$  são dinamicamente semelhantes.

Análises aprofundadas desse escoamento teórico demonstram a existência de múltiplas soluções para (3.122-3.126). Soluções independentes do tempo existem para qualquer valor de  $Re$ . Entretanto essas soluções são *instáveis* para  $Re > 40$ , aproximadamente, e somente soluções que dependem do tempo são estáveis para  $Re > 40$ .

Esses resultados são confirmados através de experimentos nos quais tem sido verificada a existência de escoamentos em *Regime Permanente* (independente do tempo) somente para  $Re < 40$ , aproximadamente. Dentro da faixa  $40 < Re < 2500$ , aproximadamente, o escoamento tem caráter *periódico*, onde a emissão de *vórtices* alternados tem sido observada (ver Fig. 3.7). Para  $Re > 2500$  o escoamento é geralmente turbulento na *esteira* do cilindro. Os mecanismos físicos que determinam esses diferentes padrões de escoamento serão abordados mais adiante.

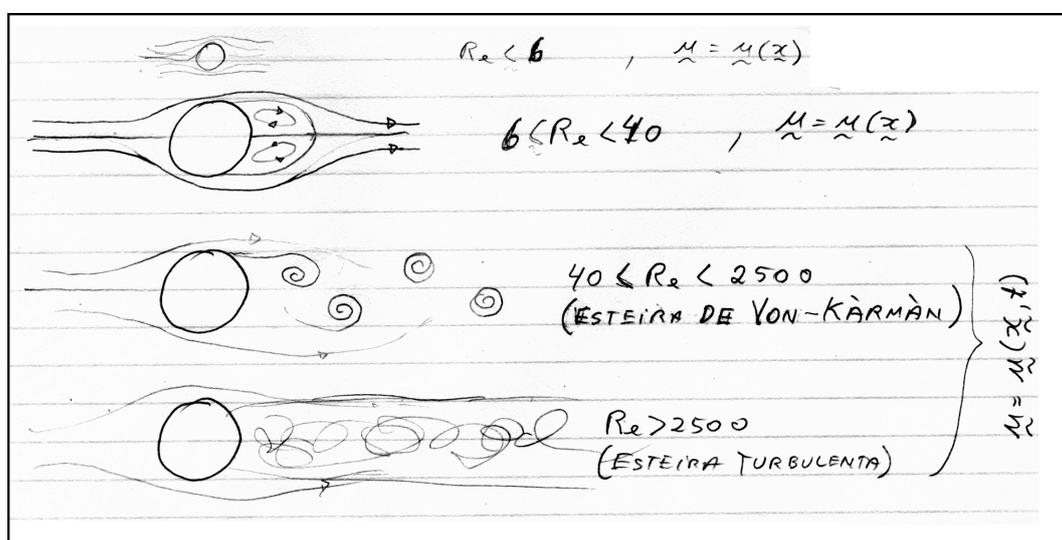


Figura 3.7: Padrões do Escoamento ao Redor de um cilindro circular longo para diferentes faixas de  $Re$ .

# Capítulo 4

## Os Parâmetros que Governam os Escoamentos de Fluidos

### 4.1 Introdução

Qualquer Problema de Valor de Contorno, cuja solução descreva um escoamento teórico, pode ser adimensionalizado, similarmente ao exemplo da seção (3.9.5).

Os escoamentos de fluidos envolvem sempre uma velocidade característica,  $\vec{U}$ , de magnitude  $U = |\vec{U}|$ , que determina a *magnitude global* do campo de velocidades. Pode-se sempre definir também uma Temperatura Característica,  $T_c$ , que determina a magnitude global do campo de temperaturas, no caso de escoamentos que envolvem a transferência de calor. Estas grandezas características são geralmente determinadas pelas condições de contorno do problema em questão.

Outras grandezas características independem muitas vezes das condições de contorno, por serem propriedades físicas dos fluido. Uma densidade característica  $\rho_o$ , uma viscosidade característica  $\mu_o$ , uma condutibilidade térmica  $K_0$ , são exemplos dessas grandezas, que podem ser definidas independentemente das condições de contorno. No PVC (3.88), por exemplo,  $\rho$  e  $\mu$  são constantes, sendo, os seus valores, característicos da solução correspondente.

Se um PVC tem solução única, cada conjunto de valores para as suas grandezas características determinam uma única solução que descreve um escoamento teórico. Entretanto, Grupos Adimensionais podem ser formados com essas grandezas características, de tal maneira que escoamentos para os quais tais Grupos Adimensionais tem o mesmo valor são *Dinamicamente Semelhantes*.

O escoamento abordado na seção (3.9.5), por exemplo, é caracterizado unicamente pelo Número de Reynolds, e escoamentos envolvendo diferentes valores para  $U$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  e  $d$  são dinamicamente semelhantes quando a razão  $U\rho d/\mu$  para os mesmos for idêntica.

As diferentes classes de problemas em Mecânica dos Fluidos tem diferentes grupos adimensionais características, e o número de grupos adimensionais envolvidos em cada caso está relacionado ao número de diferentes *mecanismos físicos* envolvidos nesses escoamentos.

## 4.2 O Significado Físico do Número de Reynolds

O escoamento em torno do cilindro, abordado em (3.9.5), envolve, essencialmente, dois mecanismos físicos independentes que governam todo o escoamento: o primeiro deles é a *inércia*, caracterizada pela quantidade de movimento possuída pelo fluido. O segundo mecanismo físico que influencia no movimento é a *viscosidade*. Assim, o que determina o movimento do fluido de uma maneira global é a razão entre a magnitude global das *Forças Inerciais*, proporcionais ao produto  $U\rho$ , e a magnitude global das *Forças Viscosas*, proporcionais a  $\mu/d$  ( $U\rho$  é o coeficiente dos termos de inércia e pressão em (3.89) quando  $\mu/d$  é o coeficiente do termo viscoso). Assim, o Número de Reynolds é o parâmetro determinante do escoamento da seção (3.9.5) porque ele é uma medida da *importância relativa* entre a magnitude global dos esforços de natureza viscosa que atuam no fluido. Como  $U$  e  $d$  são características das condições de contorno do problema, e  $\rho$  e  $\mu$  são características do fluido, define-se a *Viscosidade Cinemática*,  $\nu$ , como sendo

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (4.1)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade *Dinâmica*, e o Número de Reynolds pode ser então representado alternativamente como

$$Re = \frac{Ud}{\nu}. \quad (4.2)$$

## 4.3 Número de Froude

No caso de existir um campo gravitacional  $\vec{g}$  no escoamento teórico representado na Figura 3.6, forças gravitacionais serão também exercidas sobre o fluido, e o escoamento será determinado pela magnitude global relativa das forças *inerciais*, *viscosas*, e *gravitacionais*. Agora, são necessários *dois* grupos adimensionais para se determinar o escoamento; sendo um deles o Número de Reynolds, o outro pode representar tanto a razão entre as magnitudes globais das forças inerciais e das forças gravitacionais, como a razão entre as magnitudes globais das forças viscosas e as forças gravitacionais.

Adimensionalizando-se a equação do momento em (3.88), modificada de maneira a se introduzir os efeitos do campo gravitacional  $\vec{g}$ , i.e.,

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\vec{u}, \quad (4.3)$$

obtém-se a expressão contendo variáveis adimensionais

$$\rho U \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho d/U g \vec{k} - \rho U \nabla p + \mu/d \nabla^2 \vec{u}. \quad (4.4)$$

Assim, o outro grupo adimensional característico do problema é (quando um deles é  $Re$ )

$$\frac{gd}{U^2}, \text{ ou } Fr = \frac{U}{\sqrt{gd}} \quad (4.5)$$

onde  $Fr = \text{Número de Froude}$ .

Na verdade, os Números de Reynolds e de Froude não são definidos exclusivamente para escoamentos ao redor de cilindros, e, para escoamentos quaisquer onde  $L$  é um comprimento característico e  $U$  é uma velocidade característica,

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (4.6)$$

e

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}. \quad (4.7)$$

Por relacionar forças inerciais e forças gravitacionais, o Número de Froude é utilizado para se caracterizar escoamentos envolvendo uma superfície livre, onde os efeitos viscosos podem ser desprezados (as ondas em um oceano, por exemplo). Neste caso,  $Re \rightarrow \infty$ , e  $Fr$  é o único grupo adimensional característico do escoamento.

## 4.4 O Número de Mach

Considerando-se um escoamento compressível, no qual os efeitos da viscosidade possam ser desprezados, a equação do momento toma a forma

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p. \quad (4.8)$$

Sendo a viscosidade desprezível, a conversão irreversível de energia mecânica em energia interna é portanto desprezível, e se o fluido possui baixa condutibilidade térmica, o escoamento é aproximadamente isoentrópico de maneira que a equação de estado  $p = p(\rho, T)$  pode ser aproximada por

$$p = p(\rho)|_s \quad (4.9)$$

Assim,

$$\nabla p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \nabla \rho,$$

e (4.8) se reduz a

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -c^2 \nabla \rho, \quad (4.10)$$

onde  $c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$  é uma *Propriedade do Fluido*.

Adimensionalizando (4.10) com relação à velocidade de referência  $U$ , o comprimento de referência  $L$ , e a densidade de referência  $\rho_o$ , (4.10) toma a forma

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{c^2}{U^2} \nabla \rho, \quad (4.11)$$

onde as variáveis em (4.11) são adimensionais, e o grupo adimensional característico da equação é

$$\frac{c^2}{U^2}, \text{ ou } M = \frac{U}{c}, \quad (4.12)$$

onde  $M$  = Número de Mach

Deve-se observar que  $c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s}$  tem a dimensão de velocidade, e seu significado físico é bastante importante: Considere um tubo longo preenchido por um gás, conforme mostra a Figura 4.1, onde o gás, inicialmente em repouso, é perturbado pelo deslocamento infinitesimal impulsivo do pistão que bloqueia uma de suas extremidades.

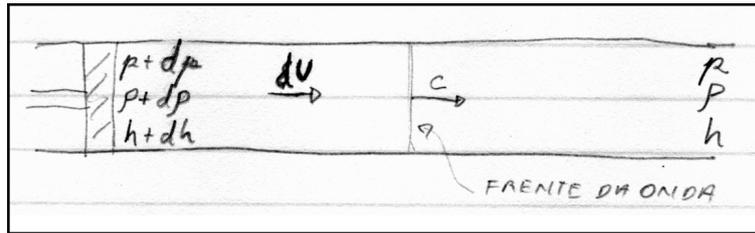


Figura 4.1: Frente de Onda em um Tubo Preenchido com um Fluido Compressível.

Esse movimento gera uma variação infinitesimal no estado termodinâmico do gás, que se propaga ao longo do tubo com velocidade  $c$ , quando o gás entre o pistão e a frente da onda de pressão se move com velocidade  $dU$ . Para o escoamento adiabático, a equação da energia toma a forma (regime permanente)

$$dh - cdU \simeq 0, \quad (4.13)$$

e, da equação da continuidade,

$$cd\rho - \rho dU \simeq 0. \quad (4.14)$$

Como  $Tds = dh - \frac{dp}{\rho}$ , e o processo é isoentrópico, então (4.13) pode ser representada na forma

$$\frac{dp}{\rho} - cdU = 0, \quad (4.15)$$

e, considerando (4.14), tem-se

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = c^2. \quad (4.16)$$

Assim, a propriedade do fluido,  $c^2$ , em (4.10) é o quadrado da velocidade com que uma onda infinitesimal de pressão se propaga no meio do fluido (a velocidade do som), e o Número de Mach representa a razão entre a *velocidade de referência* do escoamento e a *velocidade do som* no meio fluido.

Escoamentos onde  $M \simeq 1$  são chamados *Transônicos* e os escoamentos onde  $M > 1$  são chamados *Supersônicos*.

Os escoamentos transônicos constituem uma classe de problemas em mecânica dos fluidos onde as soluções das equações do movimento podem apresentar descontinuidades nos campos de velocidade, pressão, densidade e temperatura. Tais descontinuidades são denominadas *Ondas de Choque*, das quais a frente de onda da Figura 4.1 é um exemplo.

## 4.5 Outros Grupos Adimensionais

Os números de Reynolds, Froude e Mach são os parâmetros característicos dos escoamentos que envolvem inércia, viscosidade, compressibilidade e um campo gravitacional. Entretanto, outras classes de escoamentos envolvem diferentes mecanismos físicos, para os quais a importância relativa entre esses mecanismos físicos é quantificada através de outros grupos adimensionais.

Nos escoamentos em rotação, a importância relativa da *Força de Coriolis* é medida através dos números de *Rossby*,  $R$ , e de *Ekman*,  $E$ , definidos como

$$R = \frac{U}{\Omega L}, \quad (4.17)$$

$$E = \frac{\nu}{\Omega L^2}, \quad (4.18)$$

onde  $\Omega$  é a *velocidade angular global* do escoamento indicando as razões entre as forças inerciais e de Coriolis, e entre as forças viscosas e de Coriolis, respectivamente.

Nos escoamentos que envolvem a transmissão de calor a similaridade dinâmica depende não só dos campos de velocidade e pressão, como nos casos das seções (4.2), (4.3) e (4.4), mas também do campo de temperaturas. Assim, tanto a equação do momento quanto a equação da energia devem ser adimensionalizadas e analisadas para a determinação dos grupos adimensionais característicos do escoamento.

Escoamentos com convecção de calor forçada são escoamentos onde as *forças de flutuação* provocadas pelos gradientes de velocidade são desprezíveis quando comparadas com as forças inerciais e as forças viscosas, de modo que esses escoamentos são caracterizados por  $Re$  e pela razão

$$Pe = \frac{UL}{K}, \quad (4.19)$$

onde  $Pe = \text{Número de Péclet}$ , que representa a razão entre a taxa de *convecção* de calor e a taxa de *difusão* de calor ( $K = k/\rho C_p =$  difusividade térmica do fluido). Assim, nos escoamentos com convecção forçada (onde as variáveis mecânicas são virtualmente independentes do campo de temperaturas), a similaridade para o campo de velocidades é governada por  $Re$ , e a similaridade para o campo de temperaturas é governada por  $Re$  e  $Pe$ . Como  $Re = UL/\nu$ , a similaridade desses escoamentos pode ser alternativamente determinada pelos parâmetros  $Re$  e  $Pr$  (= Número de Prandtl), onde

$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\nu}{K}. \quad (4.20)$$

O número de Prandtl é uma *propriedade do fluido*, sendo independente do escoamento em si.

Nos escoamentos onde ocorre a Convecção Natural de Calor, as forças de flutuação provocadas pelos gradientes de densidade são dominantes, e são elas que induzem o movimento do fluido, determinando assim a magnitude das forças inerciais. Os grupos adimensionais que determinam a similaridade nestes casos são o *Número de Grashof*,  $Gr$ , onde

$$Gr = \frac{g\beta(\Delta t)L^3}{\nu^2}, \quad (4.21)$$

(onde  $g$  é a densidade do campo gravitacional,  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica do fluido e  $(\Delta t)$  é a diferença de temperaturas característica do escoamento), e o Número de Prandtl,  $Pr$ . Na determinação destes grupos adimensionais é utilizada a aproximação de *Boussinesq*, na qual os efeitos das variações de  $\rho$  são ignorados, com exceção da indução do aparecimento de forças de flutuação. As forças de flutuação, proporcionais a  $(\Delta\rho)g$ , são linearizadas com respeito à temperatura, sendo então assumido que  $(\Delta\rho) = \beta\rho_0(\Delta t)$  é uma aproximação razoável. Alternativamente, utiliza-se também o grupo adimensional

$$Ra = Gr Pr = \frac{g\beta(\Delta t)L^3}{\nu K} = \text{Número de Rayleigh}, \quad (4.22)$$

juntamente com  $Pr$  para se estabelecer a similaridade dinâmica destes escoamentos.

Um outro grupo adimensional de importância prática em problemas de convecção é o *Número de Nusselt*. Este grupo adimensional envolve o fluxo de calor através de superfícies em contato com fluidos. O número de Nusselt,  $Nu$  é definido como

$$Nu = \frac{q_s L}{k(\Delta t)}, \quad (4.23)$$

onde  $q_s$  é o fluxo de calor através da superfície e  $k$  é o coeficiente de condutibilidade térmico.  $Nu$  representa a razão entre o fluxo de calor existente através da superfície e o fluxo de calor que existiria caso a transferência de calor ocorresse apenas através de mecanismos de condução térmica.

Classes de escoamentos envolvendo ainda outros mecanismos físicos, tais como campos magnéticos ou tensões superficiais em interfaces entre dois fluidos imiscíveis, são caracterizadas por ainda outros grupos adimensionais. Estes casos, entretanto, não serão abordados neste curso.

# Capítulo 5

## As Simplificações das Equações do Movimento e as Diferentes Classes de Problemas em Mecânica dos Fluidos

A complexidade dos Problemas de Valor de Contorno obtidos através das equações do movimento e de condições de contorno apropriadas pode, para uma grande variedade de escoamentos, ser reduzida através de *Hipóteses Simplificadoras*.

Diferentes classes de escoamentos em Mecânica dos Fluidos são obtidas a partir das diferentes hipóteses simplificadoras admitidas. Algumas dessas classes de escoamento (as de maior interesse prático) são analisadas a seguir.

### 5.1 Escoamentos Incompressíveis

Os escoamentos onde a compressibilidade do fluido pode ser desprezada (*i.e.*,  $\Delta \simeq 0$ ) são chamados escoamentos incompressíveis. Como já foi comentado, esta classe de escoamentos envolve um desacoplamento entre os campos de velocidade (e pressão) e de temperaturas. Apesar de o campo de temperaturas depender do escoamento, *i.e.*, do campo de velocidades, este último independe do primeiro. A determinação dos campos de velocidade e pressão é aqui um problema puramente mecânico, independente dos fenômenos termodinâmicos e de transmissão de calor envolvidos. Um outro aspecto interessante desses escoamentos é que, uma vez que  $\rho$  é constante, perturbações no campo de pressão se "propagam a velocidade infinita", e, conseqüentemente, eles não apresentam o fenômeno das ondas de choque, ilustrado na seção (4.4). A equação do momento resultante é parabólica (a equação 4.8 é hiperbólica), não admitindo discontinuidades nas suas soluções. Um escoamento incompressível tem Número de Mach nulo ( $M_a = 0$ ), pois, para eles,  $C \rightarrow \infty$ .

Para fluidos newtonianos, as equações do movimento para os escoamentos incompressíveis são a equação da continuidade e a equação de Navier-Stokes, que, ao assumir-se  $\mu$  constante, tomam a forma

$$\nabla \vec{u} = 0,$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (5.1)$$

### 5.1.1 Soluções Exatas para Escoamentos Incompressíveis

Soluções exatas para PVC's envolvendo as equações (5.1) só são obtidas para alguns escoamentos onde a geometria do contorno é relativamente simples. São apresentadas aqui as determinações das soluções de duas classes de escoamentos simples, em regime permanente: o escoamento de Hagen-Poiseuille e o escoamento de Couette.

#### Escoamento de Hagen-Poiseuille

Considere o escoamento bidimensional incompressível de um fluido newtoniano em um canal como mostra a Figura 5.1.

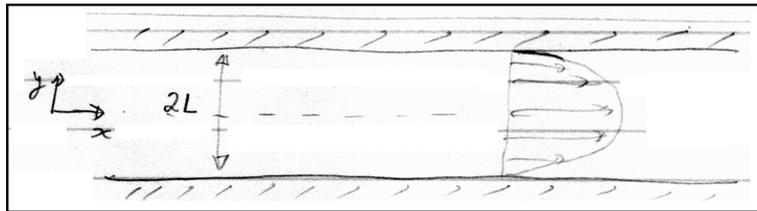


Figura 5.1: Escoamento em um Canal Longo.

Considerando ainda que o canal se “estende infinitamente” na direção  $x$ , e que o escoamento está em regime permanente, a equação do momento se reduz a

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{u}, \quad (5.2)$$

quando inexistem forças de corpo atuando sobre o fluido.

Aplicando-se a condição de não escorregamento em  $y = L$  e em  $y = -L$ , e uma vez que  $\vec{u} = \vec{u}(y)$ , pois o campo de velocidades independe de  $x$  neste caso, o PVC para o problema é:

$$\nabla p = \mu \frac{d^2 \vec{u}}{dy^2} \quad \text{para } -L \leq y \leq L, \quad (5.3)$$

$$\vec{u} = 0 \text{ em } y = L \text{ e em } y = -L.$$

O escoamento é determinado pelas pressões na entrada e na saída do canal, e, como  $\vec{u}$  é invariante com  $x$ , então  $v = 0$  ( $v$  é a componente de  $\vec{u}$  na direção  $y$ ) e, portanto,  $\partial p / \partial y = 0$ . Ainda, as pressões na entrada e na saída determinam o valor de  $dp/dx$  (que é constante em  $x$ ), que é também assim uma “condição de contorno” do problema.

Assim,

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{G}{\mu}, \quad \text{onde } G = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.4)$$

onde  $u$  é a componente de  $\vec{u}$  na direção  $x$ , cujas soluções gerais são do tipo

$$u = A + By + \frac{G}{2\mu}y^2, \quad (5.5)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias.

Aplicando-se agora as condições de contorno para  $u$ , tem-se

$$u = 0 \text{ em } y = L \Rightarrow A + BL + \frac{G}{2\mu}L^2 = 0, \quad (5.6)$$

e

$$u = 0 \text{ em } y = -L \Rightarrow A - BL + \frac{G}{2\mu}L^2 = 0.$$

O sistema de equações (5.6) tem como solução

$$A = \frac{-G}{2\mu}L^2, \quad B = 0.$$

Assim a solução para o *perfil de velocidades*  $u = u(y)$  é

$$u = \frac{G}{2\mu}(y^2 - L^2). \quad (5.7)$$

Portanto, a distribuição de velocidades através do canal “bidimensional” ilustrado na figura (5.1) apresenta uma distribuição *parabólica*, que é uma função de  $\mu$  e do gradiente de pressão,  $G$ , imposto ao escoamento.

A solução descrita por (5.7) é instável. Para  $Re = u_{\text{médio}}L/\nu > R_c$ , onde  $R_c$  é um  $Re$  crítico, e escoamentos onde  $Re > R_c$  apresentam um campo de velocidades turbulento.

O escoamento laminar através de um tubo circular é denominado Escoamento de Hagen-Poiseuille (estudado por G. Hagen em 1839 e J. L. M. Poiseuille em 1840), tendo vários aspectos similares ao escoamento ilustrado na Figura 5.1. O problema de valor de contorno para este escoamento é similar ao PVC (5.3);

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{u}, \quad \text{para } -L \leq z \leq L,$$

$$\vec{u} = 0 \text{ em } z = L \text{ e em } z = -L,$$

onde um sistema de coordenadas cilíndricas,  $(r, \theta, z)$  é utilizado.

Agora,  $\nabla p = dp/dz = G$ , e como  $u_r$  e  $u_\theta$  (componentes de  $\vec{u}$  nas direções  $\underline{r}$  e  $\underline{\theta}$ , respectivamente) são nulos, a equação do momento se reduz a

$$\frac{dp}{dz} = \mu \nabla^2 u_z,$$

onde  $u_z$  é a componente de  $\vec{u}$  na direção  $z$ .

Em coordenadas cilíndricas,

$$\nabla^2 u_z = \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}.$$

Como, por hipótese,  $u = u(r)$ , então

$$\frac{dp}{dz} = \mu \left( \frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_z}{dr} \right) = \frac{u}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_z}{dr} \right),$$

e, integrando em  $r$ ,

$$G \frac{r^2}{2} + C = \mu r \frac{du_z}{dr}, \text{ onde } C = \text{constante.}$$

A solução geral da equação acima é

$$u_z = A + \frac{C}{\mu} \ln r + \frac{G}{4\mu} r^2.$$

Como  $u_z$  é contínuo e finito em  $r = 0$ , então  $C = 0$ . Como  $u_z = 0$  em  $z = -L$  e em  $z = L$ , então

$$u_z = \frac{G}{4\mu} (r^2 - L^2). \quad (5.8)$$

e o perfil de velocidades é igualmente parabólico neste caso.

Experimentos realizados por Osborn Reynolds em 1883 demonstraram que escoamentos em tubos são laminares para  $Re < 2000$ , aproximadamente ( $Re = \mu_{\text{médio}} L / \nu$ ). A transição para a turbulência ocorre na faixa  $2000 < Re < 10.000$ , dependendo da intensidade das perturbações impostas ao escoamento.

O escoamento de Hagen-Poiseuille tem aplicações imediatas na solução de problemas de engenharia que envolvem o escoamento laminar em tubulações. Uma boa aproximação para a perda de carga nestes escoamentos é obtida através da solução (5.8).

### O Escoamento de Couette

Considere o escoamento bidimensional e incompressível gerado pelo movimento de uma das superfícies sólidas de um canal, como mostra a Figura 5.2:

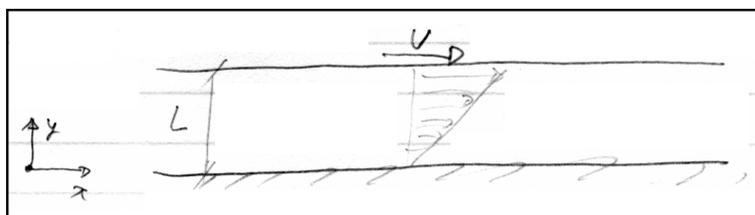


Figura 5.2: O Escoamento de Couette Plano.

Considerando ainda que o fluido é newtoniano, e que o canal se estende infinitamente na direção  $x$ , o PVC para o problema pode ser descrito como:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0, \text{ em } 0 \leq y \leq L, \quad (5.9)$$

$$u = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } u = L \text{ em } y = L.$$

Aqui, não existe um gradiente de pressão imposto ao problema, e, portanto  $\nabla p = 0$ . Como a região fluida se estende infinitamente na direção  $x$ ,  $\vec{u} = (u(y), 0)$ .

A solução geral da equação de domínio em (5.9) é:

$$u = C_1 y + C_2, \quad (5.10)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias. Aplicando as condições de contorno em  $y = L$  e  $y = 0$ , tem-se

$$u = \frac{U}{L} y. \quad (5.11)$$

A distribuição de velocidades é *linear* neste caso, e o escoamento em questão é denominado *escoamento de Couette*.

A solução deste escoamento tem uma extensão imediata: o Escoamento de Couette em rotação.

Considere dois cilindros anulares concêntricos, infinitamente longos, cujo espaço anular entre eles é preenchido por um fluido newtoniano incompressível. Quando as velocidades angulares dos cilindros são  $\Omega_e$  e  $\Omega_i$ , respectivamente, (ver Fig. 5.3), e não existe gradiente de pressão imposto ao escoamento, o campo de velocidades é dado por:

$$u_\theta = \frac{\Omega_e Re^2 - \Omega_i R_i^2}{(Re^2 - R_i^2)} r + \frac{(\Omega_i - \Omega_e) R_i^2 Re^2}{(Re^2 - R_i^2) r}. \quad (5.12)$$

onde  $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ , e  $u_r = u_z = 0$ , ( $(r, \theta, z)$  = coordenadas cilíndricas), pois o PVC para o escoamento é dado por

$$\mu \nabla^2 \vec{u} = -\nabla p, \quad \text{em } R_i \leq r \leq Re \quad (5.13)$$

$$\vec{u} = (0, \Omega_i R_i, 0) \text{ em } r = R_i, \quad \text{e } \vec{u} = (0, \Omega_e R_e, 0) \text{ em } r = Re$$

Aqui, não existe gradiente de pressão ao longo de  $z$ , de maneira que  $\nabla p = (p(r), 0, 0)$ , e  $\partial p / \partial r$  simplesmente contrabalança a força centrífuga. Assim,  $\vec{u}$  e  $\nabla p$  são normais entre si e o PVC para  $u_\theta$  é

$$\mu \nabla^2 u_\theta = \mu \left( \frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) = 0, \quad (5.14)$$

$$u_\theta = \Omega_i R_i \text{ em } r = R_i; \quad u_\theta = \Omega_e R_e \text{ em } r = Re,$$

cujas soluções são (5.12).

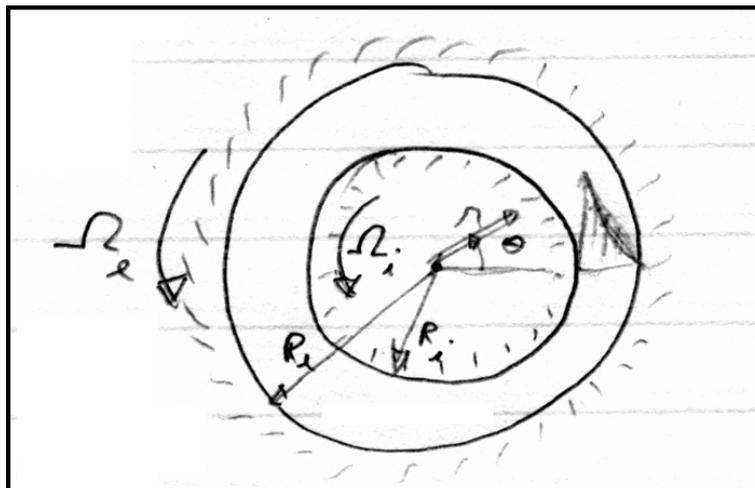


Figura 5.3: O escoamento de Couette em rotação.

O Escoamento de Couette em rotação encontra importantes aplicações práticas em problemas de lubrificação com escoamentos laminares. O torque necessário para manter os cilindros da fig.(5.3) girando com velocidades angulares constantes, por exemplo, pode ser obtido diretamente da expressão (5.12), pois as tensões locais de cisalhamento nas paredes dos cilindros são  $\tau_i = \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial r} |_{r=R_i}$  e  $\tau_e = \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial r} |_{r=R_e}$  respectivamente.

Vários outros escoamentos teóricos possuem soluções exatas para as equações de Navier-Stokes, mas estas não estão incluídas no escopo deste curso.

Quando soluções exatas para as equações de Navier-Stokes não podem ser encontradas, aproximações para as mesmas têm, muitas vezes, valor prático, quando o escoamento apresenta  $Re$  "muito grandes" ou "muito pequenos".

## 5.2 Escoamentos onde $Re \rightarrow 0$

Os escoamentos onde o Número de Reynolds é "muito pequeno" formam uma classe de escoamentos incompressíveis que apresentam fenômenos físicos particulares comuns. Escoamentos onde a viscosidade do fluido é desprezível ou onde a massa específica do fluido é desprezível ( $\rho \rightarrow 0$ , embora o escoamento seja ainda incompressível) são escoamentos onde  $Re \rightarrow 0$ . Nestes casos, a pressão de referência  $\rho U^2$  utilizada em (3.89) para se adimensionalizar a pressão, é uma escala inapropriada, pois ela pressupõe que os efeitos da inércia e da pressão tem a mesma ordem de grandeza. Nos escoamentos onde  $Re \rightarrow 0$ , os efeitos viscosos são dominantes e o campo das pressões deve ter a mesma ordem de magnitude que os esforços viscosos para equilibrá-los.

Uma pressão de referência mais apropriada quando  $Re \rightarrow 0$ , é

$$p = \frac{p^*}{\mu U/L}, \quad (5.15)$$

onde o asterisco denota a pressão *dimensional*.

Utilizando-se a escala (5.15) para se adimensionalizar a equação de Navier-Stokes, tem-se:

$$Re \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla^2 \vec{u}. \quad (5.16)$$

Na equação (5.16), o termo à esquerda é de ordem de magnitude menor que a dos outros termos quando  $Re \ll 1$ , de maneira que a diferença entre  $\nabla p$  e  $\nabla^2 \vec{u}$  é da ordem de magnitude do termo à esquerda. Este fato permite fazer-se uma aproximação para a equação (5.16), cujos escoamentos por ela descritos são denominados *Escoamentos de Stokes* (Stokes propôs pela primeira vez tal aproximação em 1851).

### Escoamentos de Stokes

A aproximação sugerida por Stokes consiste em se abandonar o termo de pequena magnitude em (5.16), simplificando esta equação para a forma

$$\nabla p = \nabla^2 \vec{u}. \quad (5.17)$$

Os escoamentos governados por esta equação, denominados *Escoamentos de Stokes*, possuem certas propriedades interessantes:

Tomando-se o divergente de (5.17), tem-se:

$$\nabla^2 p = 0. \quad (5.18)$$

Assim, o campo das pressões pode ser determinado independentemente do campo de velocidades.

O campo de velocidades pode ser determinado a partir da expressão:

$$\nabla \cdot \nabla^2 \vec{u} = \nabla^2 (\nabla \times \vec{u}) = \nabla^2 \vec{h} = 0, \quad (5.19)$$

que mostra serem os campos de velocidade e vorticidade determinados unicamente pela *difusão viscosa*. Entretanto, a aproximação de Stokes não é unicamente válida para casos onde  $\nabla \vec{u} \rightarrow 0$  em certas regiões do domínio, como nos casos de escoamentos ao redor de corpos onde a região fluida é infinitamente extensa. Quando  $\nabla \vec{u} \rightarrow 0$ , o termo  $\nabla^2 \vec{u}$  em (5.16) é nulo, e, mesmo quando  $Re \rightarrow 0$ , o campo das pressões é equilibrado por efeitos inerciais, isto é, o termo  $Re D\vec{u}/Dt$  não pode ser eliminado de (5.16). C.W. Oseen apontou pela primeira vez, em 1910, o caráter não-uniforme das soluções de Stokes, e propôs uma diferente aproximação para (5.16), quando  $Re \rightarrow 0$ : a *aproximação de Oseen*.

### A aproximação de Oseen

Oseen derivou, de uma maneira intuitiva, uma aproximação para a equação de Navier-Stokes, uniformemente válida em todo o domínio. Oseen argumentou que o termo  $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$  na equação do momento poderia ser substituído por  $(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{u}$ , onde  $\vec{U} = \vec{u}(|\vec{x}| \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$  gerando uma equação aproximada quando  $Re \rightarrow 0$ :

$$\rho U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (5.20)$$

que, em notação vetorial, tem a forma

$$\rho(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (5.21)$$

A aproximação de Oseen produz uma solução cujos efeitos de  $\rho(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{u}$  perto do corpo são desprezíveis (efetivamente, da mesma ordem de grandeza do erro cometido na aproximação de Stokes), mas, longe do corpo, os efeitos deste termo passam a ser dominantes e a solução continua válida em  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ .

Só muitos anos mais tarde é que a aproximação de Oseen pôde ser deduzida matematicamente através da Teoria das Expansões Assintóticas Combinadas, introduzida por Kaplun (1957) e Proudman & Pearson (1957). Essa teoria permite também a dedução matemática das aproximações das equações do movimento para a Camada Limite, propostas por L. Prandtl em 1904, e obtidas através de deduções intuitivas. A Camada Limite é um assunto que será abordado mais adiante neste texto.

Os escoamentos de Stokes são quasi-permanentes, uma vez que o termo  $D\vec{u}/Dt$  em (5.16) é multiplicado por  $Re \rightarrow 0$ . Estes escoamentos são também denominados “Creeeping Flows”.

O escoamento axisimétrico de Stokes ao redor de uma esfera possui solução exata tanto para a aproximação de Stokes, cuja solução é

$$\frac{\Psi}{r_0^2 U} = -\frac{1}{2} \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \text{sen}^2 \theta \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{r_0}{r} \right)^3 - \frac{3}{2} \left( \frac{r_0}{r} \right) \right], \quad (5.22)$$

onde  $(r, \theta)$  são coordenadas cilíndricas sobre o plano que contém a direção do escoamento principal (o escoamento é axisimétrico),  $r_0$  é o raio da esfera,  $U$  é o módulo da velocidade para  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ , e  $\Psi$  é um escalar (Função de Corrente Axisimétrica) tal que

$$u_r = \frac{1}{r^2 \text{sen} \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r},$$

quanto para a aproximação de Oseen, cuja solução é

$$\frac{\Psi}{r_0^2 U} = -\frac{1}{4} \left[ 2 \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 + \frac{r_0}{r} \right] \text{sen}^2 \theta - \frac{3}{2 Re} (1 + \cos \theta) \left[ 1 - \exp -\frac{Re}{2} \frac{r}{r_0} (1 - \cos \theta) \right]. \quad (5.23)$$

Observe que a solução de Oseen é uma função de  $Re$ , e que, exceto quando  $r \rightarrow \infty$ , o termo exponencial pode ser expandido em uma Série de Taylor em torno de  $Re = 0$ , quando  $Re \rightarrow 0$ , resultando em

$$\frac{\Psi}{r_0^2 U} = \frac{1}{4} \left[ 2 \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 - 3 \left( \frac{r}{r_0} \right) + \left( \frac{r}{r_0} \right) + \left( \frac{r_0}{r} \right) \right] \text{sen} \theta + Re(\dots). \quad (5.24)$$

Assim, quando  $Re \rightarrow 0$  a solução de Oseen  $\rightarrow$  solução de Stokes, exceto quando  $r \rightarrow 0$ . Quando  $r \rightarrow \infty$  a aproximação de Stokes perde a validade, mas a aproximação de Oseen continua válida.

No caso de escoamentos bidimensionais, a solução geral de Stokes para o escoamento ao redor de um corpo cilíndrico não pode satisfazer as condições de contorno no infinito pois o termo logarítmico que aparece na solução diverge rapidamente. Esta impossibilidade

de se encontrar uma solução de Stokes para o problema plano é denominada *Paradoxo de Stokes*. A solução de Oseen, entretanto, existe também neste caso.

### 5.2.1 Escoamentos onde $Re \rightarrow \infty$

Os escoamentos incompressíveis onde  $Re \rightarrow \infty$  formam, talvez, a classe de escoamentos de maior interesse para os problemas de engenharia.

Em princípio,  $Re \rightarrow \infty$  significa que as forças de origem inercial são dominantes, e a viscosidade tem papel secundário na determinação desses escoamentos.

#### A Equação de Euler

Uma aproximação para a equação de Navier-Stokes quando  $Re \rightarrow \infty$  é a Equação de Euler, que exprime a conservação da quantidade de movimento para fluidos não-viscosos (quando inexitem forças de corpo):

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p. \quad (5.25)$$

Torna-se interessante observar que, aqui, o termo de derivada de maior ordem ( $\nabla^2 \vec{u}$ ) foi eliminado, de maneira que (5.25) exige um número de condições de contorno menor que (5.1-b). Uma vez que (5.25) descreve o comportamento de um fluido não-viscoso, a condição de não-escorregamento exigida quando (5.1-b) é utilizada é substituída pela condição de impermeabilidade. Esta condição exige apenas que as componentes normais da velocidade sejam contínuas através de interfaces sólido-fluido ou fluido-fluido, e descontinuidades na componente tangencial de  $\vec{u}$  através dessas interfaces são características das soluções desses PVCs.

Quando as únicas forças de corpo atuantes sobre o fluido são forças gravitacionais devidas a um campo uniforme  $\vec{g} = g\vec{k}$ , a equação correspondente a (5.25) é:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\rho g\vec{k} - \nabla p, \quad (5.26)$$

ou

$$(\vec{u} \nabla) \vec{u} + g\vec{k} + \frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t},$$

ou ainda:

$$\nabla(1/2\vec{u} \cdot \vec{u} + gz + p/\rho) = \vec{u} \times \vec{h} - \partial \vec{u} / \partial t, \quad (5.27)$$

onde  $z$  é a componente do vetor posição na direção  $\vec{k}$ .

Para escoamentos irrotacionais e em regime permanente  $\vec{z} = 0$  e  $\partial \vec{u} / \partial t = 0$ , de maneira que

$$\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + gz + \frac{p}{\rho} = H, \quad (5.28)$$

onde  $H$  é uma constante.

A expressão (5.28) é conhecida como a *Equação de Bernoulli*, onde os termos do membro esquerdo representam a energia cinética, a energia potencial gravitacional, e a pressão, por unidade de massa, respectivamente. A soma destas três parcelas é usualmente denominada “head”, que é uma grandeza conservada nesses escoamentos.

Escoamentos em regime permanente onde  $\vec{h} \neq 0$ , isto é, escoamentos rotacionais, não satisfazem (5.28) em toda a região fluida. Nestes casos, (5.28) só é válida sobre as superfícies formadas pelas *linhas de corrente* e pelas *linhas de vorticidade* (curvas ao longo das quais  $\vec{h}$  é tangente a elas) – as *superfícies de Lamb* – pois  $\vec{u} \times \vec{h}$  é normal à estas superfícies.

Assim, em escoamentos rotacionais (em regime permanente), o “head” é constante unicamente ao longo de superfícies de Lamb, e, em diferentes regiões do escoamento, o fluido tem diferentes “heads” (energia “total”), conservados, obviamente, ao longo das linhas de corrente.

Os escoamentos rotacionais onde  $\vec{u}$  e  $\vec{h}$  são colineares constituem uma exceção às considerações acima, uma vez que, nesses casos,  $\vec{u} \times \vec{h} = 0$ , e o escoamento satisfaz (5.28) em todo o domínio. Escoamentos onde  $\vec{u} \times \vec{h} = 0$  são denominados *Escoamentos de Beltrami* (E. Beltrami investigou esses escoamentos em 1889).

A aproximação da equação de Navier-Stokes pela equação de Euler conduz, entretanto, a soluções não-uniformemente válidas em todo o domínio. Perto de uma interface sólido-líquido, por exemplo, a velocidade local pode ser “pequena” o suficiente, de maneira que, localmente, os efeitos da viscosidade sejam importantes.

No escoamento bidimensional ao redor do cilindro da fig. 3.6, por exemplo, a magnitude do campo de velocidades é proporcional a  $|\vec{U}_o|$ , mas, junto à superfície do cilindro,  $\vec{u} = 0$ , e os efeitos viscosos são dominantes nessa região, independentemente de  $Re$ . A região do escoamento junto ao corpo é, portanto, uma região onde as soluções da equação de Euler não são válidas e somente soluções da equação completa de Navier-Stokes podem satisfazer a condição de não-escorregamento na parede do corpo. Assim, as soluções da equação de Euler são válidas em quase toda a região fluida, com exceção de uma região junto a superfície do corpo: a *Camada Limite*.

### A Camada Limite

A região de um escoamento que se encontra junto a uma superfície sólida apresenta, geralmente, elevados gradientes no campo de velocidades. Tais regiões são denominadas *Camadas Limites*.

Uma placa de espessura desprezível, por exemplo, quando colocada longitudinalmente a um escoamento uniforme, “perturba” este escoamento, pois a velocidade relativa do fluido junto à sua superfície é nula, enquanto que em regiões “não muito próximas” à placa  $|\vec{u}|$  é da ordem de grandeza de  $|\vec{U}_\infty|$  (ver Figura 5.4).

Assim, enquanto o campo de velocidades satisfaz aproximadamente a equação de Euler fora da camada limite, dentro dela isto não acontece.

L. Prandtl deduziu intuitivamente, em 1904, aproximações para a equação de Navier-Stokes para a região da Camada Limite. Mais tarde, a Teoria das Expansões Assintóticas Combinadas, comentadas na seção 5.1.2.2 formalizaram este procedimento e permitiram a dedução das correções de ordens superiores para as aproximações de Prandtl. O estudo desta teoria não está, entretanto, dentro do escopo deste curso.

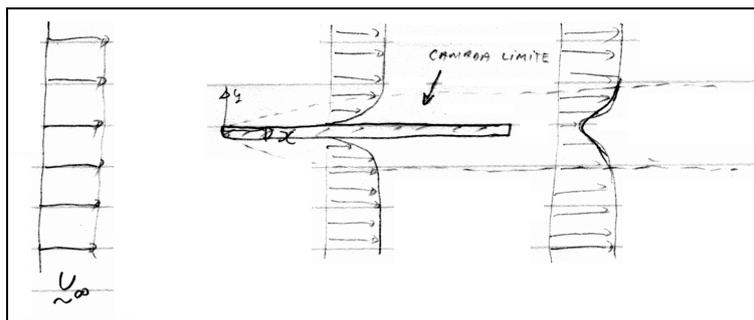


Figura 5.4: Placa plana em corrente uniforme.

Prandtl argumentou que, sendo  $y$  a coordenada na direção localmente normal à superfície sólida, e  $x$  a coordenada na direção local do escoamento, o termo  $\partial^2 u / \partial x^2$  na equação de Navier-Stokes para a componente  $u$  de  $\vec{u}$  ( $u =$  componente de  $\vec{U}$  na direção  $x$ ) é pequeno em comparação com  $\partial^2 u / \partial y^2$ , de maneira que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5.29)$$

onde  $v$  é a componente de  $\vec{u}$  na direção  $y$ , é uma aproximação “razoável” para Navier-Stokes. Como  $v$  é “pequeno”, a equação de Navier-Stokes na direção  $y$  é simplesmente aproximado por

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (5.30)$$

e, portanto,  $p = p(x)$  nesta aproximação.

Assim, na Camada Limite, (5.29) e (5.30) são aproximações para as equações de Navier-Stokes, sendo denominadas *Equações de Prandtl para a Camada Limite*.

O PVC para o escoamento na metade superior da região fluida da Fig. 5.4 fica sendo então

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ em } 0 \leq y < \delta, \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \text{ em } 0 \leq y < \delta,$$

$$u = v = 0 \text{ em } y = 0; u = U_\infty, v = 0 \text{ em } y \rightarrow \delta,$$

onde  $\delta$  é uma distância tal que  $u \rightarrow U_\infty(x, t)$  quando  $y \rightarrow \delta$ .

Para uma placa infinitamente longa, (5.31) tem solução exata (que não é válida “perto” dos bordos da placa), conhecida como *Solução de Blasius*, válida para camadas limites laminares.

Um estudo específico das camadas limites não se enquadra no escopo deste curso, mas as consequências que a existência dessas regiões têm sobre o comportamento global de um escoamento são importantes. O fenômeno da Separação, por exemplo, é associado

à camada limite junto a superfícies sólidas, mas seus efeitos não se restringem à região próxima à superfície do corpo. Considere o escoamento bidimensional ao redor de um cilindro, por exemplo. Junto às paredes do cilindro forma-se uma camada limite, que, por razões que serão abordadas mais tarde, separam-se do corpo, e se estendem ao longo da esteira do *cilindro*. Assim, a camada limite se forma junto ao corpo, mas pode se separar do mesmo, formando uma *Camada de Cisalhamento Livre* (a camada limite é uma camada onde o cisalhamento é intenso, quando comparado às outras regiões do escoamento) que influencia o escoamento mesmo a “grandes distâncias” do corpo.

Assim, escoamentos a altos  $Re$  são constituídos, geralmente, por extensas regiões onde o escoamento é praticamente irrotacional, e regiões limitadas formadas por Camadas de Cisalhamento Livre e/ou Camadas Limites. Nas Camadas de Cisalhamento Livre e nas Camadas Limites o escoamento é essencialmente rotacional. Nas regiões irrotacionais o escoamento tem propriedades interessantes.

### Escoamentos Potenciais

Em regiões de um escoamento incompressível onde o fluido escoar irrotacionalmente, o campo de velocidades satisfaz a relação

$$\nabla \times \vec{u} = 0. \quad (5.32)$$

Como  $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ , quando  $\phi$  é um campo escalar, campos de velocidades que satisfazem (5.32) podem ser descritos pelo campo escalar  $\phi$ , onde

$$\vec{u} = \nabla\phi, \quad (5.33)$$

e para que  $\vec{u}$  satisfaça a equação da continuidade,

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (5.34)$$

Assim, estes escoamentos são descritos por um *Potencial de Velocidade*,  $\Theta$ , e são chamados *Escoamentos Ideais* ou *Escoamentos Potenciais*.

Como

$$\nabla^2\vec{u} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i} = \nabla(\nabla^2\phi) = 0,$$

então os efeitos da viscosidade são nulos em escoamentos irrotacionais.

A equação do momento (5.27), neste caso, tem a forma

$$\nabla \left[ \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + gz + \frac{p}{\rho} \right] = \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t}, \quad (5.35)$$

que, uma vez integrada, fornece a equação da energia

$$\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + f(t), \quad (5.36)$$

onde  $f(t)$  é uma função somente de  $t$ .

Para escoamentos em regime permanente,

$$\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + gz + \frac{p}{\rho} = H, \quad (5.37)$$

onde  $H$  é uma constante (o “Head”).

Em regimes transientes, a função de integração  $f(t)$  pode ser absorvida por  $\phi$ , uma vez que  $f(t)$  é uma função unicamente de  $t$  ( $\phi$  em (5.36) pode ser redefinido como sendo um  $\phi^* = \phi + F(t)$ , tal que  $F'(t) = f(t)$ ). Assim, o campo escalar  $\phi$  que satisfaz

$$\nabla^2\phi = 0, \quad (5.38)$$

$$\frac{1}{2}(\nabla\phi^2) + g + z + \frac{p}{\rho} = \frac{\partial\phi}{\partial t},$$

representa o *potencial de velocidade* do escoamento de um fluido ideal (incompressível e irrotacional, e, conseqüentemente não viscoso).

Deve-se lembrar que, como o termo viscoso da equação de Navier-Stokes é identicamente nulo nesses casos, as condições de contorno a serem utilizadas em interfaces fluido-sólido ou fluido-fluido devem envolver somente as componentes normais da velocidade. Uma exceção à esta regra é a interface fluido irrotacional – fluido rotacional, onde a condição de não escorregamento pode ser exigida.

A redução das equações do movimento às equações de Laplace e Bernoulli, (5.38), é uma simplificação que reduz significativamente a complexidade do problema. De maneira geral, bastam a equação de Laplace e as condições de contorno para  $\phi$  para se determinar unicamente o campo de velocidades, e a equação de Bernoulli fornece o campo das pressões em função do primeiro. Vários métodos analíticos podem ser utilizados na determinação das soluções da equação de Laplace, e teorias sobre a existência e unicidade dessas soluções são assuntos clássicos no estudo das equações diferenciais. O estudo desses métodos, entretanto, não está no escopo deste curso.

Um exemplo de um Escoamento Potencial é o escoamento bidimensional incompressível e irrotacional ao redor de um cilindro. O PVC para este escoamento teórico, em regime permanente, é:

$$\nabla^2\phi = 0; \quad \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}U_\infty^2 + P_\infty, \quad \text{em } r > r_0, \quad (5.39)$$

$$\frac{Df}{Dt} = 0, \quad \text{em } f = 0, \quad \text{onde } f = r - r_0,$$

$$\nabla\phi \rightarrow \vec{U}_\infty \quad \text{quando } r \rightarrow \infty,$$

onde  $\vec{U}_\infty$  e  $P_\infty$  são a velocidade e a pressão longe do cilindro de raio  $r_0$ , e  $(r, \theta)$  são coordenadas cilíndricas.

Uma solução que satisfaz a Equação de Laplace e as condições de contorno para o campo de velocidades é:

$$\phi(r, \theta) = -U_\infty \left( r + \frac{r_0^2}{r} \right) \cos\theta, \quad (5.40)$$

cujo campo de pressões à ela associado é, através da Equação de Bernoulli,

$$p(r, \theta) = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^2 \cos^2 \theta - \left( 1 - \frac{r_\infty^2}{r^2} \right)^2 \sin^2 \theta \right] = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \left[ 2\frac{r_0^2}{r^2} \cos^2 \theta - \frac{r_\infty^2}{r^2} \right] \quad (5.41)$$

onde  $P_\infty = 0$ .

Esta solução é simétrica com relação à direção normal ao fluxo e, conseqüentemente, a força de arrasto obtida ao se integrar a pressão sobre a superfície do cilindro é nula. Tal resultado é denominado *Paradoxo de D'Alembert*.

Uma outra solução para (5.39) é:

$$\phi(r, \theta) = -U_\infty \left( r + \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma \theta}{2\pi}, \quad (5.42)$$

onde  $\Gamma$  é uma constante. O potencial  $\Gamma\theta/2\pi$  corresponde a um escoamento circulatorio ao redor do cilindro, como mostra a Fig. 5.5.

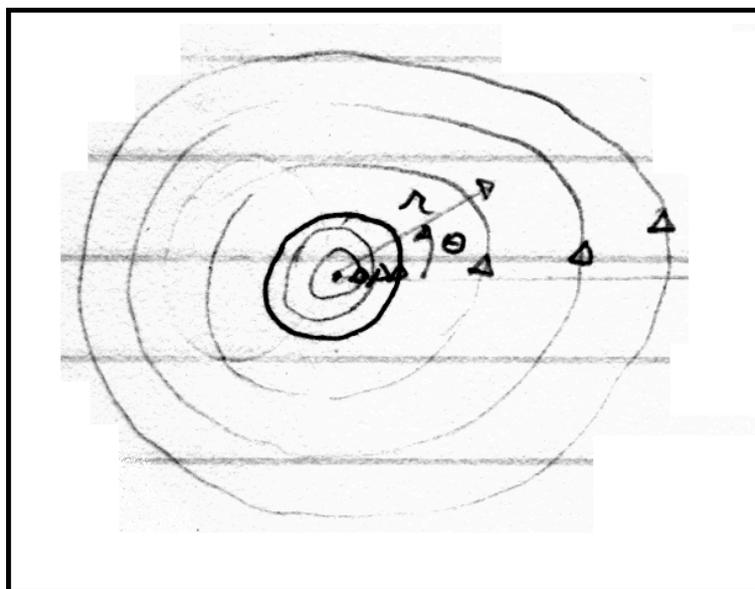


Figura 5.5: Linhas de Corrente para o Potencial  $\Gamma\theta/2\pi$ .

Como  $\nabla$  é um operador linear, o campo de velocidades representado em (5.42) é a soma vetorial do campo de velocidades de (5.40), e do campo de velocidades descrito por  $(\Gamma\theta/2\pi)$ . As linhas de corrente para ambos campos estão representadas na Fig. 5.6.

O campo das pressões do escoamento apresentado por (5.42) é assimétrico com relação à direção do escoamento, quando  $\Gamma \neq 0$ , e, apesar da força de arraste ser nula também nestes casos,  $\Gamma \neq 0$  provoca o aparecimento de uma força transversal à direção principal do escoamento, denominada Força de Sustentação.

O potencial (5.42) representa um escoamento onde a circulação em torno do cilindro é não-nula. A circulação em qualquer região fechada do plano  $(r, \theta)$  que não contenha o cilindro, é nula, pois

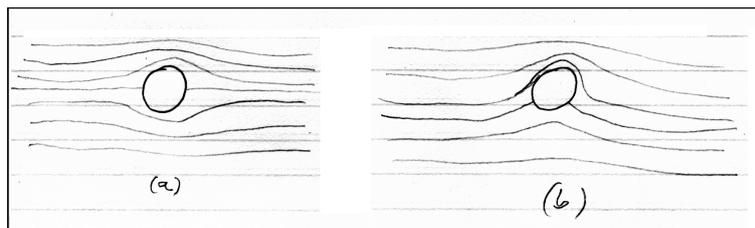


Figura 5.6: Linhas de Corrente para o Escoamento Potencial em Torno de um Cilindro: (a) com Circulação Nula, (b) com Circulação Negativa.

$$C(l) = \int_l \vec{u} \cdot \vec{t} \, dl \quad (5.43)$$

e, pelo Teorema de Stokes (veja (1.20)),

$$\int_l \vec{u} \cdot \vec{t} \, dl = \int_S (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{n} \, ds$$

onde  $S$  é a superfície definida pela curva fechada  $l$  (veja fig. (5.7)). Regiões contendo o cilindro, contém, na verdade, uma singularidade, pois os potenciais (5.40) e (5.42) são definidos mesmo para  $r \leq r_o$ , exceto quando  $r \rightarrow 0$ , pois  $\Theta \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow 0$ . Assim, o escoamento descrito pelo potencial (5.40), cujas linhas de corrente estão representadas na Fig. 5.7, representa o escoamento ao redor do cilindro, por possuir uma linha de corrente fechada que coincide geometricamente com a parede do cilindro. Quando a curva  $C$  em (5.43) define uma superfície  $S$  que contém a singularidade, a integral (5.43) não é mais nula, e a circulação da superfície  $S$  é  $\Gamma$ .

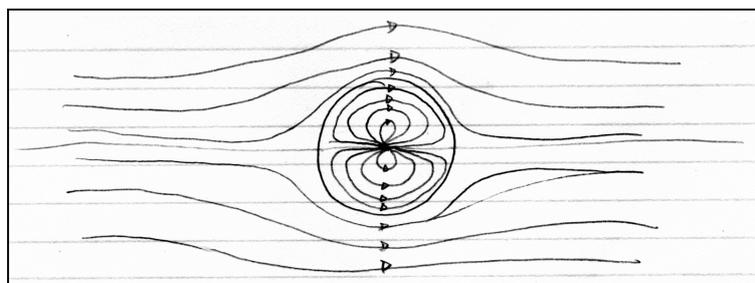


Figura 5.7: Linhas de Corrente para o Escoamento Representado pelo Potencial (5.40).

A constante  $\Gamma$  em (5.42) é a própria circulação  $C$ , definida em (5.43) e (5.42) representa o escoamento em torno de um cilindro “gigante”. A rotação do cilindro induz um movimento circulatório do fluido que o cerca, que pode ser descrito pelo potencial  $\Gamma\theta/2\pi$ , na região irrotacional do escoamento.

A força da sustentação em aerofólios tem origem circulatória, podendo ser estimada através da análise do escoamento potencial em torno dos mesmos.

Entretanto, por causa da separação da Camada Limite, escoamentos com os aspectos ilustrados na fig.(5.6) não são encontrados na natureza.

De maneira geral, as regiões dos escoamentos ao redor de corpos onde o fluido escoar rotacionalmente são limitadas a camadas de “pequena espessura”, onde a principal consequência da viscosidade não é a dissipação de energia mecânica, mas, simplesmente, a de induzir a formação dessas camadas.

Assim, Camadas de Cisalhamento Livre tem sido modeladas como regiões onde o escoamento é não-viscoso, mas rotacional. As análises das interações entre regiões rotacionais e regiões irrotacionais de um escoamento são geralmente realizadas com base em resultados clássicos obtidos no estudo da *Dinâmica da Vorticidade*.

### A Dinâmica da Vorticidade

Para se compreender as interações entre regiões rotacionais e regiões irrotacionais de um escoamento (usualmente, escoamentos onde  $Re \rightarrow \infty$ ) é necessário se estudar a dinâmica das regiões rotacionais do mesmo, i.e., a Dinâmica da Vorticidade.

A *Equação da Vorticidade* é obtida ao se tomar o rotacional da equação do momento. Para fluidos Newtonianos,

$$\frac{D\vec{h}}{Dt} = \vec{h} \cdot \nabla \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{h}. \quad (5.44)$$

Torna-se interessante observar que a Equação da Vorticidade não envolve o campo das pressões do escoamento.

O termo  $D\vec{h}/Dt$  em (5.44) representa a derivada material da vorticidade, i.e., a taxa de variação da vorticidade de elementos materiais infinitesimais de fluido, e o termo  $\nu \nabla^2 \vec{h}$  representa a difusão molecular local da vorticidade no escoamento. Ambos termos são similares aos termos  $D\vec{u}/Dt$  e  $\nu \nabla^2 \vec{u}$  da equação do movimento.

O termo  $\vec{h} \cdot \nabla \vec{u}$  por outro lado, não tem similar na equação do movimento, e tem interpretação física interessante, que confere um caráter distinto às variações da vorticidade. Considere uma Linha de Vorticidade cuja representação paramétrica seja  $\vec{r} = \vec{r}(S)$ , onde  $S$  é o comprimento de arco, medido a partir de um ponto arbitrário,  $\rho$ , da linha de vorticidade, conforme mostra a Fig. 5.8.

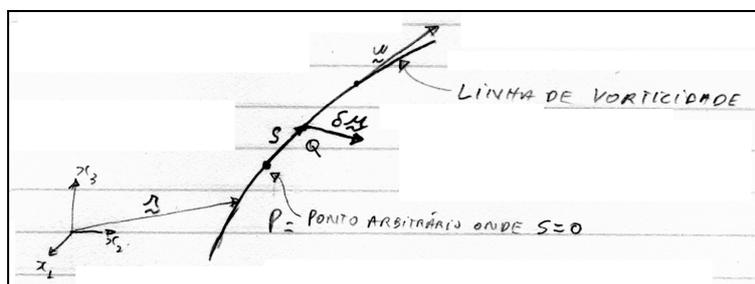


Figura 5.8: Segmento de uma Linha de Vorticidade.

Sendo  $\delta\vec{u}$  a velocidade relativa no ponto  $Q$ , que dista  $S$  de  $P$  ( $\delta\vec{u} = \vec{u}_q - \vec{u}_p$ ), o limite

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{u}}{S} = \lim_{|\delta \vec{r}| \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{u}}{|\delta \vec{r}|},$$

representa a taxa de variação local do vetor  $\delta \vec{r}$ , que liga  $P$  a  $Q$ , onde, agora,  $P$  e  $Q$  são pontos materiais sobre a linha material que coincide instantaneamente com a linha de vorticidade. A componente tangencial de  $\delta \vec{u}$  existe devido ao “esticamento” local da linha material, e a componente normal de  $\delta \vec{u}$  é devida à “rotação” local da linha material. Entretanto,

$$\lim_{|\delta \vec{r}| \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{u}}{|\delta \vec{r}|} = \vec{t} \cdot \delta \vec{u},$$

onde  $\vec{t}$  é um unitário tangente. Assim,

$$\vec{h} \cdot \nabla \vec{u} = |\vec{h}| \vec{t} \cdot \nabla \vec{u} = |\vec{h}| \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{u}}{S}.$$

Portanto, a contribuição de  $\vec{h} \cdot \nabla \vec{u}$  para  $D\vec{h}/Dt$  tem duas componentes: uma proveniente da rotação rígida do elemento linear (devida à componente de  $\delta \vec{u}$  normal a  $\vec{h}$ ). Assim, as variações de  $\vec{h}$  provenientes deste termo são similares às variações de  $\delta \vec{r}$  ( $\delta \vec{r}$  = vetor que liga  $P$  a  $Q$ , onde  $P$  e  $Q$  são pontos materiais sobre a linha de vorticidade), e a variação da vorticidade  $\vec{h}$  se relaciona à variação do elemento linear de fluido  $\delta \vec{r}$  através da relação

$$\frac{\vec{h}(t)}{\vec{h}(t_0)} = \frac{\delta \vec{r}(t)}{\delta \vec{r}(t_0)}. \quad (5.45)$$

O resultado (5.45) derivado primeiramente por Cauchy, é de fundamental importância para escoamentos onde  $Re \rightarrow \infty$ , pois, nesses casos, a difusão da vorticidade pode ser desprezada, e a Equação da Vorticidade se reduz a

$$\frac{D\vec{h}}{Dt} = \vec{h} \cdot \nabla \vec{u}. \quad (5.46)$$

Aqui, o escoamento é *rotacional*, mas *não-viscoso*. Nesses casos (5.45) é válida em todo o escoamento (exceto onde a difusão de  $h$  é importante), e, portanto, a derivada material da vorticidade no ponto  $x = x_0$  é determinada pela taxa de variação do elemento linear de fluido paralelo à linha de vorticidade em  $\vec{x}_0$ .

Quando o escoamento satisfaz (5.46), a vorticidade  $\vec{h}$  no ponto  $\vec{x}_0$ , no instante  $t_0$ , onde  $\vec{x}_0$  é a posição em  $t_0$ , do ponto material que ocupa a posição  $\vec{x}$  em  $t$ , através da relação

$$h_i(\vec{x}, t) = h_j(\vec{x}_0, t_0) \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}. \quad (5.47)$$

Uma consequência importante de (5.45) é que, em fluidos não-viscosos, as linhas de vorticidade são linhas materiais. Isto acontece porque, nesses escoamentos, não existe a difusão molecular da vorticidade, que se constitui no único mecanismo através do qual a vorticidade pode ser transferida através das superfícies de contorno do elemento material de fluido.

Considere, agora, um elemento material infinitesimal de fluido definido pelo vetor  $\delta\vec{r}$ , paralelo à vorticidade local, e pelas superfícies infinitesimais  $d\vec{s}$  ( $\delta\vec{r}$  e  $\delta\vec{s}$  são paralelos), conforme mostra a Fig. 5.9.

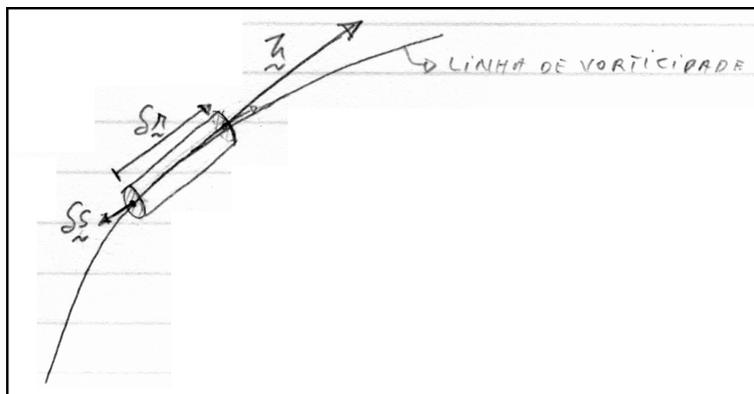


Figura 5.9: Elemento Material Orientado Segundo  $\vec{h}$ .

Como o volume  $\delta\vec{r} \cdot \delta\vec{s}$  do elemento é constante (fluido incompressível), então o produto  $\vec{h} \cdot \delta\vec{s}$  para o elemento é também constante, tendo-se em vista (5.45). A consequência disto é que a circulação,  $C(t)$ , em torno de qualquer curva fechada no escoamento, dada por

$$C(t) = \oint \vec{u} \cdot d\vec{c} = \int \int_S \vec{h} \cdot \delta\vec{s}, \quad (5.48)$$

onde  $S$  é uma superfície arbitrária que contém  $C$ ,  $\delta\vec{c}$  é o vetor elementar de comprimento tangente a  $C$ , e  $\delta\vec{s}$  o vetor elementar de área normal a  $S$ , é constante.

Assim,  $DC/Dt = 0$ , é a circulação conservada em elementos materiais quando a difusão molecular de  $\vec{h}$  é nula. Este é o Teorema da Circulação de Kelvin, deduzido por Lord Kelvin em 1869.

Da mesma forma que as linhas de corrente que passam por curvas fechadas arbitrárias no escoamento constituem tubos de corrente, linhas de vorticidade constituem linhas de vorticidade. Como as linhas de vorticidade contidas no tubo tem circulação  $\delta C$  constante, a circulação

$$C = \int \int_s dc$$

do tubo também é constante (quando a difusão molecular de  $\vec{h}$  é desprezível) e o tubo de vorticidade move-se com o fluido.

Considere um escoamento onde toda a vorticidade esteja concentrada em um tubo de vorticidade, um vórtice tubo neste caso, e  $C$  é “esticado” pelo escoamento, de maneira que a área de sua seção transversal seja reduzida a um infinitésimo; a vorticidade, supostamente constante sobre a superfície de área infinitesimal, cresce assintoticamente, pois a circulação do tubo permanece constante. A configuração limite deste tubo, quando  $\sigma\vec{S} \rightarrow 0$  e  $\vec{h} \rightarrow 0$  tal que  $\vec{h} \cdot \delta\vec{s} = C$ , é chamada Linha de Vórtice, cuja intensidade  $\Gamma$ , é a circulação  $C$ .

É interessante observar que a intensidade  $\Gamma$  de um vórtice é uniforme ao longo do mesmo, e que, portanto, eles não podem se iniciar ou terminar no interior da região fluida. Vórtices sempre se iniciam e terminam no contorno da região fluida, ou formam percursos *fechados* dentro da mesma.

Torna-se interessante observar também que, como a circulação em torno de qualquer curva fechada da região fluida de um escoamento não-viscoso é constante, regiões irrotacionais dos mesmos *permanecem irrotacionais*.

As propriedades da vorticidade representadas pelas equações (5.46) e (5.47) são de fundamental importância na simulação numérica de escoamentos a altos  $Re$ , onde as regiões onde existe cisalhamento são modeladas por escoamentos *rotacionais* de fluidos *não-viscosos*. A circulação é conservada nesses casos, e a “geração” de vorticidade só existe junto a contornos da região fluida. O fluxo de vorticidade através de uma parede sólida (a “geração” de vorticidade) se relaciona ao campo de pressões da relação

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \nu \frac{\partial h}{\partial n}, \quad (5.49)$$

onde  $h = |\vec{h}|$ ,  $s$  é uma coordenada tangente à superfície e normal a  $\vec{h}$ , e  $n$  é a coordenada normal à superfície. A expressão (5.49) é obtida diretamente através das equações de Navier-Stokes.

Em simulações numéricas de escoamentos bidimensionais a altos  $Re$ , tem se modelado as regiões rotacionais do escoamento através de “nuvens” de vórtices pontuais, cujo movimento é determinado através de métodos Lagrangeanos, onde os vórtices são *pontos materiais do fluido*.

Regiões rotacionais desses escoamentos, quando restritas unicamente a camadas de pouca espessura, podem ainda ser modeladas como uma Lâmina de Vórtices,  $\gamma$ , é definida como

$$\vec{\gamma} = \lim_{\delta n \rightarrow 0} \delta \vec{h} \delta n \delta s,$$

onde  $\vec{h}$  é o vetor vorticidade,  $\delta n$  é a espessura da lâmina e  $\delta s$  um comprimento infinitesimal unitário na direção normal a  $\vec{h}$  sobre a lâmina. Quando o limite  $\delta n \rightarrow 0$  é tomado,  $\delta \vec{h} \rightarrow \infty$ , de modo que  $\delta \vec{h} \delta n$  converge.

Uma propriedade interessante das lâminas de vórtices é que  $\vec{\gamma} = \vec{u}_a - \vec{u}_b$ , onde  $\vec{u}_a$  e  $\vec{u}_b$  são os vetores velocidade em cada lado da lâmina, junto à ela.

## 5.2.2 As Simplificações para os Escoamentos Bidimensionais

Os escoamentos bidimensionais são uma classe de escoamentos que permitem uma série de simplificações específicas nos PVCs que os definem.

A primeira dessas simplificações diz respeito ao campo de vorticidade: nos escoamentos planos, o vetor velocidade tem apenas duas componentes não nulas,  $\vec{u}_1$  na direção  $\vec{i}$  na direção  $\vec{i}$  e  $\vec{u}_2$  na direção  $\vec{j}$ , por exemplo, de modo que o vetor vorticidade

$$\vec{h} = \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \vec{k},$$

tem componente não nula unicamente na direção  $\vec{k}$ , uma vez que  $\vec{u}$  independe de  $x_3$ , e  $u_3 = 0$ . Portanto o vetor vorticidade é sempre ortogonal ao plano do escoamento, podendo ser então caracterizado unicamente pelo seu módulo  $h = |\vec{h}|$ .

### A Função de Corrente

Uma outra simplificação diz respeito à representação do campo de velocidades do escoamento: as linhas de corrente de um escoamento plano são linhas que satisfazem determinadas regras topológicas (por exemplo, essas linhas nunca se cruzam), de maneira que existe um campo escalar  $\Psi = \Psi(x_1, x_2)$  que satisfaz  $\Psi = \text{constante}$ , ao longo de uma linha de corrente, sendo  $\Psi$  uma função “bem comportada”. A função  $\Psi(x_1, x_2)$  é denominada Função de Corrente.

Para que  $\Psi$  exista, é necessário que

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} dx_2, \quad (5.50)$$

e que  $d\Psi$  seja um diferencial exato, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} \right),$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2\partial x_1}.$$

No caso dos escoamentos incompressíveis, pode-se relacionar  $\Psi$  diretamente ao campo de velocidades através das expressões

$$u_1 = \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = -\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} \quad (5.51)$$

uma vez que a equação da continuidade para  $\vec{u}$  garante a existência de  $\Psi$  satisfazendo (5.51), uma vez que

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} \right) = 0.$$

Assim, escoamentos bidimensionais incompressíveis podem ser analisados através de dois campos escalares, a função de corrente,  $\Psi$ , e a vorticidade,  $h$ . Os PVCs relativos à esses escoamentos podem ser escritos em termos da Equação da Vorticidade e da Equação de Poisson para  $\Psi$ , em lugar de Navier-Stokes e continuidade envolvendo  $\vec{u}$ . As equações de domínio para PVCs em termos de  $\Psi$  e  $h$  são:

$$\frac{Dh}{Dt} = \nu \nabla^2 h, \quad \nabla^2 \Psi = -h. \quad (5.52)$$

Observe que o termo  $\vec{h} \cdot \nabla \vec{u}$  na equação (5.46) é nulo em escoamentos planos ( $\vec{u}$  e  $\vec{h}$  são ortogonais nesses casos), e que a Equação de Poisson para  $\Psi$  advém diretamente da definição de vorticidade. Observe ainda que a velocidade  $\vec{u}$ , presente em

$Dh/Dt$  ( $D\vec{h}/Dt = \partial\vec{h}/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla\vec{h}$ ), pode ter suas componentes  $u_1$  e  $u_2$  substituídas por  $\partial\Psi/\partial x_2$  e  $-\partial\Psi/\partial x_1$ , respectivamente.

As equações de domínio *escalares* para  $h$  e  $\Psi$  podem ser então desenvolvidas nas formas:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_2} = \nu \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \right), \quad (5.53)$$

e

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} = -h.$$

Muitas vezes é mais fácil se determinar condições de contorno para  $h$  e  $\Psi$ , de maneira que as simulações numéricas de escoamentos bidimensionais são usualmente realizadas em termos das *variáveis secundárias*  $h$  e  $\Psi$ , em lugar das *variáveis primárias*  $\vec{u}$  e  $p$ .

É interessante observar que  $\Psi$  definido como em (5.51) realmente constitui uma Função de Corrente, i.e.,  $\Psi = \text{constante}$  ao longo das Linhas de Corrente, pois, de (5.50) e (5.51),

$$d\Psi = -u_2 dx_1 + u_1 dx_2,$$

e, ao longo de curvas  $\Psi = \text{constante}$ ,  $d\Psi = 0$ ,

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{\Psi} = \text{constante}, \quad (5.54)$$

ou seja, o vetor velocidade é tangente às curvas  $\Psi = \text{constante}$ .

Outro ponto interessante é o significado físico da diferença entre os valores numéricos de  $\Psi$  para duas linhas de correntes quaisquer: considere o ponto  $A$  da linha de corrente onde  $\Psi = \Psi_A$  é dada por  $\Psi_B - \Psi_A = \int_A^B d\Psi = \int_A^B (u_1 dx_2 - u_2 dx_1)$ , onde  $\int_A^B$  representa a integral de linha A a B (note-se que a integral é independente do caminho, por ser  $\Psi$  uma função de  $x_1$  e  $x_2$ ) ou, ainda,

$$\Psi_B - \Psi_A = \int_A^B (n_{x_1} u_1 + n_{x_2} u_2) ds, \quad (5.55)$$

onde  $n_{x_1}$  e  $n_{x_2}$  são as componentes do unitário normal ao caminho de integração,  $\vec{n}$ , e  $ds$  um elemento de comprimento ao longo desse caminho. Mas

$$\int_A^B (n_{x_1} u_1 + n_{x_2} u_2) ds = \int_A^B \vec{n} \cdot \vec{u} ds = Q_{AB},$$

onde  $Q_{AB}$  é o Fluxo Volumétrico que atravessa o caminho de integração de  $A$  a  $B$ . Portanto, a diferença  $\Psi_B - \Psi_A$  representa o *Fluxo Volumétrico* do fluido que escoar entre as linhas de corrente onde  $\Psi = \Psi_B$  e  $\Psi = \Psi_A$ .

### Os Escoamentos Potenciais e o Potencial Complexo

Como já foi visto na seção 5.1.3.3, escoamentos incompressíveis e irrotacionais são denominados Escoamentos Potenciais, e são descritos por um campo escalar, o Potencial de Velocidade,  $\Phi$ , que satisfaz a equação de Laplace,

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad (5.56)$$

e se relaciona ao campo de velocidades através da expressão

$$\nabla\Phi = \vec{u}. \quad (5.57)$$

Quando um escoamento potencial é plano, existe também então uma Função de Corrente à ele associada, que também satisfaz a Equação de Laplace

$$\nabla^2\Psi = 0, \quad (5.58)$$

pois  $h = 0$  neste caso.

Escoamentos planos podem ser descritos através de funções complexas de  $Z$  (um complexo), ao se definir o Potencial Complexo  $F = F(z)$  onde

$$F(Z) = \Phi(x_1, x_2) + i \Psi(x_1, x_2), \quad (5.59)$$

onde  $z = x_1 + ix_2$ , em coordenadas retangulares. Segundo a definição de  $F(z)$ , o potencial de velocidade é a parte real de  $F(z)$ , a função de corrente é a parte imaginária de  $F(z)$ , e  $i = \sqrt{-1}$  (o imaginário unitário). A razão de se definir  $F(z)$  como em (5.59) é que *qualquer* função *analítica* de uma variável complexa tem partes real e imaginária harmônicas, i.e., que satisfazem a equação de Laplace. Além disso, a derivada de  $F$ , denominada Velocidade Complexa,  $W$ ,

$$W(z) \equiv \frac{dF(z)}{dz}, \quad (5.60)$$

satisfaz a relação

$$W(z) = u_1(z) - i u_2(z), \quad (5.61)$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são as componentes de  $\vec{u}$  nas direções  $x_1$  e  $x_2$  respectivamente.

Assim, escrevendo-se  $\vec{u}(x_1, x_2)$  como uma função complexa  $U(z)$ , o escoamento plano pode ser descrito através do Potencial Complexo  $F(z)$ , cuja derivada  $dF/dz$  é o conjugado complexo de

$$U(z) = u_1 + iu_2, \quad (5.62)$$

pois

$$\frac{dF}{dz} = W(z) = \bar{U}(z). \quad (5.63)$$

Tais propriedades dos escoamentos potenciais planos permitem uma análise dos mesmos através da Análise Complexa, que se constitui numa poderosa ferramenta analítica para a determinação das soluções que descrevem esses escoamentos. Um estudo específico sobre determinação dessas soluções, porém, não faz parte do escopo deste curso.

### 5.3 A Linearização das Equações do Movimento

A não-linearidade da equação de Navier-Stokes é a principal fonte de dificuldades na determinação das soluções que descrevem escoamentos envolvendo fluidos newtonianos. A não-linearidade desta equação está no termo convectivo  $\vec{u} \times \nabla \vec{u}$ .

A *linearização* da equação do momento é uma técnica que permite a determinação de soluções aproximadas para escoamentos em que o campo de velocidades pode ser escrito como a soma de um Escoamento Base,  $\vec{u}_b$ , e um Escoamento de Perturbação,  $\vec{u}_p$ , i.e.,  $\vec{u} = \vec{u}_b + \vec{u}_p$ , onde a *ordem de magnitude* do campo  $\vec{u}_p$  é “pequena” em comparação com a ordem de magnitude do campo  $\vec{u}_b$ . Usualmente, utiliza-se a simbologia  $O(f)$  para se referir à ordem de magnitude da função  $f$ . Utiliza-se também a simbologia  $g = O(f)$  para se indicar que a função  $g$  tem a mesma ordem de magnitude que a função  $f$ , e a simbologia  $h = o(f)$  para se indicar que a função  $h$  tem *ordem de magnitude inferior* a  $f$ , i.e., os valores assumidos por  $h$  são “pequenos” em comparação com os valores assumidos por  $f$ . Note-se ainda que  $g = O(f)$  não implica que  $g = f$ .

Assim, quando os campos  $\vec{u}_b$  e  $\vec{u}_p$  satisfazem

$$\vec{u}_p = o(\vec{u}_b), \quad (5.64)$$

o termo convectivo (não-linear)  $u_j \partial u_i / \partial x_j$  da equação de Navier-Stokes fica:

$$(u_{b_j} + u_{p_j}) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_{b_i} + u_{p_i}) = u_{b_j} \frac{\partial u_{b_i}}{\partial x_j} + u_{b_j} \frac{\partial u_{p_i}}{\partial x_j} + u_{p_j} \frac{\partial u_{b_i}}{\partial x_j} + u_{p_j} \frac{\partial u_{p_i}}{\partial x_j}, \quad (5.65)$$

onde, assumindo-se que a operação de derivação não altera a ordem de magnitude da função resultante,

$$u_{p_j} \frac{\partial u_{p_i}}{\partial x_j} = o\left(u_{p_i} \frac{\partial u_{b_i}}{\partial x_j}\right), \quad u_{p_j} \frac{\partial u_{b_i}}{\partial x_j} = O\left(u_{b_j} \frac{\partial u_{p_i}}{\partial x_j}\right), \quad u_{b_j} \frac{\partial u_{p_i}}{\partial x_j} = o\left(u_{b_j} \frac{\partial u_{b_i}}{\partial x_j}\right). \quad (5.66)$$

A substituição de (5.64) e (5.66) na equação do momento gera agora, uma equação envolvendo termos cujas ordens de magnitude são diferentes, e a equação deve ser satisfeita em cada ordem de magnitude separadamente.

Adimensionalizando-se a equação de Navier-Stokes através de uma velocidade característica  $U$ , onde

$$U = o(\vec{u}_b), \quad (5.67)$$

então

$$\vec{u}_b = 0(1) \quad , \quad \vec{u}_b \cdot \vec{u}_p = 0(\vec{u}_p), \quad (5.68)$$

de maneira que

$$\frac{\partial u_{b_i}}{\partial t} + u_{b_i} \frac{\partial x_{b_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_b}{\partial x_i} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_{b_i}}{\partial x_j \partial x_j} \right), \quad (5.69)$$

e

$$\frac{\partial u_{p_i}}{\partial t} + u_{b_j} \frac{\partial u_{p_i}}{\partial x_j} + u_{p_j} \frac{\partial u_{b_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_p}{\partial x_1} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_{p_i}}{\partial x_j \partial x_j} \right),$$

onde  $p_b$  e  $p_p$  são os campos de pressão associados a cada uma das equações acima.

Conhecendo-se  $\vec{u}_b$ , pode-se então estabelecer o problema de valor de contorno para  $\vec{u}_p$ , e uma aproximação para a solução do problema *não-linear* em  $\vec{u}$  pode ser encontrada através das soluções de dois problemas *lineares* em  $\vec{u}_b$  e  $\vec{u}_p$ , desde que  $\vec{u}_p = o(\vec{u}_b)$ .

Como um exemplo da linearização da equação de Navier-Stokes, considere o escoamento bidimensional, viscoso, em torno de um cilindro. Escrevendo-se

$$\vec{u} = \vec{U} + \vec{u}_p, \quad (5.70)$$

onde  $\vec{U}$  é a velocidade do escoamento “não-perturbado” pela presença do cilindro ( $\vec{U}$  constante), a equação de Navier-Stokes pode ser substituída em duas equações lineares como em (5.70), onde a solução da primeira delas é  $\vec{U}$ , e a segunda equação é

$$\frac{\partial u_{p_i}}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_{p_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_p}{\partial x_1} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_{p_i}}{\partial x_j \partial x_j} \right). \quad (5.71)$$

A solução de (5.72),  $\vec{u}_p$  (mais condições de contorno), quando somada a  $\vec{U}$ , fornece uma *aproximação* para a solução da equação não-linear.

Torna-se interessante observar que, admitindo-se regime permanente, (5.72) é a aproximação de Oseen, discutida na seção 5.1.2.2. Em princípio, a solução de (5.72) fornece uma aproximação para  $\vec{u} = \vec{U} + \vec{u}_p$  para qualquer número de Reynolds. Entretanto, quando  $Re \rightarrow \infty$ , a formação da camada limite invalida a hipótese de que a derivação não afeta a ordem de magnitude da função, e a aproximação (5.72) só é válida para  $Re$  baixos.

A técnica de se subdividir os PVCs que envolvem equações do movimento não-lineares em uma série problemas mais simples para cada uma das diferentes ordens de magnitude que advém de hipóteses como a (5.65) é chamada *Análise de Perturbação*, cujos desenvolvimentos se baseiam na *Teoria dos Métodos de Perturbação*. Esta teoria se subdivide em duas grandes áreas: os *Métodos de Perturbação Regular*, que envolvem problemas onde hipóteses como (5.65) são uniformemente válidas em todo o domínio, e os *Métodos de Perturbação Singular*, aplicáveis a problemas cujas aproximações como (5.72) não são uniformemente válidas ( a operação de derivação altera a ordem de magnitude das funções em determinadas regiões do domínio, nestes casos). O estudo desta teoria é assunto extenso e profundo, que não está incluído no escopo desse curso.

# Capítulo 6

## Referências

### 6.1 Bibliografia Básica

1. Batchelor, G.K.; 1967, An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press.

Texto avançado de mecânica dos fluidos, com muita autoridade na matéria. Escrito com clareza e cuidado meticuloso. Exercícios criativos mas difíceis. Adequado para graduados e pós-graduados.

2. Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N.; 1978, Fenômenos de Transporte, Editorial Reverté.

Livro historicamente importante por apresentar de modo unificado os tratamentos teóricos para a análise de problemas de transferência de quantidade de movimento, calor e massa. Com estrutura matricial, os interessados podem avançar na matéria com ênfase no ente transportado ou no tipo de transporte. Adequado para graduados.

3. Goldstein, S.; 1964, Modern Development in Fluid Dynamic, Dover.

Livro escrito sob iniciativa do “Aeronautical Research Committee (RAE)” e por sugestão de Sir H. Lamb. Texto direcionado para a descrição de escoamentos laminares e turbulentos, onde os efeitos da viscosidade se fazem importante. Particularmente, são abordados os escoamentos próximos a superfícies e em esteiras.

4. Hinze, J.O.; 1959, Turbulence, McGraw-Hill.

Texto clássico sobre todos os desenvolvimentos teóricos e resultados experimentais obtidos até sua data e publicação. Ainda um texto importantíssimo para estudantes de Mecânica dos Fluidos.

5. Lamb, H.; 1932, Hydrodynamics, Cambridge University Press.

Um tratado brilhante em mecânica dos fluidos. Até hoje extremamente útil em relação a tópicos que já se encontravam bem desenvolvidos para a época (exemplo: escoamento irrotacional). Indispensável fonte de consulta.

6. Landau, L.D., Lifshitz, E.M.; 1987, Fluid Mechanics, Pergamon Press.

A Mecânica dos Fluidos sob o ponto de vista de um físico teórico. Texto magistral sobre a física necessária a todos os ramos da Mecânica dos Fluidos. Exemplos resolvidos. Adequado para pós-graduados.

7. Lighthill, J.; 1986, An Informal Introduction to Fluid Mechanics, Oxford University Press.

Livro recomendado para a graduação, embora lide com tópicos complexos. Mostra grande aprofundamento em termos físicos, em particular em dinâmica da vorticidade.

8. Paterson, A.R.; 1983, A First Course in Fluid Dynamics, Cambridge University Press.

Livro texto que introduz a Mecânica dos Fluidos e sua modelagem de modo lúcido, através de exemplos e exercícios.

9. Prandtl, L.; 1952, Essentials of Fluid Dynamics, London, Blackie.

Brilhante resumo da Mecânica dos Fluidos, escrito por um dos sacerdotes no assunto. Ênfase em escoamentos de interesse prático.

10. Schlichting, H.; 1955, Boundary Layer Theory, MacGraw Hill.

Livro clássico e referência básica sobre o assunto. Excelente no que tange aos escoamentos laminares. Parte turbulenta incompleta. Imprescindível.

11. Temann, R.; 1984, Navier-Stokes Equations Theory and Numerical Analysis, North-Holland.

A Mecânica dos Fluidos sob o ponto de vista de um analista matemático. Resultados importantes sobre unicidade, existência e regularidade.

12. Tritton, D.J.; 1987, Physical Fluid Dynamics, Oxford University Press.

Introdução atrativa e interessante sobre a física de sistemas fluidos. Excelente livro para graduados e iniciantes no assunto. Muitos exercícios.

13. Van Dyke, M.; 1982, An Album of Fluid Motion, Parabolic Press.

Uma coleção fascinante de fotografias de experimentos em Mecânica dos Fluidos. Instrutivo e estimulante.

## 6.2 Bibliografia Específica

1. Courant, R., Friedrichs, K.O.; 1948, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience.

Livro clássico sobre a teoria do escoamento de um fluido compressível não-viscoso.

2. Drazin, P.G., Reid, W.H.; 1981, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press.

Mais abrangente livro no assunto disponível na literatura. Exercícios difíceis. Adequado para pós-graduados.

3. Gill, A.E.; 1982, *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press.

Atrativo texto sobre dinâmica dos fluidos para escoamentos geofísicos, isto é, sobre a teoria do escoamento de um fluido movido por forças de empuxo e em um referencial que gira. Processos ondulatórios na atmosfera e nos oceanos são enfatizadas.

4. Kaplun, S.; 1967, *Fluid Mechanics and Singular Perturbations*, Academic Press.

Trabalho extremamente influencial num assunto de grande importância para a Mecânica dos Fluidos, os métodos de perturbação singular. Conteúdo erudito e de difícil compreensão. Indicado para pesquisa.

5. Liepmann, H.W., Roshko, A.; 1957, *Elements of Gas Dynamics*, Wiley.

O melhor e mais popular livro no assunto. Excelente conteúdo.

6. Lighthill, J.; 1978, *Waves in Fluids*, Cambridge University Press.

Livro sobre a teoria linear de ondas em fluidos. Alguns argumentos se aprofundam na física do fenômeno e por isto são difíceis de serem seguidos. Muitos exercícios. Adequado para graduação e pesquisa.

7. Roberts, P.H.; 1967, *An Introduction to Magneto-Hydrodynamics*, Longmans.

Livro sobre magneto-hidrodinâmica, adequado para pós-graduação.

8. Rosenhead, L.; 1963, *Laminar Boundary Layers*, Oxford University Press.

Tratado memorável sobre o escoamento de fluidos viscosos. Excepcional livro sobre a dedução das equações de Navier-Stokes, suas soluções exatas, escoamento de Stokes e a teoria clássica de camada limite.

9. Tennekes, H., Lumley, J.L.; 1972, *A First Course in Turbulence*, M.I.T. Press

Excelente introdução a um tópico complexo da Mecânica dos Fluidos. Referência imprescindível

10. Townsend, A.A.; 1956, The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge University Press.

Mais importante livro existente sobre a descrição de escoamentos cisalhantes. Um clássico, escrito por um dos pesquisadores mais criativos em fundamentos da teoria estatística da turbulência. Adequado para referência e pesquisa.

### 6.3 Bibliografia Complementar

1. Abramowitz, M., Stegun, J.A.; 1964, Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards. Washington D.C.

Sumário completo das propriedades de funções especiais.

2. Bender, C.M., Orszag, S.A.; 1978, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, McGraw Hill.

Livro indispensável a qualquer pessoa que em algum estágio de sua vida venha a utilizar a matemática para desenvolver qualquer problema físico.

3. Courant, R., Hilbert, D.; 1953 e 1962, Methods of Mathematical Physics, Vol. 1 & 2, Interscience.

Tratado clássico da teoria de EDO's e EDP's.

4. Griffel, D.H.; 1981, Applied Functional Analysis, Elliot Horwood.

Introdução à análise funcional através de exercícios para graduados.