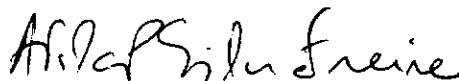


Um Estudo Analítico-Numérico da Estabilidade de Camadas Cisalhantes

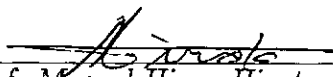
Jian Su

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

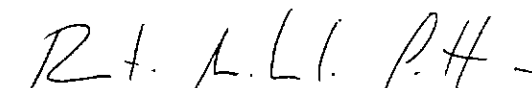
Aprovada por :



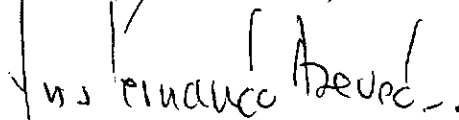
Prof. Átila Pantaleão Silva Freire, Ph.D
(Presidente)



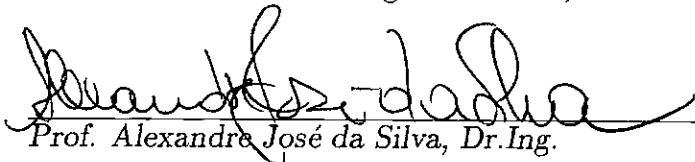
Prof. Miguel Hiroo Hirata, Ph.D



Prof. Renato Machado Cotta, Ph.D



Prof. Luís Fernando Alzugar Azevedo, Ph.D



Prof. Alexandre José da Silva, Dr. Ing.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

janeiro de 1993

Jian Su

Um Estudo Analítico-Numérico da Estabilidade

de Camadas Cisalhantes [Rio de Janeiro], 1993.

xi, 142 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Mecânica, 1999)

Tese—Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Fenômenos de Transporte I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

À minha família,
especialmente, à minha esposa Xiao Shu.

Agradecimentos

Ao Professor Átila Pantaleão Silva Freire pela eficiente orientação, estímulo e amizade.

Ao Professor Miguel Hiroo Hirata pela orientação e compreensão.

Ao Professor Renato Machado Cotta pela orientação e amizade.

Aos Professores Antônio Fernando Silva Telles, Antônio Macdowell de Figueiredo, Moysés Zindeluk e Nísio de Carvalho L. Brum pela ajuda de diversas formas.

Ao Professor Flávio de Marco pela ajuda e compreensão.

À Maria Regina Pereira de Araújo pela amizade e ajuda.

À Zenaide de Araújo, Professora da UFRN, pela amizade e ajuda.

Ao Luis Eduardo Gouvêa Alves, Professor do Instituto Militar de Engenharia, pela amizade e compreensão.

Aos colegas e ex-colegas do Laboratório de Mecânica dos Fluidos/Aerodinâmica, Daniel Cruz, Julio, Guilherme, Marcelo Nascimento, André Barros, Claudio Pelegrine, Marcelo Faraco, Gonzalo Zabala e Ricardo pela ajuda e amizade.

À Senhorita Denise Vieira pela ajuda.

Ao Cai Baohua, colega de graduação, mestrado e doutorado, pela ajuda e amizade.

Aos funcionários do Programa de Engenharia Mecânica, particularmente, Senhoras Maysa e Vera e Senhor Renato, pela ajuda durante o estudo.

Ao Marcelo Rufino, bolsista de iniciação científica, que fez os desenhos com talento.

À Senhorita Christiane Loureiro Sandim, bolsista de iniciação científica, pela ajuda indispensável na realização desta tese.

À CAPES, pela ajuda financeira.

Resumo apresentado à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ESTUDO NUMÉRICO-ANALÍTICO DA ESTABILIDADE DE CAMADAS CISALHANTES

Jian Su

Janeiro, 1993

Orientador: Átila Pantaleão Silva Freire
Programa: Engenharia Mecânica

O objetivo deste trabalho é estudar a estabilidade de camadas cisalhantes em escoamentos a alto número de Reynolds ao redor de corpos aerodinâmicos ou rombudos. Especificamente, estudaremos a resposta de uma camada limite laminar a perturbações pulsantes e a instabilidade espacial de uma camada de mistura.

Dependendo da física do problema, metodologias diferentes serão adotadas para o estudo dos diferentes tipos de camadas cisalhantes. Para a camada limite, modelaremos o escoamento pela formulação de variáveis primitivas de velocidade e pressão, resolvendo as equações governantes pelo método de diferenças finitas e pela técnica da transformada integral generalizada. Quanto à camada de mistura, utilizaremos a formulação de vorticidade simulando o escoamento pelo método de vórtices discretos.

Podemos apontar como principais contribuições deste trabalho a identificação das formulações mais apropriadas para a resolução do problema, incluindo suas soluções e a análise criteriosa de seus resultados. Mais explicitamente, podemos enumerar:

1. Duas formulações simplificadas são propostas para o estudo da estabilidade de camadas limite pela análise das equações de Navier-Stokes pela técnica de “análise de escalas”. Uma formulação modela o escoamento como uma camada delgada (*thin layer*), enquanto a outra modela o escoamento como uma camada limite não estacionária.
2. Uma solução das equações de camada limite não estacionária através de um esquema explícito de segunda ordem de precisão baseado no esquema de Warming e Beam(1975) é proposta, o qual enfatiza o caráter propagatório das equações na direção do escoamento.
3. Também um esquema misto da técnica da transformada integral generalizada e do método de diferenças finitas para a solução das equações de camada limite não estacionária é proposto. Por aplicar uma transformada integral na direção normal ao escoamento principal, o sistema original de equações diferenciais

parciais em duas coordenadas espaciais e no tempo é transformado em um conjunto de equações hiperbólicas na coordenada na direção do escoamento e no tempo, o qual é resolvido pelo esquema de Warming e Beam(1975).

4. A resposta de uma camada limite laminar a perturbações pulsantes aplicadas na superfície sólida é estudada pela solução das equações da camada limite não estacionária. Resultados numéricos mostram que a resposta varia ao longo da superfície e que as perturbações decaem com taxas variáveis em pontos distintos.
5. Uma formulação unificada dos métodos de vorticidade é proposta para o estudo de escoamentos incompressíveis ao redor de corpos bidimensionais. A formulação mostra que ao se desprezar o efeito da viscosidade, a velocidade em qualquer ponto no escoamento é determinada pela vorticidade do escoamento e por uma folha de vorticidade que represente a superfície sólida.
6. O método de vórtices discretos é utilizado no estudo da instabilidade espacial de uma camada de mistura. A camada de mistura é perturbada na sua origem por três tipos de perturbações: periódica, pulsante, e randômica. Resultados numéricos mostram o enrolamento de vórtices devido à instabilidade espacial.

NUMERICAL-ANALYTICAL STUDY OF SHEAR LAYER STABILITY

Jian Su

Janeiro, 1993

Thesis Supervisors: Átila Pantaleão Silva Freire
Department: Mechanical Engineering

The objective of this work is to study the stability of shear layers in high Reynolds number flows around smooth or bluff bodies. Specifically, we will study the response of a laminar boundary layer to pulse-type perturbations and the spatial instability of a mixing layer.

Depending on the physics of the problem, different methods will be used to study the different types of shear layers. For the boundary layer, the flow is modelled by the primitive variable formulation of velocity and pressure and the governing equations are solved by the finite difference method and the generalized integral transform technique (GITT). For the mixing layer, we use a vorticity formulation, the flow being simulated by a discrete vortex method.

Contributions have been achieved in this work by the identification of the significant formulations for the correct modelling of the problem, by the solution of the formulations and by the results obtained in the study of the stability of the shear layers. They can be summed as follows:

1. Two simplified formulations are proposed for the study of boundary layer stability by analyses of the Navier-Stokes equations through the "scale analysis" technique. One of the formulations models the flow as a thin layer, whereas the other models the flow as an unsteady boundary layer.
2. A second order accurate explicit finite difference scheme for the solution of the unsteady boundary layer equations based on the scheme of Warming and Beam(1975) is proposed, which emphasizes the wavelike character of the equations in the streamwise direction.
3. Also a mixed finite difference/generalized integral transform scheme for the solution of the unsteady boundary layer equations is proposed. By applying an integral transform in the direction normal to the flow, the original system of differential partial equations of two spatial variables is transformed into a set of hyperbolic equations in time and in the streamwise coordinate, which is solved by the Warming and Beam(1975) scheme.

4. The response of a laminar boundary layer to pulse-type perturbations applied at the solid wall is studied by the solution the unsteady boundary layer equations. Numerical results show that the response varies along the plate with variable rate at different streamwise stations.
5. A unified formulation of the vorticity method is proposed for the description of an incompressible flow around two-dimensional bodies. The formulation shows that the velocity in any point of the flow field is determined by vorticity of the flow and by a vortex sheet which represents the solid body.
6. The discrete vortex method is used to study the spatial instability of a mixing layer. The mixing layer is perturbed at its origin by three different type of disturbance: periodic, pulse-type and random. Numerical results shown the roll-up of vortices during to the spatial instability.

ÍNDICE

1. Introdução	1
2. Uma Revisão Bibliográfica Sobre Estabilidade Hidrodinâmica	7
2.1 Estabilidade Hidrodinâmica	7
2.2 A Estabilidade e A Receptividade de Camadas Limite	10
2.3 A Estabilidade de Camadas de Mistura	15
3. Análise Matemática e Formulações	18
3.1 As Equações de Navier-Stokes	18
3.2 Análise de Escalas da Camada Limite Estacionária	19
3.3 Análise das Equações de Perturbação	22
3.3 Formulações Simplificadas e Discussão	25
4. A Solução das Equações de Camada Limite Não Estacionária pelo Método de Diferenças Finitas	30
4.1 Introdução.....	30
4.2 As Equações de Camada Limite Não Estacionária	32
4.3 Zonas de Influência e Dependência	33
4.4 Esquemas de Diferenças de Finitas	36
5. A Solução das Equações de Camada Limite Não Estacionária pela Técnica da Transformada Integral Generalizada	40
5.1 Introdução.....	40
5.2 A Técnica da Transformada Integral Generalizada	41

5.3	A Transformada das Equações de Camada Limite Não Estacionária ..	42
5.4	A Solução das Equações Transformadas pelo Método de Diferenças Finitas	45
6.	Estudo Numérico dos Problemas de Stokes e de Rayleigh	47
6.1	O problema de Stokes e o problema de Rayleigh	47
6.2	Soluções pelos Métodos de Diferenças Finitas do Problema de Stokes ..	50
6.3	Soluções pela Técnica da Transformada Integral Generalizada do Problema de Stokes	56
6.4	Soluções pela Técnica da Transformada Integral Generalizada do Problema de Rayleigh	64
7.	A Resposta de Uma Camada Limite Laminar a Perturbações Pulsantes	73
7.1	A Definição do Problema Físico	73
7.2	As Equações Transformadas de Camada Limite Não Estacionária	74
7.3	Solução pelo Esquema Proposto de Diferenças Finitas	75
7.4	Solução pelo Esquema Misto Proposto de Diferenças Finitas e Transformada Integral Generalizada	76
7.5	Resultados Numéricos	80
8.	Formulação Unificada de Vorticidade e o Método de Vórtices Discretos	109
8.1	Formulação de Vorticidade-Função de Corrente	110
8.2	Formulação Unificada	111
8.3	O Método de Vórtices Discretos	114
9.	A Instabilidade Espacial de Uma Camada de Mistura pelo Método de Vórtices Discretos	119
9.1	A definição do Problema	119
9.2	Formulação e Solução Numérica	120

9.3 Resultados Numéricos	122
10. Conclusões e Sugestões	129
Bibilografía	132
Apendice A	
Avaliação de Coeficientes da Equação (7.24).....	139

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a estabilidade de camadas cisalhantes em escoamentos a alto número de Reynolds ao redor de corpos aerodinâmicos ou rombudos.

O estudo de escoamentos ao redor de corpos é um dos principais problemas da mecânica dos fluidos, possuindo importância teórica e aplicações práticas imediatas nas diversas áreas da engenharia. Escoamentos ao redor de asas, aviões ou outros tipos de corpos aerodinâmicos têm sido estudados há muito tempo na engenharia aeronáutica. Por outro lado, escoamentos ao redor de edifícios, cilindros de suporte para plataforma de petróleo e outros tipos de corpos rombudos, têm despertado muito interesse recentemente devido às necessidades da engenharia civil, engenharia de “off-shore”, etc.

Em escoamentos a alto número de Reynolds, os efeitos da viscosidade do fluido se limitam a regiões finas chamadas camadas cisalhantes. Fora destas camadas, o efeito da viscosidade pode ser desprezado e o escoamento pode ser tratado como não viscoso. Apesar de serem finas, as camadas cisalhantes desempenham papel importante no comportamento dos escoamentos.

Por serem finas, as camadas cisalhantes permitem, para sua análise, que se adote uma abordagem onde o campo do escoamento seja dividido em regiões viscosas e não viscosas e descrito através de formulações apropriadas. Comparada com as abordagens que resolvem diretamente as equações de Navier-Stokes em todo o campo do escoamento, a abordagem acima possui a vantagem de ser a mais eficiente computacionalmente. Em outras palavras, com esta abordagem, um dado escoamento pode ser resolvido com menos recursos computacionais; ou ainda, com um dado recurso computacional, escoamentos mais complexos podem ser calculados.

A dificuldade atual na descrição de escoamentos ao redor de corpos aerodinâmicos se encontra na dificuldade da descrição dos processos de transição e de separação de camadas limite que se desenvolvem ao longo de superfícies sólidas. Quanto aos corpos rombudos, a dificuldade se encontra na descrição da esteira, ou mais precisamente, na descrição das camadas cisalhantes livres que se originam da separação da camada limite da superfície sólida.

Com relação a corpos aerodinâmicos, a presente tese se concentra no estudo da estabilidade de camadas limite; especificamente, investigamos a resposta de uma

camada limite laminar a perturbações pulsantes. Com relação aos corpos rombudos, estudaremos a estabilidade de uma camada de mistura, a qual pode ser vista como um modelo simplificado de camadas cisalhantes livres que se originam da separação de camadas limite.

O problema da resposta de camadas limite a perturbações está intrinsicamente ligado ao problema da transição do escoamento laminar para turbulento em camadas limite sobre uma placa plana. O processo físico da transição é ilustrado pela Fig.1. A geometria considerada é extremamente simples, mas possui uma física tão rica quanto qualquer outro processo de transição.

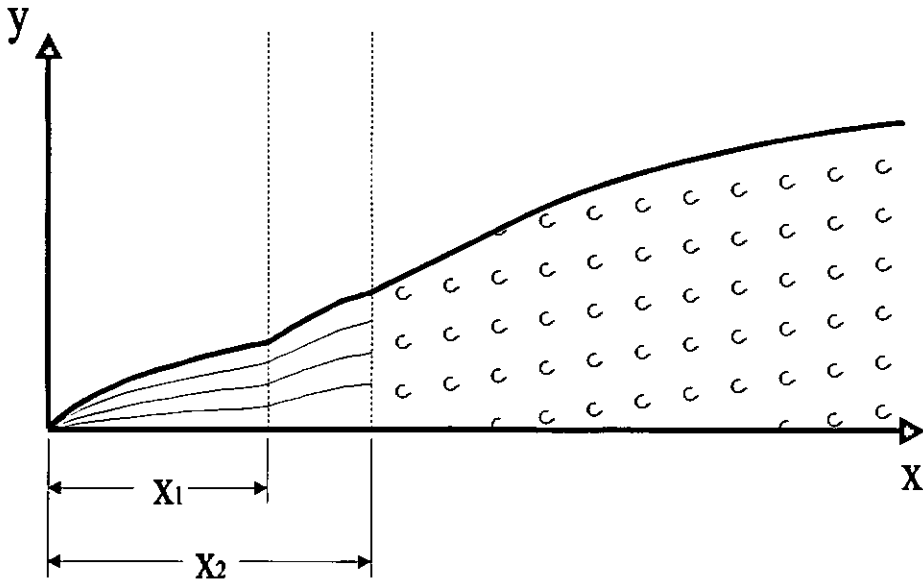


Fig.1.1 Desenvolvimento (incluindo transição) de uma camada limite ao longo de uma placa plana.

No início da placa, o escoamento é uniforme, possuindo velocidade constante e igual àquela da corrente principal. Logo a seguir, desenvolve-se uma região de escoamento regular dita região laminar. Nesta região, as partículas movimentam-se ao longo de linhas de corrente distintas, suaves e regulares, as variáveis físicas podendo ser analiticamente determinadas em qualquer ponto do espaço e em qualquer instante do tempo. Segue-se uma região onde a transição do regime laminar para o regime turbulento ocorre. Finalmente, à jusante, o escoamento atinge um estado completamente caótico, dito turbulento. Nesta região, o movimento das partículas do fluido é irregular e caracterizado por desordem temporal, havendo uma cascata de transferência de energia das maiores para as menores escalas do escoamento. Uma definição precisa das variáveis espaciais e temporais torna-se impraticável para o escoamento turbulento devido às flutuações espaciais e temporais de alta frequência. Espera-se que as flutuações cheguem a um estado estatístico quando uma média puder ser definida, a qual pode, fisicamente falando, ser medida experimentalmente.

A transição do escoamento laminar para o turbulento pode ser vista como uma

consequência da instabilidade da camada limite laminar. De fato, ao longo do tempo, diversas teorias foram desenvolvidas para entender a transição hidrodinâmica de camadas limite sob este ponto de vista. Por exemplo, podemos citar a teoria linear de estabilidade hidrodinâmica por componentes modais, a teoria não linear de Landau, o conceito de receptividade, a teoria de três pisos de Stewartson (*triple deck*) etc. Cada uma destas teorias tem contribuído de alguma maneira para enriquecer o nosso conhecimento sobre o processo da transição em camadas limite. Antes de começar o nosso estudo sobre estabilidade, torna-se necessário rever os conceitos importantes e as teorias previamente desenvolvidas. Por este motivo, faremos no próximo capítulo uma revisão bibliográfica explicando os principais conceitos e teorias de estabilidade desenvolvidas até hoje.

Como em qualquer estudo teórico em mecânica dos fluidos, o nosso trabalho consiste em modelar o processo físico, obter sua solução e a seguir proceder a uma análise crítica desta. Conforme a física do problema, diferentes metodologias serão adotadas para o estudo de cada tipo de camada cisalhante. Para a camada limite, modelaremos o escoamento pela formulação de variáveis primitivas de velocidade e pressão, resolvendo as equações governantes pelo método de diferenças finitas e pela técnica da transformada integral generalizada. Quanto à camada de mistura, utilizaremos a formulação de vorticidade, simulando o escoamento pelo método de vórtices discretos.

Considerando a dificuldade em se obter soluções numéricas das equações de Navier-Stokes, faremos primeiramente no Capítulo 3 uma análise destas equações a fim de buscar formulações simplificadas que descrevam bem os fenômenos da transição e sejam menos complexas computacionalmente. A obtenção destas formulações é feita por meio de hipóteses físicas e comparações entre as ordens de grandeza dos diversos termos, isto quer dizer, pelo método de aproximação de Prandtl. Este método, chamado método de análise de escalas, tem se estabelecido como uma das ferramentas poderosas no estudo teórico da mecânica dos fluidos. Diferentemente das abordagens anteriores, nossas formulações não estão sujeitas a limitação da amplitude das perturbações nem ao paralelismo do escoamento, pois não fazemos hipótese nenhuma sobre estes aspectos. Faremos hipóteses sobre as ordens de grandeza dos comprimentos característicos das perturbações, baseadas nos dados experimentais que indiquem o espectro dos comprimentos característicos de perturbações que influenciam o processo da transição. Como resultado desta análise, propomos duas formulações simplificadas com grau de aproximação diferentes para a investigação do processo de transição em escoamentos sobre uma placa plana, sendo uma a formulação de escoamento como camada delgada (*thin layer*) e outra a formulação de camada limite não estacionária.

Os métodos de diferenças finitas utilizados para resolver as equações de camada limite não estacionária são estudados no Capítulo 4. Depois de uma breve introdução ao sistema de camada limite não estacionária, discutimos genericamente a classificação de equações diferenciais parciais. Reconhecendo o caráter de propagação de onda das equações de camada limite não estacionária, propomos um procedi-

mento de diferenças finitas que descreve corretamente a física dos fenômenos, para resolver as equações numericamente. Pela abordagem de diferenças finitas, resolvemos as equações diferenciais parciais utilizando um esquema modificado baseado no esquema de Warming e Beam(1975), que enfatiza o caráter propagatório das equações na direção do escoamento. Um esquema parecido com o aqui proposto foi utilizado por Cotta, Özişik e McRae(1985) para o problema da convecção forçada transiente em escoamento laminar em canais. A análise de estabilidade numérica do esquema feita por Cotta, Özişik e McRae(1985) é utilizada como referência ao presente esquema.

Considerando-se as limitações de estabilidade numérica do método de diferenças finitas, propomos um esquema misto de diferenças finitas e transformada integral generalizada para a solução das equações de camada limite não estacionária no capítulo 5. A técnica da transformada integral generalizada é uma ferramenta computacional poderosa, desenvolvida nas últimas duas décadas para resolver problemas de convecção-difusão de mecânica dos fluidos e transferência de calor. As idéias básicas e aplicações importantes da técnica da transformada integral generalizada serão apresentadas neste capítulo. A transformada integral generalizada é aplicada na direção transversal ao escoamento, reduzindo o sistema original a um conjunto de equações diferenciais hiperbólicas, o qual será resolvido pelo esquema de Warming e Beam(1975).

A avaliação dos métodos numérico e numérico-analítico propostos nos Capítulos 4 e 5 é feita no Capítulo 6 através da comparação com soluções analíticas de dois problemas clássicos em mecânica dos fluidos. O problema de Stokes que descreve o escoamento oscilatório de um fluido infinito induzido pelo movimento de uma placa infinita é estudado comparando o esquema proposto com três esquemas tradicionais: explícito simples, implícito e de Crank-Nicholson. A extrapolação de Richardson é utilizada para obter soluções de melhor precisão. O problema de Rayleigh que descreve o escoamento de um fluido infinito sobre uma placa plana que entra em movimento subitamente é estudado pela técnica da transformada integral generalizada. Mostra-se que o esquema de diferenças proposto apresenta os mesmos resultados que o esquema de Crank-Nicholson, se o mesmo espaçamento no tempo e na coordenada normal à placa é utilizado. Uma comparação entre os métodos mostra a precisão e a eficiência da solução pela técnica da transformada integral generalizada. Os resultados do problema de Rayleigh mostram que a solução pela técnica da transformada integral generalizada com a variação contínua do domínio de integração apresenta excelente concordância com a solução analítica.

No Capítulo 7, a resposta de uma camada limite laminar a perturbações pulsantes é estudada pela solução das equações de camada limite não estacionária através do método de diferenças finitas proposto no Capítulo 4. A utilização da formulação de camada limite não estacionária implica que o comprimento característico de perturbação na direção do escoamento deve ser muito maior que a espessura da camada limite para que a componente transversal da velocidade seja muito menor que a componente na direção do escoamento. As equações de camada limite não estacionária são resolvidas na forma transformada para que a espessura da camada limite não

perturbada seja constante ao longo da placa em termos das variáveis transformadas. A evolução temporal-espacial das perturbações e a dependência da resposta da camada limite na posição onde é aplicada a perturbação são estudadas. Resultados numéricos mostram que a resposta varia ao longo da superfície, com as perturbações decaindo com taxas variáveis nas diversas estações.

Uma camada de mistura é formada pela mistura de duas correntes com velocidades diferentes que inicialmente se encontravam separadas por uma placa fina. Após o instante inicial, um intenso processo de mistura ocorre como ilustrado pela Fig. 2.

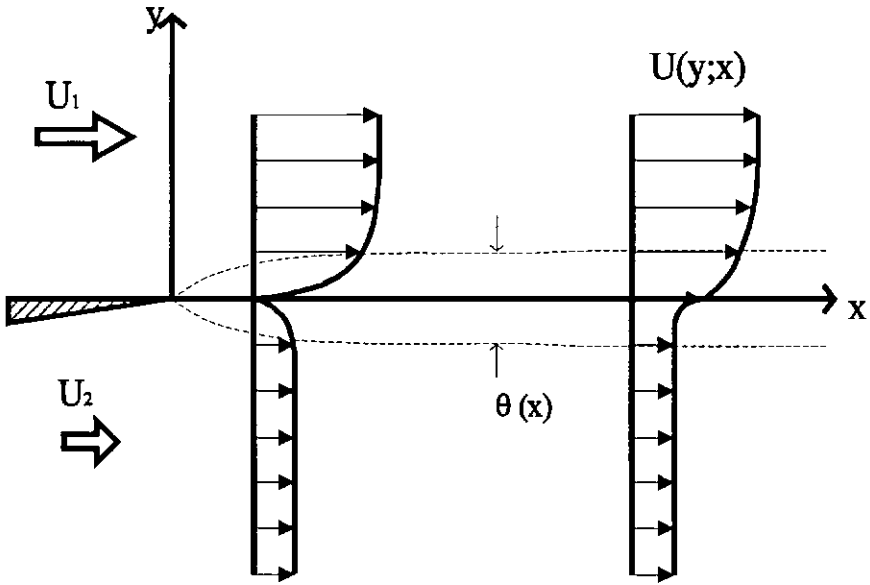


Fig.1.2 Uma camada de mistura.

Esta simples configuração de escoamento é um modelo genérico de escoamentos que ocorrem em diversos fenômenos naturais e aparelhos artificiais, tais como reatores químicos, câmaras de combustão, e mais relevante para nosso objetivo, escoamentos ao redor de um aerofólio ou a partir de um ponto de separação de um corpo rombudo. Neste trabalho, a camada de mistura é vista como um protótipo de uma classe mais ampla de camadas cisalhantes livres: os jatos e as esteiras.

A camada de mistura é intrinsecamente instável devido aos mecanismos de instabilidade não viscosos. As estruturas coerentes de grandes escalas observadas nas últimas três décadas estão ligadas as interações de estruturas vorticiais geradas por mecanismos não viscosos. A influência da viscosidade e do número de Reynolds acredita-se serem secundárias nestes escoamentos. Estas observações sugerem a utilização de métodos de vórtices no estudo da instabilidade e da turbulência em camadas cisalhantes livres. Estes métodos serão revisados também no Capítulo 2. Por outro lado, o método de vorticidade superficial, como uma das formulações do método de painéis, tem sido utilizado há muito tempo no estudo do potencial de escoamen-

tos ao redor de aerofólios. Mais recentemente, este método foi combinado com o método de vórtices discretos para o estudo de corpos rombudos, sem, entretanto, uma justificativa rigorosa.

No Capítulo 8 propomos uma formulação unificada dos métodos de vorticidade para escoamentos bi-dimensionais, incompressíveis e não viscosos ao redor de corpos. Usamos a segunda identidade de Green para transformar a relação de função de corrente em uma relação cinemática. A formulação mostra que ao se desprezar o efeito da viscosidade, a velocidade em qualquer ponto no escoamento é determinada pela vorticidade do escoamento e por uma folha de vorticidade que represente a superfície sólida. O método de vórtices discretos é apresentado como um esquema de discretização do campo da vorticidade. Os esquemas de desingularização e integração numérica no tempo serão também discutidos aqui.

A formulação proposta é utilizada para o estudo da estabilidade de uma camada de mistura. Nos trabalhos anteriormente feitos sobre a instabilidade de camadas cisalhantes livres, a maioria assume periodicidade espacial do escoamento, estudando sua evolução temporal. Ao contrário da abordagem temporal, adotamos uma abordagem espacial mais realística, que estuda o desenvolvimento espacial de uma camada cisalhante. Duas folhas de vorticidade são utilizadas para representar o escoamento: uma representa o escoamento à montante e a outra o escoamento semi-infinito à jusante. O método de vórtices discretos é aplicado no estudo da instabilidade espacial de uma camada de mistura. A camada de mistura é perturbada na sua origem por três tipos de perturbações: periódica, pulsante, e randômica. Resultados numéricos mostram o enrolamento dos vórtices devido à instabilidade espacial.

Capítulo 2

Uma Revisão Bibliográfica sobre Estabilidade Hidrodinâmica

Desde quando Reynolds e Rayleigh utilizaram a teoria da instabilidade desenvolvida no estudo da mecânica de partículas para investigar a transição do regime laminar de um escoamento para o regime turbulento, considerou-se ser esta transição uma consequência de instabilidades nas camadas cisalhantes. Este ponto de vista estimulou muitos trabalhos teóricos e experimentais sobre a estabilidade de camadas cisalhantes a serem feitos. O desenvolvimento recente de estudos experimentais e teóricos mostrou que a transição de camadas limite depende fortemente da forma das perturbações externas através de um mecanismo chamado de receptividade. Conceitualmente, o processo de transição em camadas limite pode ser dividido em três estágios: a receptividade, a amplificação linear, e o colapso não linear. O problema de receptividade reestimulou o estudo de camada limite não estacionária, pois Goldstein(1983) mostrou que a receptividade da camada limite pode ser descrita pelas equações de camada limite não estacionária.

Neste capítulo, fazemos uma revisão bibliográfica sobre a estabilidade hidrodinâmica de camadas cisalhantes, explicando os conceitos relevantes a este trabalho. Na seção 2.1, discutimos os conceitos básicos e as teorias gerais da estabilidade hidrodinâmica, tais como a teoria linear, o conceito de instabilidade absoluta e convectiva, o conceito de instabilidade espacial e temporal e a teoria não linear. Na seção 2.2 discutimos os trabalhos relacionados a estabilidade e a receptividade da camada limite, apresentando o conceito da receptividade, a teoria de três pisos, a simulação direta do fenômeno pela solução das equações de Navier-Stokes etc. Os trabalhos relacionados com a estabilidade de camadas de mistura são revisados na seção 2.3.

2.1 Estabilidade Hidrodinâmica

O problema da instabilidade hidrodinâmica foi identificado e formulado no final do século passado, por Helmholtz, Kelvin, Rayleigh e Reynolds. Na realidade, o experimento clássico de Reynolds(1883) marcou o início dos estudos sobre transição e turbulência. Os métodos para se analisar a estabilidade de escoamentos também foram formulados na época de Reynolds. De fato, o método das componentes normais para análise de oscilações e de estabilidade de sistemas dinâmicos já se encontrava

bem desenvolvido. Este método foi adaptado para a mecânica dos fluidos por Stokes, Kelvin e Rayleigh. A diferença matemática essencial entre a mecânica dos fluidos e a mecânica das partículas repousa no fato das equações que governam o escoamento serem diferenciais parciais ao invés de diferenciais ordinárias. Esta diferença induz não somente dificuldades técnicas para o estudo da estabilidade hidrodinâmica, mas também mecanismos físicos fundamentalmente diferentes.

O problema da estabilidade hidrodinâmica clássica pode ser formulado matematicamente de acordo com Lin(1955):

“Matematicamente, o problema é o seguinte : suponhamos que o sistema de equações hidrodinâmicas tenha uma solução independente do tempo para os componentes de velocidade, pressão e temperatura. Consideremos um problema de valor inicial com as variáveis ligeiramente diferentes da solução estacionária. Se a solução tende à solução estacionária quando o tempo tende ao infinito, o escoamento é chamado de estável; senão, é chamado de instável.”

Esta definição poder ser generalizada para se incluir escoamentos não estacionários. Ao analisar a estabilidade de um escoamento laminar qualquer, seja este estacionário ou não, necessitamos ter o campo de velocidade $U(x, t)$, e outros, tais como o de pressão $P(x, t)$ e o de temperatura $\Theta(x, t)$, para que o escoamento seja completamente especificado em cada ponto do espaço e do tempo. Esses campos definem o escoamento básico, o qual satisfaz as equações do movimento e as respectivas condições de contorno.

Se o escoamento básico for perturbado, as perturbações podem morrer, podem persistir com a mesma amplitude ou se amplificarem até atingirem um certo nível, passando o escoamento para um outro estado, laminar ou turbulento. Nestes casos, o escoamento é chamado de estável, neutro ou instável respectivamente. Na natureza, todos os tipos de perturbação estão presentes; o escoamento é dito estável se permanecer estável quando sujeito a qualquer tipo de perturbação. Então, no estudo da estabilidade hidrodinâmica, o ponto chave é se determinar um número de Reynolds até o qual todas as perturbações morrem, isto é, o escoamento é estável. Este número de Reynolds é chamado o número Reynolds crítico. O problema central da instabilidade hidrodinâmica é portanto determinar um número de Reynolds crítico, a partir do qual transição ocorrerá.

O problema de instabilidade hidrodinâmica em sua forma mais geral reduz-se a solução de um sistema de equações diferenciais parciais não lineares, cuja solução é muito difícil. Para facilitar a abordagem matemática, comecemos com perturbações infinitesimais, possibilitando a linearização do sistema diferencial. Neste caso, os termos quadráticos das perturbações ou suas derivadas são desprezados. Obtemos então um sistema de equações lineares homogêneas com condições de contorno homogêneas, cujos coeficientes variam no espaço mas não no tempo, por ser o escoamento básico independente do tempo. O sistema linear contém o tempo apenas no termo de primeira derivada, possuindo portanto a solução um termo exponen-

cial nesta variável. As condições de contorno são geralmente supostas homogêneas, e temos então um problema de autovalor. A tarefa se resume a achar autovalores que determinem a amplificação exponencial das perturbações. Se existir um autovalor positivo, a perturbação se amplificará exponencialmente, o escoamento sendo instável. O número de Reynolds crítico é determinado por uma relação característica que relaciona o número de Reynolds e o comprimento de onda das perturbações.

Para escoamentos paralelos bi-dimensionais, os coeficientes das equações dependem apenas de y , a variável espacial na direção normal ao escoamento. Por conseguinte, a solução depende de x e de t periodicamente. Pequenas perturbações são decompostas em componentes da forma

$$\phi(y) \exp(i(kx - \omega t)). \quad (2.1)$$

A função $\phi(y)$ satisfaz uma equação ordinária de quarta ordem deduzida chamada de equação de Orr-Sommerfeld. Se para valores de k reais corresponderem valores de ω imaginários ($\omega = \omega_r + \omega_i i$) com $\omega_i > 0$ diremos que o escoamento é instável. Instabilidade linear implica então que perturbações infinitesimais crescerão exponencialmente.

No início da década de 1960, o conceito de instabilidade temporal foi questionado por Watson(1960) e Gaster(1962). Ao contrário de um sistema fechado, como o escoamento de Taylor, que possui instabilidade absoluta, no escoamento de camada limite, dito sistema aberto, as perturbações podem crescer tanto temporalmente quanto espacialmente; a isto chama-se instabilidade convectiva. Gaster(1962) estabeleceu a relação entre instabilidades temporais e espaciais quando a taxa de amplificação for pequena.

Como já vimos, grande parte dos estudos de estabilidade hidrodinâmica tem sido dedicado a instabilidade temporal, onde o número de onda é considerado conhecido e real e a frequência complexa é uma incógnita; assume-se então implicitamente que o escoamento evolui no tempo a partir de um estado inicial conhecido. Por outro lado, a teoria espacial de instabilidade proposta por Gaster e por Watson tem sido utilizada com sucesso na explicação de experimentos de instabilidade e transição em escoamentos que se desenvolvem espacialmente. Em vários escoamentos, porém, é preciso que tanto a frequência quanto o número de onda sejam complexos; em outras palavras, a instabilidade é espacial-temporal. A relação entre instabilidades temporal e espacial pode ser entendida de uma maneira unificada nos trabalhos de Huerre e Monkewitz(1990) utilizando-se os conceitos de instabilidade absoluta/convectiva e local/global inicialmente desenvolvidos no contexto da física de plasmas.

A palavra *local* é usada aqui para significar a instabilidade baseada em um perfil de velocidade local com a aproximação de escoamento paralelo, enquanto, *global* representa o campo de escoamento total. A instabilidade é local absoluta quando uma perturbação se propaga em duas direções; quando a propagação é convectada pelo escoamento ela é dita local convectiva. A análise dos trabalhos de Huerre e Monkewitz é baseada numa relação de dispersão obtida através da transformada de Fourier sobre a equação de escoamento paralelo. Os conceitos de instabilidades absoluta/convectiva

e local/global tem sido utilizados com sucesso para explicar os mecanismos de instabilidade de escoamentos se desenvolvendo espacialmente. Huerre e Monkewitz(1985) consideram a instabilidade de camadas cisalhantes livres, concluindo ser a instabilidade absoluta quando a razão entre as duas velocidades limites for maior que 1.36; senão, a instabilidade será convectiva.

A teoria linear possui duas falhas principais: i) a solução não depende da amplitude inicial, a qual é uma constante arbitrária no problema de autovalor; ii) a formulação é válida apenas para amplitudes infinitesimais, as quais se amplificando rapidamente, violam as hipóteses iniciais. Neste segundo caso os efeitos não lineares passam a ser importantes.

A teoria não linear foi desenvolvida para superar as dificuldades que a teoria linear encontrou. Landau (1944) sugeriu uma equação diferencial ordinária para descrever a evolução da amplitude de uma perturbação, qual seja,

$$\frac{1}{A_1} \frac{dA_1}{dt} = a_0 + a_2 |A_1|^2 + O(|A_1|^4). \quad (2.1)$$

O coeficiente a_0 é equivalente a taxa de amplificação linear. O coeficiente a_2 , chamado o coeficiente de Landau, é o objeto de interesse principal nesta equação. As seguintes possibilidades podem ocorrer para a_2 real: i) $a_2 < 0$, isto significa que uma perturbação instável pela teoria linear se desenvolverá para um estado de equilíbrio com amplitude finita, $|A_e|^2 = -(a_0/a_2)$, este é o chamado caso supercrítico; ii) $a_2 > 0$, as perturbações estáveis pela teoria linear podem agora se amplificar, no caso das amplitudes iniciais satisfazerem a condição $|A_0|^2 > -(a_0/a_2)$, este caso é chamado de instabilidade subcrítica.

Ao se aplicar a teoria não linear descrita acima para um escoamento particular, a determinação do coeficiente de Landau, a_2 , pode ser muito difícil, senão impossível. Stuart(1960) e Watson(1960) desenvolveram a teoria não linear para escoamentos paralelos e a aplicaram para escoamentos de Poiseuille e de Couette, os dois tipos de escoamento mais simples que existem.

2.2 A Estabilidade e A Receptividade de Camadas Limite

Com a abordagem da teoria linear, a estabilidade de camadas limite sobre uma placa plana foi analisada pela primeira vez por Tollmien(1929) que utilizou a hipótese de escoamento paralelo. O problema reduziu-se então a solução de uma equação diferencial ordinária, isto é, a equação de Orr-Sommerfeld. Tollmien representou o perfil de Blasius por tres expressões analíticas, obtendo uma solução assintótica para a equação de Orr-Sommerfeld e um primeiro valor de número de Reynolds crítico, $Re_c = 420$. Schlichting(1933, 1935) tratou o problema mais detalhadamente. Ele usou a expansão de Heisenberg(1924) achando $Re_c = 575$ e também calculando uma curva característica da instabilidade. Na época, o tratamento do problema como escoamento paralelo foi questionado por alguns cientistas, por exemplo, Taylor(1938).

Para resolver a discrepância entre estes dois resultados, Lin(1945) realizou uma terceira análise do problema. Ele usou um perfil mais preciso para simular a solução de Blasius e também a expansão de Heisenberg. O resultado de Lin(1945) concorda bem com Tollmien(1929), sendo $Re_c = 421$.

As dúvidas sobre qual seria o valor mais preciso de Re_c só foram dissipadas com os experimentos clássicos de Schubauer e Skramstad(1947). Os resultados experimentais confirmaram as características principais previstas pela teoria com um $Re_c = 470$ sendo observado. Shen(1954) repetiu a análise de Lin chegando a uma melhor concordância com os dados experimentais. A teoria linear desde então se estabeleceu como uma parte importante da teoria da instabilidade hidrodinâmica sendo também utilizada em relações empíricas para a previsão da transição. O método e^n é baseada em um número de Reynolds crítico calculado pela teoria linear. A teoria linear foi estendida para escoamentos mais complicados e também modificada para chegar a melhores resultado.

Desde 1953, técnicas numéricas têm sido utilizadas para resolver a equação de Orr-Sommerfeld. Uma solução numérica desta equação foi obtida por Jordinson (1970) que chegou a resultados bem distintos dos dados experimentais. Mesmo não sendo os experimentos desprovidos de erros, Barry e Ross(1970) sugeriram serem as discrepâncias provavelmente devidas a hipótese de escoamento paralelo que fora adotada em todos trabalhos teóricos até então.

Desde então várias tentativas têm sido feitas para se desenvolver uma teoria que leve em conta o não paralelismo da solução da camada limite. Uma abordagem desenvolvida independentemente por Barry e Ross(1970) e Chen, Sparrow e Tsou(1970), chegou a uma equação modificada de Orr-Sommerfeld. Essa teoria chegou a uma redução do Re_c , mas não o suficiente para melhorar a concordância com os dados experimentais. Gaster(1974) desenvolveu um método de solução por aproximações sucessivas para simular escoamentos não paralelos; a redução do valor do Re_c foi pequena não concordando com o valor previsto pelos dados experimentais. As teorias que fizeram maior sucesso foram as de Bouthier(1972, 1973) e Saric e Nayfeh(1975), as quais basearam-se no método de multiplas escalas. Ambas teorias chegaram a uma boa concordância com os dados experimentais. Entretanto, vários pontos destas teorias se tornaram controversiais.

Mais recentemente Fasel e Konzelmann(1990) fizeram uma análise numérica das equações de Navier-Stokes. A solução numérica obtida pode, desta vez, ser considerada uma solução exata para escoamentos não paralelos. A surpresa foi os resultados numéricos concordarem bem com os de Gaster(1974) mas não com os experimentais, não concordando portanto também com os resultados de Bouthier(1972, 1973) e de Saric e Nayfeh(1975). A causa da discrepância entre as teorias e os experimentos não se encontra até o momento resolvida.

A aplicação dos conceitos acima discutidos para escoamentos sobre placa plana é mais complicada por não existir uma relação de dispersão com forma analítica. Por enquanto, os trabalhos de Gaster(1974,1982) tem sido considerados clássicos neste aspecto.

Os experimentos em camada limite de Schubauer e Skramstad(1947) e outros ofereceram uma base substancial para o desenvolvimento de teorias sobre instabilidade. Eles indicam que a transição em escoamentos depende dos mais diversos fatores, tais como, a intensidade de turbulência na corrente livre, as flutuações de pressão, a rugosidade nas paredes, a transferência de calor em superfícies, etc, os quais não podem ser explicados de um modo satisfatório pelas teorias clássicas da instabilidade. O papel destes fatores na transição de um escoamento pode ser analisado melhor pelo estudo da receptividade de um escoamento a estímulos externos.

A resposta da camada limite às diversas formas de perturbações é chamada de receptividade. Se as perturbações iniciais forem suficientemente grandes, elas podem se amplificar conduzindo diretamente a um estado turbulento. Por outro lado, se as perturbações forem pequenas, elas apenas provocarão oscilações livres na camada limite. Essas oscilações livres são componentes normais da camada limite, comumente chamadas de ondas de Tollmien e Schlichting. Quando as ondas de Tollmien-Schlichting amplificam-se atingindo um certo nível, seu desenvolvimento passa a ser dominado por um mecanismo não linear, rapidamente atingindo a turbulência. Conceitualmente, o processo de transição em camadas limite pode ser dividido em três estágios: a receptividade, a amplificação linear, e o colapso não linear.

As teorias de instabilidade hidrodinâmica descrevem o desenvolvimento de componentes livres da camada limite, sua amplificação exponencial e saturação não linear. Porém, as origens desses componentes livres não tem sido explicada na teoria de instabilidade hidrodinâmica. O aparecimento de ondas de Tollmien-Schlichting é atribuído a fatores diversos como turbulência livre, rugosidade, etc, de um modo apenas descritivo. A amplitude inicial das onda de Tollmien-Schlichting é uma constante arbitrária na teoria linear. Para um melhor conhecimento do processo de transição, é necessário se investigar os estágios iniciais de geração e formação de ondas de instabilidade. Os trabalhos sobre receptividade tem como objetivo investigar a dependência da camada limite na forma da perturbação.

As perturbações podem ser de duas formas: internas ou externas à camada limite. Os estudos de receptividade da camada limite são geralmente divididos em duas categorias: receptividade do meio e forçada. A receptividade do meio é relacionada com a geração de ondas de Tollmien-Schlichting por perturbações naturais como turbulência e flutuações de pressão. Neste caso, o comprimento de onda das perturbações é muito maior que o comprimento das ondas de instabilidade; um mecanismo de conversão de comprimentos de onda deve ocorrer para que a energia contida na corrente livre possa ser transferida para as ondas de instabilidade. Tal mecanismo pode ter ligação ou não com o não paralelismo do escoamento, o qual pode acontecer na entrada da camada limite ou perto de irregularidades na superfície. O estudo da receptividade de camadas limite a perturbações internas foi iniciado por Gaster(1965). Ele considerou o caso em que as ondas de Tollmien-Schlichting são obtidas por perturbações harmônicas na placa. O trabalho de Gaster(1965) mostrou que as ondas de Tollmien-Schlichting introduzidas na parede por vibrações mecânicas no experimento clássico de Schubauer e Skramstad(1947) podem ser descritas por

um problema de condição de contorno ao invés de um problema de autovalor. Neste caso, uma perturbação externa localizada na parede provoca perturbações espaciais com frequência real e número de onda complexo. Gaster e Grant(1975) estudaram experimentalmente a receptividade da camada limite bi-dimensional a perturbações pulsantes para simular um processo mais natural de transição, onde tanto a frequência quanto o número de onda são complexos. O desenvolvimento de um pacote de ondas provocado por perturbações pulsantes na parede é estudado por Gaster(1975) usando a teoria linear. O efeito do não paralelismo do perfil da camada limite foi também considerado por Gaster(1982).

Há muitos anos as perturbações do meio têm sido reconhecidas como fatores importantes no processo de transição em camadas limite. O estudo da receptividade de camadas limite a perturbações externas tem como objetivo determinar a relação entre as perturbações externas e a amplitude das ondas de instabilidade. A dificuldade reside no fato das ondas de instabilidade serem soluções de um problema de autovalor enquanto as perturbações externas só podem ser abordadas como um problema de valor de contorno. A própria relação entre o problema de receptividade, sendo o de valor de contorno, e o problema de instabilidade, sendo o de autovalor, não tinha sido entendida até muito pouco tempo. Esta dificuldade foi resolvida por Goldstein em meados dos anos oitenta utilizando o método das expansões assintóticas combinadas. Goldstein(1983) mostrou que a receptividade ocorre primeiramente na região próxima ao bordo de ataque da placa onde o não paralelismo do escoamento é importante, satisfazendo as equações de camada limite não estacionária. Mais a frente, o escoamento não estacionário pode ser descrito pela equação de Orr-Sommerfeld. Ele mostrou que as soluções destas duas equações podem ser combinadas em uma região intermediária.

A análise assintótica feita por Goldstein(1983) é baseada nos trabalhos de Lam e Rott(1960) e Ackerberg e Phillips(1972) sobre a resposta da camada limite a oscilações harmônicas no escoamento principal. Este problema foi estudado primeiramente por Lighthill(1954). Devido à complexidade do problema, Lighthill somente conseguiu soluções para altos e baixos valores de frequência. Brown e Stewartson(1973a, 1973b) estudaram o problema da resposta de camadas limite a perturbações arbitrárias no plano transformado de Laplace.

O problema da receptividade com formulação linearizada foi revisto por Goldstein e Hultgren(1989), Kerchen(1990), Bodonyi (1990). Os efeitos de perturbações pequenas na corrente livre na geração de ondas de Tollmien-Schlichting tem sido examinados em detalhe para vários tipos de problemas, indicando o papel importante de efeitos decorrentes do não paralelismo no mecanismo da receptividade.

O desenvolvimento da teoria de três pisos (*triple deck theory*) foi inicialmente motivado pela necessidade de se entender a singularidade no ponto de separação de camadas limite, onde a teoria clássica deixa de valer devido à forte interação entre a camada limite e o escoamento principal. Próximo a este ponto, onde existe rápida variação de velocidade devido ao processo de interação, três camadas são necessárias para uma descrição correta do escoamento. A teoria de três pisos foi desenvolvida

independentemente por três pesquisadores: Stewartson(1969), Messiter(1970) e Neiland(1969).

O primeiro trabalho teórico a respeito da receptividade de camadas limite com o uso da teoria de *três pisos* parece ser o de Brown e Daniels(1975). Eles analisam a resposta de um escoamento laminar incompressível sobre um aerofólio a oscilações harmônicas de alta frequência no escoamento principal, mostrando que para equilibrar a subcamada de Stokes na vizinhança da parede a frequência adimensional deve ser da ordem de $O(Re^{\frac{1}{4}})$, e a amplitude da ordem de $O(Re^{-\frac{9}{16}})$. Os trabalhos de Smith(1979a, 1979b) têm contribuído muito para estabelecer a formulação de *três pisos* no estudo de receptividade e instabilidade de camadas limite. Smith(1979a, 1979b) identificou serem as escalas de tempo, coordenada na direção do escoamento e coordenada na direção normal ao escoamento de ordem respectivamente ϵ^2 , ϵ^3 e ϵ^5 ($\epsilon = Re^{-\frac{1}{8}}$), as quais são utilizadas em todos os trabalhos baseados na teoria de *três pisos* desde então. Smith e Bodonyi(1982) consideram teoricamente os efeitos da amplitude de perturbações sobre a instabilidade na camada viscosa crítica de camadas limites com altos números de Reynolds. Mais recentemente, a teoria de três pisos foi aplicada no estudo da receptividade de camadas limite por Bodonyi(1990), Duck(1990), entre outros trabalhos. Interações não lineares começam quando a amplitude das perturbações atinge $O(Re^{-\frac{7}{36}})$.

É digno de nota, os trabalhos de cientistas soviéticos, experimentais e teóricos, usando a teoria de *três pisos*. Infelizmente, a maioria destes trabalhos não se encontra disponível aos leitores ocidentais. Kozlov e Ryzhov(1990) descrevem bem os experimentos realizados e as teorias propostas baseadas na estrutura de *três pisos*.

Fasel(1976, 1984) estudou numericamente o problema de receptividade da camada limite a perturbações localizadas utilizando o método de diferenças finitas. Ele resolveu(1976) as equações de Navier-Stokes utilizando uma formulação por vorticidade e função de corrente, simulando a geração e o desenvolvimento de ondas de Tollmien-Schlichting. Usando mesmo o procedimento numérico, Fasel(1984) estudou a receptividade do escoamento a perturbações pulsantes.

Mais recentemente, Breuer e Haritonidis(1990) estudaram o desenvolvimento de uma perturbação com pequena amplitude inicial localizada em camada limite tridimensional. Usando a teoria linear no limite quando $Re \rightarrow \infty$, eles mostraram que a perturbação pode ser dividida em duas partes: uma parte com ondas dispersas representadas por soluções da equação de Rayleigh, as quais se propagam com uma velocidade característica; e uma parte transiente, a qual se propaga com a velocidade da corrente principal. O sistema de equações da teoria não viscosa linearizada é resolvido utilizando-se métodos espectrais. Cálculos numéricos indicam que a parte transiente da perturbação não morre, tomando a forma de uma camada cisalhante que alonga-se com a propagação da perturbação. Dados experimentais são apresentados para uma perturbação gerada pelo movimento impulsivo de uma membrana montada na parede. Para pequenas amplitudes, a evolução inicial da perturbação se encontra em boa concordância com o cálculo. O caso de perturbações com maior amplitude é tratado no trabalho teórico-experimental de Breuer e Landahl(1990).

Resolvendo-se as equações de Navier-Stokes pelo método espectral desenvolvido por Spalart(1986), eles simulam o desenvolvimento de uma perturbação com maior amplitude inicial no regime onde efeitos não lineares e viscosos são importantes. Embora o método espectral seja superior quanto a precisão, ele possui dificuldades em tratar as condições de contorno. Por isso, o desenvolvimento descrito no trabalho de Breuer é temporal.

2.3 A Estabilidade de Camadas de Mistura

A estabilidade de camada de mistura tem sido estudada desde os trabalhos de Rayleigh e de Kelvin-Helmholtz. Pelo teorema formulado por Rayleigh(1880), um escoamento paralelo não viscoso só é instável quando sujeito a perturbações bidimensionais quando o perfil de velocidade do escoamento possuir um ponto de inflexão. Tollmien(1935) mostrou que em certas circunstâncias a existência de um ponto de inflexão é uma condição suficiente para a instabilidade. As camadas cisalhantes livres possuem pontos de inflexão, portanto são instáveis pela teoria não viscosa de instabilidade. A instabilidade não viscosa de uma camada de mistura é chamada geralmente a instabilidade de Kelvin-Helmholtz, veja Silva-Freire(1992).

O mecanismo de instabilidade de camadas de mistura é primordialmente não viscoso. A presença da viscosidade apenas modifica ligeiramente a taxa de amplificação das perturbações. Escoamentos com perfis de velocidade sem ponto de inflexão como camadas limite são estáveis pela teoria não viscosa. A instabilidade portanto só acontece pelo efeito da viscosidade(Lin, 1955). Os cálculos de estabilidade feitos por Lessen(1950) baseados na equação de Orr-Sommerfeld(formulação viscosa) mostram que para camadas de mistura a alto número de Reynolds a curva neutra de estabilidade tende assintoticamente para a curva obtida pela teoria não viscosa. Para a camada de mistura a alto número de Reynolds, é portanto suficiente considerar a instabilidade desprezando-se o efeito da viscosidade.

Para escoamento a alto número de Reynolds, a velocidade normal ao escoamento principal é pequena quando comparada com a velocidade longitudinal. O escoamento pode ser considerado aproximadamente paralelo e a teoria linear de estabilidade para escoamento paralelo pode ser aplicada. A estabilidade temporal de camadas de mistura representadas pelo perfil de $\tanh(y/2)$, onde y é a coordenada normal ao escoamento principal, foi estudada por Betchov e Szewezk(1963) e Michalke(1964). Eles mostraram que a parte real da velocidade de fase é identicamente nula e que as ondas se amplificam para uma certa faixa de números de onda. Michalke fez uma análise espacial da instabilidade para o perfil $1+\tanh(y/2)$, isto é, para a razão de velocidades igual 1. As ondas de instabilidade são, neste caso, dispersivas, e a camada de mistura é instável para uma faixa de frequências. Os resultados obtidos pela análise de estabilidade temporal podem ser estendidos para qualquer valor da razão entre as velocidades pela translação do sistema de referência.

A influência da razão entre velocidades sobre a instabilidade espacial de camadas de mistura foi estudada por Monkewitz e Huerre(1982). Eles mostraram que a taxa

máxima de amplificação é aproximadamente proporcional à razão das velocidades.

As análises mencionadas são baseadas na teoria linear de estabilidade onde a amplitude das perturbações é considerada infinitesimal e os termos não lineares são desprezados nas equações. Portanto, os resultados somente se aplicam para a amplificação inicial. Quando a amplitude atinge um certo nível, o efeito da não linearidade deve ser considerado.

Considerando as dificuldades da teoria não linear e a solução numérica das equações de Navier-Stokes a alto número de Reynolds, uma abordagem bastante adotada no estudo da instabilidade de camadas de mistura, é utilizar os métodos de vórtices pela formulação não viscosa. Para um escoamento não viscoso em meio infinito, o escoamento é completamente determinado pela distribuição de vorticidade através a lei de Biot-Savart. A distribuição nos instantes posteriores pode ser obtida pela integração da equação de advecção das partículas materiais por ser a vorticidade ser uma quantidade conservativa no escoamento não viscoso. Uma vantagem dos métodos de vórtices é que a malha de discretização do espaço físico não é utilizada para a solução do problema porque o escoamento é determinado pelos vórtices através da advecção no sistema lagrangeano. A formulação da vorticidade e o método de vórtices discretos serão apresentados no Capítulo 8.

A simulação de camada de mistura pelo método de vórtices pode ser dividida em duas abordagens parecidas com teoria linear de estabilidade: a abordagem temporal e a abordagem espacial.

Pela abordagem temporal, a camada de mistura é representada por uma folha de vorticidade que evolui ao longo do tempo no sistema de referência e que se move com a velocidade média de convecção. Em um instante inicial, vórtices discretos distribuídos em uma certa região sob condição de contorno periódica são perturbados. O problema é estudar a evolução da distribuição dos vórtices no tempo. A desvantagem principal desta abordagem é a hipótese de periodicidade espacial.

Pela segunda abordagem, a camada de mistura com crescimento espacial é simulada diretamente. Vórtices são emitidos um por um em cada instante de tempo num ponto que representa o bordo de fuga de uma placa plana semi-infinita que separa duas correntes uniformes. A intensidade dos vórtices emitidos é determinada pela diferença de velocidades das correntes.

Rosenhead(1931) foi o primeiro a utilizar o método de vórtices discretos para investigar a evolução de uma folha de vorticidade representando uma camada de mistura bidimensional no limite de número de Reynolds tendendo para o infinito. A folha de vorticidade, perturbada senoidalmente no espaço, foi representada por 12 vórtices distribuídos ao longo de um comprimento de onda de perturbação senoidal. Rosenhead mostrou claramente que o processo de enrolamento não linear ocorre depois de apenas 4 passos de integração no tempo. Acton(1976) modelou uma camada de mistura através de várias linhas de vórtices discretos. Ele mostrou que os vórtices contidos em cada comprimento de onda se enrolavam formando concentrações, as quais subseqüentemente coalesciam. O comportamento da camada de mistura obtido por Acton(1976) está de acordo com os resultados experimentais de

Winant e Browand(1974). Pozrikidis e Higdon(1985) estudaram o crescimento não linear de perturbações periódicas em uma camada de vorticidade com espessura finita. Com a hipótese de vorticidade constante, a evolução da camada de vorticidade foi estudada através da variação do contorno da região de vorticidade. Eles estudaram a dependência do crescimento das perturbações na espessura da camada de vorticidade mostrando que sua taxa de crescimento depende fortemente da espessura, mas a amplitude final é relativamente independente dela.

Quatro trabalhos que estudam camadas de mistura espacial usando métodos de vórtices foram encontrados na literatura. Os objetivos destes trabalhos são os mesmos: estudar a camada de mistura turbulenta a alto número de Reynolds. Isto difere do objetivo deste trabalho que intenciona estudar a instabilidade espacial de uma camada de mistura. A metodologia empregada no entanto será basicamente a mesma.

Ashurst(1979) usou vórtices de Lamb e marcha aleatória para levar em conta o efeito da viscosidade molecular. Os cálculos com núcleo de raio constante não apresentam bons resultados. Contudo, a utilização de vórtices de Lamb melhorou dramaticamente os resultados chegando-se a uma boa concordância com os dados experimentais. Ashurst concluiu pelos resultados obtidos que a coalescência de vórtices é o principal mecanismo para o crescimento da camada de mistura turbulenta. Inoue(1985) estudou o mesmo problema pelo método de vórtices discretos. Ele usou um esquema de desingularização para contornar a singularidade da velocidade induzida pelos vórtices. Ele concluiu que o entranhamento é o principal mecanismo de crescimento da camada de mistura turbulenta, diferentemente da conclusão de Ashurst(1979). Subseqüentemente, Ghonein e Ng(1987) estudaram a camada de mistura turbulenta com a presença de paredes para simular a situação experimental. Eles concluíram que o crescimento é causado pelos dois mecanismos: coalescência da estrutura de vórtices e o entranhamento de fluido da corrente principal. Mais recentemente, Basu et. al.(1992) apresentaram um novo método de vórtices para estudar a camada de mistura turbulenta. Seus resultados apresentam boa concordância com os dados experimentais.

Capítulo 3

Análise Matemática e Formulações

As equações de Navier-Stokes são equações diferenciais parciais não lineares cuja solução exata é extremamente difícil ou mesmo impossível. Mesmo utilizando-se os recursos de modernos computadores, a tarefa de resolver essas equações ainda é difícil. Na maioria dos casos estudados, o sistema de equações de Navier-Stokes é simplificado de uma maneira ou de outra por hipóteses físicas, de modo que a solução do sistema simplificado representa uma aproximação da solução exata do sistema original. A validade destas soluções aproximadas é, muitas vezes, comprovada dentro de certos limites por dados experimentais. O método de análise de escalas, também chamado análise das ordens de grandeza, é uma ferramenta poderosa da mecânica dos fluidos teórica pois nos fornece uma maneira sistemática de se deduzir equações aproximadas. Por este método, uma comparação das ordens de grandeza dos diversos termos do sistema de equações de Navier-Stokes é utilizada para selecionar termos que representam efeitos dominantes em detrimento de termos que representam efeitos menos importantes.

Este capítulo é dedicado a busca de formulações matemáticas simplificadas para o estudo da estabilidade de camada limite sobre uma placa plana usando o método de análise de escalas. Apresentamos primeiramente na seção 3.1 o sistema de equações de Navier-Stokes. O método de análise de escalas é então ilustrado analisando-se o escoamento básico de camada limite estacionária sobre uma placa plana. A seguir analisamos o caso de um escoamento sujeito a perturbações externas, discutindo vários casos limites. O resultado desta análise, duas formulações simplificadas, será apresentado na última seção.

3.1 As Equações de Navier-Stokes

O nosso ponto de partida para estudar o problema da estabilidade na camada limite é, como sempre, a equação da continuidade e as equações de Navier-Stokes. Para um escoamento bi-dimensional, incompressível, de um fluido newtoniano com propriedades constantes, o sistema de equações que governa o movimento é o seguinte:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (3.2b)$$

Este sistema de equações pode descrever tanto escoamentos laminares quanto turbulentos; pode, portanto, descrever tanto o escoamento básico, como o escoamento perturbado, por permanecerem a hipótese de meios contínuos e as leis de conservação válidas para esses escoamentos.

3.2 Análise de Escalas da Camada Limite Estacionária

Antes de estudarmos um escoamento sujeito a perturbações externas, faremos uma análise do escoamento básico de um fluido sobre uma placa plana, visando mostrar o método a ser utilizado em nossa análise, além de estabelecer algumas relações de interesse.

Deduzamos rapidamente as equações de camada limite estacionária que regem nosso escoamento básico, usando o método de análise das escalas. O escoamento básico satisfaz as equações (3.1-2). Representando as velocidades por U, V e a pressão por P , temos as seguintes equações

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (3.4a)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (3.4b)$$

O primeiro passo na análise que vamos realizar é proceder a adimensionalização do sistema (3.3)-(3.4) através de valores de referência apropriados. Os valores escolhidos aparecem na lista abaixo:

$$U_{ad} = U/U_{\infty}, \quad (3.5a)$$

$$V_{ad} = V/U_{\infty}, \quad (3.5b)$$

$$P_{ad} = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2}, \quad (3.5c)$$

$$X_{ad} = X/L, \quad (3.5d)$$

$$Y_{ad} = Y/L, \quad (3.5f)$$

onde L é um comprimento característico do problema sob interesse.

Substituindo estas expressões no sistema (3.3)-(3.4) e abandonando-se os índices, obtemos o seguinte sistema de equações adimensionais:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3.6)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (3.7a)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (3.7b)$$

onde

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu}. \quad (3.8)$$

Segundo Prandtl, assumimos ser a espessura da camada viscosa, δ , pequena quando comparada com o comprimento característico do escoamento principal L , $\epsilon = \delta/L \ll 1$. A ordem de grandeza de uma derivada pode ser estimada utilizando-se uma razão entre as diferenças, por exemplo,

$$O\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{|1 - 0|}{|1 - 0|}. \quad (3.9)$$

Considerando primeiramente a equação de continuidade(3.6), temos:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

1 1

Para que a equação da continuidade seja equilibrada, seus dois termos devem ser de mesma ordem de grandeza. Isto significa ser V_y de ordem 1. Portanto V é de ordem ϵ pois $y \sim O(\delta) \sim O(\epsilon)$.

Da mesma maneira, analisamos as equações do movimento

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$$

1 1 ϵ $\frac{1}{\epsilon}$ 1 ϵ^2 1 $\frac{1}{\epsilon^2}$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$$

1 ϵ ϵ 1 ϵ ϵ^2 ϵ $\frac{1}{\epsilon^2}$

Na camada viscosa, o termo dominante viscoso deve possuir a mesma ordem dos termos de inércia, isto é, ordem 1. Portanto, temos

$$\epsilon \sim O\left(\frac{1}{Re_L^{\frac{1}{2}}}\right). \quad (3.9)$$

Resumindo o resultado desta análise, temos,

$$O(U) \sim O(1), \quad (3.10a)$$

$$O(V) \sim O(\epsilon), \quad (3.10b)$$

$$O(U_x) \sim O(1), \quad (3.10c)$$

$$O(U_y) \sim O(1/\epsilon), \quad (3.10d)$$

$$O(V_x) \sim O(\epsilon), \quad (3.10e)$$

$$O(V_y) \sim O(1), \quad (3.10f)$$

$$O(P_x) \sim O(1), \quad (3.10g)$$

$$O(P_y) \sim O(\epsilon). \quad (3.10h)$$

As expressões (3.10a) a (3.10h) serão utilizadas na análise das escalas das equações do escoamento perturbado a seguir.

3.3 Análise das Equações de Perturbação

O escoamento perturbado pode ser representado por

$$u = U + u', \quad (3.11a)$$

$$v = V + v', \quad (3.11b)$$

$$p = P + p'. \quad (3.11c)$$

Substituindo-se as Eqs.(3.11) nas Eqs.(3.1-2) e subtraindo-se as Eqs.(3.3-4), chegamos as equações que descrevem as perturbações, isto é,

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + V \frac{\partial u'}{\partial y} + u' \frac{\partial U}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \quad (3.13a)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + V \frac{\partial v'}{\partial y} + u' \frac{\partial V}{\partial x} + v' \frac{\partial V}{\partial y} + u' \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) \quad (3.13b)$$

Para analisar a ordem de grandeza dos termos das equações de perturbação na camada limite sobre uma placa plana, definimos as seguintes escalas características:

Δ_x , o comprimento característico da perturbação na direção x ;

Δ_y , o comprimento característico da perturbação na direção y .

Observando serem as perturbações convectadas pelo escoamento básico, definimos a escala de tempo da perturbação, na forma adimensional:

$$\frac{\Delta_x}{\Delta_t} \sim O(U_\infty) \sim O(1), \quad (3.14)$$

isto significa dizer que

$$\Delta_t \sim \Delta_x. \quad (3.15)$$

Da equação de continuidade podemos escrever

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{O(u')}{\Delta_x} + \frac{O(v')}{\Delta_y}$$

O que nos fornece

$$O(v') = O(u') \frac{\Delta_y}{\Delta_x}, \quad (3.16)$$

Podemos analisar os termos da equação (3.13a) usando as Eqs.(3.9-10) e (3.13-16), temos então:

$$O\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right) \sim \frac{O(u')}{\Delta_x}, \quad (3.17a)$$

$$O\left(U \frac{\partial u'}{\partial x}\right) \sim \frac{O(u')}{\Delta_x}, \quad (3.17b)$$

$$O\left(V \frac{\partial u'}{\partial y}\right) \sim \epsilon \frac{O(u')}{\Delta_y}, \quad (3.17c)$$

$$O\left(u' \frac{\partial U}{\partial x}\right) \sim O(u'), \quad (3.17d)$$

$$O\left(v' \frac{\partial U}{\partial y}\right) \sim \frac{O(u') \Delta_y}{\epsilon \Delta_x}, \quad (3.17e)$$

$$O\left(u' \frac{\partial u'}{\partial x}\right) \sim \frac{O(u'^2)}{\Delta_x}, \quad (3.17f)$$

$$O\left(v' \frac{\partial u'}{\partial y}\right) \sim \frac{O(u'^2)}{\Delta_x}, \quad (3.17g)$$

$$\frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \sim \epsilon^2 \frac{O(u')}{\Delta_x^2}, \quad (3.17h)$$

$$\frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \sim \epsilon^2 \frac{O(u')}{\Delta_y^2}, \quad (3.17i)$$

Obrigando o gradiente de pressão a possuir mesma ordem que o termo de inércia, vem

$$O\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right) \sim \frac{O(u')}{\Delta_x}. \quad (3.17j)$$

Semelhantemente, temos para a equação de movimento transversal,

$$O\left(\frac{\partial v'}{\partial t}\right) \sim \frac{O(v')}{\Delta_x}, \quad (3.18a)$$

$$O\left(U \frac{\partial v'}{\partial x}\right) \sim \frac{O(v')}{\Delta_x}, \quad (3.18b)$$

$$O\left(V \frac{\partial v'}{\partial y}\right) \sim \epsilon \frac{O(v')}{\Delta_y}, \quad (3.18c)$$

$$O\left(u' \frac{\partial V}{\partial x}\right) \sim \epsilon O(u'), \quad (3.18d)$$

$$O\left(v' \frac{\partial V}{\partial y}\right) \sim O(v'), \quad (3.18e)$$

$$O\left(u' \frac{\partial v'}{\partial x}\right) \sim \frac{O(u')O(v')}{\Delta_x}, \quad (3.18f)$$

$$O\left(v' \frac{\partial v'}{\partial y}\right) \sim \frac{O(u')O(v')}{\Delta_x}, \quad (3.18g)$$

$$\frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} \sim \epsilon^2 \frac{O(v')}{\Delta_x^2}, \quad (3.18h)$$

$$\frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \sim \epsilon^2 \frac{O(v')}{\Delta_y^2}, \quad (3.18i)$$

$$O\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}\right) \sim \frac{O(v')}{\Delta_x}. \quad (3.18j)$$

3.4 Formulações Simplificadas e Discussão

As Eqs(3.17-18) estabelecem a ordem de grandeza dos termos das equações de perturbação de uma maneira formal. A determinação da importância relativa destes termos deve ser feita por relações empíricas ou teóricas dos parâmetros de ordem. Os parâmetros de ordem de grandeza são os seguintes: ϵ , que descreve a importância da viscosidade; Δ_x e Δ_y , que representam os comprimentos característicos da perturbação; $O(u')$ e $O(v')$, que representam as ordens de grandeza da amplitude da perturbação. Diferentes formulações simplificadas podem ser obtidas por diferentes hipóteses sobre os parâmetros de ordem de grandeza. Demonstramos primeiramente as formulações simplificadas anteriormente utilizadas.

A) Teoria linear

Hipótese 1: $O(u'), O(v') \ll 1$.

Pela hipótese 1, os termos de ordem $O(u'^2)$ e $O(v'^2)$ são desprezados, tornando-se o sistema linearizado:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + V \frac{\partial u'}{\partial y} + u' \frac{\partial U}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right), \quad (3.13a)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + V \frac{\partial v'}{\partial y} + u' \frac{\partial V}{\partial x} + v' \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right). \quad (3.13b)$$

B) Teoria linear viscosa para escoamento paralelo

Hipótese 2: $O(U_x) \ll 1$ portanto $U = U(y)$.

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right), \quad (3.13a)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right). \quad (3.13b)$$

Como as variáveis independentes x e t são cíclicas, podemos introduzir:

$$u' = \hat{u}(y) \exp \alpha i(x - ct), \quad (3.14a)$$

$$v' = \hat{v}(y) \exp \alpha i(x - ct), \quad (3.14b)$$

$$p' = \hat{p}(y) \exp \alpha i(x - ct), \quad (3.14c)$$

com conhecimento de que as partes reais representam as soluções físicas. As funções de amplitude satisfazem então as seguintes equações:

$$(D^2 - \alpha^2 - i\alpha Re_L(U - c))\hat{u} = Re_L(DU)\hat{v} + i\alpha\hat{p}, \quad (3.15a)$$

$$(D^2 - \alpha^2 - i\alpha Re_L(U - c))\hat{v} = Re_L D U \hat{p}, \quad (3.15b)$$

$$i\alpha \hat{u} + D\hat{v} = 0. \quad (3.15b)$$

onde D representa a derivada com relação a y . O sistema de equações acima pode ser descrito pela equação diferencial ordinária:

$$(D^2 - \alpha^2)^2 = i\alpha Re_L((U - c)(D^2 - \alpha^2)\hat{v} - (D^2 U)\hat{v}). \quad (3.16)$$

Esta é a chamada equação de Orr-Sommerfeld.

C) Teoria linear não viscosa para escoamento paralelo

Hipótese 3: $\epsilon \ll \Delta_x, \Delta_y$.

$$(D^2 - \alpha^2)\hat{v} - \frac{D^2 U}{(U - c)}\hat{v} = 0. \quad (3.17)$$

Pelas hipóteses 1, 2 e 3, chegamos a equação de Rayleigh.

Vimos que fazendo hipóteses sobre a amplitude das perturbações, paralelismo do escoamento básico ou viscosidade do fluido, podemos chegar às formulações simplificadas clássicas. Nossa abordagem será diferente das formulações anteriores pelo seguinte:

- a) não assumiremos pequenas amplitudes;
- b) não assumiremos paralelismo do escoamento;
- c) os efeitos da viscosidade serão considerados.

O problema será abordado por uma análise das escalas dos comprimentos característicos da perturbação. Com diferentes hipóteses sobre os comprimentos característicos, poderemos então chegar a formulações simplificadas diferentes.

a) Caso limite de comprimentos de onda longos

Hipótese 1: $\Delta_x \sim O(1)$ e $\Delta_y \sim O(\epsilon)$.

Esta hipótese significa que a ordem de grandeza dos comprimentos característicos em ambas as direções possuem as mesmas ordens do escoamento básico. Neste caso, substituindo-se a Hipótese 1 na Eq(3.13), chegamos naturalmente ao sistema de equações de camada limite não estacionária.

b) Caso limite de comprimentos de onda médios

Assumindo que ambos os comprimentos característicos são de ordem ϵ , temos então

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + V \frac{\partial u'}{\partial y} + u' \frac{\partial U}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{O(u')}{\epsilon} \quad \frac{O(u')}{\epsilon} \quad O(u') \quad O(u') \quad \frac{O(u')}{\epsilon} \quad \frac{O(u'^2)}{\epsilon} \quad \frac{O(u'^2)}{\epsilon} \quad \frac{O(u')}{\epsilon} \quad \epsilon^2 \frac{O(u')}{\epsilon^2} \quad \frac{O(u')}{\epsilon^2}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + V \frac{\partial v'}{\partial y} + u' \frac{\partial V}{\partial x} + v' \frac{\partial V}{\partial y} + u' \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{O(v')}{\epsilon} \quad \frac{O(v')}{\epsilon} \quad O(v') \quad \epsilon O(u') \quad \frac{O(v')}{\epsilon} \quad \frac{O(u'v')}{\epsilon} \quad \frac{O(u'v')}{\epsilon} \quad \frac{O(v')}{\epsilon} \quad \epsilon^2 \quad \frac{O(v')}{\epsilon^2} \quad \frac{O(v')}{\epsilon^2}$$

Vemos serem os termos dominantes os termos não viscosos. Neste caso, como na análise do escoamento básico, obrigamos os gradientes de pressão a possuírem a mesma ordem dos termos de inércia.

c) Caso limite de comprimentos de onda pequenos

Hipótese C1: A menor ordem de comprimento característico longitudinal, Δ_x , que pode induzir instabilidade é ϵ . (hipótese baseada nos dados experimentais, Lin(1955)).

Hipótese C2: Existe uma região tal onde o termo viscoso é importante diante dos termos de inércia.

Substituindo C1 nas equações e obrigando C2 a se verificar, temos então

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + V \frac{\partial u'}{\partial y} + u' \frac{\partial U}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{O(u')}{\epsilon} \quad \frac{O(u')}{\epsilon} \quad \frac{\epsilon O(u')}{\Delta_x} \quad O(u') \quad \frac{O(u')\Delta_y}{\epsilon^2} \quad \frac{O(u'^2)}{\epsilon} \quad \frac{O(u'^2)}{\epsilon} \quad \frac{O(u')}{\epsilon} \quad \epsilon^2 \quad \frac{O(u')}{\epsilon^2} \quad \frac{O(u')}{\Delta_y^2}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + V \frac{\partial v'}{\partial y} + u' \frac{\partial V}{\partial x} + v' \frac{\partial V}{\partial y} + u' \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{O(v')}{\epsilon} \quad \frac{O(v')}{\epsilon} \quad \frac{\epsilon O(v')}{\Delta_y} \quad \epsilon O(u') \quad \frac{O(v')}{\epsilon} \quad \frac{O(u'v')}{\epsilon} \quad \frac{O(u'v')}{\epsilon} \quad \frac{O(v')}{\epsilon} \quad \epsilon^2 \quad \frac{O(v')}{\epsilon^2} \quad \frac{O(v')}{\Delta_y^2}$$

Para ser o termo viscoso de mesma ordem que o termo de inércia, temos que:

$$\frac{O(u')}{\Delta_x} = \epsilon^2 \frac{O(u')}{\Delta_y^2}, \quad (3.18)$$

isto é

$$\frac{O(u')}{\epsilon} = \epsilon^2 \frac{O(u')}{\Delta_y^2}, \quad (3.19)$$

temos então

$$\Delta_y = \epsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (3.20)$$

d) Caso limite de *três pisos*

Na teoria de *três pisos*, Δ_x é assumido ser $Re_L^{-\frac{3}{8}}$, isto é $\epsilon^{\frac{3}{4}}$ em nossa simbologia. Pelos mesmos argumentos acima, temos que

$$\frac{O(u')}{\epsilon^{\frac{3}{4}}} = \epsilon^2 \frac{O(u')}{\Delta_y^2}, \quad (3.21)$$

isto é

$$\Delta_y = \epsilon^{\frac{11}{8}}. \quad (3.22)$$

ou

$$\Delta_y = Re_L^{-\frac{11}{16}}. \quad (3.23)$$

Esta conclusão é diferente da teoria de *três pisos*, a qual assume ser Δ_y de ordem $Re_L^{-\frac{5}{8}}$.

Pelo exposto acima, podemos deduzir uma formulação simplificada para o problema. Nos quatro casos limites já discutidos, o termo de difusão na direção do escoamento é desprezível quando comparando com os termos dominantes. Considerando-se que o termo correspondente nas equações do escoamento básico também é desprezível, temos a seguinte formulação simplificada para o escoamento sobre uma placa plana

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.24a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (3.25b)$$

Este sistema de equações diferenciais parciais é o chamado sistema de equações para a *camada delgada*. A formulação de um escoamento como *camada delgada* é normalmente utilizada para escoamentos sobre uma placa plana com separação e recirculação, quando a formulação de camada limite não é mais válida. No conhecimento do autor, esta é a primeira vez que a formulação de escoamento como *camada delgada* é proposta para o estudo da transição de camadas limite como uma aproximação à formulação de Navier-Stokes.

Na dedução da formulação simplificada acima proposta, a única hipótese feita foi sobre a ordem de grandeza do comprimento característico na direção do escoamento.

Pela análise de escala, já chegamos uma formulação simplificada, isto é, a formulação do escoamento como *camada delgada*. Nomeamos esta formulação como Formulação Simplificada I, enquanto chamamos a formulação de Navier-Stokes de Formulação 0. Embora a Formulação I seja mais simples que a Formulação 0, sua solução ainda é tarefa difícil. Lembrando que a equação da quantidade de movimento na direção transversal do escoamento básico é de ordem ϵ , podemos ainda realizar outras simplificações. Comparada com a equação da quantidade de movimento na

direção longitudinal, a equação da quantidade de movimento na direção transversal pode ser desprezada inteiramente, obrigando-se o gradiente de pressão a ser de ordem ϵ . Aplicando a equação da quantidade de movimento para a corrente principal, sabemos que

$$\frac{dp}{dy} = 0. \quad (3.26)$$

Temos então, a formulação de camada limite não estacionária,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

Nomeamos esta formulação como Formulação Simplificada II. A Formulação II contém, é claro, hipóteses mais fortes que a Formulação I, mas esperamos que ela possa ainda conter física suficiente para nosso estudo de transição. As equações linearizadas da camada limite não estacionária, sendo uma formulação mais simples que a nossa, já foram utilizadas no estudo de receptividade por Goldstein(1983) e Gulyaev *et. al.*(1990). O esforço computacional necessário para a resolução da Formulação II, é bem menor que aquele para a resolução das Formulações I e 0. A resolução numérica-analítica da Formulação II será o assunto do capítulo a seguir.

Capítulo 4

A Solução das Equações de Camada Limite Não Estacionária pelo Método de Diferenças Finitas

Este capítulo é dedicado à solução da Formulação Simplificada II proposta no capítulo anterior, isto é, a solução do sistema de equações de camada limite não estacionária pelo método de diferenças finitas. Discutiremos aqui brevemente os trabalhos feitos anteriormente para resolver estas equações. Em seguida apresentaremos uma discussão sobre zonas de influência e dependência baseada na classificação das equações diferenciais parciais, enfatizando o caráter hiperbólico das equações de camada limite não estacionária em relação às variáveis tempo e coordenada na direção do escoamento principal. Um esquema de diferenças finitas será proposto baseado no esquema de Warming e Beam para a equação clássica de onda.

4.1 Introdução

No capítulo precedente mostramos que a formulação de camada limite não estacionária pode ser utilizada no estudo da estabilidade de camadas limite. A receptividade e o desenvolvimento de perturbações em camada limite laminar podem ser descritos pela solução de equações de camada limite não estacionária com condições de contorno e condições iniciais especificadas. Para obter uma solução com condições de contorno gerais, temos que utilizar métodos numéricos.

Os problemas de camadas limite não estacionárias, i.e., escoamentos viscosos não estacionários em proximidade de superfícies sólidas, têm sido estudados há muito tempo devido ao fato de que, em algum sentido, todas as camadas limite na realidade são não estacionárias. As camadas limite não estacionárias desempenham papel importante em problemas de engenharia, tais como turbomáquinas, rotores de helicópteros, tubos de choque, etc.

Muitos procedimentos numéricos têm sido desenvolvidos para resolver as equações de camada limite não estacionária, usando principalmente métodos de diferenças finitas. Para resolver um problema de valor inicial, os esquemas de diferenças finitas são divididos em explícitos e implícitos em relação ao tempo. Nos esquemas explícitos, o valor atual da variável é calculado pelo valor anterior da mesma e de seus pontos vizinhos; os esquemas implícitos calculam os valores da variável em um mesmo nível de tempo simultaneamente, ou seja, o valor da variável depende

dos valores dos pontos vizinhos no mesmo instante de tempo. A maior desvantagem dos esquemas explícitos é a limitação do passo de tempo por critérios de estabilidade numérica; os esquemas implícitos são em geral estáveis incondicionalmente, não sendo sujeitos a esta limitação. Na resolução das equações de camada limite não estacionária, esquemas implícitos são predominantemente utilizados. As vantagens dos esquemas implícitos são sua estabilidade incondicional, sua eficiência algébrica e sua facilidade de programação.

Farn e Arpaci(1966) desenvolveram um procedimento numérico para estudar a camada limite não estacionária ao redor de um cilindro de forma de seção arbitrária usando um esquema explícito de diferenças finitas. Esquemas explícitos do tipo de Farn e Arpaci(1966) não foram amplamente utilizados devido à limitação do passo de tempo por um critério de estabilidade numérica. Hall(1969) estudou o problema de camada limite não estacionária sobre uma placa plana semi-infinita que entra em movimento subitamente usando um esquema implícito do tipo Crank-Nicholson. Telionis e Tsahalis(1976) usaram um esquema implícito para estudar a separação não estacionária laminar e turbulenta. Outro esquema muito usado é o esquema de caixa de Keller, por Cebeci(1979, 1982, 1986), para estudar a separação não estacionária de uma camada limite sobre um cilindro circular que entra em movimento subitamente. Recentemente, Kwon, Pletcher e Delaney(1988) propuseram um esquema implícito para estudar camadas limite bidimensionais, laminares ou turbulentas. Os esquemas mencionados representam, com exceção do esquema explícito de Farn e Arpaci(1966), os três tipos de esquema mais utilizados na solução das equações de camada limite não estacionária: implícito, de Crank-Nicholson, da caixa de Keller.

Os três tipos de esquema são implícitos em relação às variáveis tempo e coordenada normal à superfície sólida, mas são explícitos em relação às variáveis tempo e coordenada na direção do escoamento principal. Em cada nível de tempo, as equações são resolvidas com marcha na direção do escoamento principal. Desta maneira, uma perturbação influencia todos os pontos à jusante. Por outro lado, como apontado por Stewartson(1960) e Riley(1975), as equações de camada limite não estacionária têm características de onda nas variáveis tempo e coordenada na direção do escoamento principal e portanto qualquer perturbação só pode se propagar com a velocidade local do escoamento principal, a qual é finita em qualquer escoamento. Isto significa que um ponto nunca pode sentir a influência dos pontos à montante, no mesmo instante de tempo. Wang(1975) formulou o princípio de zonas de influência e de dependência para as equações de camada limite não estacionária e considerou a implicação da zona de dependência na implementação de esquemas de diferenças finitas mas não mencionou a implicação da zona de influência.

O objetivo deste capítulo é desenvolver um procedimento numérico para obter soluções fisicamente corretas das equações de camada limite não estacionária, usando um método de diferenças finitas. Na próxima seção, apresentamos as equações de camada limite não estacionária e condições de contorno e iniciais gerais. Discutimos a característica de onda das equações e as zonas de influência e dependência na seção 4.3. Na seção 4.4 apresentamos o esquema explícito de Farn e Arpaci(1966), o es-

quema implícito de Kwon, Pletcher e Delaney(1988) e o esquema de Crank-Nicholson de Hall(1969) para estudar a implicação das zonas de influência e dependência na implementação de esquemas de diferenças finitas. Propomos um esquema explícito de segunda ordem de precisão baseado no esquema clássico de Warming e Beam para a equação de onda.

4.2 As Equações de Camada Limite Não Estacionária

Para um escoamento bidimensional, incompressível, de um fluido newtoniano com propriedades constantes, as equações de camada limite não estacionária podem ser escritas como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.2)$$

onde x e y são as coordenadas, u e v as velocidades, respectivamente, na direção ao longo da superfície sólida e normal a mesma, t o tempo, $U_e(x, t)$ a velocidade do escoamento principal e ν a viscosidade cinemática do fluido.

O primeiro passo na análise que vamos realizar é proceder a adimensionalização do sistema (4.1)-(4.2) através de valores de referência apropriados. Seja U_∞ a velocidade de escoamento livre e L um comprimento característico do problema de interesse. Os valores escolhidos aparecem na lista abaixo:

$$u_{ad} = u/U_\infty, \quad (4.3a)$$

$$v_{ad} = v\sqrt{Re_L}/U_\infty, \quad (4.3b)$$

$$U_{e_{ad}} = U_e/U_\infty, \quad (4.3c)$$

$$x_{ad} = x/L, \quad (4.3d)$$

$$y_{ad} = y\sqrt{Re_L}/L, \quad (4.3f)$$

onde

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu}. \quad (4.4)$$

Substituindo estas expressões no sistema (4.1)-(4.2) e abandonando-se os índices, obtemos o seguinte sistema de equações adimensionais:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.6)$$

Note que a coordenada y e a velocidade normal v foram multiplicadas pela raiz quadrada do número de Reynolds. As condições de contorno e iniciais associadas ao problema em suas formas gerais podem ser escritas da seguinte forma:

$$u(x, 0, t) = u_w(x, t) \quad \text{e} \quad v(x, 0, t) = v_w(x, t), \quad (4.7a, b)$$

$$u(x, y, t) \rightarrow U_e(x, t), \quad \text{quando} \quad y \rightarrow \infty. \quad (4.8)$$

$$u(x_1, y, t) = u_1(y, t) \quad \text{e} \quad v(x_1, y, t) = v_1(y, t), \quad (4.9a, b)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad \text{e} \quad v(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad (4.10a, b)$$

onde x_1 é a posição de início do intervalo de integração na direção do escoamento principal e o índice 1 representa as condições de entrada.

A distribuição do campo inicial de velocidade deve satisfazer a equação de continuidade

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0. \quad (4.11)$$

Na solução numérica de equações diferenciais parciais, como as de camada limite não estacionária, é importante determinar o tipo das equações e as zonas de influência e dependência. Este assunto será discutido na seção a seguir.

4.3 Zonas de Influência e Dependência

As equações diferenciais parciais quase lineares de segunda ordem são classificadas de elípticas, parabólicas ou hiperbólicas, dependendo do valor do determinante $B^2 - AC$, onde A, B, C são coeficientes da equação na forma geral

$$A\phi_{xx} + 2B\phi_{xy} + C\phi_{yy} = f(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y). \quad (4.12)$$

A equação será chamada elíptica se $B^2 - AC < 0$, parabólica se $B^2 - AC = 0$, e hiperbólica se $B^2 - AC > 0$. Esses conceitos podem ser estendidos para classificar equações de ordem mais alta e sistemas de equações. Porém, um determinante

da forma $B^2 - AC$ não existe para casos gerais. Zachmanoglou e Thoe(1976) identificaram dois casos para o seguinte sistema de equações de primeira ordem

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [A] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + [B] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{r} = 0. \quad (4.13)$$

O sistema é dito hiperbólico num ponto (x,t) se todos os autovalores são reais e distintos; é dito elíptico se todos são complexos. Se alguns autovalores são reais e outros complexos, o sistema é misto e pode possuir comportamento hiperbólico, parabólico ou elíptico.

A classificação dos sistemas de equações diferenciais parciais de segunda ordem é mais complicada. Muitas vezes os sistemas de equações apresentam comportamento misto. A classificação é então feita, menos rigorosamente, pelo reconhecimento dos operadores fundamentais e pelo conhecimento dos problemas físicos em estudo. Um operador elíptico de ordem n tem a forma

$$L(\phi) = \frac{\partial^n \phi}{\partial x_1^n} + \dots + \frac{\partial^n \phi}{\partial x_m^n} \quad (4.14)$$

Uma equação é considerada parabólica se a equação tem um operador elíptico e uma primeira derivada no tempo, ou seja, uma primeira derivada em uma variável independente diferente das do operador elíptico.

Um problema consistindo de uma equação elíptica com condições de contorno associadas é geralmente chamado de problema de equilíbrio devido à física descrita pelo problema. Os problemas descritos pelas equações parabólicas ou hiperbólicas são chamados de problemas de valores iniciais. Uma grande diferença, entretanto, existe entre um fenômeno descrito por uma equação parabólica e um fenômeno descrito por uma equação hiperbólica. As equações parabólicas descrevem, geralmente, os fenômenos de difusão; as equações hiperbólicas descrevem no entanto os fenômenos de propagação de onda. Embora ambas as equações descrevam fenômenos de propagação, nos problemas de difusão as perturbações propagam-se com uma velocidade infinita por causa do operador elíptico no espaço; nos problemas de propagação de onda, entretanto, as perturbações propagam-se com velocidades finitas por serem as derivadas no tempo e no espaço de mesma ordem.

As equações de Navier-Stokes (3.1-2) são parabólicas em x, y, t devido aos termos não estacionários e de difusão. Portanto, uma perturbação em qualquer ponto do campo pode ser sentida por todo escoamento devido às difusões bidimensionais. Na formulação de camada limite, que será a formulação principal deste trabalho, a difusão na direção x é desprezada quando comparada com a difusão na direção normal à superfície sólida. Conseqüentemente, as equações de camada limite são do tipo de propagação de onda em relação a x e t , como vemos pelo termo $u_t + uu_x$. Isto significa que as perturbações propagam-se na direção x com velocidade local u , enquanto que, na direção y , as informações são propagadas imediatamente. A

propagação de perturbações em uma camada limite não estacionária pode ser melhor entendida pelo exame da equação característica das equações diferenciais (Wang, 1975).

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad (4.15a)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad (4.15b)$$

As Eqs.(4.15a,b) determinam, no espaço de x , y e t , zonas de influência e dependência, como ilustrado pela figura 4.1. Perturbações propagam-se no plano (x, t) conforme

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t). \quad (4.15c)$$

Em cada ponto P na camada limite AB , a velocidade u determina o ângulo de propagação, o ângulo máximo determina o ângulo da zona de influência e dependência. Na direção normal à superfície sólida, a difusão viscosa faz com que as perturbações se propagem imediatamente.

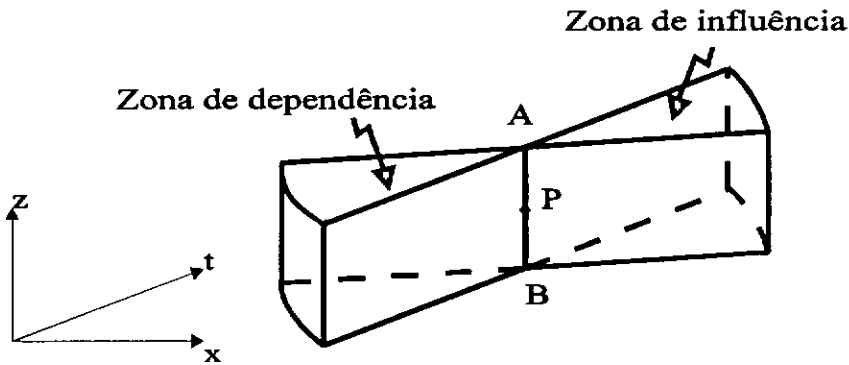


Fig.4.1 As zonas de influência e de dependência das equações de camada limite não estacionária

Em outras palavras, a perturbação no ponto P se propaga imediatamente ao longo da linha AB pelo efeito da difusão viscosa e depois se propaga pela parte externa da camada limite onde $u = U_e$ com velocidade local.

A implicação das zonas de influência e dependência na implementação de esquemas de diferenças finitas será discutida na seção a seguir.

4.4 Esquemas de Diferenças de Finitas

Apresentamos três esquemas para comparação. Inicialmente somente a discretização da equação de movimento será mostrada; a discretização da equação da continuidade será discutida no final desta seção.

Esquema I

O esquema explícito de Farn e Arpaci(1966):

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x_i} \right) + v_{i,j}^n \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \right) \\ & = \left(\frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} \right)_i^n + \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y_{j+1}} - \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y_j} \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Esquema II

O esquema implícito de Kwon, Pletcher, e Delaney(1988):

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^{n+1} \left(\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x_i} \right) + v_{i,j}^{n+1} \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \right) \\ & = \left(\frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} \right)_i^{n+1} + \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{\Delta y_{j+1}} - \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y_j} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Esquema III

O esquema de Crank-Nicholson de Hall(1969):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^n}{\Delta t} + \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \right) + \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x_i} + u_{i,j}^{n+1} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x_i} \right) \\ & + \frac{1}{4} \left(v_{i-1,j}^n \left(\frac{u_{i-1,j+1}^n - u_{i-1,j-1}^n}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \right) + v_{i,j}^n \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \right) \right) \\ & + v_{i-1,j}^{n+1} \frac{u_{i-1,j+1}^{n+1} - u_{i-1,j-1}^{n+1}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} + v_{i,j}^{n+1} \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \right) \\ & = \left(\frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} \right)_{i-1/2}^{n+1/2} \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \left(\frac{u_{i-1,j+1}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta y_{j+1}} - \frac{u_{i-1,j}^n - u_{i-1,j-1}^n}{\Delta y_j} \right) \right) \\ & + \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y_{j+1}} - \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y_j} \right) \\ & + \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \left(\frac{u_{i-1,j+1}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta y_{j+1}} - \frac{u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i-1,j-1}^{n+1}}{\Delta y_j} \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{\Delta y_{j+1}} - \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y_j} \right). \quad (4.18).$$

Nos esquemas II e III acima mencionados, os termos de derivada em x , por exemplo, u_x , são discretizados no nível atual do tempo. Desta maneira, o ponto x pode influenciar o ponto $x + dx$, e assim por diante. Logo, um ponto no início da placa influencia um ponto no final da placa imediatamente. Todavia, sem difusão na direção x , isso não pode acontecer fisicamente, pois o ponto x se encontra fora da zona de dependência do ponto $x + dx$.

Com esta consideração para a construção de um esquema mais físico para as equações de camada limite não estacionária, propomos utilizar o esquema explícito “upwind” de Warming e Beam(1975). O método “upwind” de Warming e Beam é uma variação do mais conhecido método de MacCormack; ele usa diferenças *backward* em ambos passos do preditor e do corretor.

Esquema IV. Para a equação modelo,

$$u_t + cu_x = 0, \quad (4.19)$$

o método tem seguinte forma

a) Preditor

$$u_i^{\overline{n+1}} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (4.20a)$$

b) Corretor

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[u_i^n + u_i^{\overline{n+1}} - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_i^{\overline{n+1}} - u_{i-1}^{\overline{n+1}}) - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) \right], \quad (4.20b)$$

O esquema torna-se de segunda ordem de precisão com ordens de erro de truncamento de $O[(\Delta t)^2, (\Delta t)(\Delta x), (\Delta x)^2]$ aditivas por passo do corretor. Substituindo (4.20a) em (4.20b), obtemos a forma do esquema de um passo:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(u_i^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 1)(u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n), \quad (4.21)$$

onde

$$\lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

Aplicando o esquema de Warming e Beam às equações de camada limite não estacionária, e discretizando as derivadas em relação a y por diferenças centrais de segunda ordem de precisão, temos

a) preditor

$$\begin{aligned} \overline{u_{i,j}^{n+1}} = & u_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^n (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta y} v_{i,j}^n (u_{i,j+1}^n - \\ & u_{i,j-1}^n) + \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \end{aligned} \quad (4.22a)$$

b) corretor

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{2} \left[u_{i,j}^n + \overline{u_{i,j}^{n+1}} - \frac{u_{i,j}^n \Delta t}{\Delta x} (\overline{u_{i,j}^{n+1}} - \overline{u_{i-1,j}^{n+1}}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^n (u_{i,j}^n - 2u_{i-1,j}^n + u_{i-2,j}^n) \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{2\Delta y} v_{i,j}^{n+1} (\overline{u_{i,j+1}^{n+1}} - \overline{u_{i,j-1}^{n+1}}) + \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} (\overline{u_{i,j+1}^{n+1}} - 2\overline{u_{i,j}^{n+1}} + \overline{u_{i,j-1}^{n+1}}) \right], \end{aligned} \quad (4.22b)$$

Sendo a estabilidade do esquema uma grande preocupação, faremos inicialmente um estudo sobre este aspecto. Embora uma análise de estabilidade do esquema proposto não seja disponível, podemos estimar a limitação nos espaçamentos por estabilidade baseados em resultados para o esquema original de Warming e Beam, e uma análise de um esquema modificado por Cotta, Özişik, e McRae(1985). A condição de estabilidade é $0 < \nu < 2$ para o esquema original de Warming e Beam. Um esquema modificado de Warming e Beam foi utilizado para a convecção forçada transiente em escoamento laminar em um canal por Cotta, Özişik e McRae(1985). A equação resolvida é parecida com a equação de camada limite não estacionária, portanto, a análise de estabilidade feita por Cotta, Özişik e McRae pode ser utilizada como primeira aproximação para nosso problema.

$$\lambda = \frac{|u_{max}| \Delta t}{\Delta x} < 1, \quad (4.23a)$$

$$r = \frac{|u_{max}| \Delta t}{(\Delta y)^2} < 0.5. \quad (4.23b)$$

Isto significa que o passo de tempo é limitado pelo espaçamento na direção transversal. Esta dificuldade pode ser superada utilizando-se um método analítico. A técnica da transformada integral generalizada será utilizada para tratar este problema no capítulo seguinte.

Antes de partir para resolver a equação de movimento, apresentamos primeiro a solução numérica da equação da continuidade. Ao resolver o sistema de equações, se um esquema implícito for usado para resolver a equação de movimento, a equação de continuidade deve ser resolvida iterativamente junto com a equação de movimento; se um esquema explícito for usado, a equação da continuidade deve ser resolvida apenas após a solução da equação do movimento.

Se o esquema I ou II for usado, a equação da continuidade pode ser discretizada da seguinte maneira:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} - u_{i-1,j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} = 0, \quad (4.24)$$

o erro de truncamento é portanto de $(\Delta x, \Delta y^2)$.

Se a equação do movimento for resolvida por um esquema de segunda ordem de precisão, i.e., pelo esquema de Crank-Nicholson ou pelo esquema explícito proposto, a equação da continuidade deverá ser discretizada da seguinte maneira:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} - u_{i-1,j-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1} - v_{i-1,j-1}^{n+1}}{\Delta y} = 0, \quad (4.25)$$

O esquema proposto será avaliado no Capítulo 6 por um estudo comparativo do problema de Stokes e será utilizado no Capítulo 7 no estudo da resposta da camada limite a perturbações pulsantes.

Capítulo 5

A Solução das Equações de Camada Limite Não Estacionária pela Técnica da Transformada Integral Generalizada

5.1 Introdução

No capítulo anterior resolvemos as equações de camada limite não estacionária pelo método de diferenças finitas. Mostramos pela discussão sobre a característica propagatória das equações que os esquemas implícitos de diferenças finitas não são apropriados para a solução das equações de camada limite não estacionária. Propomos então, um esquema explícito de segunda ordem de precisão para a solução das equações de camada limite não estacionária baseado no esquema de Warmig e Beam(1975) para a equação de onda. Contudo, o esquema proposto, como todos os esquemas explícitos, está sujeito a limitações no passo de tempo por condições de estabilidade numérica. O termo de difusão na direção normal à superfície é o principal responsável por esta limitação.

Por outro lado, os problemas de convecção-difusão têm sido resolvidos com bastante sucesso pela técnica da transformada integral generalizada. Recentemente, vários problemas de camada limite estacionária, interna e externa, têm sido resolvidos por este método. Os trabalhos de Cotta(1989, 1992) mostram que a técnica da transformada integral generalizada é mais eficiente para a solução das equações de camada limite estacionária que os métodos de diferenças finitas.

O objetivo deste capítulo é estender a aplicação da técnica da transformada integral à solução das equações de camada limite não estacionária. Neste capítulo, propomos um esquema misto de transformada integral generalizada/diferenças finitas para a solução das equações de camada limite não estacionária. Aplicamos a transformada integral generalizada na direção normal à superfície obtendo um conjunto de equações diferenciais parciais em variáveis de tempo e da coordenada na direção do escoamento principal. As equações resultantes são resolvidas, mais uma vez, pelo esquema de Warming e Beam(1975). Um esquema misto semelhante tem sido proposto por Gerk para resolver problemas de convecção forçada transiente em dutos.

Faremos na seção 5.2 uma breve revisão da técnica da transformada integral generalizada enfatizando os desenvolvimentos recentes na solução dos problemas de

camada limite. Na seção 5.3 definimos o problema auxiliar de autovalor e o par de transformada/inverso. Obtemos as equações transformadas das equações de camada limite não estacionária. Na seção 5.4 resolvemos as equações transformadas pelo esquema de Warming e Beam(1975).

5.2 A Técnica da Transformada Integral Generalizada

A técnica da transformada integral generalizada, desenvolvida por Mikhailov e Özişik(1978) e por Cotta(1991), é baseada numa extensão do método clássico de transformada integral.

A aplicação de transformadas integrais na solução de equações diferenciais parciais é bem conhecida. As transformadas utilizadas são geralmente transformadas bem estabelecidas na física matemática, tais como, a transformada de Laplace, a transformada de Foureir, etc. Este método é limitado aos problemas lineares difusivos.

A idéia da técnica da transformada integral generalizada é aproveitar as vantagens de técnicas clássicas para desenvolver procedimentos computacionais mais eficientes e robustos. A idéia básica deste método é transformar a equação diferencial parcial chegando-se a um conjunto infinito de equações diferenciais ordinárias para o potencial transformado. Um subconjunto truncado deste sistema é então resolvido numericamente utilizando-se rotinas bem estabelecidas de bibliotecas matemáticas, tal como a biblioteca IMSL.

Essas técnicas possibilitam a transformação de equações diferenciais parciais em sistemas de equações diferenciais ordinárias, cuja solução pode ser obtida explicitamente ou por técnicas numéricas convencionais. Basicamente, a técnica consiste em se obter uma distribuição em função de uma expansão em autofunções resultantes da solução de um problema de autovalor auxiliar 'escolhido' previamente.

A aplicação da técnica da transformada integral generalizada consiste nos seguintes passos:

- a. Escolher um problema auxiliar relacionado ao problema original;
- b. Obter o par transformada-inversa apropriado;
- c. Transformar a equação diferencial parcial, resultando um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias;
- d. Truncar o sistema infinito em ordem suficientemente grande para a precisão requerida e resolvê-lo através de rotinas numéricas disponíveis em bibliotecas científicas, tal como a do IMSL.
- e. Utilizar a fórmula da inversa, já estabelecida, a fim de se obter o potencial original.

Desde o trabalho pioneiro de Özişik e Murray(1974), a técnica da transformada integral generalizada tem sido aplicada para problemas de transferência de calor e mecânica dos fluidos cada vez mais gerais. Podemos citar alguns exemplos destes:

- a) problemas com coeficientes variáveis na equação,
- b) problemas com coeficientes variáveis nas condições de contorno,

- c) problemas com contornos variáveis,
- d) problemas que apresentem problemas auxiliares de difícil solução,
- e) problemas não lineares.

Mais recentemente, essas idéias foram estendidas para que pudessem resolver os problemas não lineares de difusão e convecção-difusão (Serfaty e Cotta, 1991). A camada limite laminar em escoamento interno foi resolvida por Cotta e Carvalho(1991). A camada limite externa ao redor de uma esfera foi resolvida por Lage e Rangel(1992). Machado e Cotta(1993) estenderam o trabalho de Cotta e Carvalho(1991) para a camada térmica interna.

O sucesso da técnica da transformada integral generalizada acima mencionado indica que esta idéia pode ser aplicada na resolução de camada limite não estacionária sobre uma placa plana, podendo ainda ser estendida para resolver as formulações de *camada delgada* e de Navier-Stokes.

5.3 A Transformada das Equações de Camada Limite Não Estacionária

As equações de camada limite não estacionária foram apresentadas na seção 4.2. As equações são não lineares e as condições de contorno não homogêneas. Para aplicar a técnica de transformada integral generalizada, temos que primeiramente homogeneizar as condições de contorno. Consideramos aqui um problema com superfície estacionária e sem injeção longitudinal, podendo a condição de contorno (4.7a) ser escrita como:

$$u(x, 0, t) = 0. \quad (5.1)$$

A condição de contorno no infinito (4.8) é substituída por:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{em } y = H, \quad (5.2)$$

onde H representa uma distância suficientemente longa da superfície sólida.

Para a solução das Eqs.(4.1-2), adota-se o seguinte problema auxiliar de autovalor

$$\frac{d^2 \psi_i}{dy^2} + \mu_i^2 \psi_i = 0, \quad (5.3)$$

em $0 < y < H$, com as condições de contorno,

$$\psi_i = 0, \quad y = 0, \quad (5.4a)$$

$$\frac{d\psi_i}{dy} = 0, \quad y = H, \quad (5.4b)$$

onde ψ_i é a autofunção e μ_i seu autovalor correspondente. Podemos obter facilmente

$$\psi_i = \sin \mu_i y, \quad (5.5a)$$

$$\mu_i = \frac{(2i-1)\pi}{2H}. \quad (5.6b)$$

Demonstra-se que as autofunções, ψ_i , possuem a propriedade de ortogonalidade, ou seja:

$$\int_0^H \psi_i(y)\psi_j(y)dy = \delta_{ij}N_{Yi}, \quad (5.7)$$

onde N_{Yi} é a norma definida por

$$N_{Yi} = \int_0^H \psi_i^2(y)dy = \frac{H}{2}. \quad (5.8)$$

O método de solução consiste, primeiramente, em se definir o seguinte par de transformada integral:

Transformada Integral:

$$\bar{U}_i(x, t) = \int_0^H \frac{\psi_i(y)}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}}} U(x, y, t) dy, \quad (5.9a)$$

Inversa:

$$U(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(y)}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}}} \bar{U}_i(x, t), \quad (5.10b)$$

A velocidade na direção normal ao escoamento pode ser obtida por integração da equação de continuidade ao longo da direção y ,

$$V(x, y, t) = V_W(x, t) - \int_0^y \frac{\partial U}{\partial x} dy, \quad (5.11)$$

substituindo-se a Inversa, Eq.(5.10b), temos então

$$V(x, y, t) = V_W(x, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_{\eta k}^{\frac{1}{2}}} F_k(y) \frac{d\bar{U}_k}{dx}, \quad (5.12)$$

onde

$$F_k(y) = \int_0^y \psi_k(y') dy', \quad (5.13)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (4.1) por $\psi_i(y)$ e integrando-os na coordenada normal a parede entre os limites 0 e H , obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{1}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}}} \left[\int_0^H \psi_i(y) \frac{\partial U}{\partial t} dy + \int_0^H \psi_i(y) U \frac{\partial U}{\partial x} dy + \int_0^H \psi_i(y) V \frac{\partial U}{\partial y} dy \right] = -\mu_i^2 \bar{U}_i(x, t), \quad (5.14)$$

A formula de inversão (5.10b) e a expressão para a velocidade transversal (5.12) são então empregadas, resultando em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_i(x, t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (A_{ijk} - B_{ijk}) \bar{U}_j(x, t) \frac{\partial \bar{U}_k(x, t)}{\partial x} \\ = - \sum_{k=1}^{\infty} [V_W(x) C_{ik} + \delta_{ik} \frac{\mu_i^2}{Re_L}] \bar{U}_k(x, t), \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde

$$A_{ijk} = \frac{1}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}} N_{\eta j}^{\frac{1}{2}} N_{\eta k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^H \psi_i(y) \psi_j(y) \psi_k(y) dy, \quad (5.16a)$$

$$B_{ijk} = \frac{1}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}} N_{\eta j}^{\frac{1}{2}} N_{\eta k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^H \psi_i(y) \psi_j'(y) F_k(y) dy, \quad (5.16b)$$

$$C_{ik} = \frac{1}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}} N_{\eta k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^H \psi_i(y) \psi_k'(y) dy, \quad (5.16c)$$

Os coeficientes A_{ijk} , B_{ijk} , e C_{ik} são avaliados no Apêndice A.

A condição de entrada pode ser também transformada para se obter condições necessárias para solução da Eq.(5.15). Aplicando-se, portanto, a transformada integral à Eq.(4.9a), obtém se:

$$\bar{U}_i(0, t) = \int_0^H U_1(0, y)\psi_i(y)dy. \quad (5.17)$$

De mesmo modo, podemos obter a condição inicial:

$$\bar{U}_i(x, 0) = \int_0^H U_0(x, y)\psi_i(y)dy. \quad (5.18)$$

As equações transformadas serão resolvidas na próxima seção pelo método de diferenças finitas.

5.4 A Solução das Equações Transformadas pelo Método de Diferenças Finitas

A Eq.(5.15) constitui-se num conjunto infinito de equações diferenciais hiperbólicas. Podemos truncá-lo e resolver o sistema resultante usando o esquema de Warming e Beam descrito na seção anterior. Assim, o esquema não está sujeito as limitações de estabilidade numérica impostas pela direção transversal.

As transformadas \bar{U}_i são funções definitas em $x_1 < x < x_2$ e $t > 0$, onde x_1 e x_2 são respectivamente as coordenadas de início e término do intervalo de integração. Discretizamos o tempo t e a coordenada x com espaçamentos uniformes, entretanto discretizações não uniformes podem ser obtidas com uma simples generalização.

Sejam Δx e Δt respectivamente os espaçamentos no tempo t e na coordenada x , os pontos de discretização podem ser escritos como:

$$x_l = x_1 + (l - 1)\Delta x$$

$$t_n = n\Delta t$$

A transformada no ponto (x_l, t_n) é representada por:

$$\bar{U}_{i,l}^n = \bar{U}_i(x_l, t_n)$$

As equações transformadas são discretizadas aplicando-se o esquema de Warming e Beam.

Preditor:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{i,j}^{n+1} = & \bar{U}_{i,l}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NT} (A_{ijk} - B_{ijk}) \bar{U}_{j,l}^n (\bar{U}_{k,l}^n - \bar{U}_{k,l-1}^n) \\ & - \Delta t \sum_{k=1}^{NT} [V_W(x_l) C_{ik} + \delta_{ik} \frac{\mu_i^2}{Re_L}] \bar{U}_{k,l}^n,\end{aligned}\quad (5.19a)$$

Corretor:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{2} \left(\bar{U}_{i,l}^n + \bar{U}_{i,l}^{on1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NT} (A_{ijk} - B_{ijk}) \bar{U}_{j,l}^{on1} (\bar{U}_{k,l}^{on1} - \bar{U}_{k,l-1}^{on1}) \right. \\ & - \Delta t \sum_{k=1}^{NT} [V_W(x_l) C_{ik} + \delta_{ik} \frac{\mu_i^2}{Re_L}] \bar{U}_{k,l}^{on1} \\ & \left. - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NT} (A_{ijk} - B_{ijk}) \bar{U}_{j,l}^n (\bar{U}_{k,l}^n - 2\bar{U}_{k,l-1}^n + \bar{U}_{k,l-2}^n) \right).\end{aligned}\quad (5.19b)$$

O critério de estabilidade estabelecido por Warming e Beam desenvolvido para sistemas de equações hiperbólicas similares à Eqs.(5.19) é dado por

$$0 \leq |u_{max}| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 2$$

Este critério pode ser usado como referência no nosso esquema.

O esquema proposto será avaliado no Capítulo 6 por um estudo comparativo do problema de Stokes e será utilizado no Capítulo 7 no estudo da resposta de camadas limite a perturbações pulsantes.

Capítulo 6

Um Estudo Numérico dos Problemas de Stokes e de Rayleigh

6.1 O problema de Stokes e o problema de Rayleigh

O objetivo deste capítulo é avaliar os métodos numérico e numérico-analítico propostos nos Capítulos 4 e 5 para a solução das equações de camada limite não estacionária através da comparação das soluções aproximadas obtidas com as soluções exatas de dois problemas clássicos em mecânica dos fluidos: o problema de Stokes e o problema de Rayleigh.

A avaliação de soluções aproximadas faz parte importante do desenvolvimento de códigos computacionais para resolver as equações diferenciais parciais que ocorrem em mecânica dos fluidos. Isto é feito, geralmente, por comparação entre as soluções aproximadas obtidas com soluções exatas ou dados experimentais disponíveis. Muitas vezes as duas comparações são utilizadas sem distinguir a diferença profunda entre as duas. Isto é, provavelmente, devido à ambiguidade no entendimento do procedimento da solução do problemas físicos. Segundo Hirata(1992), o procedimento da solução de um problema físico constitui-se da modelagem do problema, da solução do modelo, e da análise dos resultados. Os erros dos resultados podem ser introduzidos na aproximação da modelagem ou na solução aproximada do modelo. Os dois tipos de erro devem ser distinguidos cuidadosamente. Infelizmente, na maioria dos casos, esta distinção é muito difícil ou impossível. A comparação de soluções aproximadas com dados experimentais está sujeita a difícil interpretação porque os erros de origens diferentes são misturados e muitas vezes se cancelam, apresentando resultados aparentemente corretos que podem induzir conclusões erradas sobre a modelagem ou o método de solução do modelo. Por outro lado, soluções analíticas são raras. Contudo, a comparação com estas poucas soluções analíticas são extremamente importantes no desenvolvimento de códigos computacionais. E a avaliação de modelagem somente pode ser feita usando-se métodos de solução rigorosamente avaliados.

Para avaliarmos o esquema de diferenças finitas e o esquema misto de diferenças finitas/transformada integral generalizada propostos nos capítulos anteriores, comparamos as soluções aproximadas com as soluções exatas do problema de Stokes e do problema de Rayleigh, as quais são soluções exatas das equações de camada limite

não estacionária e das equações de Navier-Stokes. Na realidade, devido à infinidade do escoamento numa direção espacial, as equações governantes reduzem-se a uma equação de difusão. Portanto, somente a aproximação dos termos de difusão é avaliada. Os termos de convecção são identicamente nulos, não podendo ser avaliadas as aproximações deles.

O problema de Stokes é o seguinte: uma placa plana infinita está em um fluido em repouso. A placa oscila no seu plano periodicamente com uma velocidade $u_w(t) = U_0 \cos \omega t$, onde U_0 é a amplitude máxima de velocidade, ω a frequência e t o tempo. O fluido se movimenta conforme a oscilação da placa devido ao efeito da viscosidade. O movimento do fluido pode ser descrito pelas equações de camada limite não estacionária. Neste caso particular, a equação diferencial parcial que descreve o movimento oscilatório do fluido pode ser escrita como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (6.1)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$u \rightarrow 0, \quad \text{quando } y \rightarrow \infty, \quad (6.2a)$$

$$u = U_0 \cos \omega t, \quad \text{em } y = 0. \quad (6.2b)$$

onde ν é a viscosidade cinemática do fluido.

Observamos que a Eq.(6.1) é uma equação de difusão. A solução exata de oscilação do fluido foi dada por Stokes(1851) na forma seguinte

$$u = U_0 \exp(-\eta) \cos(\omega t - \eta), \quad (6.3)$$

onde η é definido como

$$\eta = y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \quad (6.4)$$

A solução descrita pela Eq.(6.3) é mostrada na Fig.6.1.

Como segundo caso de teste, consideramos o problema de Rayleigh(1871). Neste problema, uma placa plana infinita subitamente entra em movimento com velocidade uniforme U_0 no seu plano no meio de um fluido incompressível inicialmente em repouso. O problema de Rayleigh pode ser descrito pela mesma equação diferencial parcial do problema de Stokes, mas com as seguintes condições inicial e de contorno:

$$u = 0, \quad \text{em } y > 0, \quad \text{para } t = 0, \quad (6.5a)$$

$$u = U_0, \quad \text{em } y = 0, \quad \text{para } t > 0, \quad (6.5b)$$

$$u \rightarrow 0, \quad \text{quanto } y \rightarrow \infty, \quad \text{para } t > 0, \quad (6.5c)$$

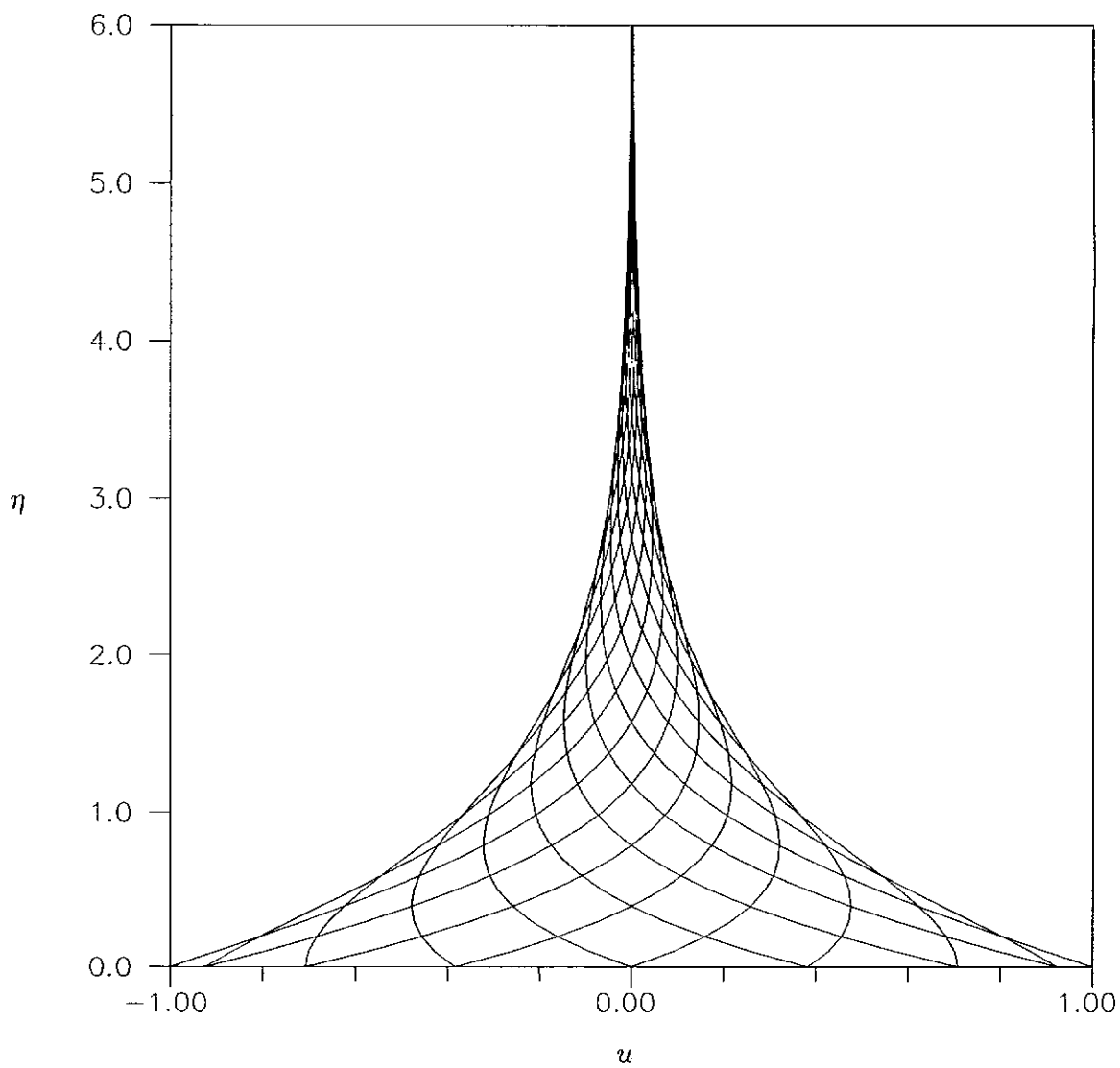


Fig.6.1 A Solução Exata do Problema de Stokes.

A solução exata deste problema foi dada por Rayleigh(1911), na forma seguinte

$$u = U_0(1 - \operatorname{erf}(\eta)), \quad (6.6)$$

onde

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}. \quad (6.7)$$

Podemos observar a difusão de vorticidade gerada no instante inicial do movimento de fronteira ao interior do fluido.

Na próxima seção resolvemos o problema de Stokes usando o esquema de diferenças finitas proposto e os três esquemas existentes: explícito, implícito, e Crank-Nicholson. Os esquemas são apresentados em formas simplificadas para malha uniforme. Estudamos a convergência temporal e espacial dos esquemas, e obtemos soluções com melhor precisão usando a extrapolação de Richardson. Na seção 6.3 resolvemos o problema de Stokes usando a técnica da transformada integral generalizada. Implementamos também uma transformação da equação para acelerar a convergência da solução. Na seção 6.4 resolvemos o problema de Rayleigh pela técnica da transformada integral generalizada usando um domínio de integração fixo e outro variado analiticamente. Na última seção do capítulo, resumimos as principais conclusões deste capítulo.

6.2 Soluções pelos Métodos de Diferenças Finitas do Problema de Stokes

Nesta seção, consideramos a solução do problema de Stokes pelos métodos de diferenças finitas. Numericamente, somente podemos resolver problemas de domínio finito. Como na maioria dos trabalhos numéricos sobre escoamentos externos, aplicamos a condição de contorno no infinito em um ponto bastante distante da placa.

Para conhecer a posição certa onde aplicar a condição de contorno, analisamos o problema usando mais uma vez a técnica de “análise de escalas”.

Considerando a viscosidade cinemática pequena, a equação 6.1 possui uma solução externa trivial, isto é:

$$u_e(y, t) = 0 \quad (6.8)$$

A solução significa que o escoamento está em repouso permanentemente. É óbvio que esta solução somente satisfaz a condição de contorno no infinito e não a condição de contorno na placa. Portanto, podemos concluir que existe uma camada cisalhante, junto à placa, onde o termo de viscosidade não pode ser desprezado.

A ordem de grandeza das variáveis nesta camada viscosa são as seguintes:

$$O(u) \sim U_0, \quad (6.9a)$$

$$O(t) \sim \frac{1}{\omega}, \quad (6.9b)$$

$$O(y) \sim L, \quad (6.9c)$$

onde L é a espessura de penetração da influência da placa. Substituindo-as na equação (6.1), temos:

$$\omega U_0 \sim \nu \frac{U_0}{L^2}. \quad (6.10)$$

Portanto,

$$L \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}. \quad (6.11)$$

Observamos que quanto maior a viscosidade cinemática, maior a espessura de penetração. Para a mesma viscosidade, quanto maior a frequência, ou seja, quanto menor a escala de tempo, menor é a espessura de penetração. Por outro lado, temos que observar que a expressão (6.11) não fornece o valor exato da espessura de penetração e sim uma estimativa da ordem de grandeza.

Na solução numérica, precisamos que o domínio computacional seja maior que a espessura de penetração, para que a condição de contorno seja aplicada em um ponto fora da camada cisalhante, onde o escoamento já atingiu seu estado no infinito.

Neste trabalho, adotamos inicialmente um domínio computacional como

$$H = 20\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad (6.12)$$

Isto significa que, no problema de Stokes, a condição (6.2a) é aplicada em $\eta = 20$, que foi definido pela Eq.(6.4). Uma malha uniforme é utilizada para a discretização do domínio computacional em N pontos, portanto o espaçamento na direção normal à placa é:

$$\Delta y = \frac{H}{N-1}. \quad (6.13)$$

Para a Eq.(6.1) com malha uniforme, os esquemas discutidos no capítulo anterior têm formas simplificadas:

Esquema explícito:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta y)^2}. \quad (6.14)$$

O esquema implícito de Kwon, Pletcher, e Delaney(1988):

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}. \quad (6.15)$$

O esquema de Crank-Nicholson de Hall(1969):

$$\frac{u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^n}{\Delta t} = \frac{\nu}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta y)^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right). \quad (6.16)$$

Preditor:

$$\bar{u}_j^{n+1} = u_j^n + \nu \Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta y)^2}. \quad (6.17a)$$

Corretor:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_j^n + \bar{u}_j^{n+1} + \nu \Delta t \frac{\bar{u}_{j+1}^{n+1} - 2\bar{u}_j^{n+1} + \bar{u}_{j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right). \quad (6.17b)$$

Há três variáveis físicas no problema: U_0 , ω , e ν . Neste estudo comparativo de métodos numéricos, nosso principal objetivo não é a variação da solução com estas variáveis. Portanto, somente um conjunto de dados é calculado para $U_0 = 1.0$, $\omega = 2\pi$ e $\nu = 0.05$.

Neste problema, estamos interessados em soluções periódicas a longo tempo. Na primeira tabela, mostramos o estabelecimento da periodicidade do escoamento devido ao movimento periódico da placa.

Pela tabela, vemos que a solução tende a ser periódica em $t = 20$, ou seja, depois de vinte períodos. Isto significa que depois de vinte períodos, a solução esquece completamente seu estado inicial. A nossa conclusão é diferente da conclusão de Kwon et. al.(1988) que diz ser a solução periódica depois de apenas seis períodos. Nos estudos numéricos daqui por diante, os resultados serão apresentados para períodos de tempo iguais ou maiores que vinte períodos.

Tabela 6.1

Periodicidade da Solução do Problema de Stokes pelo Esquema Proposto

$$\Delta t = 0.001, N = 201, H = 20(2\nu/\omega)^{\frac{1}{2}}$$

η	$t = 5.0$	$t = 10.0$	$t = 15.0$	$t = 20.0$	$t = 25.0$
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.4	0.617323	0.617295	0.617290	0.617289	0.617289
1.0	0.198947	0.198877	0.198866	0.198863	0.198863
2.0	-0.055855	-0.055984	-0.056005	-0.056012	-0.056012
3.0	-0.048928	-0.049096	-0.049126	-0.049136	-0.049136
4.0	-0.011731	-0.011915	-0.011950	-0.011962	-0.011962
6.0	0.002585	0.002439	0.002401	0.002386	0.002386
8.0	0.000077	0.000023	-0.000008	-0.000022	-0.000022
10.0	-0.000016	0.000014	-0.000001	-0.000013	-0.000013
12.0	-0.000035	0.000037	0.000036	0.000028	0.000028
15.0	-0.000053	0.000007	0.000019	0.000016	0.000016
18.0	-0.000023	-0.000001	0.000007	0.000007	0.000007
20.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Concentremos agora nosso estudo na influência das variáveis computacionais. O parâmetro utilizado para avaliar a convergência das soluções é a derivada da velocidade na placa, cuja solução exata é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial y}_{y=0} = U_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right). \quad (6.18)$$

Para um certo H , a discretização é determinada por N e Δt , por isso, um estudo de convergência foi feito com base na variação destes dois parâmetros. Para verificar a convergência das soluções, usamos a extrapolação de Richardson para obtermos soluções mais precisas, baseadas nas soluções calculadas. A seguinte expressão é utilizada para obter uma solução extrapolada com maior precisão espacial e com mesma precisão temporal baseada em duas soluções de resolução espacial diferente e com mesma resolução temporal:

$$\frac{\partial u}{\partial y}_{\Delta\eta \rightarrow 0} = \frac{\partial u}{\partial y}_{\frac{1}{2}\Delta\eta} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial y}_{\frac{1}{2}\Delta\eta} - \frac{\partial u}{\partial y}_{\Delta\eta} \right). \quad (6.19)$$

Da mesma maneira, podemos obter uma solução com melhor resolução temporal pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial u}{\partial y}_{\Delta t \rightarrow 0} = \frac{\partial u}{\partial y}_{\frac{1}{2}\Delta t} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial y}_{\frac{1}{2}\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial y}_{\Delta t} \right). \quad (6.20)$$

Os resultados numéricos são apresentados nas Tabelas 6.2-6.5.

Tabela 6.2

Convergência da Solução do Problema de Stokes pelo Esquema Explícito

$$t = 20.0, H = 20(2\nu/\omega)^{\frac{1}{2}}$$

Δt	$N = 41$	$N = 81$	$N = 161$	Extrap.
0.002	-7.535094	-7.886825	-7.974529	-8.003763
0.001	-7.537607	-7.893777	-7.984186	-8.014322
Extrap.	-7.538444	-7.896095	-7.987405	-8.017842

Tabela 6.3

Convergência da Solução do Problema de Stokes pelo Esquema Implícito

$$t = 20.0, H = 20(2\nu/\omega)^{\frac{1}{2}}$$

Δt	$N = 41$	$N = 81$	$N = 161$	$N = 321$	Extrap.
0.010	-7.563763	-7.968166	-8.088158	-8.126220	-8.138907
0.005	-7.552184	-7.934803	-8.041389	-8.072156	-8.082412
0.002	-7.544994	-7.914430	-8.012939	-8.039320	-8.048114
0.001	-7.542557	-7.907580	-8.003391	-8.028309	-8.036615
Extrap.	-7.541744	-7.905296	-8.000208	-8.024638	-8.032782

Tabela 6.4

Convergência da Solução do Problema de Stokes pelo Esquema de Crank-Nicholson

$$t = 20.0, H = 20(2\nu/\omega)^{\frac{1}{2}}$$

Δt	$N = 41$	$N = 81$	$N = 161$	$N = 321$	Extrap.
0.010	-7.541120	-7.901894	-7.995051	-8.018516	-8.026337
0.005	-7.540337	-7.900982	-7.994104	-8.017561	-8.025380
0.002	-7.540129	-7.900737	-7.993850	-8.017304	-8.025122
0.001	-7.540103	-7.900706	-7.993818	-8.017271	-8.025089
Extrap.	-7.540094	-7.900695	-7.993807	-8.017260	-8.025078

Tabela 6.5

Convergência da Solução do Problema de Stokes pelo Esquema Proposto

$$t = 20.0, H = 20(2\nu/\omega)^{\frac{1}{2}}$$

Δt	$N = 41$	$N = 81$	$N = 161$	Extrap.
0.002	-7.540340	-7.901609	-7.996887	-8.028646
0.001	-7.540155	-7.900915	-7.994414	-8.025580
Extrap.	-7.540093	-7.900684	-7.993589	-8.024558

Por estas tabelas, observamos que as soluções convergem, para um valor diferente da solução exata, que nos fornece $\partial u/\partial y(y = 0) = -8.025$. Uma maior resolução espacial faz a solução convergir para a solução exata, enquanto uma maior resolução temporal faz a solução convergir para um resultado diferente da solução exata. Portanto, podemos concluir que este erro é devido à aplicação da condição de contorno a uma distância finita, em vez de aplicá-la no infinito, isto é, a resolução espacial é a responsável pelo erro. Um estudo da influência de H é feito na tabela 6.6, onde usamos o mesmo Δt para todos os cálculos e mantemos a mesma resolução espacial. Isto é feito aumentando-se o número de pontos de discretização proporcionalmente ao valor de H . Estudamos então a influência de H e $\Delta \eta$ sobre a solução.

Tabela 6.6

Influência de H na Solução do Problema de Stokes pelo Esquema Proposto

$$\Delta t = 0.001, t = 20.0$$

H	$N = 41$	$N = 81$	$N = 161$	$N = 321$
10.0	-7.907608	-8.003419	-8.028336	-8.034971
15.0	-7.752589	-7.963068	-8.017786	-8.032112
20.0	-7.542557	-7.907580	-8.003391	-8.028309
25.0	-7.283674	-7.837270	-7.985145	-8.023535

Note que para os cálculos realizados com um mesmo $\Delta \eta$, os resultados são aproximados, embora os H sejam diferentes. Entretanto é evidente que para um dado H , um menor espaçamento fornecerá uma solução mais próxima da exata.

A comparação das soluções de diferenças finitas com a solução exata de Stokes é mostrada na tabelas (6.11) e (6.7).

Tabela 6.7

Soluções do problema de Stokes por Métodos de Diferenças Finitas
Convergência de $u_y(0)$ ($H = 5\sqrt{\nu t}$)

η	Explícito	Implícito	Crank-Nicolson	Warming-Beam	Exata
0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1.41421	0.03768	0.03858	0.03813	0.03813	0.03791
2.82843	-0.05637	-0.05571	-0.05604	-0.05604	-0.05623
4.24264	-0.00641	-0.00649	-0.00645	-0.00645	-0.00650
5.65685	0.00294	0.00285	0.00290	0.00290	0.00283
7.07107	0.00068	0.00068	0.00068	0.00068	0.00060
8.48528	-0.00005	-0.00004	-0.00004	-0.00004	-0.00012
9.89949	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	-0.00004
11.31371	0.00005	0.00005	0.00005	0.00005	0.00000
12.72792	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00000
14.14214	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

6.3 Soluções pela Técnica da Transformada Integral Generalizada do Problema de Stokes

Consideramos nesta seção a solução do problema de Stokes pela técnica da transformada integral generalizada. A diferença entre este problema e os já resolvidos pela técnica da transformada integral generalizada se encontra na condição de contorno não homogênea e no domínio semi-infinito da solução.

Para a aplicação da transformada integral generalizada, precisamos homogeneizar as condições de contorno. Introduzindo uma nova variável dependente

$$w = u - U_0 \cos \omega t, \quad (6.21)$$

ou seja

$$u = w + U_0 \cos \omega t, \quad (6.22)$$

a equação governante e as condições de contorno, escritas na nova variável, tornam-se:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - U_0 \omega \sin \omega t = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (6.23)$$

$$w \rightarrow -U_0 \cos \omega t, \quad \text{quando } y \rightarrow \infty, \quad (6.24a)$$

$$w = 0, \quad \text{em } y = 0. \quad (6.24b)$$

A condição de contorno não homogênea é transferida de $y = 0$ para o infinito e é substituída por uma condição de contorno homogênea:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \text{em } y = H, \quad (6.25)$$

onde H representa uma posição suficientemente longe da placa, a qual pode ser determinada da mesma maneira como na seção anterior.

O problema auxiliar de autovalor para o problema de Stokes é o mesmo para a camada limite não estacionária discutido no capítulo 5.

$$\frac{d^2 \psi_i}{dy^2} + \lambda_i^2 \psi_i = 0, \quad (6.26)$$

em $0 < y < H$, com as condições de contorno,

$$\psi_i = 0, \quad y = 0, \quad (6.27a)$$

$$\frac{d\psi_i}{dy} = 0, \quad y = H, \quad (6.27b)$$

onde ψ_i é a autofunção e λ_i seu autovalor correspondente sendo, da mesma forma como para camada limite não estacionária,

$$\psi_i = \sin(\lambda_i y), \quad (6.28)$$

$$\lambda_i = \frac{(2i - 1)\pi}{2H}. \quad (6.29)$$

As autofunções, ψ_i , possuem a propriedade de ortogonalidade, ou seja:

$$\int_0^H \psi_i(y) \psi_j(y) dy = \delta_{ij} N_i, \quad (6.30)$$

onde N_i é a norma definida por

$$N_i = \int_0^H \psi_i^2(y) dy = \frac{H}{2}. \quad (6.31)$$

Definimos o seguinte par de transformada integral:
Transformada Integral:

$$\bar{w}_i(t) = \int_0^H \frac{\psi_i(y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} w(y, t) dy, \quad (6.32a)$$

Inversa:

$$w(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} \bar{w}_i(t), \quad (6.32b)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (6.1) por $\psi_i(y)$ e integrando-os em y entre os limites 0 e H , obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \left[\int_0^H \psi_i(y) \frac{\partial w}{\partial t} dy - \int_0^H \psi_i(y) U_0 \omega \sin \omega t dy \right] = -\nu \lambda_i^2 \bar{w}_i(t), \quad (6.33)$$

a qual pode ser escrita como:

$$\frac{d\bar{w}_i}{dt} + \nu \lambda_i^2 \bar{w}_i = f_i(t), \quad (6.34)$$

onde $f_i(t)$ é definida como:

$$f_i(t) = \int_0^H \psi_i(y) U_0 \omega \sin \omega t dy = \frac{U_0 \omega \sin \omega t}{\lambda_i N_i^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.35)$$

A equação (6.34) possui a seguinte solução geral na forma analítica:

$$\bar{w}_i = \exp(-\nu \lambda_i^2 t) \left(C + \int \exp(\nu \lambda_i^2 t) f_i dt \right), \quad (6.36)$$

onde C é uma constante relacionada com a condição inicial. Avaliando a integral da solução, temos:

$$\bar{w}_i = C \exp(-\nu \lambda_i^2 t) + \frac{U_0 \omega (\nu \lambda_i^2 \sin \omega t - \omega \cos \omega t)}{N_i^{\frac{1}{2}} \lambda_i (\omega^2 + \nu^2 \lambda_i^4)}. \quad (6.37)$$

Podemos observar pela solução (6.39) que a influência da condição inicial decai exponencialmente e então não é relevante à solução periódica dominante após um longo tempo. Desprezando o termo exponencialmente pequeno, para um tempo t suficientemente grande, temos a seguinte solução periódica para a transformada:

$$\bar{w}_i = \frac{U_0 \omega (\nu \lambda_i^2 \sin \omega t - \omega \cos \omega t)}{N_i^{\frac{1}{2}} \lambda_i (\omega^2 + \nu^2 \lambda_i^4)}. \quad (6.38)$$

Temos então a solução do problema de Stokes:

$$u = U_0 \cos \omega t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} \bar{w}_i(t). \quad (6.39)$$

A solução (6.39) difere da solução exata (6.3) pelas aproximações introduzidas no tratamento da condição de contorno no infinito. Na Tabela (6.8) comparamos as soluções obtidas pela técnica da transformada integral generalizada com diferentes termos do somatório considerados com a solução exata de Stokes(1851).

Tabela 6.8

Solução do problema de Stokes pela GITT

Convergência da velocidade u ($t = 20.0$, $H = 20\sqrt{2\nu/\omega}$)

η	N=10	N=20	N=30	N=40	N=50	Exata
0.000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1.000	0.25857	0.19590	0.19827	0.19893	0.19880	0.19877
2.000	-0.09379	-0.05373	-0.05675	-0.05621	-0.05636	-0.05632
3.000	-0.07372	-0.05141	-0.04918	-0.04921	-0.04929	-0.04929
4.000	0.01931	-0.01022	-0.01172	-0.01191	-0.01195	-0.01197
5.000	0.01331	0.00042	0.00187	0.00196	0.00191	0.00191
6.000	-0.02218	0.00367	0.00220	0.00242	0.00237	0.00238
7.000	-0.00548	-0.00045	0.00071	0.00073	0.00069	0.00069
8.000	0.02000	0.00098	0.00009	-0.00001	-0.00004	-0.00005
9.000	0.00358	-0.00105	-0.00012	-0.00008	-0.00011	-0.00011
10.000	-0.01714	0.00083	-0.00016	-0.00001	-0.00005	-0.00004

Na Tabela (6.8) mostramos a convergência da velocidade obtida após um período, para diferentes termos do somatório considerados.

Tabela 6.9

Solução do problema de Stokes pela GITT

Convergência da velocidade u para um período ($\eta = 2.0$, $H = 20\sqrt{2\nu/\omega}$)

t	N=10	N=20	N=30	N=40	N=50	Exata
20.000	-0.09379	-0.05373	-0.05675	-0.05621	-0.05636	-0.05632
20.062	-0.01011	-0.00877	-0.00325	-0.00576	-0.00449	-0.00494
20.125	0.07510	0.03753	0.05074	0.04557	0.04806	0.04719
20.188	0.14888	0.07811	0.09700	0.08996	0.09329	0.09214
20.250	0.20000	0.10680	0.12850	0.12065	0.12432	0.12306
20.312	0.22066	0.11923	0.14043	0.13298	0.13642	0.13525
20.375	0.20774	0.11351	0.13099	0.12506	0.12776	0.12684
20.438	0.16318	0.09051	0.10160	0.09810	0.09964	0.09913
20.500	0.09379	0.05373	0.05675	0.05621	0.05636	0.05632

A convergência da solução pode ser acelerada pela implementação de uma transformação na equação. Escrevemos a equação(6.23) na seguinte forma:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P(t), \quad (6.40)$$

onde o termo de fonte $P(t)$ é definido como

$$P(t) = U_0 \omega \sin \omega t \quad (6.41)$$

com as condições de contorno (6.42a, b, c) inalteradas.

Escrevemos a solução na seguinte forma

$$w(y, t) = w_f(y, t) + w^*(y, t), \quad (6.43)$$

onde a função $w_f(y, t)$ satisfaz a seguinte equação:

$$\nu \frac{\partial w_f}{\partial y^2} + P(t) = 0, \quad (6.44)$$

com as condições de contorno:

$$\frac{\partial w_f}{\partial y} \Big|_{y=H} = 0, \quad \text{e} \quad w_f(0, t) = 0 \quad (6.45)$$

A função $w_f(y, t)$ pode ser obtida facilmente:

$$w_f(y, t) = \frac{P(t)}{\nu} \left(Hy - \frac{y^2}{2} \right) \quad (6.46)$$

Substituindo a Eq.(6.43) na Eq.(6.41), podemos obter a equação para w^* :

$$\frac{\partial w^*}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + P^*(y, t) \quad (6.47)$$

onde o novo termo de fonte $P^*(y, t)$ é definido como:

$$P^*(y, t) = -\frac{\partial w_f}{\partial t} = \frac{P'(t)}{\nu} \left(\frac{y^2}{2} - Hy \right) \quad (6.48)$$

onde $P'(t)$ é a derivada temporal de $P(t)$:

$$P'(t) = \frac{dP(t)}{dt} = U_0 \omega^2 \cos \omega t \quad (6.49)$$

Baseado no mesmo problema auxiliar definido pelas Eqs.(6.26-6.31), o par transformada/inversa é definida como:

Transformada Integral:

$$\bar{w}_i^*(t) = \int_0^H \frac{\psi_i(y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} w^*(y, t) dy, \quad (6.50a)$$

Inversa:

$$w^*(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} \bar{w}_i^*(t), \quad (6.50b)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (6.47) por $\psi_i(y)$ e integrando-os em y entre os limites 0 e H , obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{d\bar{w}_i^*}{dt} + \nu \lambda_i^2 \bar{w}_i^* = f_i^*(t), \quad (6.51)$$

onde a função $f_i^*(t)$ é definida como:

$$f_i^*(t) = \frac{P'(t)}{\nu} \int_0^H \frac{\psi_i(y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{y^2}{2} - Hy \right) dy \quad (6.52)$$

A equação (6.51) possui a solução analítica na forma da equação (6.36). Avaliando a integral e desprezando o termo exponencialmente pequeno, obtemos a seguinte solução:

$$\bar{w}_i^* = - \frac{U_0 \omega^2 (\nu \lambda_i^2 \cos \omega t - \omega \sin \omega t)}{\nu \lambda_i^3 N_i^{\frac{1}{2}} (\omega^2 + \nu^2 \lambda_i^4)}. \quad (6.53)$$

Retornando à solução física, temos:

$$u = U_0 \cos \omega t + \frac{P(t)}{\nu} \left(Hy - \frac{y^2}{2} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} \bar{w}_i^*(t). \quad (6.54)$$

A convergência da solução (6.54) é mostrada nas tabelas (6.10). A comparação entre a solução obtida com “filtro” e a solução obtida sem “filtro” é apresentada na Tabela 6.11. Podemos observar claramente a aceleração da convergência obtida pela implementação da transformação da equação.

Tabela 6.10

Solução do problema de Stokes pela GITT com “filtro”

Convergência da velocidade u para um período($\eta = 2.0, H = 20\sqrt{2\nu/\omega}$)

t	N=10	N=20	N=30	N=40	N=50	Exata
20.000	-0.09379	-0.05373	-0.05675	-0.05621	-0.05636	-0.05632
20.062	-0.04659	-0.00239	-0.00535	-0.00483	-0.00498	-0.00494
20.125	0.00770	0.04931	0.04687	0.04728	0.04716	0.04719
20.188	0.06082	0.09350	0.09195	0.09219	0.09212	0.09214
20.250	0.10467	0.12346	0.12303	0.12307	0.12306	0.12306
20.312	0.13260	0.13462	0.13538	0.13521	0.13526	0.13525
20.375	0.14033	0.12529	0.12712	0.12677	0.12687	0.12684
20.438	0.12670	0.09688	0.09951	0.09902	0.09916	0.09913
20.500	0.09379	0.05373	0.05675	0.05621	0.05636	0.05632

Tabela 6.11

Comparação entre Soluções do problema de Stokes pela GITT

Convergência da velocidade u para um período($\eta = 2.0, H = 20\sqrt{2\nu/\omega}, NT = 50$)

t	sem “filtro”	com “filtro”	Exata
20.000	-0.05636	-0.05636	-0.05632
20.062	-0.00449	-0.00498	-0.00494
20.125	0.04806	0.04716	0.04719
20.188	0.09329	0.09212	0.09214
20.250	0.12432	0.12306	0.12306
20.312	0.13642	0.13526	0.13525
20.375	0.12776	0.12687	0.12684
20.438	0.09964	0.09916	0.09913
20.500	0.05636	0.05636	0.05632

6.4 Solução pela Técnica da Transformada Integral Generalizada do Problema de Rayleigh

Resolvemos nesta seção o problema de Rayleigh usando a técnica da transformada integral generalizada. Fazemos a seguinte transformação da variável dependente para homogeneizar a condição de contorno.

Seja

$$w = u - U_0 \quad (6.55)$$

ou

$$u = w + U_0 \quad (6.56)$$

Substituindo a expressão acima na equação governante e nas condições inicial e de contorno, resulta

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (6.57)$$

$$w = 0, \quad \text{em } y = 0. \quad (6.58a)$$

$$w \rightarrow -U_0, \quad \text{quando } y \rightarrow \infty, \quad (6.58b)$$

$$w = -U_0, \quad \text{em } y > 0, \quad \text{e } t = 0. \quad (6.58c)$$

A condição de contorno não homogênea é transferida de $y = 0$ para o infinito e é substituída por uma condição de contorno homogênea:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \text{em } y = H, \quad (6.59)$$

onde H representa uma posição suficientemente longe da placa.

O problema auxiliar para o problema de Rayleigh é o mesmo para o problema de Stokes:

$$\frac{d^2 \psi_i}{dy^2} + \lambda_i^2 \psi_i = 0, \quad (6.60)$$

em $0 < y < H$, com as condições de contorno,

$$\psi_i = 0, \quad y = 0, \quad (6.61a)$$

$$\frac{d\psi_i}{dy} = 0, \quad y = H, \quad (6.61b)$$

e autofunções e autovalores correspondentes,

$$\psi_i = \sin(\lambda_i y), \quad (6.62a)$$

$$\lambda_i = \frac{(2i-1)\pi}{2H}, \quad (6.62b)$$

Transformada Integral:

$$\bar{w}_i(t) = \int_0^H \frac{\psi_i(y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} w(y, t) dy, \quad (6.63a)$$

Inversa:

$$w(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} \bar{w}_i(t), \quad (6.63b)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (6.56) por $\psi_i(y)$ e integrando-os em y entre os limites 0 e H , obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^H \psi_i(y) \frac{\partial w}{\partial t} dy = -\nu \lambda_i^2 \bar{w}_i(t), \quad (6.64)$$

a qual pode ser escrita como:

$$\frac{d\bar{w}_i}{dt} + \nu \lambda_i^2 \bar{w}_i = 0. \quad (6.65)$$

A equação (11.1.17) possui a seguinte solução geral:

$$\bar{w}_i = C \exp(-\nu \lambda_i^2 t) \quad (6.66)$$

onde C é uma constante relacionada com a condição inicial determinada por:

$$C = \bar{w}_i(0) = \int_0^H \psi_i(y) U_0 dy = \frac{U_0}{\lambda_i N_i^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.67)$$

No início, um H arbitrário igual a 0.5 é selecionado para o cálculo. Os resultados são mostrados na figura 6.2 para diferentes Nt .

A influência de H é mostrada na figura 6.3, e em escalas diferentes para períodos de tempo de curta e de longa duração nas figuras 6.4 e 6.5.

Por esta figura podemos observar que para um tempo curto, H pequeno deve ser utilizado. Para um tempo maior, um H maior deverá ser utilizado. Isto decorre da camada limite ser não estacionária e possuir espessura variada ao longo do tempo. Portanto, um H variável deve ser usado para o cálculo.

Uma análise de escala é necessária para determinar o domínio de integração onde aplicamos a transformada integral. Para um dado instante t , temos

$$O(u) \sim O(U_0), \quad (6.68a)$$

$$O(t) \sim t, \quad (6.68b)$$

$$O(y) \sim L, \quad (6.68c)$$

onde L é a espessura de camada cisalhante onde o efeito da viscosidade é importante.

Substituindo as expressões na equação 6.1, temos

$$\frac{U_0}{t} \sim \nu \frac{U_0}{L^2}. \quad (6.69)$$

Logo

$$L \sim \sqrt{\nu t}. \quad (6.70)$$

Sabemos então que, no problema de Rayleigh, a espessura varia com o tempo pela expressão (6.70). Portanto, o domínio de integração deve também variar com o tempo. Para o problema de Rayleigh, por existir uma solução analítica da equação transformada, podemos implementar uma variação contínua do domínio de integração. Para soluções em instantes diferentes, usamos domínios diferentes:

$$H(t) = 4\sqrt{\nu t}. \quad (6.71)$$

Aqui, usamos H igual a $4\sqrt{\nu t}$. Para o problema de Rayleigh, um problema auxiliar com domínio variável pode ser definido por

$$\frac{d^2 \psi_i}{dy^2} + \lambda_i^2 \psi_i = 0, \quad (6.72)$$

em $0 < y < H(t)$, com condições de contorno,

$$\psi_i = 0, \quad y = 0, \quad (6.73a)$$

$$\frac{d\psi_i}{dy} = 0, \quad y = H(t), \quad (6.73b)$$

e autofunções e autovalores correspondentes,

$$\psi_i = \sin(\lambda_i y), \quad (6.74)$$

$$\lambda_i = \frac{(2i - 1)\pi}{2H(t)}. \quad (6.75)$$

$$N_i = \int_0^H \psi_i^2(y) dy = \frac{H}{2}. \quad (6.76)$$

$$\bar{w}_i = C \exp(-\nu \lambda_i^2 t) \quad (6.77)$$

onde C é uma constante relacionada com a condição inicial determinada por:

$$C = \bar{w}_i(0) = \int_0^H \psi_i(y) U_0 dy = \frac{U_0}{\lambda_i N_i^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.78)$$

A excelente convergência da solução (6.67) é mostrada na Tabela 6.12. A técnica de variar continuamente o domínio melhora surpreendentemente a solução.

Tabela 6.12
Solução do problema de Rayleigh pela GITT
Convergência de $u_y(0)$ ($H = 5\sqrt{\nu t}$)

t	NT=3	NT=5	NT=7	NT=9	Exata
0.20	-12.541588	-12.615604	-12.615663	-12.615663	-12.615663
0.40	-8.868242	-8.920579	-8.920621	-8.920621	-8.920621
0.80	-6.270794	-6.307802	-6.307831	-6.307831	-6.307831
1.00	-5.608769	-5.641870	-5.641896	-5.641896	-5.641896
1.40	-4.740275	-4.768250	-4.768272	-4.768272	-4.768272
2.00	-3.965998	-3.989404	-3.989423	-3.989423	-3.989423
2.60	-3.478411	-3.498939	-3.498955	-3.498955	-3.498955
3.00	-3.238224	-3.257335	-3.257350	-3.257350	-3.257350
3.40	-3.041782	-3.059733	-3.059748	-3.059748	-3.059748
3.80	-2.877238	-2.894218	-2.894231	-2.894231	-2.894231
4.00	-2.804384	-2.820935	-2.820948	-2.820948	-2.820948

Contudo, este procedimento só pode ser aplicado para problemas que possuam solução analítica da equação transformada. Para outros problemas, algoritmos diferentes devem ser utilizados. Sugerimos três opções para tratar os problemas com domínio variável:

1. Variação adaptativa discreta do domínio de integração.
2. Variação adaptativa contínua do domínio de integração.
3. Transformação do domínio de integração para um domínio fixo.

Estudos sobre este problema são importantes porque os métodos desenvolvidos podem ser estendidos para problemas mais gerais de camada limite não estacionária.

6.5 Sumário

Neste capítulo resolvemos o problema de Stokes e Rayleigh pelos métodos de diferenças finitas e pela técnica da transformada integral generalizada para avaliar os métodos numérico e numérico-analítico propostos nos capítulos 4 e 5. Os principais resultados e conclusões desta avaliação podem ser resumidos como sendo:

1. O esquema explícito de segunda ordem de precisão proposto mostra a mesma precisão que o esquema de Crank-Nicholson na solução do problema de Stokes.
2. O estudo da convergência das soluções do problema de Stokes pelos métodos de diferenças finitas mostra que com o aumento do número de pontos de discretização, as soluções convergem para a solução exata; enquanto que com a diminuição do passo da discretização do tempo, as soluções convergem para soluções diferentes da solução exata, confirmando a conjectura de Kwon, et. al. de que a divergência decorre da aplicação da condição de contorno no infinito a uma distância finita da placa.
3. A solução da técnica da transformada integral generalizada mostra boa concordância com a solução exata de Stokes. A convergência é acelerada pela utilização da transformação sobre o termo “fonte” (ou “filtro” da equação diferencial. Isto mostra que a diferença de soluções entre os diversos métodos de diferenças finitas é devida a uma resolução insuficiente do método, e pode ser perfeitamente resolvida neste problema pela utilização da transformada integral generalizada na direção da difusão.
4. A variação do domínio de integração deve ser utilizada na solução do problema de Rayleigh.

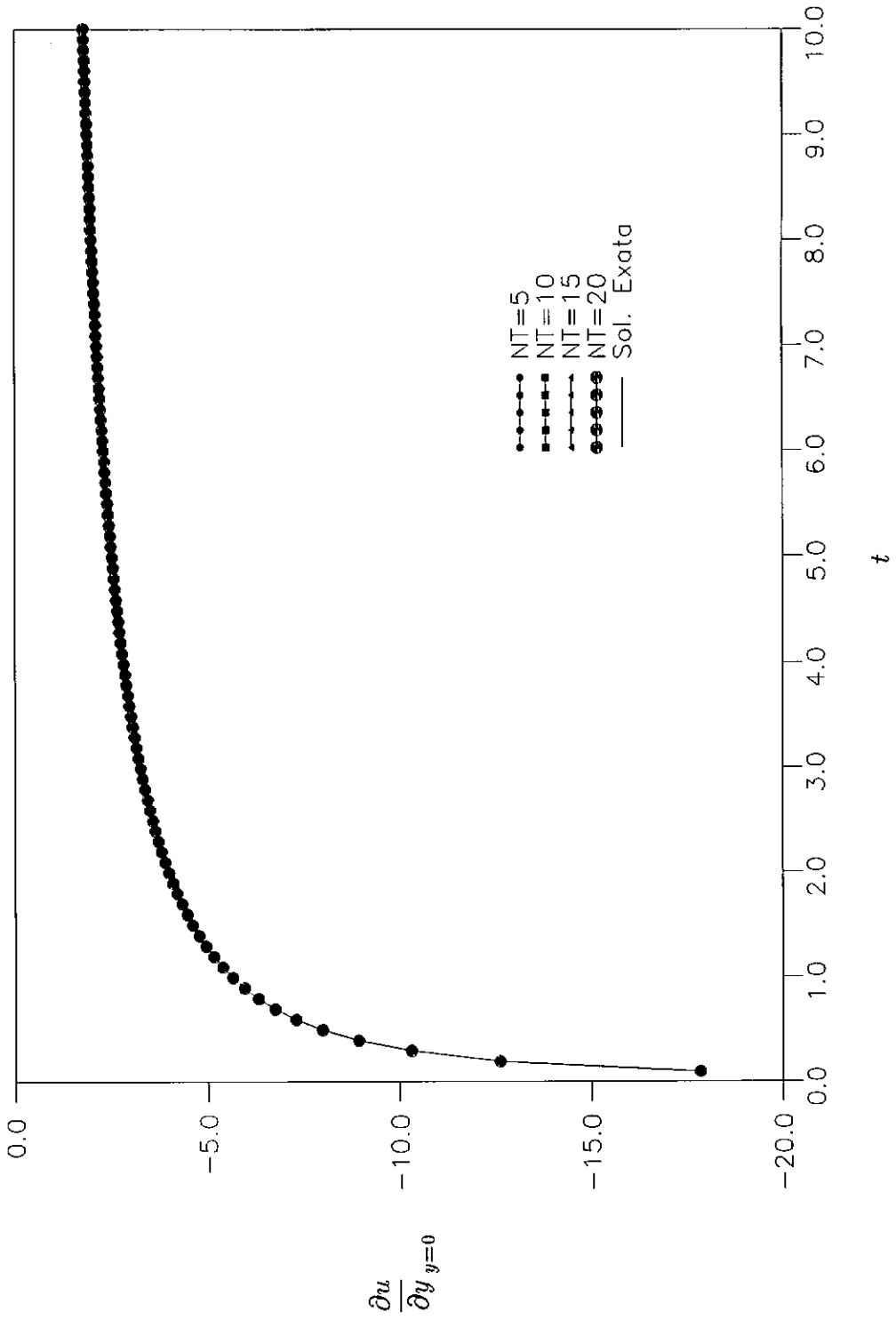


Fig.6.2 A convergência da solução do problema de Rayleigh pela técnica da transformada integral generalizada com domínio fixo $H = 0.5$.

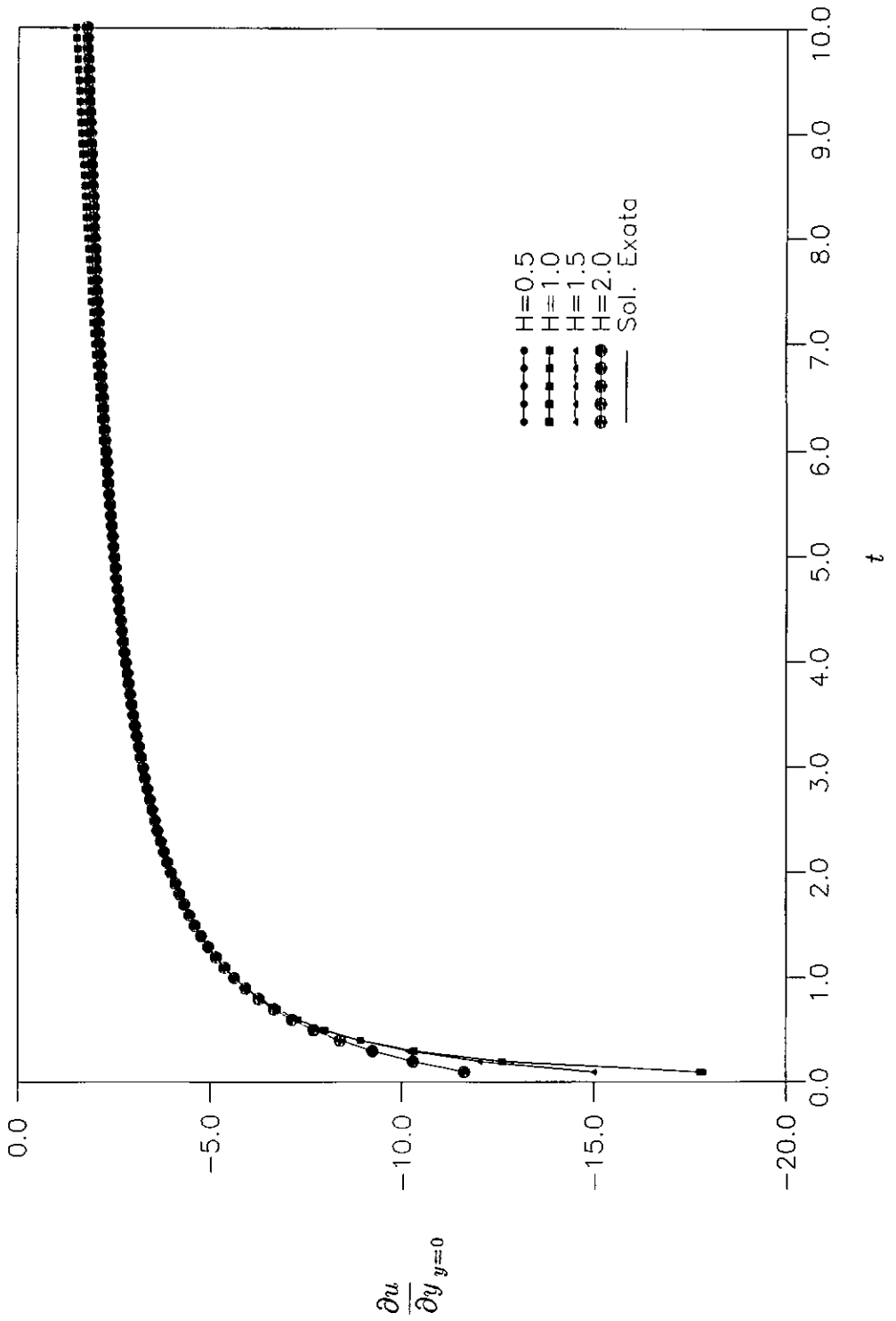


Fig.6.3 A influência do domínio de integração na solução do Problema de Rayleigh com $NT=10$.

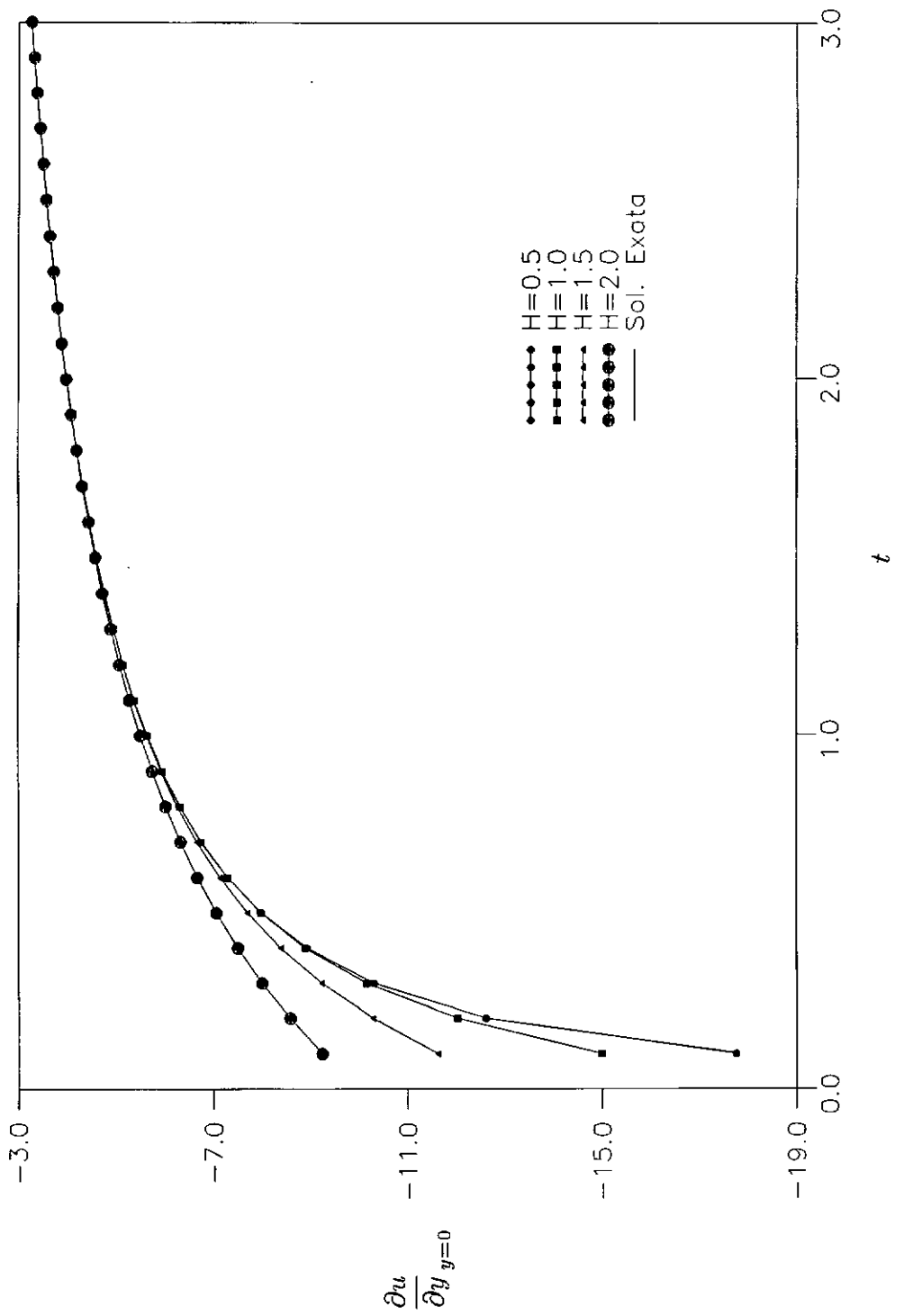


Fig.6.4 A influência do domínio de integração na solução do Problema de Rayleigh com $NT=10$ para o tempo pequeno.

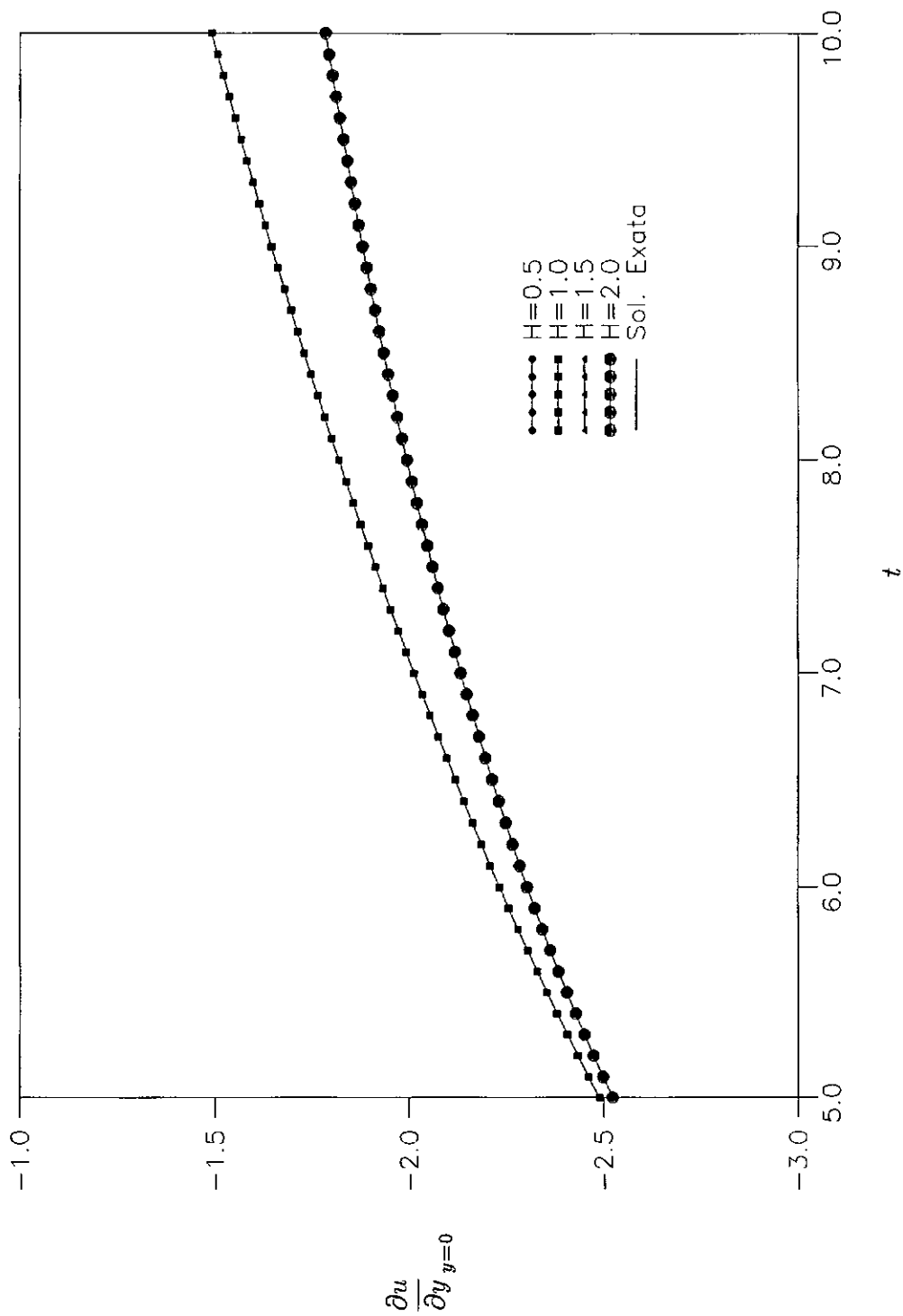


Fig.6.5 A influência do domínio de integração na solução do Problema de Rayleigh com $NT=10$ para o tempo grande.

Capítulo 7

A Resposta de Uma Camada Limite Laminar a Perturbações Pulsantes

Neste capítulo estudaremos a resposta de uma camada limite laminar a perturbações pulsantes. O problema físico será definido na seção 7.1. Como mostramos no Capítulo 3, perturbações de longo comprimento de onda podem ser descritas pelas equações de camada limite não estacionária. Uma transformação de coordenadas será introduzida para considerar o crescimento da camada limite ao longo da placa. As equações diferenciais parciais e as condições de contorno e iniciais serão apresentadas na seção 7.2. Em seguida, as equações serão resolvidas numericamente usando o esquema de diferenças finitas proposto no Capítulo 4. Os resultados numéricos serão apresentados na seção 7.4.

7.1 A Definição do Problema Físico

Consideremos uma camada limite laminar estabelecida sobre uma placa plana semi-infinita. A origem do sistema de coordenadas cartesianas é colocada no bordo de ataque, com o eixo x coincidindo com a placa como ilustrado na figura 7.1.

O fluido é considerado newtoniano. O escoamento é incompressível e bidimensional. As forças de corpo são desprezadas. U_∞ é a velocidade do escoamento livre, L um comprimento característico e ν a viscosidade do fluido. O escoamento é caracterizado pelo número de Reynolds $U_\infty L/\nu$, que assumimos ser grande. O escoamento básico estabelecido, sem perturbação, é descrito pelas equações de camada limite estacionária, como mostramos no Capítulo 3. Para este caso particular de camada limite laminar sobre uma placa plana semi-infinita sem gradiente de pressão, o escoamento é descrito pela solução da equação de Blasius.

Suponhamos que em um certo instante de tempo, $t = 0$, a camada limite esteja sujeita a uma perturbação aplicada na placa, no ponto x_p e em um intervalo de comprimento Δx_p . A perturbação é aplicada durante um intervalo de tempo pequeno, quando comparado com L/U_∞ , e em uma seção da placa cujo comprimento é grande, se comparado com a espessura da camada limite. Nosso problema se resume a investigar como evolui o escoamento depois da introdução da perturbação.

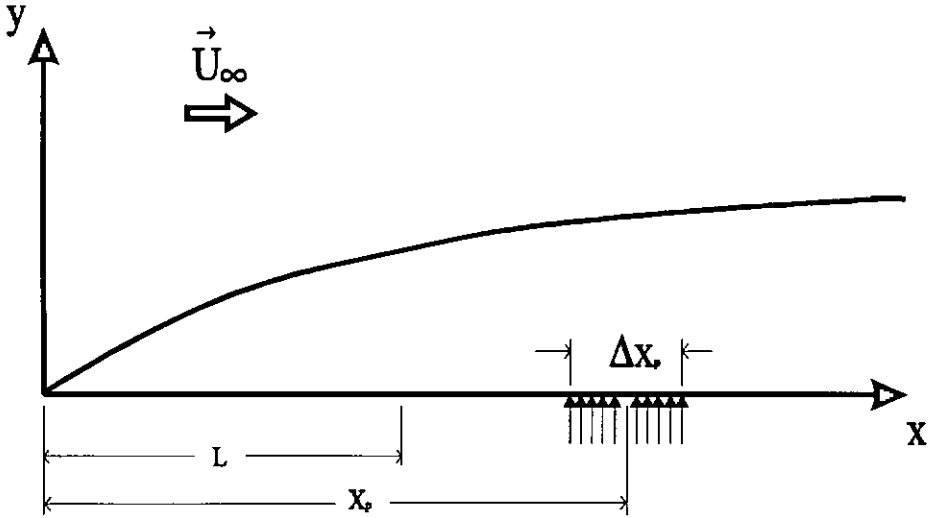


Fig.7.1 A camada limite laminar e o sistema de coordenadas.

7.2 As Equações Transformadas de Camada Limite Não Estacionária

O problema físico definido na seção anterior pode ser descrito pelas equações de camada limite não estacionária como mostramos pela análise desenvolvida no capítulo 3. As equações de camada limite não estacionária e as condições iniciais e de contorno foram apresentadas no capítulo 4 na forma de variáveis físicas. Nesta forma, as equações de camada limite são singulares no bordo de ataque. O fato de a espessura da camada limite laminar sobre uma placa plana crescer com a raiz quadrada da distância do bordo de ataque, dificulta a discretização do domínio da solução pelos métodos de diferenças finitas.

Para contornar este problema, uma transformação de coordenadas será introduzida, usando as variáveis de similaridade de Blasius:

$$\xi = x, \quad e \quad \eta = y/\sqrt{x}, \quad (7.1a, b)$$

e as novas variáveis dependentes

$$F = u, \quad e \quad V = v\sqrt{\xi} - \frac{1}{2}F\eta, \quad (7.2a, b)$$

para as componentes da velocidade nas duas novas coordenadas ξ e η .

Em termos das novas variáveis dependentes e independentes, as equações da continuidade e do movimento tornam-se:

$$\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{F}{2} = 0, \quad (7.3)$$

e

$$\xi \frac{\partial F}{\partial t} + \xi F \frac{\partial F}{\partial \xi} + V \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}. \quad (7.4)$$

As condições de contorno e iniciais escritas em termos das novas variáveis ficam:

$$F(\xi, 0, t) = 0 \quad \text{e} \quad V(\xi, 0, t) = V_w(\xi, t), \quad (7.5a, b)$$

$$F(\xi, \eta, t) \rightarrow 1, \quad \text{quando} \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (7.6)$$

$$u(\xi_1, \eta, t) = F_B(\eta) \quad \text{e} \quad V(\xi_1, \eta, t) = V_B(\eta), \quad (7.7a, b)$$

$$F(\xi, \eta, 0) = F_B(\eta) \quad \text{e} \quad V(\xi, \eta, 0) = V_B(\eta), \quad (7.8a, b)$$

onde ξ_1 é a posição do início do intervalo de integração na direção do escoamento principal e os índices 1 e B representam as condições de entrada e a solução de Blasius respectivamente.

Observamos que em termos das variáveis de similaridade de Blasius, as condições de entrada e as condições iniciais são solução da equação:

$$2ff'' + f''' = 0, \quad (7.9)$$

com condições de contorno:

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(\infty) = 1. \quad (7.10a, b, c)$$

Uma nova solução numérica da equação de Blasius compatível com esquemas de diferenças finitas de segunda ordem de precisão foi desenvolvida por Sandim(1992) e utilizada para gerar as condições iniciais e de entrada neste trabalho.

7.3 Solução pelo Esquema Proposto de Diferenças Finitas

As equações transformadas de camada limite não estacionária são resolvidas pelo esquema explícito de segunda ordem de precisão proposto no Capítulo 4.

Preditor:

$$\begin{aligned} \overline{F_{i,j}^{n+1}} = & F_{i,j}^n - \lambda F_{i,j}^n (F_{i,j}^n - F_{i-1,j}^n) - \frac{\Delta t}{2\xi\Delta\eta} V_{i,j}^n (F_{i,j+1}^n - \\ & F_{i,j-1}^n) + \frac{r}{\xi} (F_{i,j+1}^n - 2F_{i,j}^n + F_{i,j-1}^n) \end{aligned} \quad (7.11a)$$

Corretor

$$\begin{aligned} F_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{2} [F_{i,j}^n + \overline{F_{i,j}^{n+1}} - \lambda F_{i,j}^{on1} (\overline{F_{i,j}^{n+1}} - \overline{F_{i-1,j}^{n+1}}) \\ & - \lambda F_{i,j}^n (F_{i,j}^n - 2F_{i-1,j}^n + F_{i-2,j}^n) \\ & - \frac{\Delta t}{2\xi\Delta\eta} V_{i,j}^{n+1} (\overline{F_{i,j+1}^{n+1}} - \overline{F_{i,j-1}^{n+1}}) \\ & + \frac{r}{\xi} (\overline{F_{i,j+1}^{n+1}} - 2\overline{F_{i,j}^{n+1}} + \overline{F_{i,j-1}^{n+1}})], \end{aligned} \quad (7.11b)$$

onde

$$r_1 = \frac{\Delta t}{\Delta\xi}, \quad \text{and} \quad r_2 = \frac{\Delta t}{(\Delta\eta)^2}, \quad (7.12a, b)$$

e os índices i, j e n correspondem aos pontos de discretização nas coordenadas ξ, η e t , respectivamente, e o índice $\overline{n+1}$ corresponde a um nível intermediário no tempo entre n e $n+1$.

A equação da continuidade é resolvida pelo seguinte esquema:

$$\begin{aligned} & \xi \frac{F_{i,j}^{n+1} - F_{i-1,j}^{n+1} + F_{i,j-1}^{n+1} - F_{i-1,j-1}^{n+1}}{2\Delta\xi} \\ & + \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1} + V_{i-1,j}^{n+1} - V_{i-1,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \\ & + \frac{F_{i,j}^{n+1} + F_{i-1,j}^{n+1} + F_{i,j-1}^{n+1} + F_{i-1,j-1}^{n+1}}{8} = 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

7.4 Solução pelo Esquema Misto Proposto de Diferenças Finitas e Transformada Integral Generalizada

Nesta seção, as equações de camada limite não estacionária na forma transformada são resolvidas usando o esquema misto de diferenças finitas/ transformada integral generalizada proposto no Capítulo 5. Como já mencionamos na seção 7.2, a vantagem da transformação das equações é que a espessura da camada limite se

mantém constante ao longo da placa. Isso permite ser utilizado um domínio fixo de integração na direção normal à placa. Para aplicar a técnica de transformada integral generalizada,

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0, \quad \text{em } \eta = H, \quad (7.14)$$

onde H representa uma distância suficientemente longe da superfície sólida.

Para a solução das Eqs.(7.3) e (7.4), adota-se o seguinte problema auxiliar de autovalor

$$\frac{d^2 \psi_i}{d\eta^2} + \mu_i^2 \psi_i = 0, \quad (7.15)$$

em $0 < \eta < H$, com as condições de contorno,

$$\psi_i = 0, \quad \eta = 0, \quad (7.16a)$$

$$\frac{d\psi_i}{d\eta} = 0, \quad \eta = H, \quad (7.16b)$$

onde ψ_i é a autofunção e μ_i seu autovalor correspondente. Podemos obter facilmente

$$\psi_i = \sin \mu_i \eta, \quad (7.17a)$$

$$\mu_i = \frac{(2i - 1)\pi}{2H}. \quad (7.17b)$$

O método de solução consiste, primeiramente, em se definir o seguinte par de transformada integral:

Transformada Integral:

$$\bar{F}_i(\xi, t) = \int_0^H \frac{\psi_i(\eta)}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}}} F(\xi, \eta, t) d\eta, \quad (7.18a)$$

Inversa:

$$F(\xi, \eta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(\eta)}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}}} \bar{F}_i(x, t), \quad (7.18b)$$

onde $N_{\eta i}$ é a norma definida por

$$N_{\eta i} = \int_0^H \psi_i^2(\eta) d\eta = \frac{H}{2}. \quad (7.19)$$

A velocidade na direção normal ao escoamento pode ser obtida por integração da equação da continuidade ao longo da direção η ,

$$V(\xi, \eta, t) = V_W(\xi, t) - \int_0^\eta \left(\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{F}{2} \right) d\eta, \quad (7.20)$$

substituindo-se a Inversa, Eq.(7.18b), temos então

$$V(\xi, \eta, t) = V_W(\xi, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_{\eta k}^{\frac{1}{2}}} F_k(\eta) \left(\xi \frac{d\bar{F}_k}{dx} + \frac{\bar{F}_k}{2} \right), \quad (7.21)$$

onde

$$F_k(\eta) = \int_0^\eta \psi_k(\eta') d\eta'. \quad (7.22)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (7.4) por $\psi_i(\eta)$ e integrando-os na coordenada normal a parede entre os limites 0 e H , obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{1}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}}} \left[\int_0^H \psi_i(\eta) \xi \frac{\partial F}{\partial t} d\eta + \int_0^H \psi_i(\eta) \xi F \frac{\partial F}{\partial \xi} d\eta + \int_0^H \psi_i(\eta) V \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta \right] = -\mu_i^2 \bar{F}_i(\xi, t). \quad (7.23)$$

A fórmula de inversão (7.18b) e a expressão para a velocidade transversal (7.21) são então empregadas, resultando em

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial \bar{F}_i(\xi, t)}{\partial t} + \xi \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (A_{ijk} - B_{ijk}) \bar{F}_j(\xi, t) \frac{\partial \bar{F}_k(\xi, t)}{\partial \xi} \\ - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (B_{ijk}) \bar{F}_j(\xi, t) \bar{F}_k(\xi, t) \\ = - \sum_{k=1}^{\infty} [V_W(\xi) C_{ik} + \delta_{ik} \frac{\mu_i^2}{Re_L}] \bar{F}_k(\xi, t), \end{aligned} \quad (7.24)$$

onde

$$A_{ijk} = \frac{1}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}} N_{\eta j}^{\frac{1}{2}} N_{\eta k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^H \psi_i(\eta) \psi_j(\eta) \psi_k(\eta) d\eta, \quad (7.25a)$$

$$B_{ijk} = \frac{1}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}} N_{\eta j}^{\frac{1}{2}} N_{\eta k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^H \psi_i(\eta) \psi_j'(\eta) F_k(\eta) d\eta, \quad (7.25b)$$

$$C_{ik} = \frac{1}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}} N_{\eta k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^H \psi_i(\eta) \psi_k'(\eta) d\eta. \quad (7.25c)$$

Os coeficientes A_{ijk} , B_{ijk} , e C_{ik} são avaliados no Apêndice A.

A condição de entrada e a condição inicial são transformadas através da aplicação da transformada às Eqs.(7.7a) e (7.8a). Temos então

$$\bar{F}_i(\xi_1, t) = \int_0^H F_B(\eta) \psi_i(\eta) d\eta, \quad (7.26)$$

$$\bar{F}_i(\xi, t) = \int_0^H F_B(\eta) \psi_i(\eta) d\eta. \quad (7.27)$$

As equações transformadas são resolvidas pelo esquema de Warming e Beam(1975).

Sejam $\Delta\xi$ e Δt respectivamente os espaçamentos no tempo t e na coordenada ξ , os pontos de discretização podem ser escritos como:

$$\xi_l = \xi_1 + (l - 1)\Delta\xi, \quad (7.28)$$

$$t_n = n\Delta t. \quad (7.29)$$

A transformada no ponto (ξ_l, t_n) é representada por:

$$\bar{F}_{i,l}^n = \bar{F}_i(x_l, t_n). \quad (7.30)$$

As equações transformadas são discretizadas aplicando-se o esquema de Warming e Beam.

Preditor:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{i,j}^{n+1} &= \bar{F}_{i,l}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \sum_{k=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NT} (A_{ijk} - B_{ijk}) \bar{F}_{j,l}^n (\bar{F}_{k,l}^n - \bar{U}_{k,l-1}^n) \\
&\quad + \frac{1}{2\xi} \sum_{k=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NT} B_{ijk} \bar{F}_{j,l}^n \bar{F}_{k,l}^n \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\xi} \sum_{k=1}^{NT} [V_W(\xi_l) C_{ik} + \delta_{ik} \mu_i^2] \bar{F}_{k,l}^n,
\end{aligned} \tag{7.31a}$$

Corretor:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{2} \left(\bar{F}_{i,l}^n + \bar{F}_{i,l}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \sum_{k=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NT} (A_{ijk} - B_{ijk}) \bar{F}_{j,l}^{n+1} (\bar{F}_{k,l}^{n+1} - \bar{F}_{k,l-1}^{n+1}) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2\xi} \sum_{k=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NT} B_{ijk} \bar{F}_{j,l}^{n+1} \bar{F}_{k,l}^{n+1} \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\xi} \sum_{k=1}^{NT} [V_W(\xi_l) C_{ik} + \delta_{ik} \mu_i^2] \bar{F}_{k,l}^{n+1} \\
&\quad \left. - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \sum_{k=1}^{NT} \sum_{j=1}^{NT} (A_{ijk} - B_{ijk}) \bar{F}_{j,l}^n (\bar{F}_{k,l}^n - 2\bar{F}_{k,l-1}^n + \bar{F}_{k,l-2}^n) \right).
\end{aligned} \tag{7.31b}$$

7.5 Resultados Numéricos

No problema da resposta de camadas limite a perturbações pulsantes, as perturbações se propagam ao longo da direção do escoamento principal. Para que a resposta seja bem simulada ao longo do tempo, um intervalo grande na coordenada ξ deve ser discretizado como domínio computacional para que a propagação das perturbações seja acompanhada. Contudo, a discretização de um domínio computacional grande é inviável. Por exemplo, seja a velocidade de propagação da perturbação igual a 0.5 em termos do tempo adimensionalizado por L/U_∞ . Para estudar a resposta da camada limite no tempo $t = 5$, um intervalo com comprimento adimensional 2.5 deve ser discretizado. Se usarmos um espaçamento $\Delta \xi = 0.001$, isto significa que 2500 pontos serão necessários para a discretização do domínio computacional na direção do escoamento.

Para contornar este problema, uma técnica chamada de “domínio computacional móvel” é implementada. Nos instantes iniciais, o fluido à jusante não sente

a presença da perturbação no escoamento por ser finita a velocidade de propagação da perturbação, como discutimos no Capítulo 4. Por outro lado, para um tempo suficientemente grande, as regiões inicialmente perturbadas voltam aos seus estados iniciais não perturbados por estar a perturbação se propagando com o escoamento. Portanto, somente um intervalo que inclui a perturbação precisa ser discretizado em cada instante, devendo ser este suficientemente grande, para que a influência da perturbação seja completamente levada em conta. À medida que a perturbação se propaga, novos pontos à jusante são incluídos no domínio computacional, enquanto outros pontos à montante são excluídos, mantendo-se o número total de pontos de discretização constante. Este número pode, em alguns casos, variar com o tempo dependendo da variação do comprimento da região perturbada. O movimento do domínio computacional é determinado adaptativamente com a propagação das perturbações através da velocidade do centro das perturbações definido como o ponto onde a velocidade perturbada atinge um máximo em cada instante. A técnica do “domínio computacional móvel” é ilustrada na Figura 7.2.

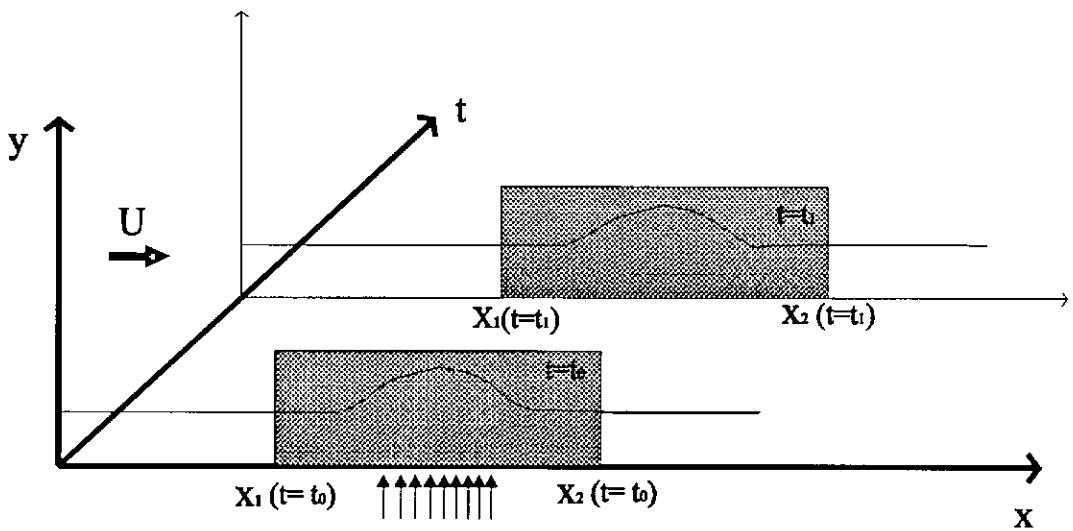


Fig.7.2 O domínio computacional móvel.

Por esta técnica, uma redução dramática no custo computacional é obtida. Por exemplo, se o comprimento do intervalo de aplicação das perturbações for $\Delta x_p = 0.05$, e usarmos um intervalo de discretização com comprimento $4\Delta x_p$, ou seja, 0.02, somente 200 pontos para discretizar a coordenada na direção do escoamento serão precisos. A técnica do “domínio computacional móvel” é implementada nas soluções de diferenças finitas e do método misto de diferenças finitas/transformada integral generalizada.

Neste trabalho, estudamos a resposta de uma camada limite laminar a perturbações pulsantes superpostas ao escoamento básico. A perturbação pulsante apli-

cada a uma distância $x = x_p$, medida do bordo de ataque e em um intervalo de comprimento Δx_p , é imposta à componente normal da velocidade na parede. A perturbação pode ser descrita por:

$$V_w(x, t) = A\delta(t - 0)f\left(\frac{x - x_p}{\Delta x_p}\right)$$

onde A denota a amplitude, $\delta(t - 0)$ é a função de Dirac e f é uma função que decreve a distribuição das perturbações no intervalo. O valor da função f deve ser zero ou infinitesimalmente pequeno fora do intervalo das perturbações, variando suavemente dentro do intervalo, para que perturbações de menor comprimento característico não sejam induzidas. Cinco distribuições diferentes são mostrados na Figura 7.3. As funções são:

$$f_1(z) = 1 - 4z^2, \quad (7.32a)$$

$$f_2(z) = 1 - 2|z|, \quad (7.32b)$$

$$f_3(z) = \exp(-(2z)^2), \quad (7.32c)$$

$$f_4(z) = \exp(-(3z)^2), \quad (7.32d)$$

$$f_5(z) = \exp(-(4z)^2), \quad (7.32e)$$

sendo

$$z = \frac{x - x_p}{\Delta x_p}. \quad (7.33)$$

A resposta da camada limite a perturbações com diferentes distribuições é apresentada na Figura 7.4. Podemos observar que embora as respostas sejam globalmente semelhantes, existe alguma diferença entre uma e outra. A resposta da camada limite a perturbações com distribuição linear (Eq.(7.32b)) mostra uma ligeira oscilação no início. Isso pode ser explicado pela descontinuidade da derivada da função de distribuição nas extremidades e no centro do intervalo. A resposta à perturbação com função de distribuição apresentando maior concentração, apresenta a maior amplificação inicial antes de decair. A maior amplificação obtida é decorrente da menor escala da perturbação imposta ao escoamento. Comparadas com estas duas, as respostas do escoamento aos outros três tipos de distribuição mostram-se de comportamento mais suave. Em cálculos futuros, a distribuição f_2 será descartada por apresentar descontinuidade na derivada nos pontos extremos. A distribuição f_3 será descartada por apresentar maior valor fora do intervalo Δx_p quando comparada com a distribuição f_4 , a qual será usada nos cálculos seguintes.

O problema será estudado na região $(x_1, x_2) \times (0, H)$, onde x_1 é o início do intervalo de integração na direção do escoamento e x_2 o seu término. Na direção normal à placa, as equações são resolvidas em $(0, H)$, onde H representa um ponto suficientemente longe da placa. Em nosso estudo, conforme a solução da equação de Blasius, aplicamos a condição de contorno no infinito em $H = 10$ em coordenadas de similaridade de Blasius, veja Sandim(1992).

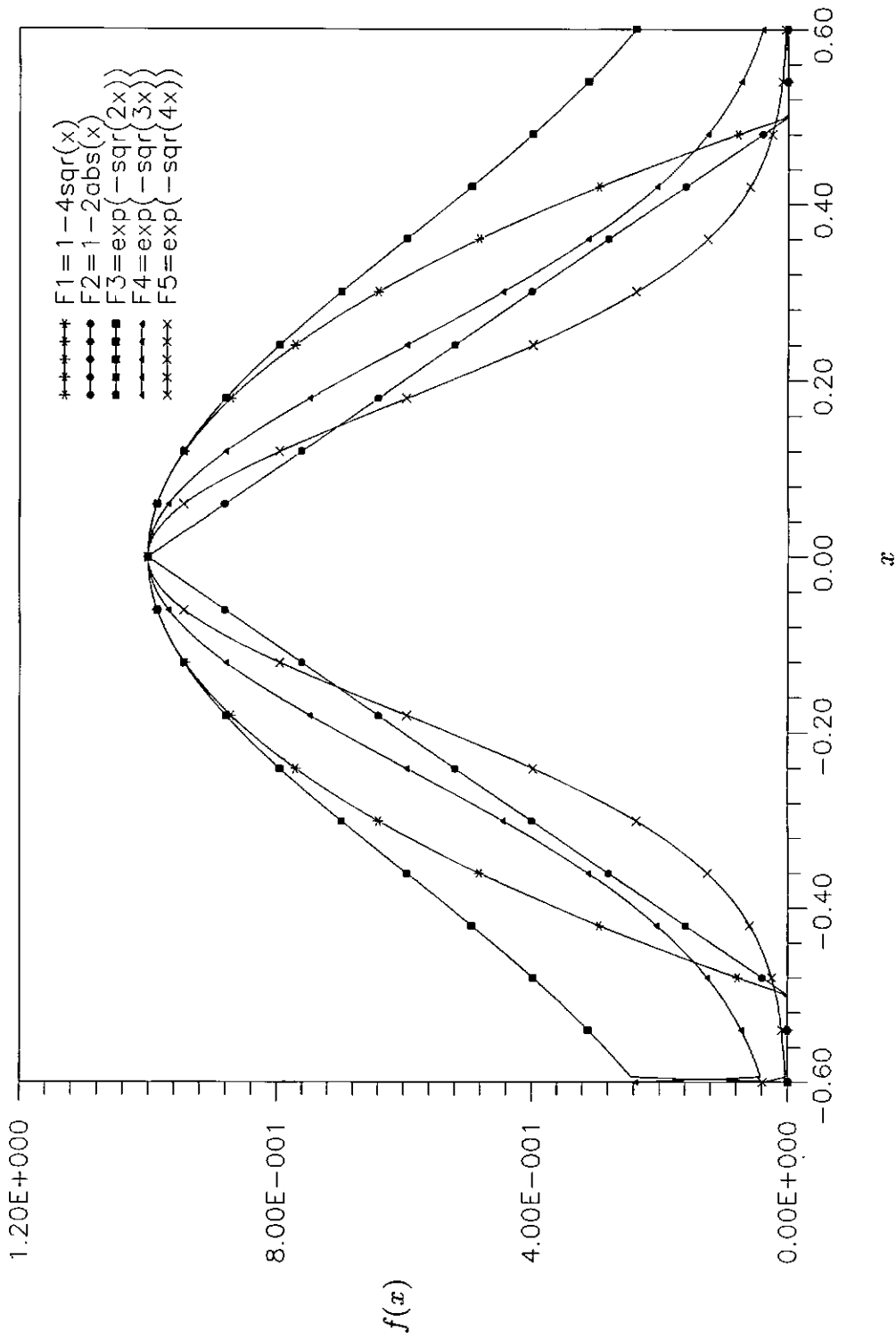


Fig.7.3 Funções de Distribuição das Perturbações

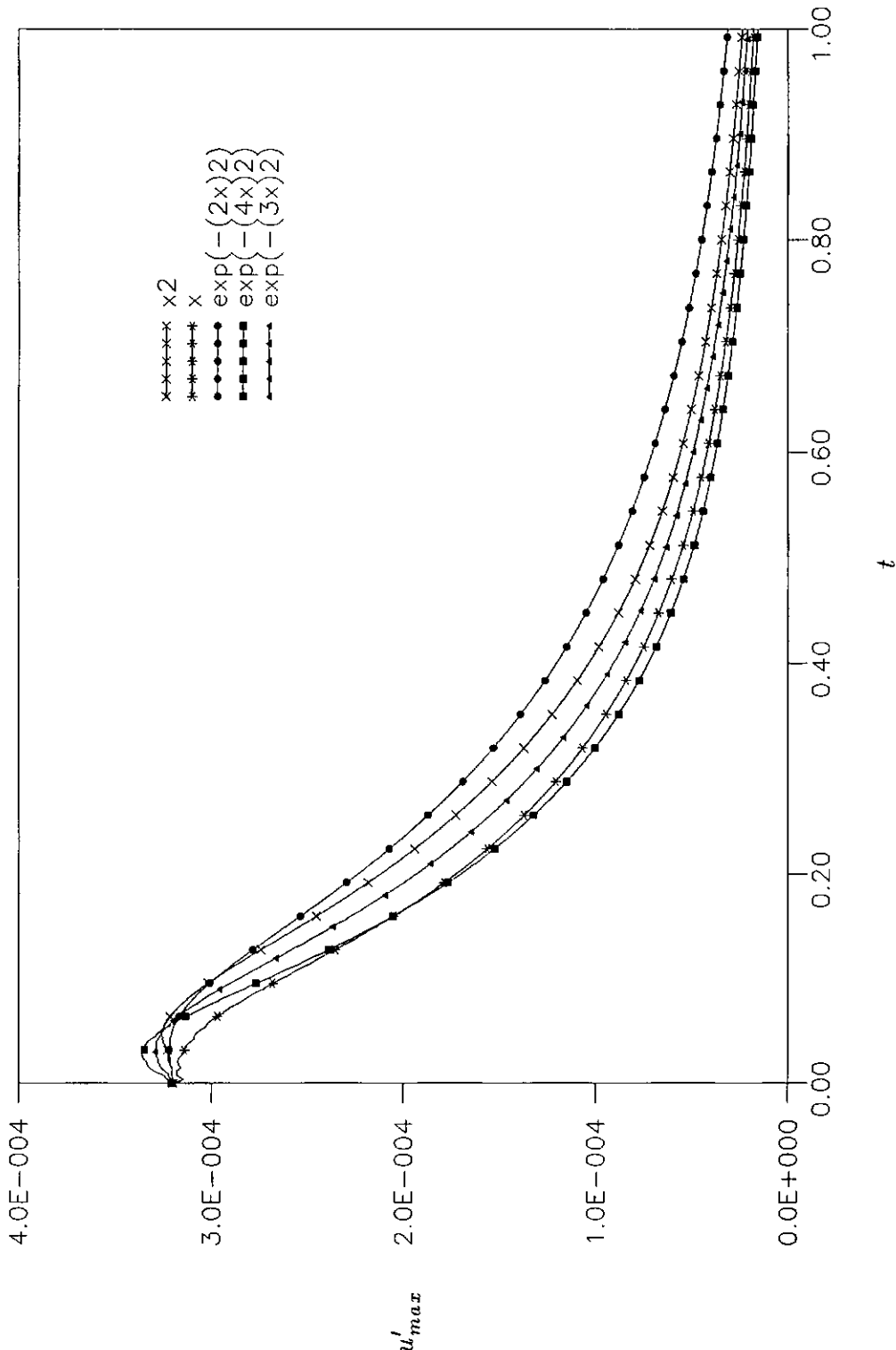


Fig.7.4 Respostas da Camada Limite a Perturbações com Diferentes Funções de Distribuição

Para a solução das equações pelo método de diferenças finitas, o domínio da solução será discretizado com espaçamento uniforme para que o critério de estabilidade numérica seja satisfeito.

Os espaçamentos espaciais são definidos por:

$$\Delta\xi = \frac{x_2 - x_1}{(M - 1)}, \quad (7.34a)$$

$$\Delta\eta = \frac{H}{(N - 1)}, \quad (7.34b)$$

onde M é o número total de pontos usados para discretizar o intervalo $[x_1, x_2]$ e N o número total de pontos usados para discretizar o intervalo $[0, H]$. Portanto, temos:

$$x_i = x_1 + (i - 1)\Delta x, \quad (7.35a)$$

$$\eta_j = (j - 1)\Delta\eta. \quad (7.36b)$$

A discretização no tempo é feita através da definição:

$$t_n = n\Delta t, \quad (7.37)$$

onde Δt é o passo de tempo.

Na solução numérica por diferenças finitas, aparecem três parâmetros computacionais, Δt , Δx e Δy , e duas razões definidas pelas equações (7.12a,b). A influência dos parâmetros computacionais será estudada primeiramente.

A influência de r_1 é apresentada na Figura 7.5 e na Tabela 7.1. Podemos observar que r_1 , de fato, influencia a solução. Por outro lado, r_2 não exerce tanta influência sobre a solução, como mostrado na Tabela 7.2. Observamos na figura que a solução com $r_1 = 1.0$ apresenta a maior amplificação decaindo rapidamente quando o tempo aumenta; a solução com $r_1 = 0.16$ apresenta oscilações numéricas. Isto é explicado pelo fato de r_1 determinar a zona de dependência da solução numérica. O critério de CFL diz que a zona de dependência numérica deve ser maior que a zona de dependência física para que o esquema numérico seja estável. Por outro lado, a razão r_1 determina a zona de influência numérica e portanto a velocidade de propagação das perturbações. r_1 menor do que 1 significa que a velocidade de propagação é maior do que 1. Como discutimos no Capítulo 4, r_1 pequena significa que a zona de influência numérica é muito maior que a zona de influência física, o que pode introduzir soluções fisicamente não corretas. Pela tabela, observamos que a solução converge praticamente para todo r_1 apesar de pequena diferença nos números. Fisicamente falando, a solução com $r_1 = 1.0$ deve ser considerada aquela fisicamente correta, porque a zona de influência numérica coincide com a zona de influência física. Devemos mencionar que o esquema explícito de diferenças finitas proposto permite a utilização de um valor para r_1 que será instável para esquemas explícitos simples.

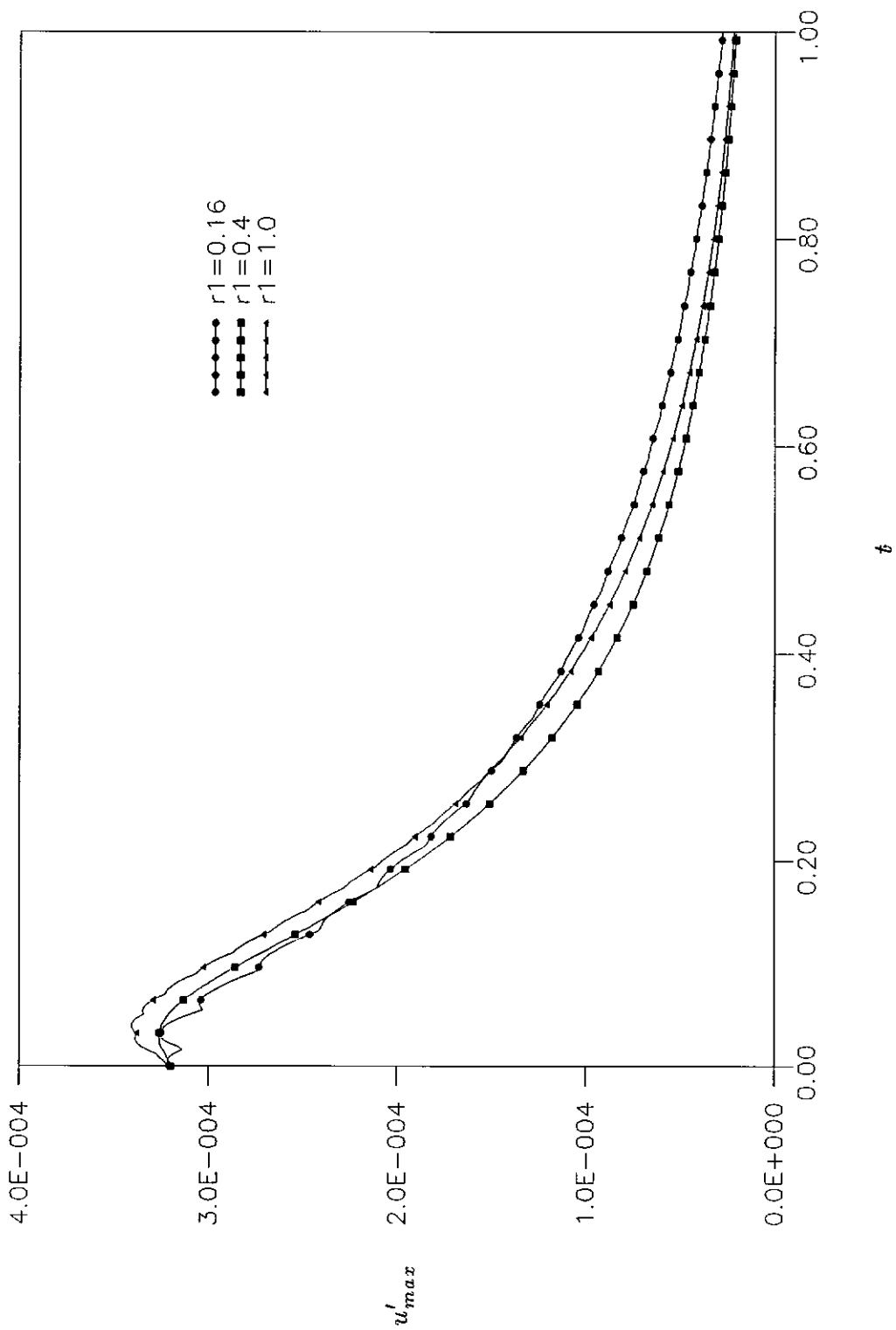


Fig.7.5 A Influência de r_1 na Solução por Diferenças Finitas

Portanto, usaremos um r_1 igual a 0.8 para todos os cálculos daqui por diante. Podemos ver que mesmo com r_1 influenciando a solução numérica, ele não altera as conclusões sobre o comportamento qualitativo das perturbações.

Tabela 7.1

Influência de r_1 sobre a solução de diferenças finitas

$$\Delta t = 0.0008 \text{ e } \Delta \eta = 0.2$$

t	$r_1 = 0.8$	$r_1 = 1.0$	$r_1 = 1.142857$
0.000000	0.32049E-03	0.31991E-03	0.32010E-03
0.200000	0.19351E-03	0.19051E-03	0.18716E-03
0.400000	0.90700E-04	0.88290E-04	0.87147E-04
0.600000	0.49090E-04	0.48420E-04	0.47806E-04
0.800000	0.30607E-04	0.30234E-04	0.30057E-04
1.000000	0.21019E-04	0.20899E-04	0.20758E-04

A influência dos espaçamentos $\Delta \eta$ e Δt é investigada a seguir. Os resultados são apresentados nas Tabelas 7.2 e 7.3.

Tabela 7.2

Influência de r_2 sobre a solução

$$\Delta \xi = 0.005, \Delta t = 0.001$$

t	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$
0.0	0.32053E-03	0.32105E-03	0.32123E-03
0.2	0.19824E-03	0.20124E-03	0.20210E-03
0.4	0.10919E-03	0.11080E-03	0.11119E-03
0.6	0.65858E-04	0.66455E-04	0.66634E-04
0.8	0.41998E-04	0.42310E-04	0.42428E-04
1.0	0.27998E-04	0.28223E-04	0.28306E-04

Tabela 7.3
Influência de Δt sobre a solução
 $\Delta\eta = 0.2, \Delta xi = 0.005$

t	$\Delta t = 0.002$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$
0.0	0.32061E-03	0.32053E-03	0.32049E-03
0.2	0.19940E-03	0.19824E-03	0.19766E-03
0.4	0.11003E-03	0.10919E-03	0.10877E-03
0.6	0.66375E-04	0.65858E-04	0.65607E-04
0.8	0.42275E-04	0.41998E-04	0.41865E-04
1.0	0.28136E-04	0.27998E-04	0.27932E-04

Podemos concluir que os espaçamentos Δt e Δy não possuem grande influência sobre a solução, ao contrário do espaçamento r_1 , fundamental na obtenção de uma boa solução numérica.

A resposta da camada limite a perturbações com diferentes amplitudes aplicadas na mesma posição é mostrada na Fig 7.6. A resposta A_0 pode ser definida como o valor máximo da velocidade perturbada na direção do escoamento no instante da aplicação da perturbação representada por A_p . A dependência da resposta A_0 a amplitude da perturbação pode ser melhor ilustrada na Figura 7.7. Observamos que A_0 é função linear de A_p para uma dada posição x_p . Portando uma relação funcional pode ser escrita como:

$$A_0 = g(x_p)A_p \quad (7.38)$$

O escoamento responde diferentemente a perturbações de mesma amplitude mas aplicadas a diferentes distâncias do bordo de ataque. Na figura 7.8, observarmos que para perturbações de mesma amplitude, a resposta é menor para perturbações aplicadas mais longe do bordo de ataque. Isto significa que as regiões próximas ao bordo de ataque são mais sensíveis a perturbações externas. É interessante observar que depois de uma certa distância, as perturbações decaem para o mesmo valor.

A dependência da resposta em x_p é mostrada mais claramente na Figura 7.9. Vemos que a resposta depende de x_p com uma função que decai mais lentamente que a função linear. Lembrando que a espessura da camada limite cresce com a raiz quadrada da distância ao bordo de ataque, e que a velocidade normal é inversamente proporcional à raiz quadrada desta distância, propomos então uma função para a dependência da resposta em x_p da forma:

$$A_0 = C \frac{A_p}{\sqrt{x_p}} \quad (7.20a)$$

A constante C pode ser determinada verificando-se que se a amplitude da perturbação for proporcional a $\sqrt{x_p}$, as respostas deverão ser as mesmas para perturbações aplicadas em diferentes posições, como mostrado na Tabela 7.4.

Tabela 7.4

A dependência da resposta em x_p

$$A_p = x_p^{\frac{1}{2}}$$

x_p	A_0
1.05	0.32842E-03
1.15	0.32845E-03
1.25	0.32848E-03
1.35	0.32850E-03
1.45	0.32852E-03
1.55	0.32853E-03
1.65	0.32854E-03
1.75	0.32855E-03
1.85	0.32856E-03
1.95	0.32857E-03

Observamos que os valores de A_0 são bastante próximos. Podemos considerar serem as diferenças de valor obtidas erros introduzidos pela solução numérica.

Observamos pela Figura 7.10, que embora as respostas sejam as mesmas para perturbações com amplitude variando de acordo com o crescimento da camada limite, as taxas de decaimento são diferentes. Portanto, as perturbações possuem valores diferentes no mesmo instante de tempo.

A influência do comprimento do intervalo de perturbação Δx_p na resposta é apresentada na Figura 11.

Na figura 7.12, podemos observar a propagação da perturbação pela evolução da espessura de deslocamento perturbada da camada limite, a qual é definida como

$$\delta'_1(\xi, t) = \int_0^{\infty} -F_{\eta}(\xi, \eta, t) d\eta. \quad (7.21)$$

Na figura 7.13, mostramos a evolução dos perfis da velocidade longitudinal em várias posições de x .

É interessante observar também a trajetória do centro de perturbação no plano $x - t$. O centro de perturbação é a posição do valor máximo da componente da velocidade na direção do escoamento. Durante um pequeno intervalo depois da introdução da perturbação no escoamento, o centro de perturbação é confinado a uma região próxima à parede. Logo a seguir, o centro se movimenta e permanece em $\eta = 2.0$, o que corresponde a cerca de vinte e cinco por cento da espessura da camada limite. A propagação da perturbação na direção do escoamento é apresentada na figura 7.14. Podemos observar que a velocidade de propagação da perturbação é cerca de trinta por cento da velocidade do escoamento principal, possuindo uma ligeira aceleração.

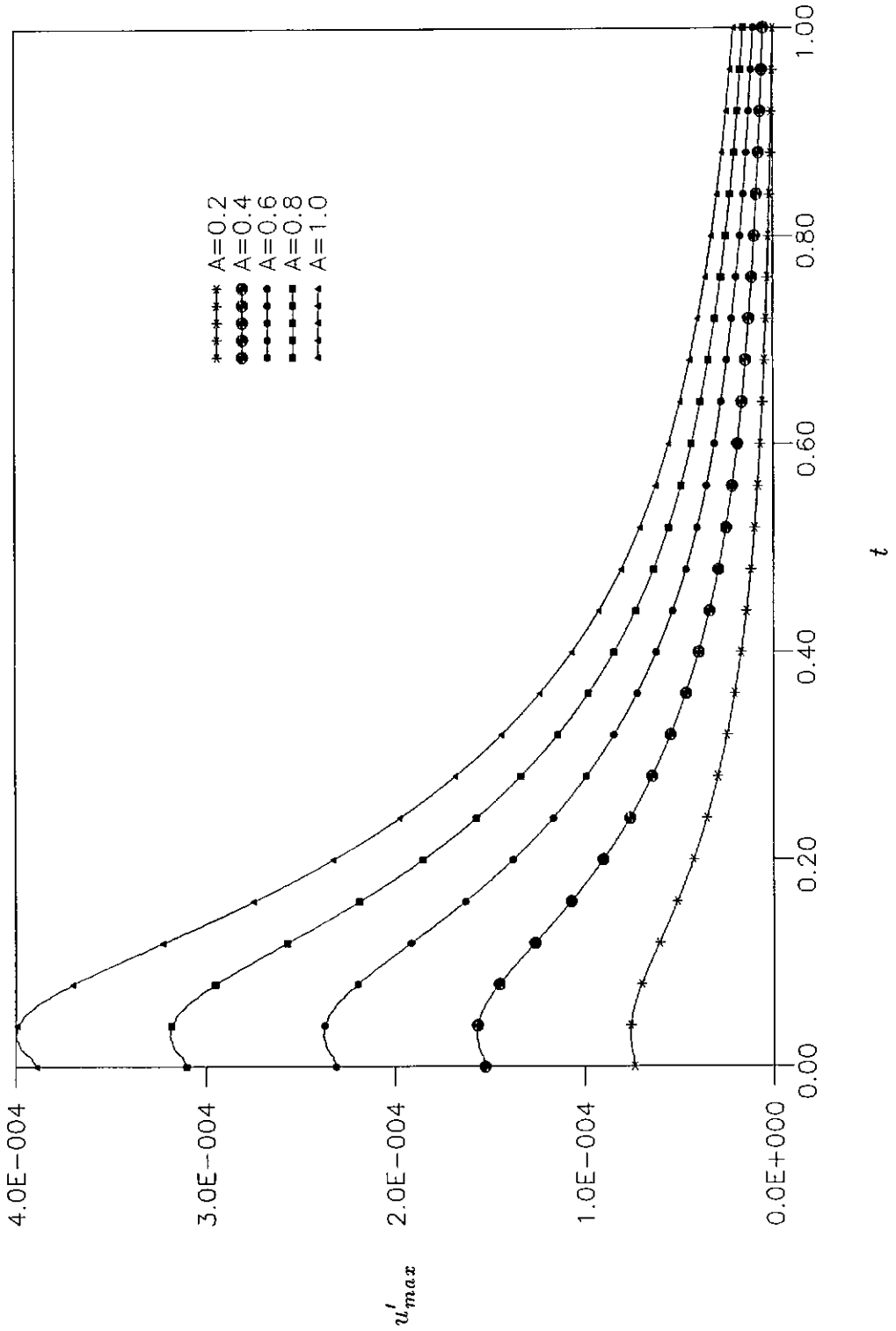


Fig.7.6 A Resposta da Camada Limite a Perturbações de Diferentes Amplitudes Aplicadas na mesma Posição $x_p = 1.05$ e com mesmo Comprimento do Intervalo $\Delta x_p = 0.03$.

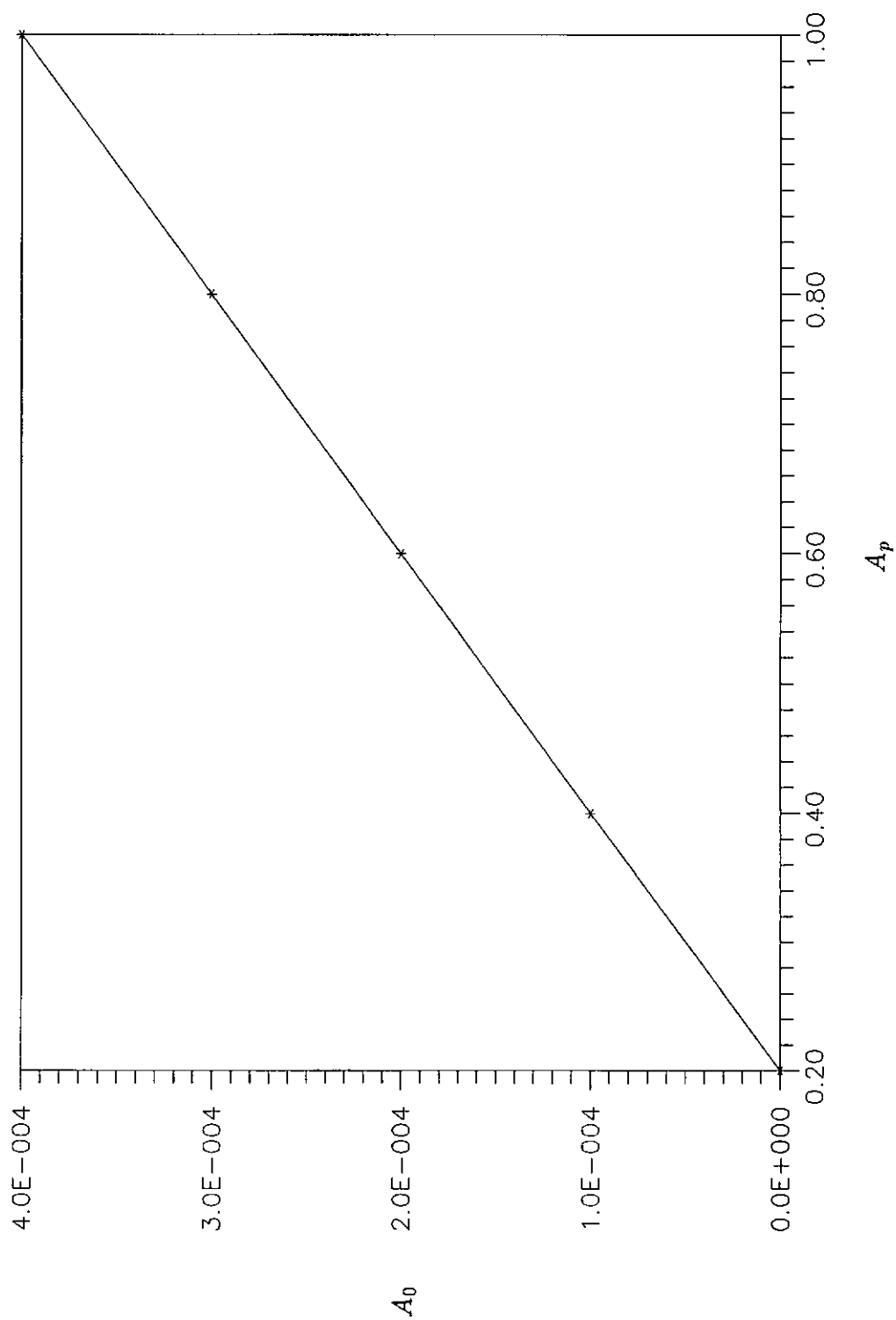


Fig.7.7 Dependência da Resposta na Amplitude da Perturbação

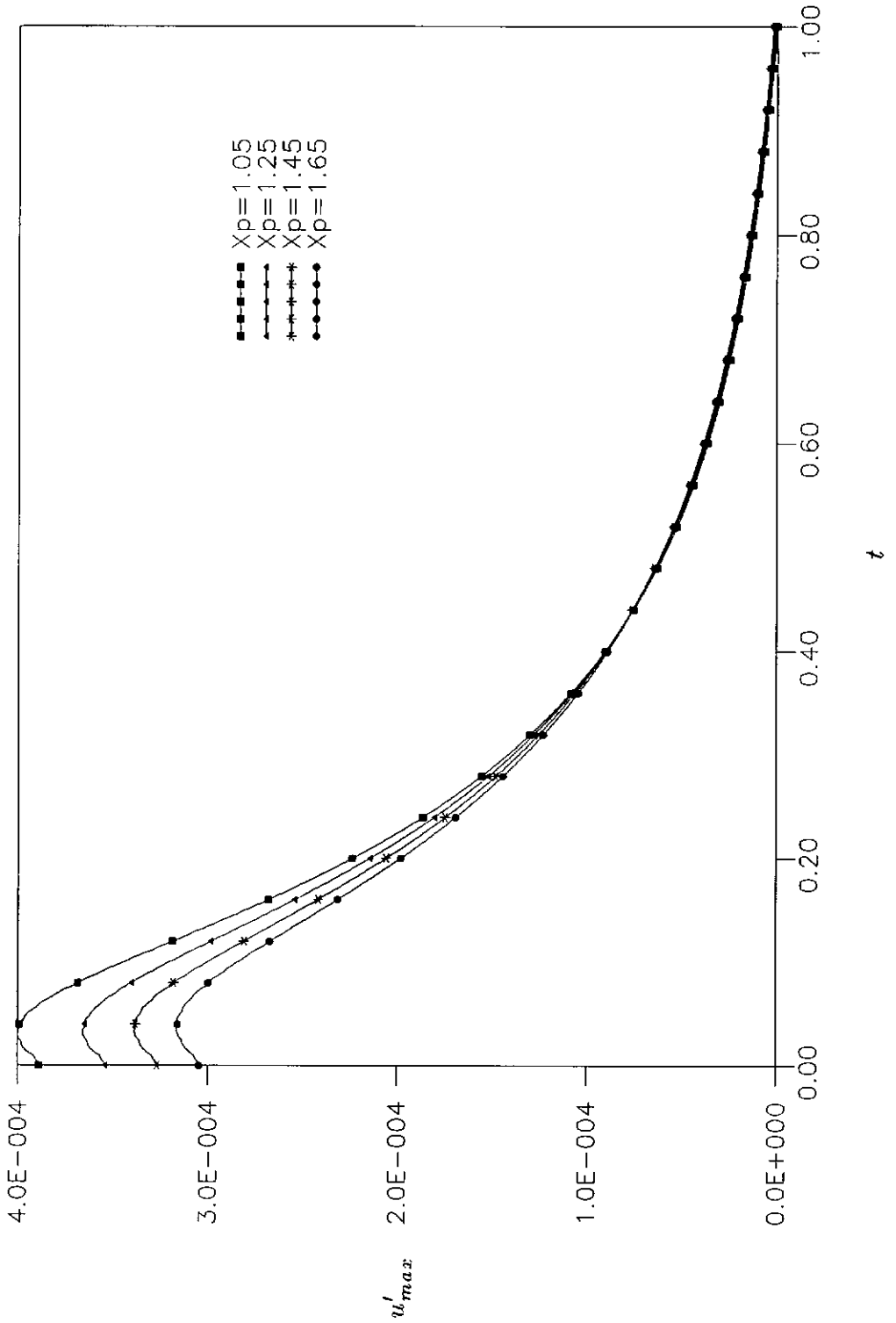


Fig.7.8 A Resposta da Camada Limite a Perturbações de mesma Amplitude Aplicadas em Diferentes Posições e com mesmo Comprimento do Intervalo $\Delta x_p = 0.03$.

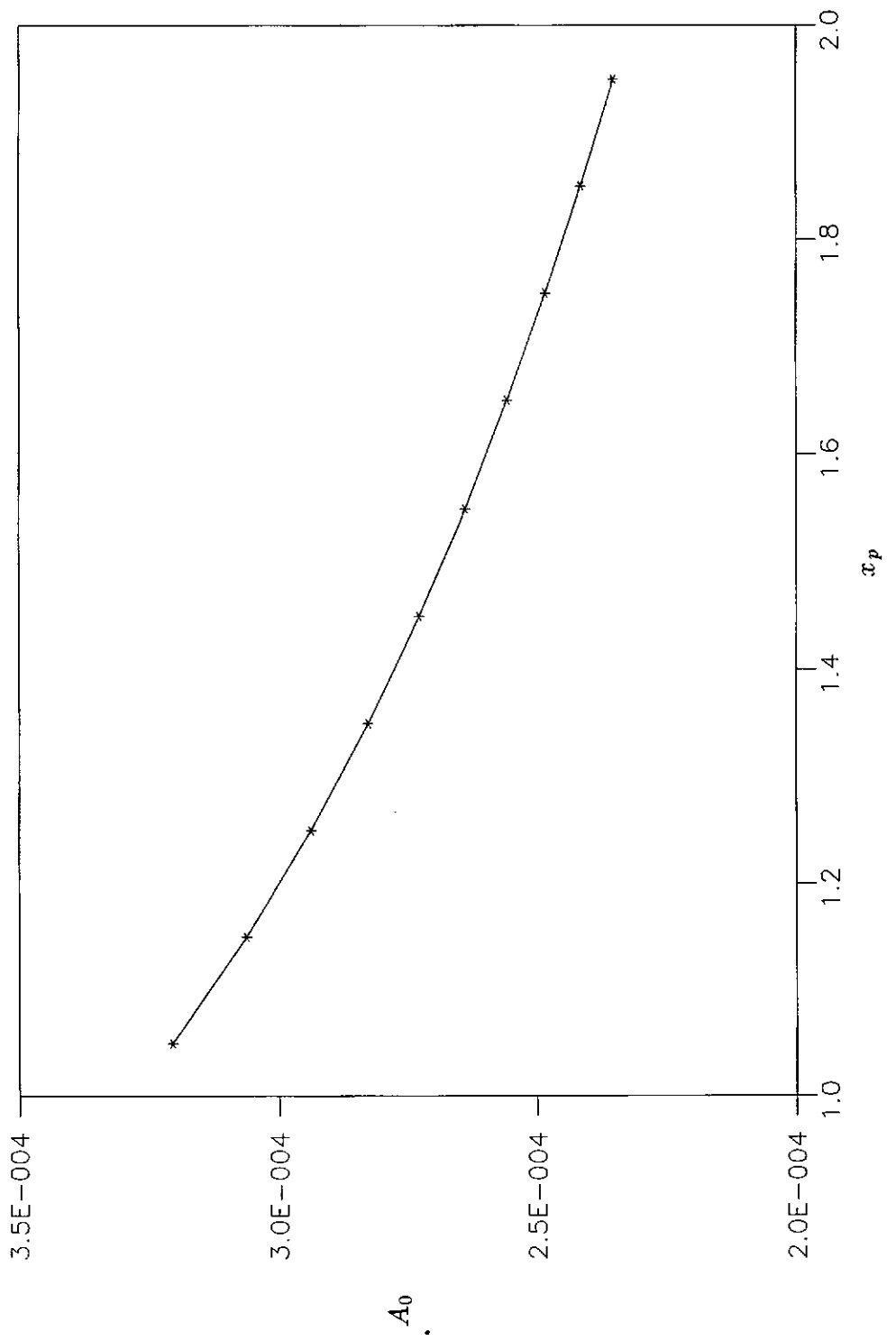


Fig.7.9 Dependência da Resposta na Posição da Perturbação

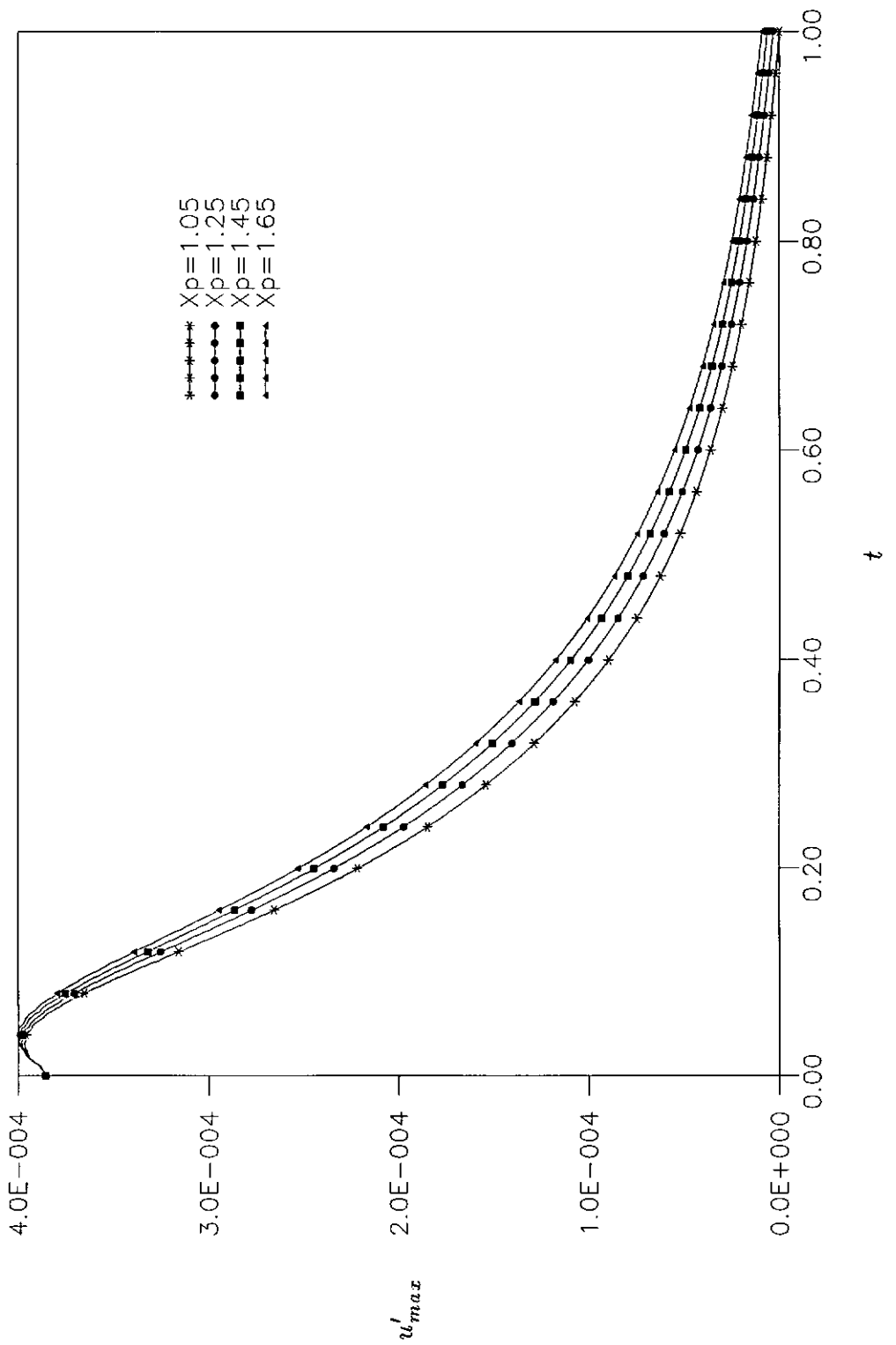


Fig.7.10 A Resposta da Camada Limite a Perturbações de Amplitudes Proporcionais à Raiz Quadrada da Posição de Aplicação x_p e com mesmo Comprimento do Intervalo $\Delta x_p = 0.03$.

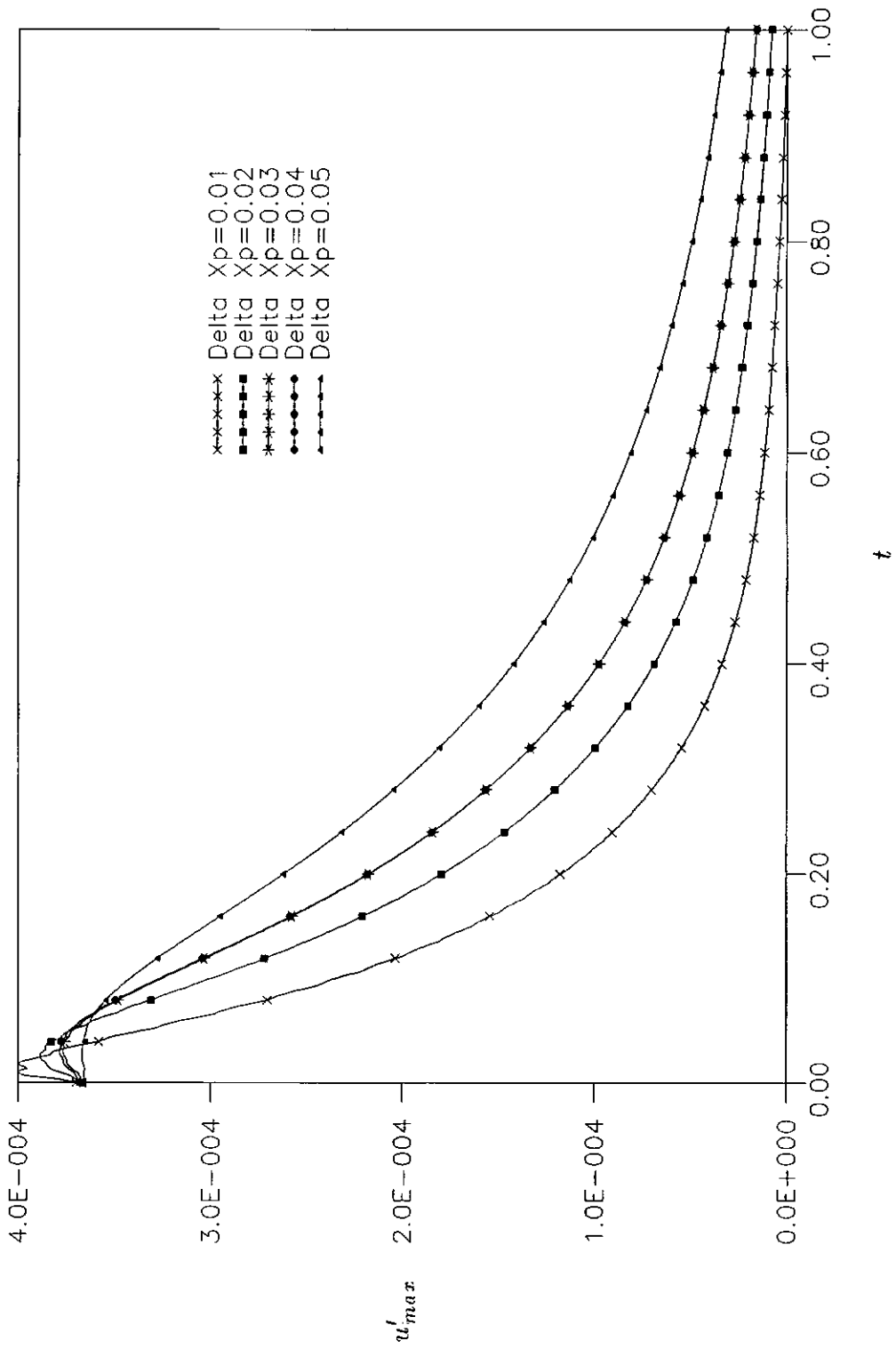
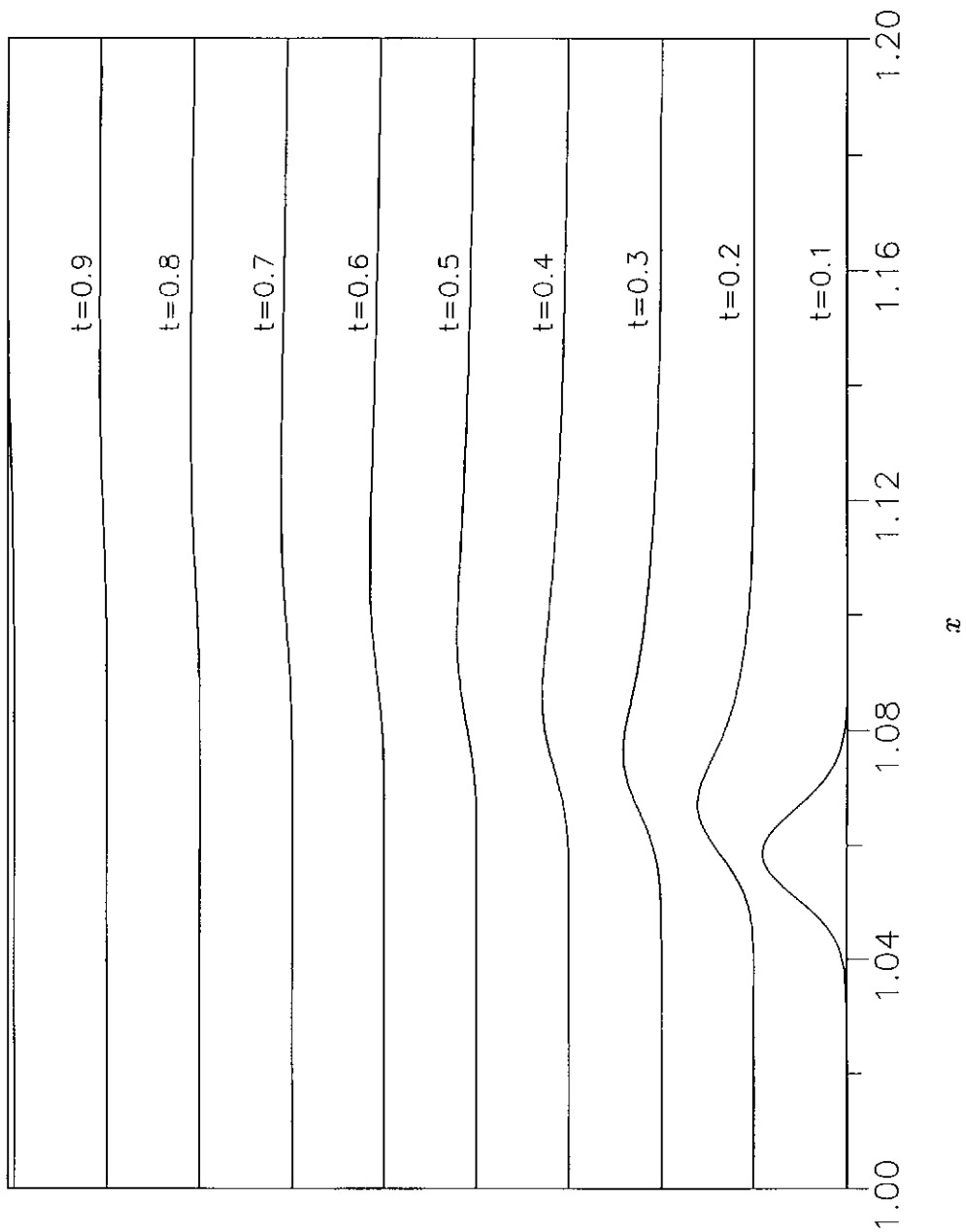


Fig.7.11 A Resposta da Camada Limite a Perturbações de mesma Amplitude Aplicadas em uma mesma Posição e com Diferentes Comprimentos do Intervalo.



8

Fig.7.12 A Evolução da Espessura Perturbada da Camada Limite

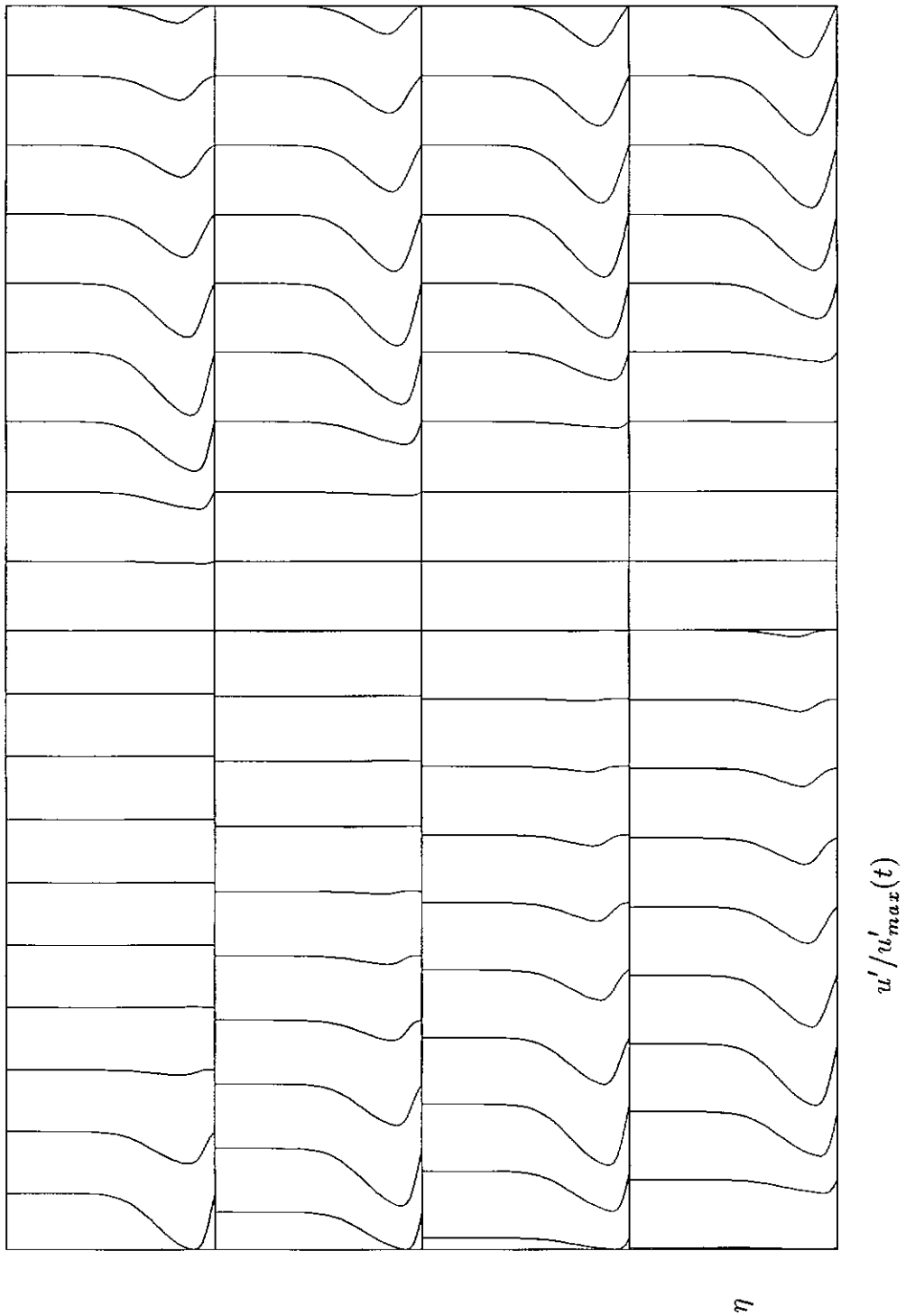


Fig.7.13 A Evolução dos Perfis de Velocidade na Direção do Escoamento para várias Estações ao longo da Placa :
 (a) $t = 0.1$; (b) $t = 0.2$; (c) $t = 0.3$; (d) $t = 0.4$;
 (e) $t = 0.5$; (f) $t = 0.6$; (g) $t = 0.7$; (h) $t = 0.8$

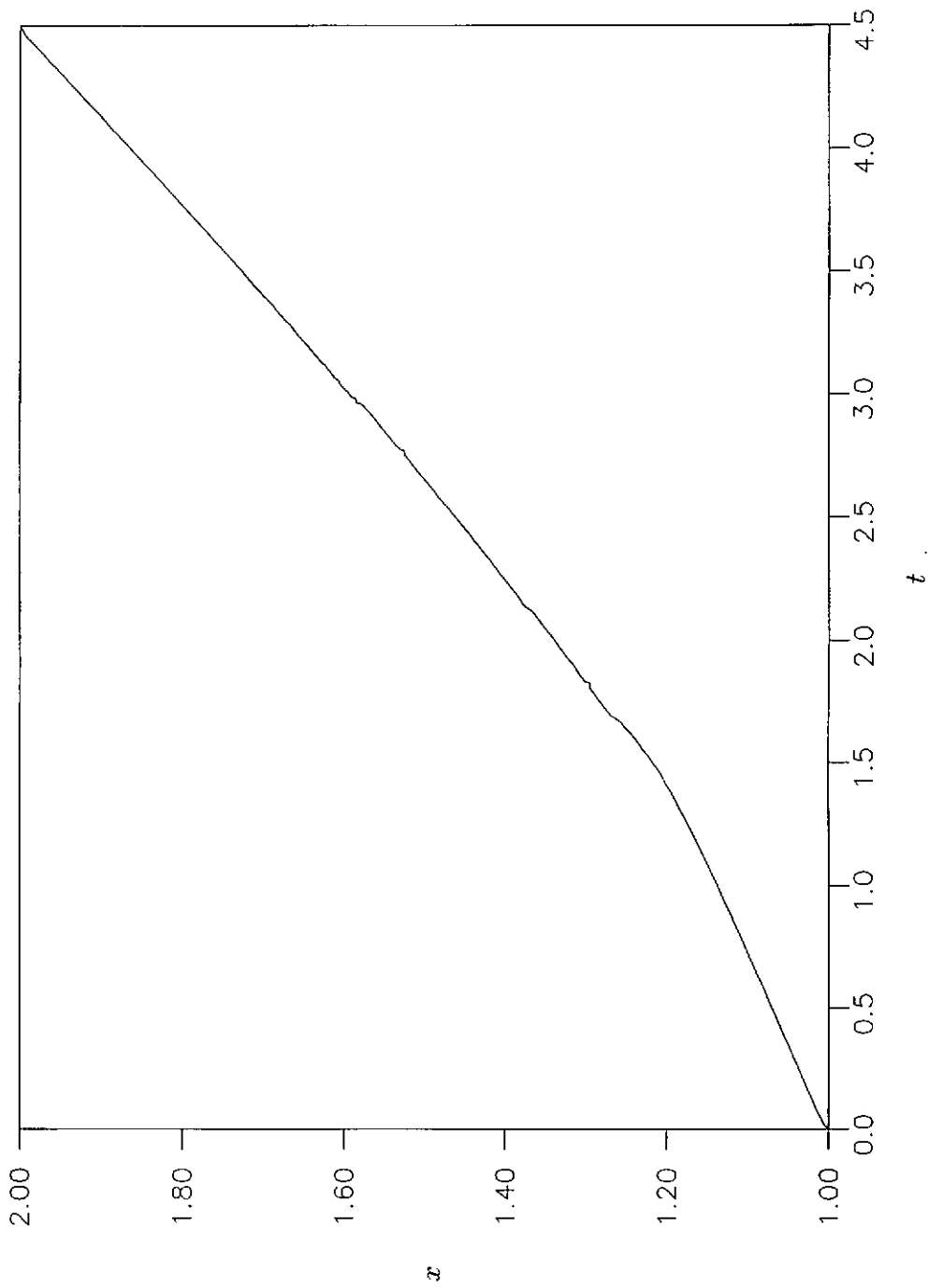


Fig.7.14 A Trajetória de Propagação da Perturbação no Plano $x - t$.

Nos resultados mostrados até agora, a velocidade de perturbação na parede é positiva. Isto significa que o escoamento é perturbado por uma injeção de fluido. Por outro lado, o escoamento pode também ser perturbado por uma sucção de fluido, isto é, com velocidade de perturbação negativa. A resposta da camada limite a uma perturbação negativa é comparada na Tabela 7.5 com a resposta a uma perturbação positiva. Vemos que os resultados são bastante próximos.

Tabela 7.5

Comparação entre as Respostas a uma Perturbação Positiva e outra Negativa

t	$A_p = 1.0$	$A_p = -1.0$
0.0	0.32050E-03	0.32053E-03
0.1	0.28604E-03	0.28589E-03
0.2	0.19350E-03	0.19324E-03
0.3	0.13055E-03	0.13037E-03
0.4	0.90675E-04	0.90546E-04
0.5	0.65311E-04	0.65208E-04
0.6	0.49069E-04	0.48995E-04
0.7	0.38205E-04	0.38148E-04
0.8	0.30596E-04	0.30553E-04
0.9	0.25057E-04	0.25023E-04
1.0	0.21012E-04	0.20985E-04

A evolução da espessura da camada limite perturbada é apresentada na Figura 7.15. Os perfis de velocidade na direção do escoamento são mostrados na Figura 7.16.

O mesmo problema de perturbação é também estudado com a solução das equações de camada limite não estacionária usando o esquema misto de diferenças finitas/transformada integral generalizada. A convergência da solução é mostrada na Figura 7.17. Podemos observar que a solução converge com 15 termos do somatório. A solução confirma as conclusões obtidas pela solução através do método de diferenças finitas.

A influência de r_1 na solução do esquema misto é apresentada na Tabela 7.6.

Tabela 7.6

Influência de r_1 sobre a solução do esquema misto

$$\Delta t = 0.0008 \text{ e } \Delta \eta = 0.2$$

t	$r_1 = 0.8$	$r_1 = 1.0$	r_1
0.044000	0.33562E-03	0.33549E-03	0.33560E-03
0.110000	0.28825E-03	0.28968E-03	0.28960E-03
0.220000	0.20452E-03	0.20442E-03	0.20437E-03
0.332000	0.15471E-03	0.15526E-03	0.15523E-03
0.440000	0.12853E-03	0.12849E-03	0.12847E-03

As soluções obtidas pelo esquema de diferenças finitas e pelo esquema misto de diferenças finitas/transformada integral generalizada são comparadas na Figura 7.19. Observamos que as soluções são diferentes nos instantes iniciais, decaindo depois. Como as taxas de decaimentos obtidas são diferentes, as respostas são diferentes depois de um período de tempo. A diferença entre as soluções pode ser explicada pela resolução insuficiente do métodos de diferenças finitas e pelo tratamento diferente da equação da continuidade pelos dois métodos. Pelo esquema misto de diferenças finitas(MDF)/transformada integral generalizada(GITT), a velocidade transversal é substituída na equação do movimento através da integração da equação da continuidade na direção normal à placa e do uso da fórmula da inversa, enquanto, no método de diferenças finitas puro, a mesma é obtida pela equação da continuidade e usada no passo de tempo seguinte.

Na Figura 7.20 mostramos a evolução da velocidade máxima na direção do escoamento. Podemos observar que inicialmente a perturbação decai rapidamente com sua taxa de decaimento diminuindo a partir de $t = 1$.

Devemos mencionar que uma comparação direta da presente teoria com dados experimentais não é possível no momento, por não existirem experimentos realizados em condições parecidas àquelas consideradas aqui. Isto se deve basicamente à dificuldade na realização de tais experimentos. Entretanto, a investigação experimental da resposta a perturbações pulsantes com longo comprimento característico é importante e está sendo planejada por Gaster (comunicação pessoal).

Por outro lado, nossa conclusões são de acordo com as conclusões de Ackerman e Phillips(1972), Brown e Stewartson(1973a, 1973b) e Goldstein(1983) de que as perturbações decaem por conta da solução das equações de camada limite não estacionária. A relevância de nosso trabalho pode ser melhor entendida através da Figura 7.21(a Figura 1 de Goldstein(1983)).

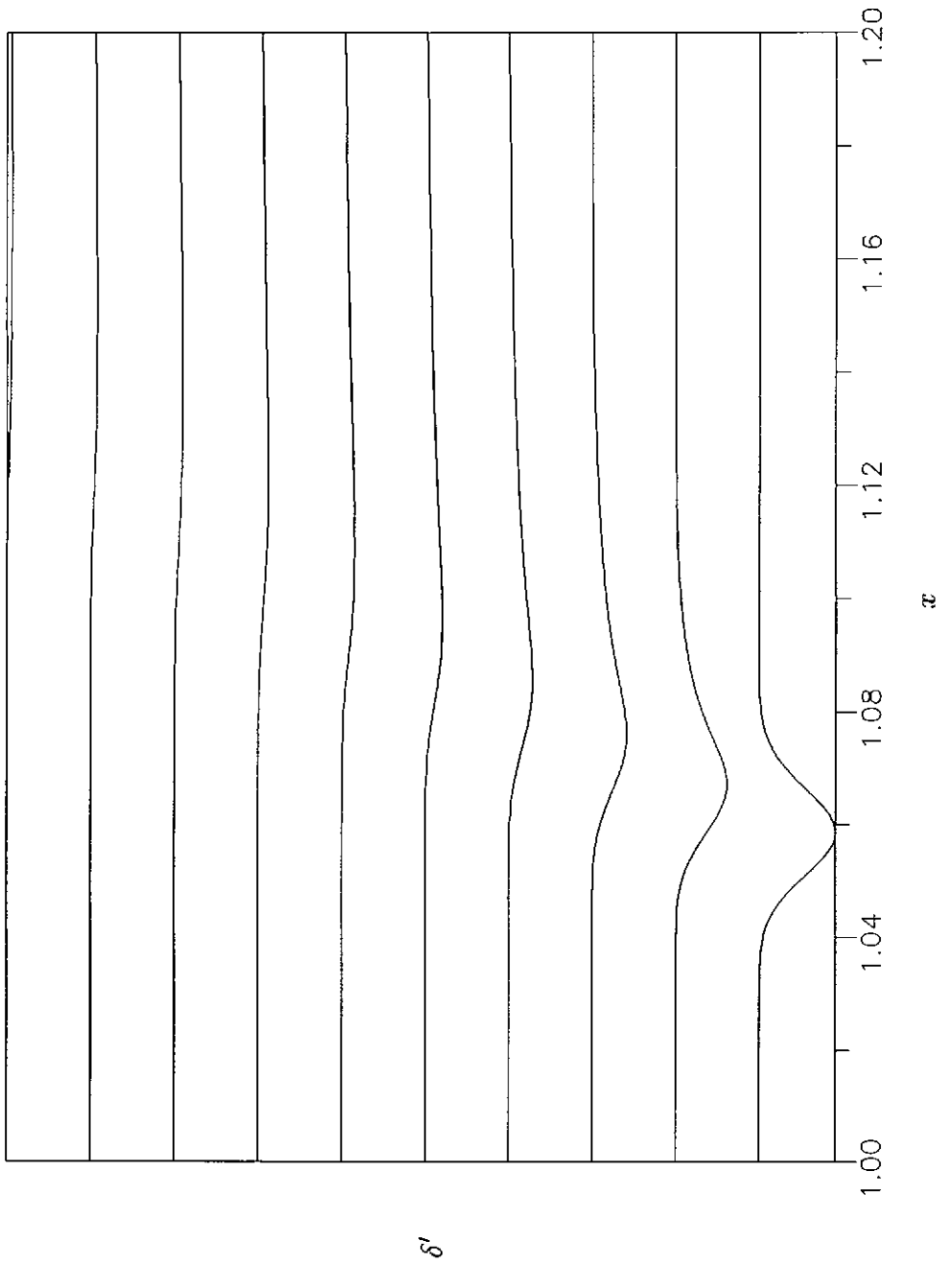


Fig.7.15 A Evolução da Espessura Perturbada da Camada Limite sujeita a uma Perturbação Negativa

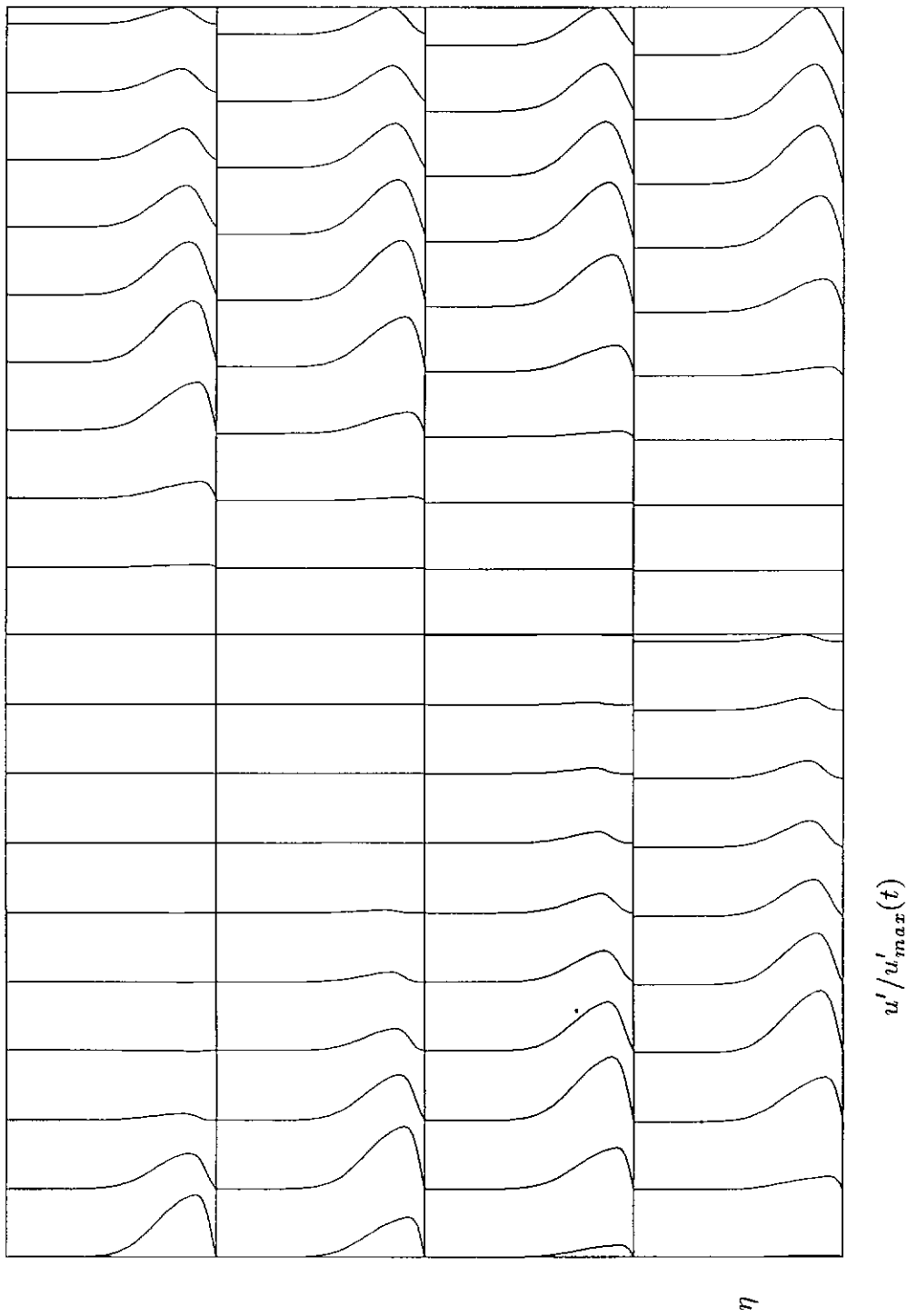


Fig.7.16 A Evolução de Perfis de Velocidade na Direção do Escoamento em Posições ao longo da Placa::
 (a) $t = 0.1$; (b) $t = 0.2$; (c) $t = 0.3$; (d) $t = 0.4$;
 (e) $t = 0.5$; (f) $t = 0.6$; (g) $t = 0.7$; (h) $t = 0.8$
 (Perturbação Negativa)

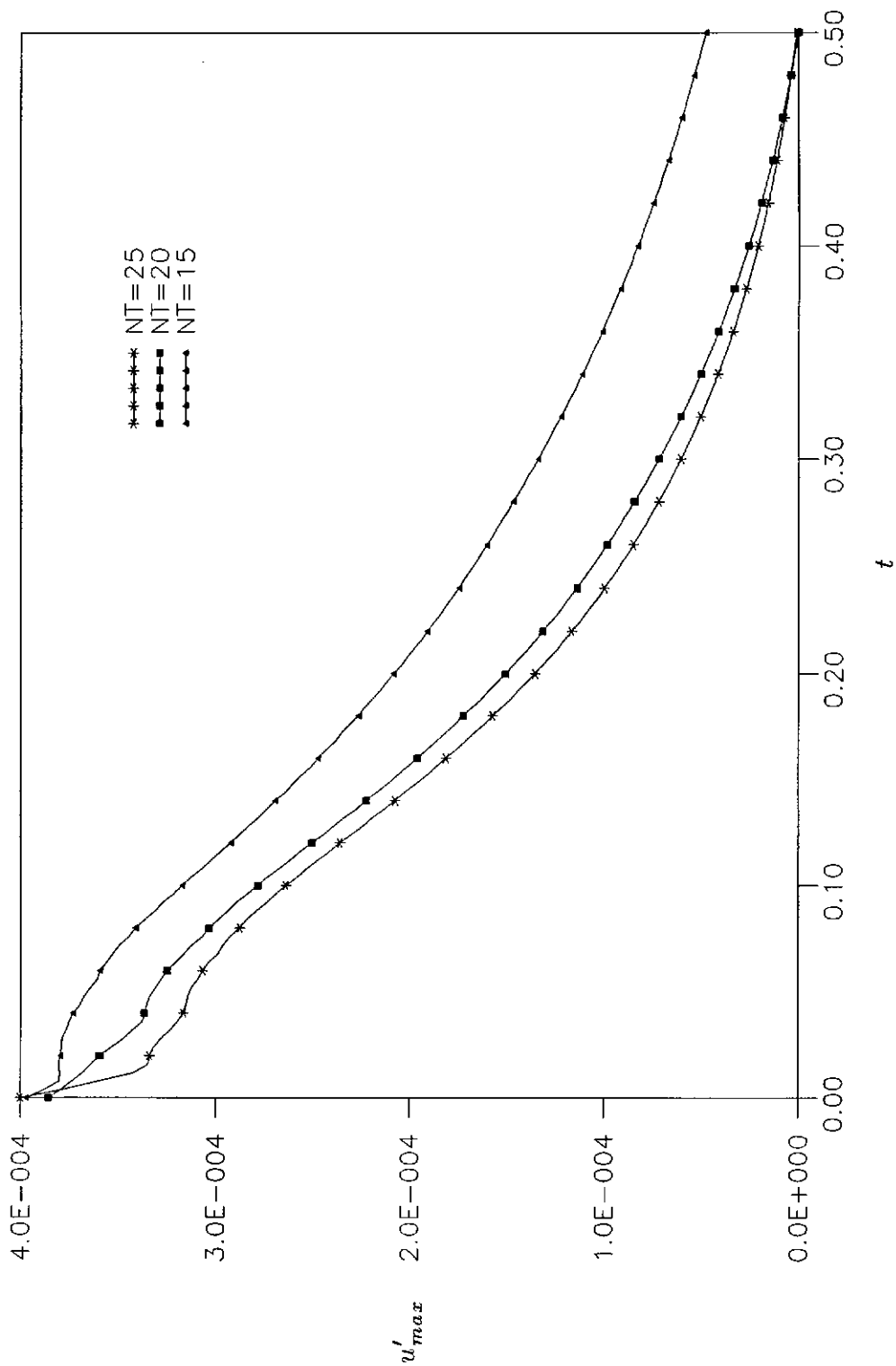


Fig.7.17 A Convergência da Solução pelo Esquema Misto de Diferenças Finitas/Transformada Integral Generalizada

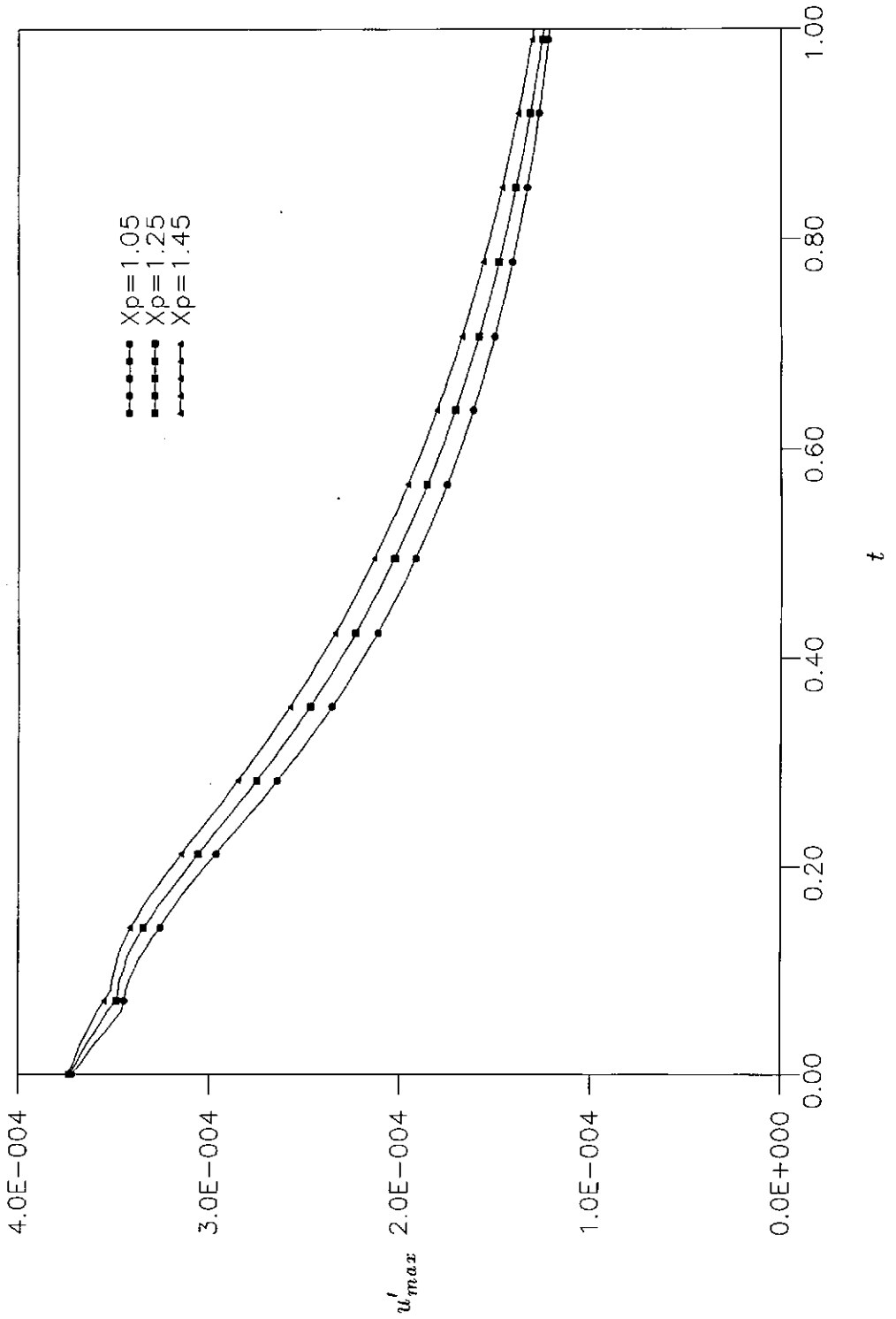


Fig.7.18 A Resposta da Camada Limite a Perturbações de Amplitudes Proporcionais a Raiz Quadrada da Posição de Aplicação x_p e com mesmo Comprimento do Intervalo $\Delta x_p = 0.03$ pelo Esquema Misto MDF/GITT.

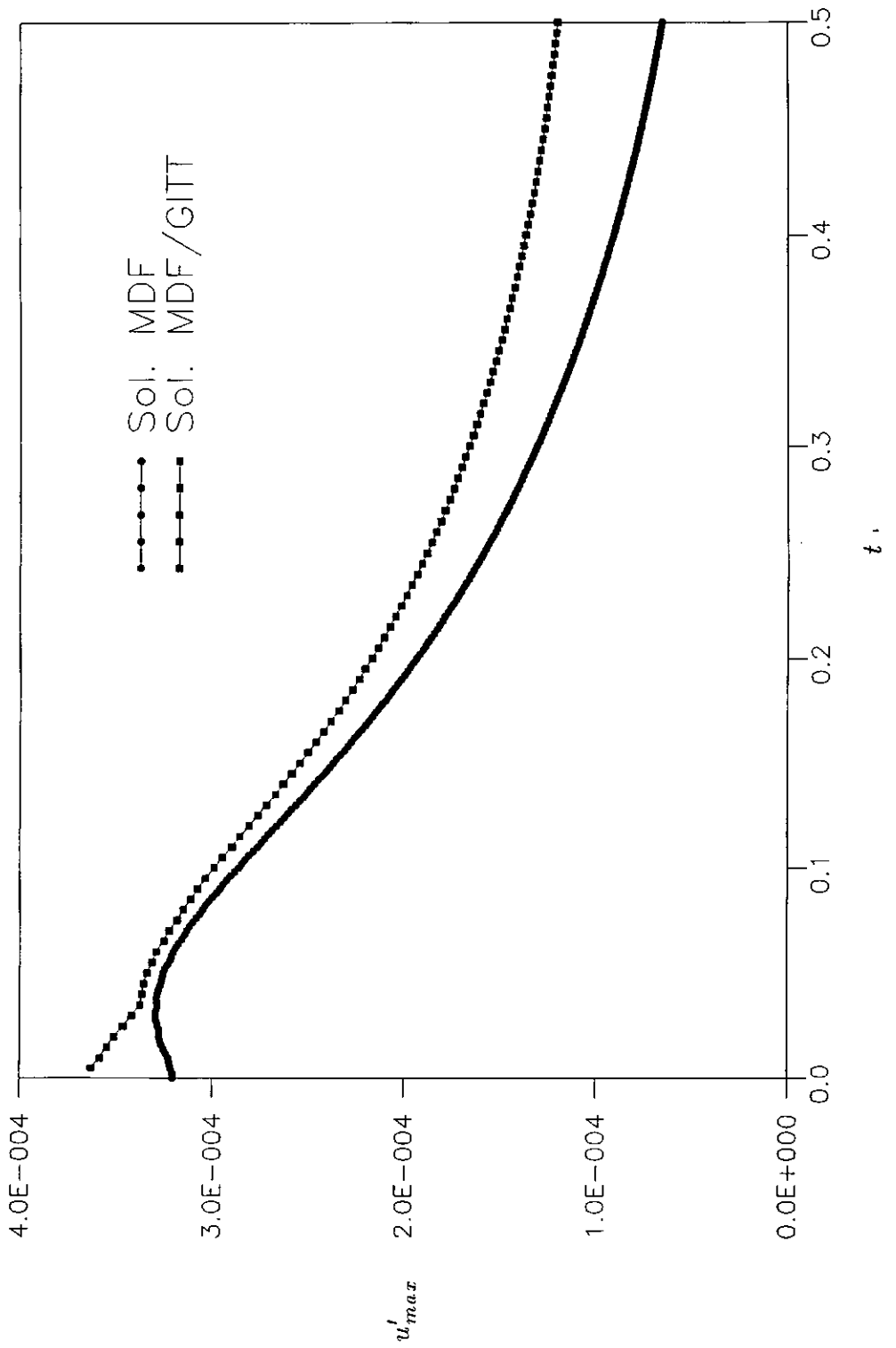


Fig.7.19 A Comparação das Soluções pelos dois Métodos

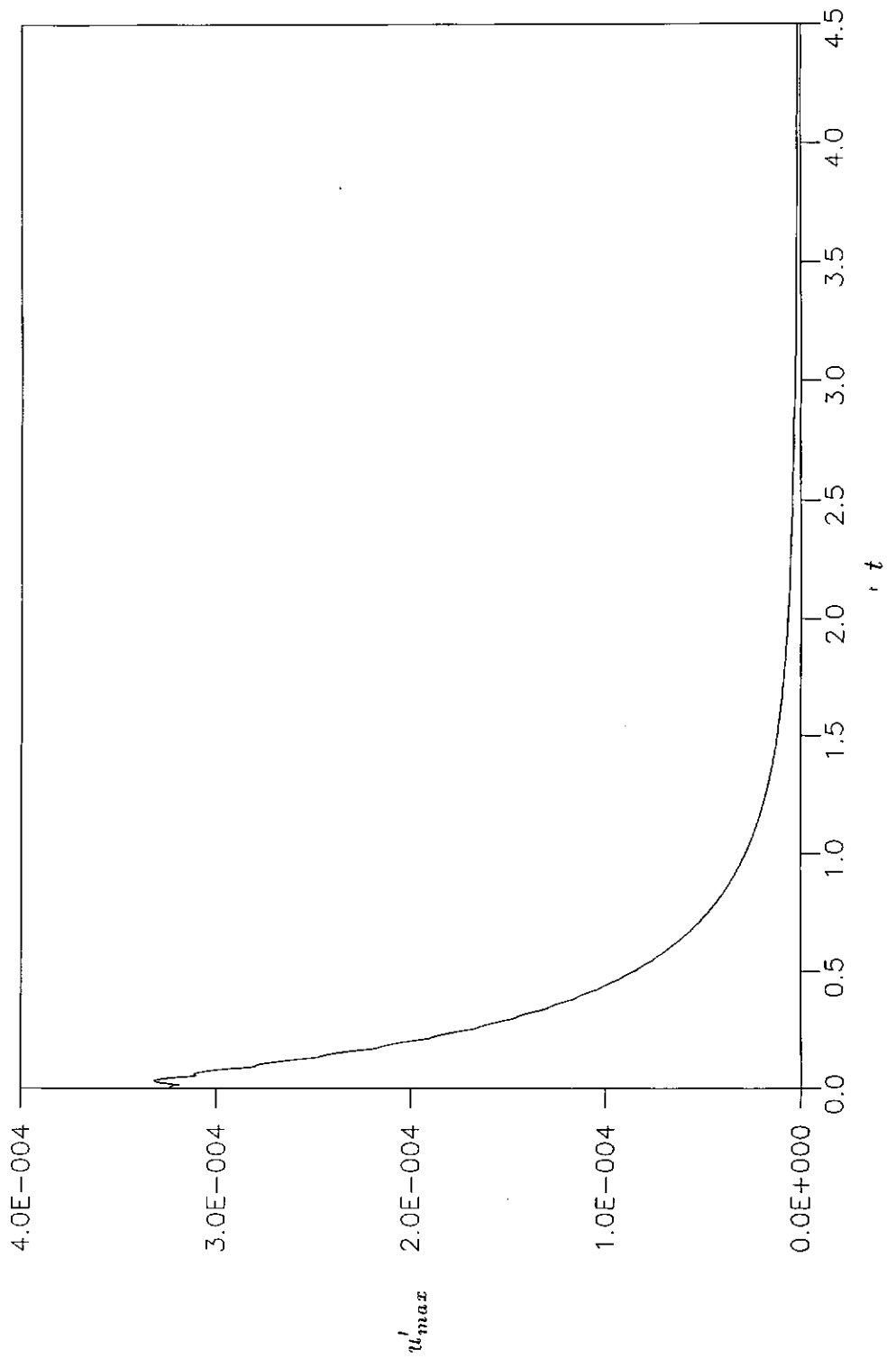


Fig.7.20 A Resposta da Camada Limite a Perturbação Pulsante: Evolução ao longo do Tempo.

Equação de Navier-Stokes completa

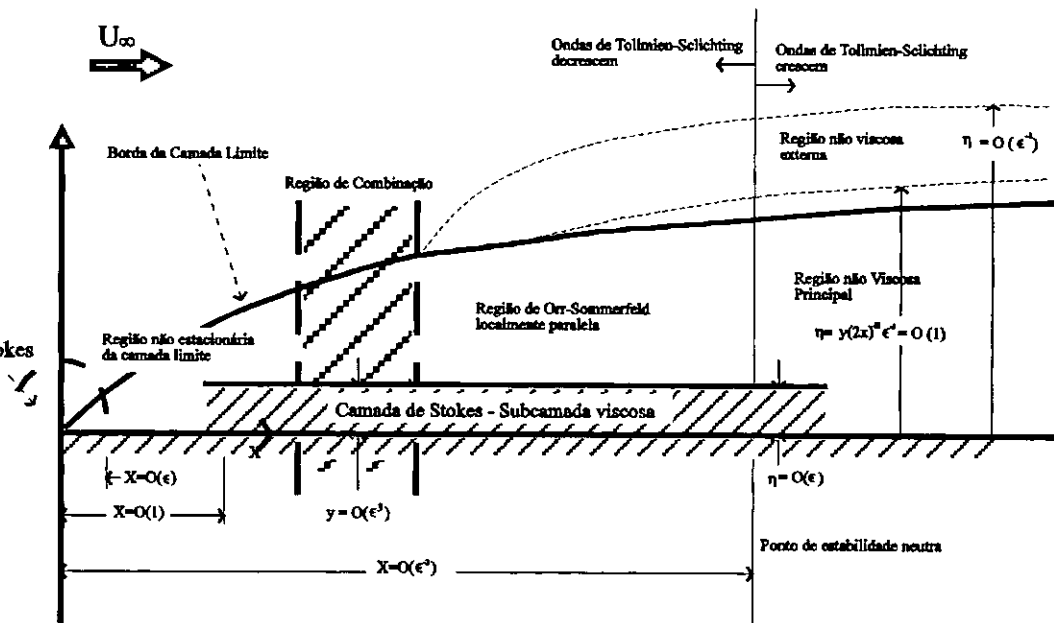


Fig.7.21 A Estrutura Assintótica da Camada Limite Não Estacionária,
onde $\epsilon = Re_L^{-\frac{1}{6}}$

Goldstein(1983) mostrou que as soluções das equações de camada limite não estacionária a perturbações externas decaem, combinando-se à jusante com as soluções da equação de Orr-Sommerfeld, as quais eventualmente se amplificam levando ao regime não linear. As soluções das equações de camada limite são importantes por determinarem a amplitude das perturbações que subseqüentemente se amplificarão levando ao processo de transição.

A Figura 7.20 é quase idêntica às Figuras 3-9 de Criminale et. al.(1991), onde o decaimento de perturbações tridimensionais em escoamento não viscoso de Couette é calculado pela abordagem de problema de valor inicial. Esta semelhança sugere uma possível ligação entre a solução aqui obtida e o espectro contínuo da equação de Rayleigh(formulação não viscosa) e da equação de Orr-Sommerfeld(formulação viscosa). Embora a teoria linear da estabilidade hidrodinâmica tenha sido sempre relacionada com o espectro discreto, a importância do espectro contínuo tem sido amplamente reconhecida recentemente devido à possibilidade da amplificação inicial das perturbações atingir um certo nível onde os efeitos não lineares passem a ser importantes.

É interessante relacionar nossa conclusão com as conclusões de Breuer and Hari-tonidis(1990) obtidas através de estudos numéricos e experimentais. Pela solução da formulação não viscosa para perturbações tridimensionais e pelos dados experimentais, mostra-se que a perturbação pode ser dividida em duas partes: uma parte transiente e uma parte ondulatória. A mesma explicação aplica-se para nossos resul-

tados. Isto significa que a solução das equações de camada limite não estacionária contém as mesmas informações sobre a parte transiente e a parte ondulatória.

Capítulo 8

Formulação Unificada de Vorticidade e o Método de Vórtices Discretos

Nos capítulos anteriores, o problema da estabilidade de uma camada limite foi formulado em variáveis primitivas, as equações governantes sendo resolvidas pelo método de diferenças finitas e pela técnica da transformada integral generalizada. Esta abordagem pertence à categoria de métodos que utilizam a descrição eulereana, sendo apropriada para tratar os problemas de camada limite, onde os efeitos da viscosidade concentram-se em uma região próxima à superfície do corpo sólido. Isto permite a solução ser capturada pela resolução da malha eulereana.

Por outro lado, esta abordagem não é apropriada para problemas que envolvem camadas cisalhantes livres, pois estas camadas são intrinsecamente instáveis, apresentando geralmente oscilação temporal-espacial. Isto torna a descrição eulereana com uma malha fixa inviável. Para uma resolução suficiente do campo do escoamento, um grande número de pontos se torna necessário para a discretização do espaço físico. Mas, como a posição da camada cisalhante não é conhecida *a priori* como no caso da camada limite, grande parte destes pontos são usados para discretizar regiões com pouca variação das variáveis físicas. Para este tipo de problema, a abordagem lagrangeana deve ser adotada. Os desenvolvimentos recentes dos métodos de vórtices tornam esta abordagem uma alternativa atraente para a descrição de camadas cisalhantes livres a alto número de Reynolds.

A vorticidade é uma variável física de importância crucial para escoamentos incompressíveis. Todo problema de escoamento incompressível pode ser resumido como sendo uma questão de determinar a intensidade e a posição da vorticidade. Vários métodos de vórtices têm sido desenvolvidos para descrever escoamentos de camadas cisalhantes livres. Recentemente, o método de vórtices discretos é utilizado junto com os métodos de painéis para simular escoamentos ao redor de corpos rombudos onde a esteira é representada pela distribuição de vórtices discretos no campo do escoamento. No entanto, a combinação destes dois métodos não foi até hoje bem justificada.

O objetivo deste capítulo é deduzir uma formulação unificada da vorticidade que justifique a utilização dos métodos de vórtices discretos e de vorticidade superficial para o escoamento incompressível, bidimensional, de um fluido ao redor de um corpo. Na seção 8.1 formulamos o problema de escoamento incompressível, bidimensional, com a vorticidade e a função de corrente. Na seção 8.2 deduzimos uma relação

cinemática entre a vorticidade superficial e a vorticidade no campo do escoamento usando a segunda identidade de Green. Os métodos de vórtices discretos são discutidos na seção 8.3.

8.1 Formulação de Vorticidade-Função de Corrente

As equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis, bidimensionais, podem ser reescritas na forma da formulação vorticidade-função de corrente através da definição de função de corrente e de vorticidade.

A função de corrente é definida como sendo uma função que satisfaz as seguintes condições:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (8.1a)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (8.1b)$$

O vetor de vorticidade é definido pelo rotacional do campo de velocidade do escoamento, isto é

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (8.2)$$

Para escoamentos bidimensionais, a magnitude do vetor ω , chamada geralmente de vorticidade, se reduz a:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (8.3)$$

Em termos de vorticidade e função de corrente, as equações de Navier-Stokes podem ser escritas na seguinte forma:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega, \quad (8.4)$$

onde a função de corrente é obtida através da equação:

$$\nabla^2 \Psi = -\omega. \quad (8.5)$$

As equações (8.4) e (8.5) formam a formulação de vorticidade-função de corrente, tendo como incógnitas as grandezas ω e Ψ . Esta formulação é a mais utilizada na solução numérica das equações de Navier-Stokes para escoamentos bidimensionais por ter a vantagem de não conter os termos de pressão. Estas equações são geralmente resolvidas pelos métodos de diferenças finitas. Recentemente, Guerrero e Cotta(1992) estudaram o problema do escoamento de um fluido em uma cavidade por esta formulação. A solução pela técnica da transformada integral generalizada mostrou-se mais eficiente que a solução pelos métodos de diferenças finitas.

Por outro lado, para escoamentos de camadas cisalhantes livres a alto número de Reynolds, a formulação de vorticidade-função de corrente pode também ser resolvida pelo método de vórtices, o qual mostra certas vantagens sobre os métodos eulereanos. A principal delas é a auto-resolução de estruturas do escoamento pela utilização de marcas lagrangeanas, em vez de malhas eulereanas. Mais freqüentemente, a formulação não viscosa é utilizada no estudo da estabilidade de camadas cisalhantes livres.

Para um escoamento potencial, a vorticidade é nula em todo o campo do escoamento. A equação (8.5) torna-se então a equação de Laplace:

$$\nabla^2 \Psi = 0, \quad (8.6)$$

a qual é portanto suficiente para se determinar o escoamento bidimensional de um fluido ao redor de um corpo. A equação (8.6) é geralmente resolvida pelo mapeamento complexo para geometrias simples e regulares e pelos métodos de singularidade superficial para geometrias complexas e irregulares. As formulações de singularidade superficial são obtidas pela utilização da segunda identidade de Green. Com funções de Green apropriadamente definidas, a superfície do corpo pode ser representada pela distribuição de fontes, de dipolos ou de vórtices. Neste último caso, a formulação é denominada método de vorticidade superficial. Recentemente, este método foi utilizado, junto com o método da dinâmica de vorticidade, para simular escoamentos ao redor de corpos rombudos onde a esteira é representada pela distribuição de vórtices discretos no campo do escoamento. Uma equação não viscosa de transporte de vorticidade, a chamada equação de vorticidade de Helmholtz, é utilizada para determinar as posições dos vórtices:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (8.7)$$

Esta equação é equivalente ao teorema de Helmholtz que diz ser a vorticidade conservada em escoamentos não viscosos e simplesmente convectada pelas partículas de fluidos.

Uma justificativa rigorosa da utilização dos dois métodos nunca foi fornecida, dificultando o entendimento de sua natureza. Na próxima seção, mostraremos uma relação cinemática deduzida a partir da equação (8.5) para justificar a utilização dos métodos da dinâmica de vorticidade e de vorticidade superficial no estudo de escoamentos ao redor de corpos rombudos.

8.2 Formulação Unificada

A Eq.(8.5) é uma relação cinemática que vem das definições de vorticidade e de função de corrente. Um problema de valor de contorno pode ser identificado usando-se a Eq.(8.5) e condições de contorno apropriadas na superfície do corpo e no infinito. O problema é ilustrado na Fig. 8.1.

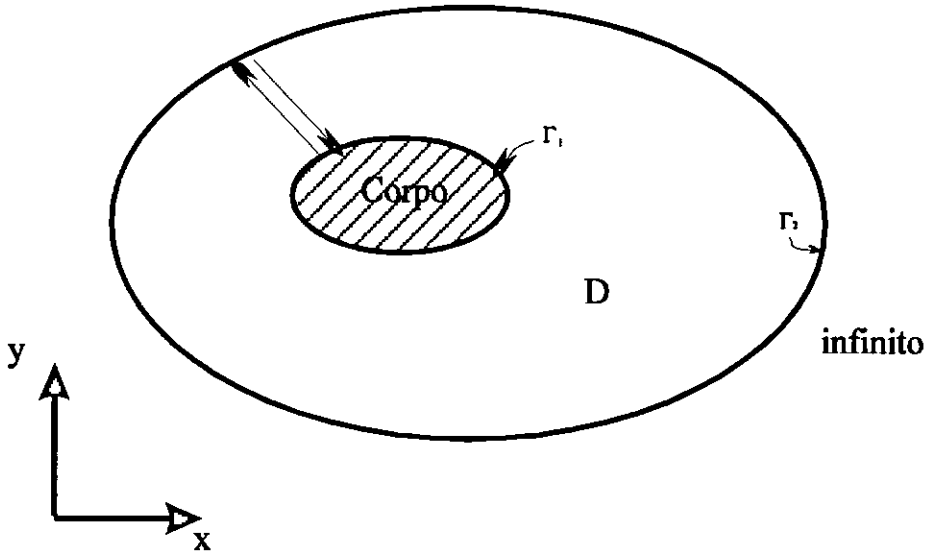


Fig.8.1 O problema de valor de contorno.

A formulação deste problema de valor de contorno é:

$$\nabla^2 \Psi = -\omega. \quad (8.5)$$

$$\Psi = 0, \quad \text{em } \Gamma_1, \quad (8.8a)$$

$$|\nabla \Psi| = 0, \quad \text{em } \Gamma_2, \quad (8.8b)$$

onde Γ_1 representa a superfície do corpo e Γ_2 o infinito.

A função de Green para a equação de Poisson bidimensional é definida como:

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln|z - z_0|, \quad (8.9)$$

a qual possui a seguinte propriedade:

$$\nabla^2 G(z, z_0) = \delta(z - z_0), \quad (8.10)$$

onde $\delta(z - z_0)$ é a função de Dirac. A segunda identidade de Green é escrita como:

$$\int_D (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dA = \int_{\Gamma} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds. \quad (8.11)$$

Substituindo f por Ψ e g por G na Eq.(8.11), temos:

$$\int_D (\Psi(z_0) \nabla^2 G(z, z_0) - G(z, z_0) \nabla^2 \Psi(z_0)) dA = \int_{\Gamma} (\Psi(z_0) \frac{\partial G(z, z_0)}{\partial n} - G(z, z_0) \frac{\partial \Psi(z_0)}{\partial n}) ds. \quad (8.12)$$

onde z_0 é a variável independente de integração, z sendo um ponto no campo do escoamento. A integral deve ser avaliada ao longo de todo o contorno, isto é, na superfície do corpo e no infinito, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. As integrais ao longo das linhas de corte cancelam-se.

Usando as Eqs.(8.5) e (8.10) e a propriedade da função de Dirac:

$$\int_D \Psi(z_0) \delta(z - z_0) dA = \Psi(z), \quad (8.13)$$

temos a função de corrente em qualquer ponto no campo do escoamento dada por:

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & - \int_D \omega(z_0) G(z, z_0) dA + \int_{\Gamma_1} (\Psi(z_0) \frac{\partial G(z, z_0)}{\partial n}) ds \\ & + \int_{\Gamma_2} (\Psi(z_0) \frac{\partial G(z, z_0)}{\partial n}) - \int_{\Gamma_1} G(z, z_0) \frac{\partial \Psi(z_0)}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2} G(z, z_0) \frac{\partial \Psi(z_0)}{\partial n} ds. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Utilizando as condições de contorno e as propriedades da função de Green no infinito, temos:

$$\Psi(z) = - \int_D \omega(z_0) G(z, z_0) dA - \int_{\Gamma_1} G(z, z_0) \frac{\partial \Psi(z_0)}{\partial n} ds. \quad (8.15)$$

Podemos obter as componentes da velocidade em qualquer ponto no campo do escoamento usando a definição da função de corrente:

$$u(z) = \frac{\partial \Psi(z)}{\partial y} = - \int_D \omega(z_0) \frac{\partial G(z, z_0)}{\partial y} dA - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial G(z, z_0)}{\partial y} \frac{\partial \Psi(z_0)}{\partial n} ds. \quad (8.16a)$$

$$v(z) = - \frac{\partial \Psi(z)}{\partial x} = \int_D \omega(z_0) \frac{\partial G(z, z_0)}{\partial x} dA + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial G(z, z_0)}{\partial x} \frac{\partial \Psi(z_0)}{\partial n} ds. \quad (8.16b)$$

As Eqs.(8.16a, b) significam que a velocidade em qualquer ponto no campo do escoamento é determinada por duas integrais, uma na região de vorticidade e outra ao longo da superfície do corpo. A comparação entre as duas integrais mostra a analogia entre a vorticidade no campo do escoamento ω e a derivada normal da função de corrente na superfície do corpo Ψ_n , a qual é igual à velocidade tangencial na superfície, v_s . Isto significa que a superfície do corpo é equivalente a uma distribuição da vorticidade com intensidade v_s . Entretanto as Eqs.(8.16a, b) não podem ser utilizadas para determinar a velocidade no campo do escoamento sem que se obtenha a velocidade tangencial na superfície do corpo v_s . Aplicando as Eqs.(8.15a, b) na superfície do corpo e obtendo a velocidade tangencial pela soma vetorial das componentes, temos

$$v_s(z) = \int_D \omega(z_0)K(z, z_0)dA + \int_{\Gamma_1} v_s K(z, z_0)ds. \quad (8.17)$$

onde $K(z, z_0)$ é uma função de núcleo definida por:

$$K(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(y - y_0)(dx_0/ds_0) - (x - x_0)(dy_0/ds_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right). \quad (8.18)$$

A Eq.(8.17) é uma equação integral singular do tipo Fredholm onde o valor principal de Cauchy deve ser avaliado. As implicações e a implementação da solução desta equação serão discutidas na seção seguinte.

8.3 O Método de Vórtices Discretos

Uma grande simplificação pode ser realizada pela transformação da Eq.(8.5) nas Eqs.(8.16a, b) e Eq.(8.17). Um problema de valor de contorno bidimensional é assim convertido numa equação integral de uma variável ao longo da superfície do corpo. A integral da vorticidade é avaliada somente na região de vorticidade. Métodos de Painéis podem ser utilizados para resolver numericamente a Eq.(8.17). A Eq.(8.17) pode ser utilizada junto com a equação (8.7) ou a equação (8.4) para descrever escoamentos incompressíveis, bidimensionais, ao redor de corpos rombudos. Nesta descrição, a Eq.(8.17) é utilizada para determinar a velocidade tangencial na superfície e as Eqs.(8.16a,b) são utilizadas para calcular a velocidade da partícula do fluido com a qual a vorticidade será convectada. Devemos notar que três processos de discretização estão envolvidos na implementação numérica desta descrição; são eles: a discretização do tempo, da vorticidade superficial e da região da vorticidade.

A formulação pela vorticidade foi discutida no capítulo anterior. Como conclusão da formulação unificada, vemos que o campo do escoamento é determinado por uma folha de vorticidade que representa a superfície sólida e pela distribuição de vorticidade no escoamento.

Considerando o caso de escoamento infinito na ausência de corpo sólido,

$$\Psi(z) = - \int_D \omega(z_0) G(z, z_0) dA \quad (8.19)$$

Esta integral pode ser discretizada pelo método de vórtices discretos.

Chama-se vórtice pontual a vorticidade concentrada num ponto geométrico com circulação finita. Usando-se vórtices pontuais, a distribuição de vorticidade pode ser discretizada por

$$\omega(z_0) = \sum_j \Gamma_j \delta(z_0 - z_j), \quad (8.20)$$

onde Γ_j é a circulação da partícula j :

$$\Gamma_j = \int_{A_j} \omega(z_0) dA, \quad (8.21)$$

e A_j é a área dos elementos discretizados. Assumindo ser a distribuição inicial da vorticidade suficientemente suave, podemos escrever

$$\Gamma_j = A_j \bar{\omega}(z_j). \quad (8.22)$$

Este método de discretização é chamado geralmente o método de vórtices pontuais.

Usando representação de vórtices pontuais, a integral (8.19) pode ser representado por

$$\Psi = \sum_{j=1}^N \Psi_j \quad (8.23)$$

onde

$$\Psi_j = - \int_{A_j} \omega(z_0) G(z, z_0) dA = -\Gamma_j G(z, z_0) = -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \ln|z - z_0|, \quad (8.23a)$$

isto é

$$\Psi = - \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{2\pi} \ln|z - z_i|. \quad (8.24)$$

O campo de velocidade induzido por uma distribuição de vorticidade é dado pela lei de Biot-Savart:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} = \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (8.25a)$$

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{-(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \quad (8.25b)$$

Um vórtice pontual é uma solução exata das equações de Euler (escoamento não viscoso). Contudo, a utilização de vórtices pontuais apresenta problemas de instabilidade numérica, uma vez que o campo de velocidade induzida é singular quando o raio tende para zero (o que é importante quando dois vórtices se aproximam um do outro). Usando vórtices pontuais, o movimento de vórtices chega a um estado caótico rapidamente. Este problema pode ser contornado pela utilização de esquemas de desingularização, os quais serão discutidos na seção a seguir.

A singularidade de velocidade induzida pelos vórtices pontuais pode ser removida de várias maneiras.

Vórtices de Núcleo

O campo da vorticidade é representado por

$$\omega(z_0) = \sum_j \Omega_j f(z_0 - z_j), \quad (8.26)$$

onde f é a distribuição da vorticidade dentro do vórtice z_j com a normalização:

$$\int f(z) dz = 1 \quad (8.27)$$

Assumimos que a função de distribuição f seja a mesma para todos vórtices.

Chorin e Bernard (1973) assumem ter o núcleo do vórtice a seguinte forma de função de distribuição:

$$f(z) = \begin{cases} (2\pi\sigma|x|)^{-1} & |x| < \sigma \\ 0 & |x| \geq \sigma \end{cases}. \quad (8.28)$$

A função de corrente correspondente a esse modelo é dado por:

$$\Psi = \begin{cases} (2\pi)^{-1} \Gamma \ln r, & r > \sigma \\ (2\pi)^{-1} \Gamma (r/\sigma) & r \leq \sigma \end{cases} \quad (8.29)$$

No modelo proposto por Rankine o vórtice gira como um corpo sólido com seu exterior possuindo características de escoamento potencial. Isto significa que toda a vorticidade está confinada na região do núcleo. A distribuição da velocidade induzida por um vórtice de Rankine tem a seguinte forma

$$v_{\theta} = \begin{cases} \Gamma/(2\pi r) & r > \sigma \\ \Gamma r/(2\pi\sigma^2) & r < \sigma \end{cases} \quad (8.30)$$

O modelo de Lamb envolve uma distribuição gaussiana da vorticidade e uma velocidade circunferencial dada por:

$$\xi(r, t) = (\Gamma/4\pi\nu t)\exp(-r^2/4\nu t), \quad (8.31a)$$

e

$$v_{\theta}(r, t) = (\Gamma/2\pi r)[1 - \exp(-r^2/4\nu t)]. \quad (8.31b)$$

A equação (8.31) é uma solução exata das equações de Navier-Stokes para um único vórtice viscoso em um domínio incompressível infinito e $\sqrt{2\nu t} = r_0$ é o desvio padrão da distribuição de vorticidade. O raio no qual a velocidade tangencial atinge um máximo é $r_m = 2.24\sqrt{\nu t} = 1.584r_0$.

Outro método foi proposto por Rosenhead(1931) e modificado por vários autores. A utilização de um termo representa o núcleo. A velocidade induzida é escrita como:

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \epsilon^2}, \quad (8.32a)$$

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{-(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \epsilon^2}, \quad (8.32b)$$

onde (x_0, y_0) é a posição do vórtice.

Podemos observar que para $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ grande, a velocidade induzida se aproxima da velocidade induzida pelo vórtice pontual; enquanto para r^2 tendendo a zero a velocidade induzida tende à de Rankine. Uma vez determinada a velocidade induzida pelos vórtices, podemos calcular as trajetórias resultantes pela integração das componentes da velocidade.

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i, \quad (8.33a)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = v_i, \quad (8.33b)$$

Estas equações diferenciais ordinárias podem ser integradas numericamente através de esquemas bem estabelecidos. O algoritmo de Euler de primeira ordem de precisão é mais utilizado.

A nova posição dos vórtices é determinada por:

$$z_i^{n+1} = z_i^n + (u_i, v_i)\Delta t. \quad (8.34)$$

Preditor-Corretor

$$z_i^{\overline{n+1}} = z_i^n + (u_i, v_i)\Delta t. \quad (8.35a)$$

$$z_i^{n+1} = z_i^n + \frac{1}{2}((u_i, v_i) + (u_i, v_i)^{\overline{n+1}})\Delta t. \quad (8.35b)$$

onde $(u_i, v_i)^{\overline{n+1}}$ é a velocidade calculada na posição $z_i^{\overline{n+1}}$.

Um algoritmo que use expansões em série de Taylor é normalmente utilizado. Por exemplo, um algoritmo de segunda ordem de precisão é dado por

$$z_i^{n+1} = z_i^n + (u_i, v_i)\Delta t + \left(\frac{du_i}{dt}, \frac{dv_i}{dt}\right) \frac{(\Delta t)^2}{2} \quad (8.36)$$

Na prática, a necessidade de adicionar novos vórtices é a principal restrição no passo de tempo. Portanto, a utilização de algoritmos de alta ordem de precisão nem sempre é desejável.

Capítulo 9

A Instabilidade Espacial de Uma Camada de Mistura pelo Método de Vórtices Discretos

O objetivo deste capítulo é estudar a instabilidade espacial de camadas de mistura. Como mostramos no capítulo 2, os métodos de vórtices tem sido utilizados extensivamente no estudo da estabilidade e da estrutura coerente de camada de mistura. Neste capítulo estudaremos a resposta de uma camada de mistura a perturbações aplicadas no bordo de fuga da placa que separa as duas correntes de velocidades distintas.

9.1 A Definição do Problema

No presente estudo, não consideramos os efeitos da não homogeneidade da densidade, da compressibilidade, das forças de corpo, da tensão superficial e da tridimensionalidade. No caso considerado do número de Reynolds tendendo para o infinito, o efeito da viscosidade será desprezado a não ser no cálculo da geração da vorticidade no bordo de fuga da placa.

O problema pode ser considerado como o de um escoamento composto por duas correntes de velocidades diferentes separadas por uma placa semi-infinita, como ilustra a Fig.9.1

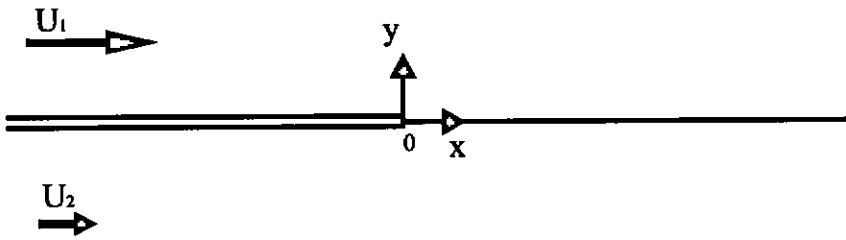


Fig.9.1 O sistema de coordenadas do problema.

No limite de Re tendendo para o infinito, as camadas limite desenvolvidas sobre os dois lados da placa são consideradas finas. A diferença de velocidade potencial decorrente pode ser representada por uma folha de vorticidade. No instante $t = 0$,

metade desta folha é removida subitamente. A folha de vorticidade em $(0, \infty)$ torna-se então livre, com sua outra metade continuando limitada por uma placa. Sejam U_1 e U_2 respectivamente as velocidades das duas correntes, a camada de mistura pode ser determinada pelos dois parâmetros $U_c = (U_1 + U_2)/2$ e $\Delta U = U_1 - U_2$.

Portanto, a intensidade da folha de vorticidade é

$$\gamma = U_1 - U_2. \quad (9.1)$$

Pela formulação proposta no Capítulo 8, sabemos que a função de corrente em qualquer ponto do campo do escoamento é determinada por uma folha de vorticidade que representa a placa plana semi-infinita e por uma folha de vorticidade que representa a camada de mistura.

9.2 Formulação e Solução Numérica

No problema de camada de mistura, usamos a formulação não viscosa:

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0, \quad (9.2a)$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega. \quad (9.2b)$$

A perturbação será aplicada na origem da camada de mistura sendo posteriormente convectada pelo escoamento. Para uma velocidade média finita U_c , a perturbação propaga-se com uma velocidade em torno de U_c . A camada de mistura à jusante somente será perturbada depois de um intervalo de tempo, por exemplo $t = x/u_c$. Então para um dado tempo t , o comprimento da camada de mistura perturbado é aproximadamente $U_c t$. Podemos tomar um comprimento L maior que $U_c t_1$ para a discretização.

Para a implementação numérica, discretizamos uma parte da folha de vorticidade localizada no intervalo $(0, L)$ por N vórtices discretos. As partes restantes conservam suas formas contínuas originais.

No instante $t = 0$, a distribuição de vorticidade é especificada em N pontos

$$\Gamma_1(z_1^0), \Gamma_2(z_2^0), \dots, \Gamma_i(z_i^0), \dots, \Gamma_N(z_N^0).$$

Cada vórtice discreto é colocado no centro da seção da folha de vorticidade que

ele representa, possuindo a circulação total desta seção. Portanto, se a intensidade da folha de vorticidade é

$$\gamma = U_1 - U_2, \quad (9.1)$$

e as circulações dos vórtices discretos são

$$\Gamma_i = \gamma \Delta s, \quad (9.3)$$

o movimento de cada vórtice discreto será descrito por

$$\begin{aligned} u_i = \frac{dx_i}{dt} = & \int_{-\infty}^0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{y_i}{(x_i - x)^2 + y_i^2 + \epsilon^2} dx \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + \epsilon^2} \\ & + \int_L^{+\infty} \frac{\gamma}{2\pi} \frac{y_i}{(x_i - x)^2 + y_i^2} dx, \end{aligned} \quad (9.4a)$$

$$\begin{aligned} v_i = \frac{dy_i}{dt} = & \int_{-\infty}^0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{-(x_i - x)}{(x_i - x)^2 + y_i^2} dx \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{-(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \\ & + \int_L^{+\infty} \frac{\gamma}{2\pi} \frac{-(x_i - x)}{(x_i - x)^2 + y_i^2} dx. \end{aligned} \quad (9.4b)$$

onde ϵ é um valor pequeno que representa o núcleo dos vórtices, como discutido no Capítulo 8.

Por esta formulação, as divergências de velocidades transversais induzidas por duas folhas de vorticidade semi-infinitas se cancelam.

9.3 Resultados Numéricos

Para estudar a evolução espacial da camada de mistura, introduzimos três tipos de perturbação na sua origem: perturbação periódica, pulsante ou randômica.

O primeiro tipo de perturbação possui frequência fixa aplicada na origem da camada de mistura. Em um laboratório, este tipo de perturbação pode ser fisicamente realizada pela oscilação da placa que separa as duas correntes, por um alto falante ou por oscilações mecânicas.

Em cada instante de tempo, um novo vórtice é gerado na origem da camada de mistura e convectado pela velocidade média das duas correntes.

A circulação deste vórtice nascente é:

$$\Gamma_0 = \gamma U_c \Delta t, \quad (9.5)$$

sendo sua posição dada por

$$x = \frac{1}{2} U_c \Delta t, \quad (9.6a)$$

$$y = A_p \sin \omega t, \quad (9.6b)$$

onde A_p é a amplitude da perturbação periódica e ω sua frequência.

Os parâmetros acima podem ser escritos nas seguintes formas adimensionais

$$t^* = \frac{t}{T} = \frac{t\omega}{2\pi}, \quad (9.7a)$$

$$x^* = \frac{x}{U_c T}, \quad (9.7b)$$

$$y^* = \frac{y}{U_c T}, \quad (9.7c)$$

sendo T o período da perturbação. Portanto as equações (9.6a-b) tornam-se

$$x^* = \frac{1}{2} \Delta t^*, \quad (9.8a)$$

$$y^* = A^* \sin(2\pi t^*). \quad (9.8b)$$

Para realizar o nosso cálculo numérico representamos uma parte da camada de mistura por N vórtices discretos distribuídos no intervalo $(0, L)$, sendo as partes restantes da folha de vorticidade representadas por integrais analíticas. L é grande para que a folha de vorticidade à jusante represente o estado não perturbado do escoamento. Em cada instante do tempo, um vórtice nascente entra no escoamento, com outro vórtice saindo do intervalo do cálculo, de modo que o número total de vórtices se mantém constante. Após um certo período de tempo, quando dois vórtices adjacentes tiverem se afastado, um novo vórtice é adicionado para que a distância inicial entre os vórtices seja preservada. Com esta técnica, os detalhes finos de enrolamento da folha de vorticidade podem ser capturados.

Resultados para três diferentes amplitudes, 0.005, 0.01 e 0.05 são apresentados nas Figuras 9.2, 9.3 e 9.4. É importante observar que pelas Eqs.(9.8a-b), aumentar a frequência de perturbação, ω , significa simplesmente diminuir o tempo físico no qual o enrolamento acontece. Para a menor amplitude de perturbação, a amplificação inicial da perturbação pode ser observada claramente. Quanto maior a amplitude da perturbação, maior o enrolamento que ocorre após um curto espaço de tempo.

O segundo tipo de perturbação é uma perturbação pulsante aplicada na origem da camada de mistura. A perturbação é somente aplicada durante um curto intervalo de tempo. Para este caso uma perturbação com amplitude 0.01 é estudada, com resultado mostrado na Figura 9.5. A folha de vorticidade é observada formar uma única concentração de vorticidade depois de um certo tempo. Podemos concluir que o enrolamento acontece para qualquer tipo de perturbação.

Para simular situações mais realísticas, aplicamos uma perturbação randômica na origem da camada de mistura. Para este caso, a amplitude da perturbação é 0.01. Isto significa que a amplitude da perturbação varia randomicamente com o tempo com a amplitude máxima de 0.01. O resultado é apresentado na Figura 9.6. Novamente, observamos o enrolamento da folha de vorticidade.

As Figuras 9.2-9.5 mostram claramente que os efeitos não lineares de amplificação são capturados pelo presente procedimento. Apesar de serem diferentes as perturbações aplicadas na origem da camada de mistura, observamos que o escoamento perturbado evolui de maneira semelhante.

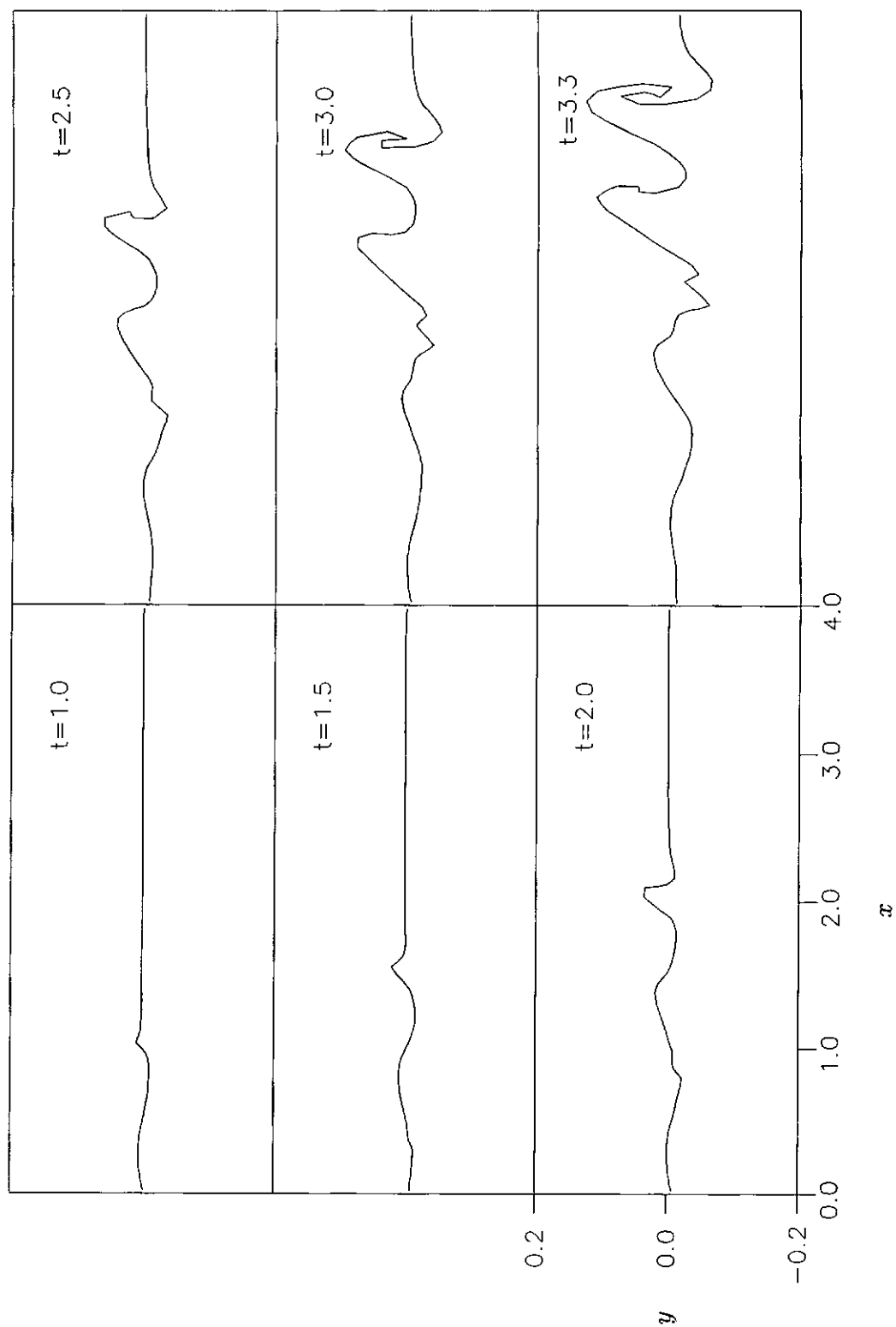


Fig.9.2 A Evolução da Camada de Mistura sujeita à Perturbação Periódica com Amplitude igual a 0.005.

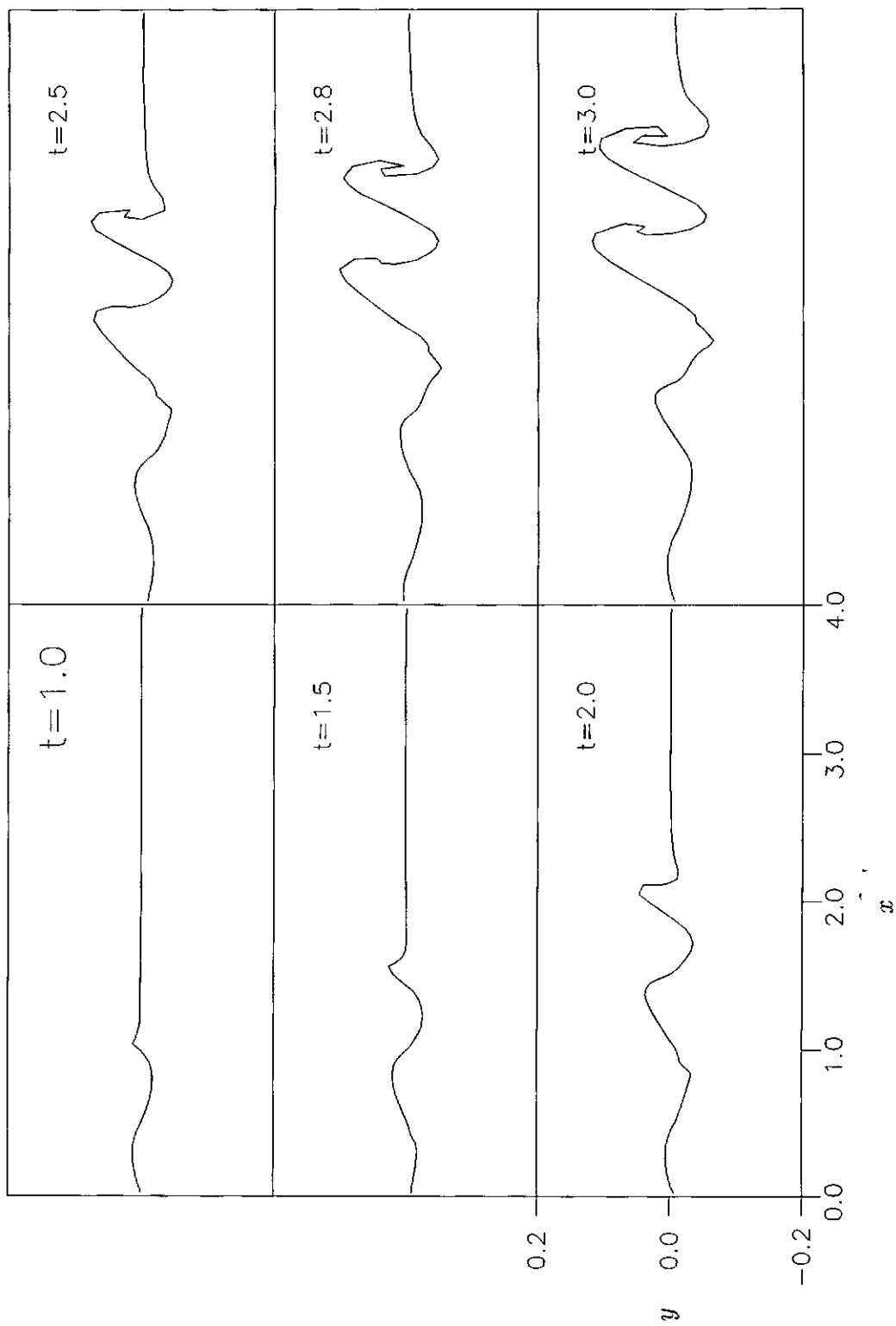


Fig.9.3 A Evolução da Camada de Mistura sujeita à Perturbação Periódica com Amplitude igual a 0.01.

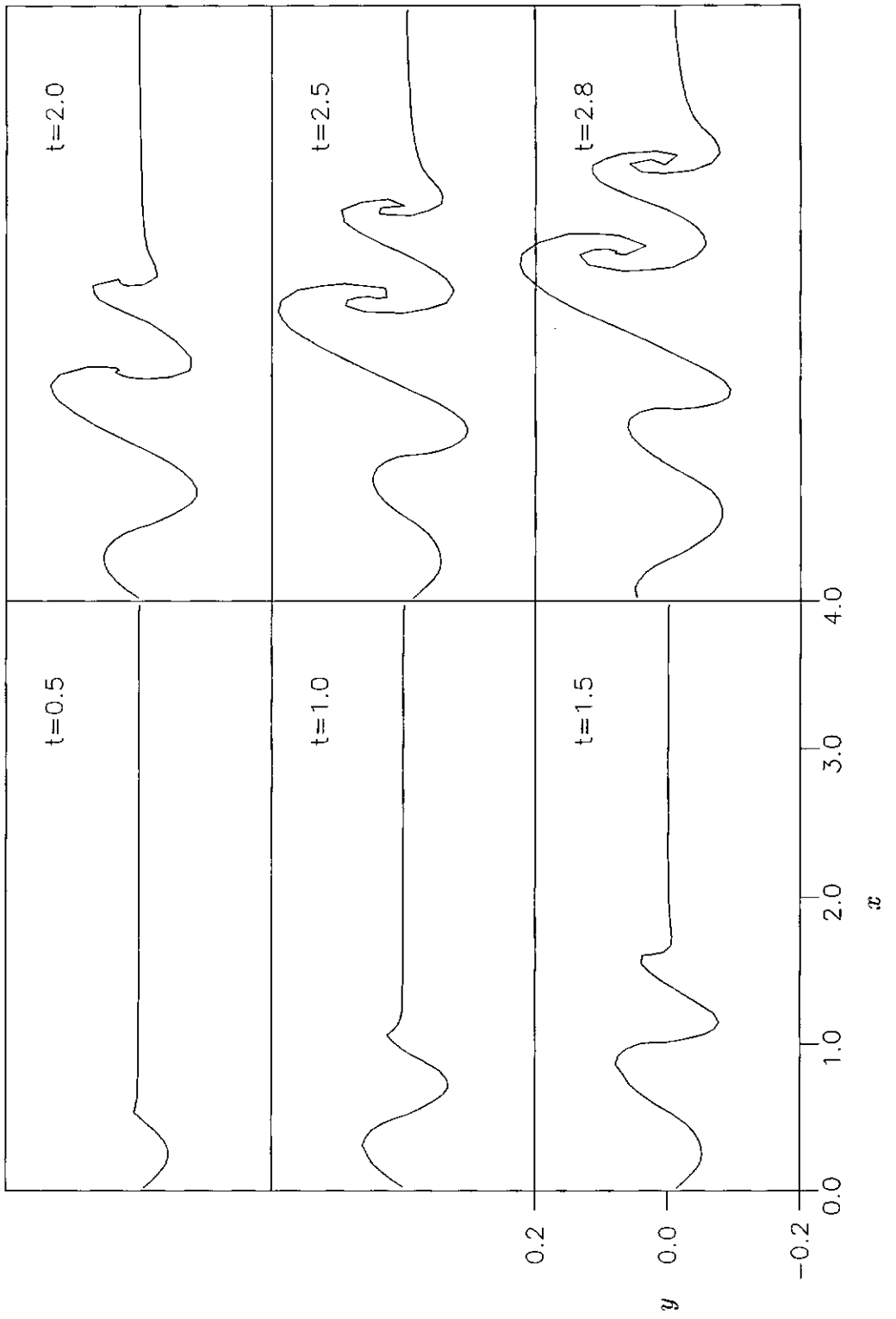


Fig.9.4 A Evolução da Camada de Mistura sujeita à Perturbação Periódica com Amplitude igual a 0.05.

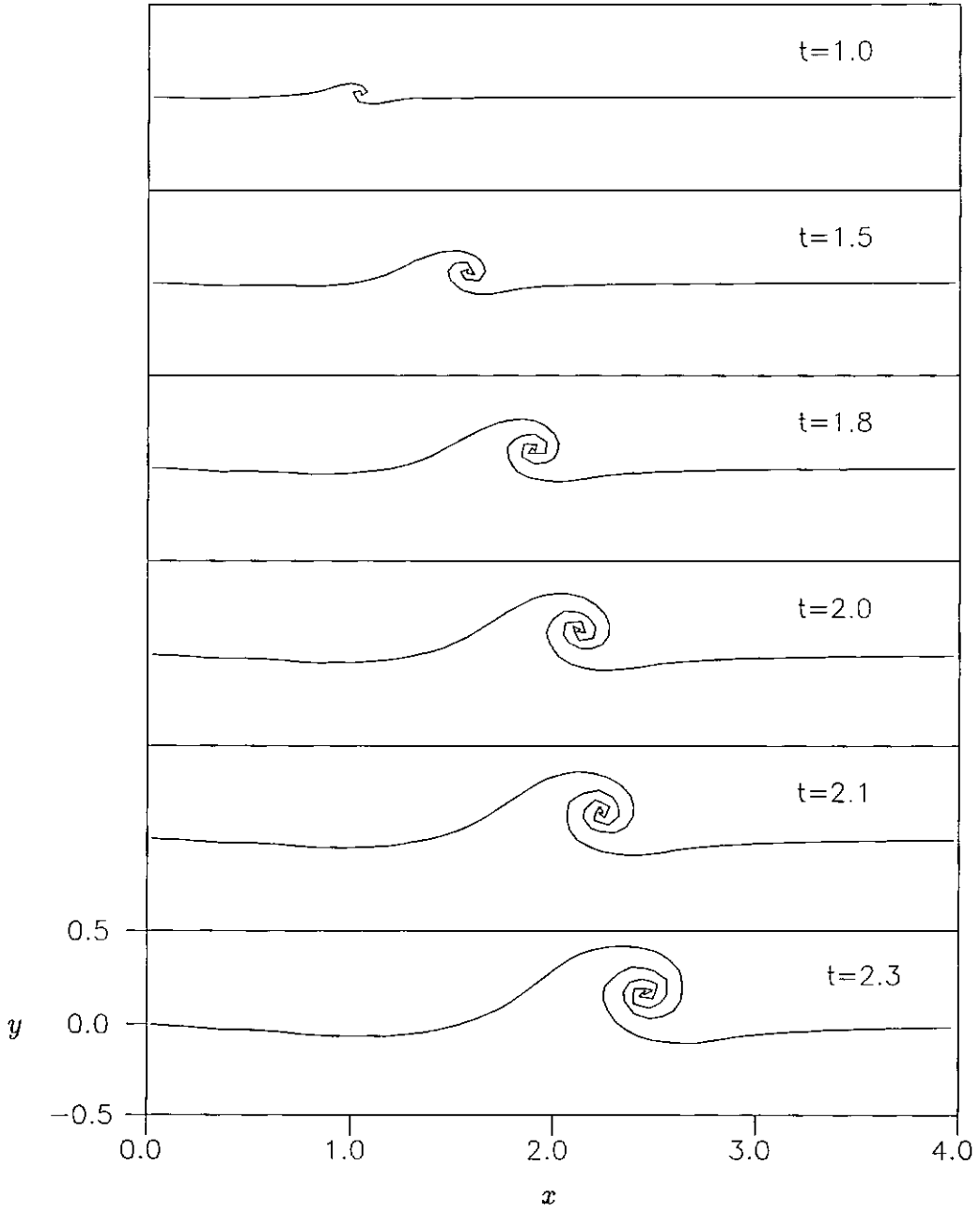


Fig.9.5 A Evolução da Camada de Mistura sujeita à Perturbação Pulsante com Amplitude igual a 0.01.

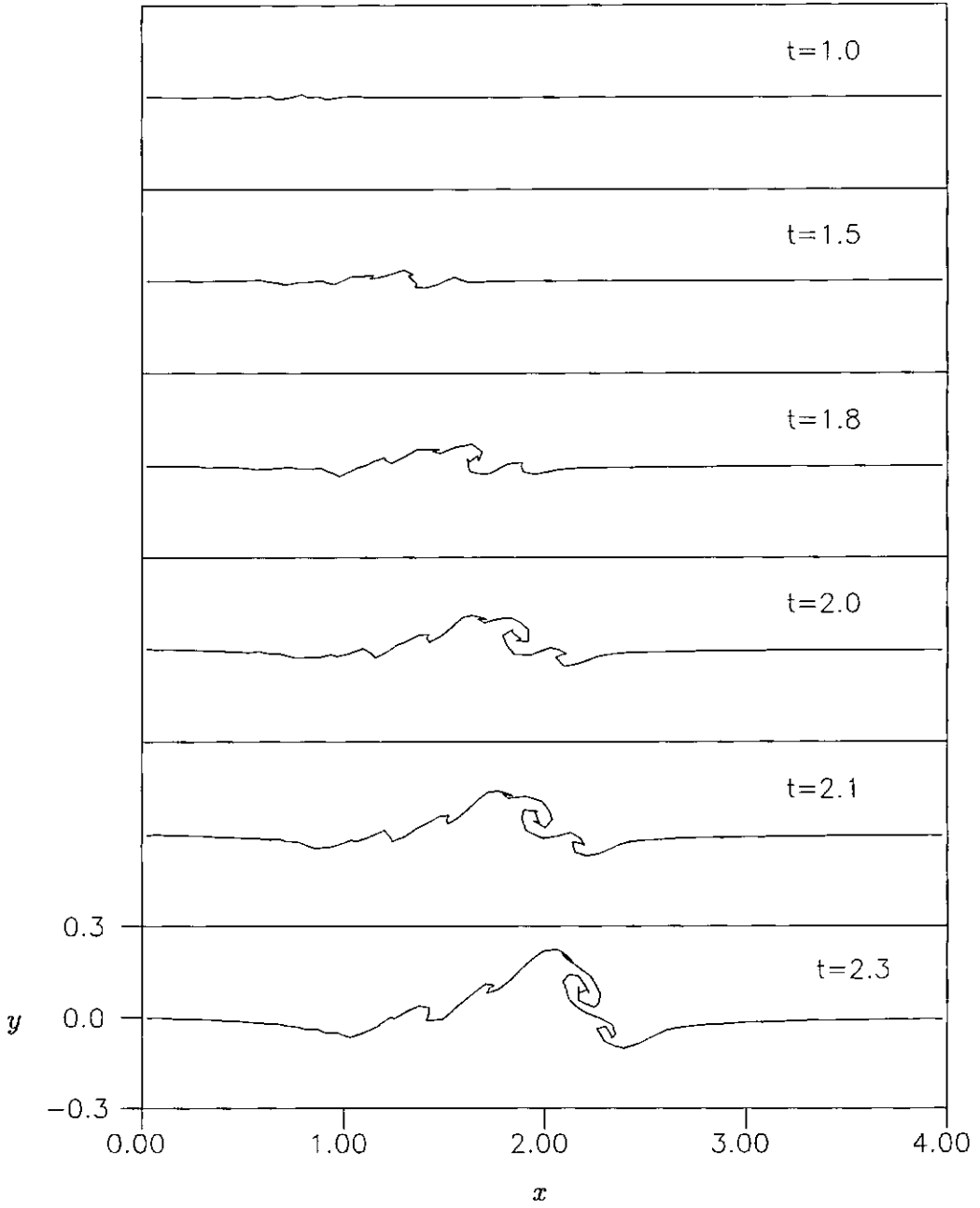


Fig.9.6 A Evolução da Camada de Mistura sujeita à Perturbação Randômica com Amplitude igual a 0.01.

Capítulo 10

Conclusões e Sugestões

Das análises feitas e dos resultados obtidos neste trabalho, tiramos as seguintes conclusões:

1. Duas formulações simplificadas para a análise das equações de Navier-Stokes foram propostas através da técnica de “análise de escalas”. Uma formulação modela o escoamento como uma camada delgada (*thin layer*), enquanto a outra modela o escoamento como uma camada limite não estacionária. A utilização de formulações simplificadas permite que a física do problema possa ser entendida melhor e o custo de cálculo reduzido. A análise mostra como hipóteses diferentes sobre o comprimento característico longitudinal das perturbações leva a formulações com diferentes graus de simplificação, as quais são aplicáveis tanto para perturbações infinitesimais quanto para perturbações com amplitude finita.
2. A resposta da camada limite a perturbações pulsantes é estudada pela solução das equações de camada limite não estacionária por um método de diferenças finitas e por um método misto de diferenças finitas e da transformada integral generalizada. Os resultados numéricos mostram que para perturbações com longo comprimento característico, as perturbações decaem e a camada limite é estável. A nossa conclusão está de acordo com as conclusões de Ackersberg e Phillip(1972) e Brown e Stewartson(1973). Os nossos resultados fornecem informações importantes para o estudo da estrutura assintótica da estabilidade de camadas limite sendo importante no estudo da receptividade da camada limite.
3. Propomos um novo esquema de diferenças finitas para a solução das equações de camada limite não estacionária que satisfaz o princípio de influência e de dependência. Resultados numéricos mostram que para o problema de Stokes, a solução do esquema explícito proposto se encontra próxima à solução fornecida pelo esquema de Crank-Nicholson.
4. Um esquema misto de diferenças finitas/transformada integral generalizada é proposto para a solução das equações de camada limite não estacionária. Os resultados mostram que a solução converge rapidamente, não sendo sensível aos espaçamentos no tempo e na coordenada longitudinal. O esquema misto proposto foi utilizado no estudo da resposta da camada limite laminar obtendo resultados semelhantes aos obtidos pelo esquema proposto de diferenças finitas.
5. A formulação unificada de vorticidade é proposta para escoamentos incompressí-

veis, bidimensionais. A formulação mostra que o escoamento pode ser completamente determinado pelo campo de vorticidade e por uma folha de vorticidade que represente a presença de qualquer corpo sólido no escoamento. A formulação unificada justifica a utilização de métodos de vórtices discretos e do método de vorticidade superficial no estudo de escoamentos ao redor de corpos rombudos.

6. A instabilidade espacial da camada de mistura é estudada pela formulação não viscosa de vorticidade, sendo resolvida numericamente pelo método de vórtices discretos. A placa plana semi-infinita que separa duas correntes uniformes e a camada de mistura não perturbada à jusante são representadas por integrais analíticas que permitem a condição de contorno no infinito ser satisfeita exatamente. Os resultados numéricos mostram claramente a instabilidade espacial e o enrolamento da folha de vorticidade. O mecanismo da instabilidade de uma camada de mistura é predominantemente não viscoso e pode ser simulado pela formulação de escoamento não viscoso, sendo resolvida pelo método de vórtices discretos. A instabilidade em uma camada de mistura é convectiva e espacial. O enrolamento da folha de vorticidade aparece quando a amplitude da perturbação atinge um certo nível.

Sugestões para trabalhos futuros:

1. A presente formulação deve ser testada para perturbações provocadas por pacotes de onda semelhantes àqueles gerados no experimento clássico de Gaster e Grant(1975). O objetivo é verificar se as equações de camada limite não estacionária são capazes de prever os estágios iniciais de evolução de um pacote de ondas mesmo para comprimentos de onda menores. Caso isto seja possível, um grande avanço será obtido para o entendimento dos processos que levam à transição do escoamento do regime laminar para o turbulento.

2. Uma extensão da teoria para perturbações tri-dimensionais também deverá ser tentada. Isto incorrerá na inclusão de uma nova equação linear ao sistema de equações para a camada limite não estacionária. Com isto, os processos iniciais da geração de "turbulent spots" poderão ser estudados. Caso viável, esta formulação também servirá para o estudo da geração de turbulência por fontes de calor. De fato, a terceira e adicional relação a ser considerada na extensão é equivalente a equação da energia. Com isto a receptividade da camada limite a perturbações no campo de temperatura poderá ser estudada.

3. Além das duas formulações simplificadas propostas, formulações intermediárias podem ser utilizadas para incluir a influência da flutuação de pressão induzida pela perturbação. Isto significa que a equação de movimento na direção normal à superfície sólida deve ser mantida, porém em uma forma simplificada. Uma formulação deste tipo foi proposta por Smith et. al.(1984) sem uma justificativa rigorosa.

4. A solução das equações de camada limite não estacionária descreve a evolução de perturbações com longo comprimento característico em camadas limite. Para descrever a resposta da camada limite a perturbações com comprimento característico mais curto, diferentes formulações devem ser utilizadas. Uma formulação é a formulação de camada delgada. A nossa análise mostra que esta formulação descreve

perturbações de largo espectro de comprimento característico. Um problema importante será o estudo da resposta de camada limite a perturbações usando a formulação de camada delgada.

5. Uma outra alternativa será a utilização da formulação de camada limite não estacionária interativa. Neste caso, a variação da pressão na direção normal à superfície sólida será desprezada como no presente trabalho, mas o gradiente da pressão na direção do escoamento induzida pela perturbação será considerada fazendo-se uma interação de cálculos entre a solução da camada limite e a solução do escoamento potencial.

6. A aplicação da transformada integral generalizada no estudo da camada limite não estacionária deve ser seguida. O esquema misto proposto pode ser utilizado no estudo de camadas limite não estacionárias induzidas pelo movimento de uma superfície sólida ou por oscilações da corrente principal. Um problema de bastante interesse teórico que pode ser estudado por este método é a separação não estacionária.

7. Métodos com alta precisão na discretização devem ser utilizados no estudo da instabilidade espacial de camada de mistura, por exemplo, o método de painéis de vorticidade e o método de “dinâmica de contorno”.

Bibliografia

- Ackerberg, R.C. e Phillips, J.H. (1972). The unsteady laminar boundary layer on a semi-infinite flat plate due to small fluctuations in the magnitude of the free-stream velocity. *J. Fluid Mech.*, **51**, 137–157.
- Acton, E. (1976). The modelling of large eddies in a two dimensional shear layer. *J. Fluid Mech.*, **32**, 561–592.
- Ashurst, W.T. (1979). Numerical Simulation of Turbulent Mixing Layers via Vortex Dynamics. *Turbulent Shear Flows*, **1**, 402–413.
- Barry, M.D.J. e Ross, M.A.S. (1970). The Flat Plate Boundary Layer. Part 2. The Effect of Increasing Thickness on Stability. *J. Fluid Mech.*, **43**, 813–818.
- Basu, A.J., Prabhu, A. e Narasimha, R. (1992). Vortex Sheet Simulation of a Plane "Canonical" Mixing Layer *Computers Fluid*, **21**, no.1, 1–30.
- Betchov, R. e Szewczk, A. (1963). Stability of a Shear Layer between Parallel Streams. *Phys. Fluids*, **6**, 1391.
- Blotter, F.G. (1975). Investigation of Some Finite-Difference Techniques for Solving the Boundary Layer Equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **6**, 1–30.
- Bodonyi, R.J. (1990). Nonlinear Triple-deck Studies in Boundary Layer Receptivity. *Appl. Mech. Rev.*, **43**, no.5, part 2. 158–166.
- Bouthier, M. (1972). Stabilité Linéaire des Écoulements Presue Parallèles. *J. Mécanique*, **11**, 599–621.
- Bouthier, M. (1973). Stabilité Linéaire des Écoulements Presue Parallèles. Partie II. La Couche Limite de Blasius. *J. Mécanique*, **12**, 75–95.
- Breuer, K.S. e Haritonidis, J.H. (1990). The Evolution of a Localized Disturbance in a Laminar Boundary Layer. Part 1. Weak Disturbances. *J. Fluid Mech.*, **220**, 569–594.
- Breuer, K.S. e Landahl, M.T. (1990). The Evolution of a Localized Disturbance in a Laminar Boundary Layer. Part 2. Strong Disturbances. *J. Fluid Mech.*, **220**, 595–621.
- Brown, S.N. e Daniels, P.G. (1975). On the Viscous Flow about the Trailing Edge of a Rapidly Oscillating Plate. *J. Fluid Mech.*, **67**, 743–761.
- Brown, S.N. e Stewartson, K. (1973a). On the Propagation of Disturbances in a

- Laminar Boundary Layer. I. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **73**, 493–503.
- Brown, S.N. e Stewartson, K. (1973b). On the Propagation of Disturbances in a Laminar Boundary Layer. II *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **73**, 505–514.
- Cebeci, T. (1979). The Laminar Boundary Layer on a Circular Cylinder Started Impulsively from Rest. *J. Comp. Phys.*, **31**, 153–172.
- Cebeci, T. (1982). Unsteady Separation. *Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows*, (ed. T. Cebeci), pp. 265–277. Springer.
- Cebeci, T. (1986). Unsteady Boundary Layers with an Intelligent Numerical Scheme. *J. Fluid Mech.*, **163**, 129–140.
- Cebeci, T., Carr, L.W. e Bradshaw, P. (1979). Prediction of Unsteady Turbulent Boundary Layer with Flow Reversal. *Proc. 2nd. Symp. Turbulent Shear Flows*, Imperial College, London, 14.23–14.28.
- Chorin, A.J. e Bernard, P.S. (1973). Discretization of a Vortex Sheet with an Example of Roll-up. *J. Comp. Phys.*, **13**, 423–429.
- Chen, T.S., Sparrow, E.M. e Tsou, F.K. (1970) The Effect of Mainflow Transverse Velocities in Linear Stability Theory. *J. Fluid Mech.* **50**, 741–750.
- Cotta, R.M. (1989). Hybrid Numerical-Analytical Approach to Diffusion-Convection Problems. Invited Lecture, *XV National Summer School, WMEI Lenin Varna, Bulgaria*.
- Cotta, R.M. (1992). *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*, CRC Press, Boca Raton, Florida.
- Cotta, R.M. e Carvalho, T.M.B. (1991). Hybrid Analysis of Boundary Layer Equations for Internal Flow Problems. *Proc. 7th Int. Conf. Num. Meth. Laminar & Turbulent Flow*, 106–115.
- Cotta, R.M. e Özişik, M.N. (1987). Diffusion Problems with General Time-Dependent Coefficients. *Rev. Br. Ciências Mec.*, **IX**, 269–291.
- Cotta, R.M., Özişik, M.N. e MacRae, D.S. (1985). Transient Heat Transfer in Channel Flow with Step Change in Inlet Temperature. *Numerical Heat Transfer*, **9**, 619–630.
- Criminale, W.O., Long, B. e Zhu, M. (1991). General Three-Dimensional Disturbances to Inviscid Couette Flow. *Studies Appl. Math.*, **85**, 249–267.
- Duck, P.W. (1990). Triple-Deck Flow over Unsteady Surface Disturbances: The Three-Dimensional Development of Tollmien-Schlichting Waves. *Computers & Fluids*, **18**, no.1, 1–34.
- Farn, C.L.S. e Arpaci, V.S. (1966). On the Numerical Solution of Unsteady, Laminar Boundary Layer. *AIAA Journal*, **4**, no.4, 730–732.

- Fasel, H. (1976). Investigation of the Stability of Boundary Layers by a Finite-Difference Model of the Navier-Stokes Equations. *J. Fluid Mech.*, **78**, 355–383.
- Fasel, H. (1984). Numerical Simulation of Nonlinear Growth of Wave Packets in a Boundary Layer. *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids*, T.Tatsumi (ed.), IUTAM, 31–37.
- Fasel, H. e Konzelmann, U. (1990). Non-Parallel Stability of a Flat-Plate Boundary Layer Using the Complete Navier-Stokes Equations. *J. Fluid Mech.*, **221**, 311–347.
- Gaster, M. (1962). A Note on the Relation between Temporally-Increasing and Spatially-Increasing Disturbances in Hydrodynamic Stability. *J. Fluid Mech.*, **14**, 222–224.
- Gaster, M. (1965). On the Generation of Spatially Growing Waves in a Boundary Layer. *J. Fluid Mech.*, **22**, 433–441.
- Gaster, M. (1968). Growth of Disturbances in both Space and Time. *Phys. Fluids*, **11**, 723–727.
- Gaster, M. (1974). On the Effects of Boundary Layer Growth on the Flow Stability. *J. Fluid Mech.*, **66**, 465.
- Gaster, M. (1975). A Theoretical Model of a Wave Packet in the Boundary Layer on a Flat Plate. *Proc. R. Soc. Lond.*, **A347**, 271–289.
- Gaster, M. (1982). The Development of a Two-Dimensional Wave Packet in a growing Boundary Layer. *Proc. R. Soc. Lond.*, **384**, 317–332.
- Gaster, M. e Grant, I. (1975). An Experimental Investigation of the Formation and Development of a Wavepacket in a Laminar Boundary Layer. *Proc. R. Soc. Lond.*, **A347**, 253–269.
- Goldstein, M.E. (1983). The Evolution of Tollming-Schlichting Waves near a Leading Edge. *J. Fluid Mech.*, **127**, 59–81.
- Goldstein, M.E. e Hultgren, L.S. (1989). Boundary Layer Receptivity to Long-Wave Free-Stream Disturbances. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **21**, 137–166.
- Ghonein, A.F. e Ng, K.K. (1987). Numerical Study of the Dynamics of a Forced Shear Layer. *Phys. Fluids*, **30**, no.3, 706–721.
- Gulyaev, A.N., Kozlov, V.E., Kuznetsov, V.R., Mineev, B.I. e Sekundov, A.N. (1990). Interaction of a Laminar boundary Layer with External Turbulence. *Fluid Dynamics*, **24**, 700–710.
- Hall, M.G. (1969). The boundary layer over an impulsively started flat plate. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A310**, 401–414.
- Guerrero, J.S.P. e Cotta, R.M. (1991). Integral Transform Method for Navier-Stokes Equations in Stream Function-only Formulation. *Int. J. Num. Meth. Fluids*,

in press.

Heisenberg, W. (1924). Über Discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. *Monats. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, **23**, 215–228.

Hirata, M.H. (1992). Análise do Escoamento de um Fluido Viscoso Utilizando Elementos da Teoria Potencial. *Cadernos de Mecânica dos Fluidos 91-001*. Laboratório de Mecânica dos Fluidos/Aerodinâmica, COPPE/UFRJ.

Huerre, P. e Monkewitz, P. (1985). Absolute and Convective Instabilities in Free Shear Layers. *J. Fluid Mech.*, **159**, 151–168.

Huerre, P. e Monkewitz, P. (1990). Local and Global Instabilities in Spatially-Developing Flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473–537.

Inoue, O. (1985). Vortex Simulation of a Turbulent Mixing Layer. *AIAA Journal*, **23**, no.3, 367–373.

Jordinson, R. (1970). The Flat Plate Boundary Layer. Part 1. Numerical Integration of the Orr-Sommerfeld Equation. *J. Fluid Mech.*, **43**, 801–811.

Kerschen, E.J. (1990). Boundary Layer Receptivity Theory. *Appl Mech Rev.*, **43**, no.5, Part 2, 152–157.

Kim, J.S. e Chang, K.S. (1984). Calculation of Incompressible and Compressible Unsteady Boundary Layers by a Noniterative Finite Difference Method. *AIAA*, no.84-1639.

Kozlov, V.V. e Ryzhov, O.S. (1990). Receptivity of Boundary Layers: Asymptotic Theory and Experiment. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A429**, 341–373.

Kwon, O.K., Pletcher, R.H. and Delaney, R.A. (1988). Solution procedure for unsteady two-dimensional boundary layers. *ASME J. Fluid Eng.*, **110**, 69–75.

Lage, P.L.C. e Rangel, R.H. (1992). Generalized Integral Transform Solution for Boundary-Layer Flow over a Sphere. *Anais do IV ENCIT, Rio de Janeiro*, 293–296.

Lam, S.H. e Rott, N. (1960). Theory of linearized time-dependent boundary layers. *Cornell University GSAE Rep. AFOSR TN-60-1100*.

Landau, L. (1944). Stability of Discontinuities in Compressible Fluid. *C.R. Acad. Sci. U.R.S.S.*, **44**, 139–141.

Lessen (1950). On Stability of Free Boundary Layer between Parallel Streams. *NACA TR 979*.

Lighthill, M.J. (1954). The Response of Laminar Skin Friction and Heat Transfer to Fluctuations in the Stream Velocity. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A224**.

Lin, C.C. (1945). On the Stability of Two-Dimensional Parallel Flows. Part I, II, III. *Quart. Appl. Math.*, **3**, 117–142, 218–234, 277–301.

- Lin, C.C. (1955). *The Theory of Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.
- Lin, C.C. (1956). Motion in the Boundary Layer with a Rapidly Oscillating External Flow. *Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech.*, 4, 155–167.
- Machado, H.A. e Cotta, R.M. (1993). Integral Transform Solution of the Boundary Layer Equations for Simultaneous Heat and Fluid Flow. *Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Flow* (a ser publicado).
- Messiter, A.F. (1970). Boundary-Layer Flow near the Trailing Edge of a Flat Plate. *SIAM J. Appl. Math.*, 18, 21.
- Michalke, A. (1964). On the Inviscid Instability of the Hyperbolic-Tangent Velocity Profile. *J. Fluid Mech.*, 19, 543–556.
- Michalke, A. (1965). On Spatially Growing Disturbances in an Inviscid Shear Layer. *J. Fluid Mech.*, 23, 521–544.
- Mikhailov, M.D. e Özişik, M.N. (1984). *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, John Wiley & Sons, New York.
- Monkewitz, P.A. e Huerre, P. (1982). Influence of the Velocity Ratio on the Spatial Instability of Mixing Layers. *Phys. Fluids* 25, 1137–1143.
- Moore, F.K. (1951). Unsteady Laminar Boundary Layer Flow. *NACA TN 2471*.
- Murphy, J.D. e Prenter, P.M. (1981). A Hybrid Computing Scheme for Unsteady Turbulent Boundary Layers. *Proc. 3rd. Symp. Turbulent Shear Flow*, University of California, Davis, 8.26–8.34.
- Neiland, V.Ya. (1969). Theory of the Separation of a Laminar Boundary Layer in Supersonic Flow. *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Mekh. Zhidk.*, 4, 53.
- Özişik, M.N. e Murray, R.L. (1974). On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Condition Parameters. *J. Heat Transfer*, 48–51.
- Phillips, J.H. e Ackerberg, R.C. (1973). A Numerical Method for Integration the Unsteady Boundary-Layer Equations when there are Regions of Backflow. *J. Fluid Mech.* 58, 561–579.
- Pozrikidiz, C. e Higdon, J.J.L. (1985). Nonlinear Kelvin- Helmholtz instability of a finite vortex layer. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.157, pp.225–263.
- Rayleigh, Lord (1880). On the Stability, or Instability, of Certain Fluid Motions. I. *Scientific Papers*, 1, 474–487.
- Rayleigh, Lord (1911). On the Motion of Solid Bodies through Viscous Liquids. *Philos. Mag.*, 21, 697–711.
- Reynolds, O. (1883). An Experimental Investigation of the Circumstances which

- Determine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels. *Phil. trans. Roy. Soc.*, **174**, 935–982.
- Riley, N. (1975). Unsteady Boundary Layer Equations. *SIAM Reviews*, **17**, 274–297.
- Rosenhead, L. (1931). The Formation of Vortices from a Surface of Discontinuity. *Proc. Roy. Soc.*, **134**, 170–192.
- Sandim, C.L. (1992). Um Método de Diferenças Finitas para a Solução da Equação de Blasius. *Textos em Mecânica dos Fluidos 92-003*. Laboratório de Mecânica dos Fluidos/Aerodinâmica, COPPE/UFRJ.
- Saric, W.S. e Nayfeh, A.H. (1975). Nonparallel Stability of Boundary Layer Flows. *Phys. Fluids*, **18**, 945–950.
- Schlichting, H. (1933). Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. -phys. Kl.*, 181–208.
- Schubauer, G.B. e Skramstad, H.K. (1947). Laminar Boundary Layer Oscillations and Transition on a Flat Plate. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **38**, 251–292.
- Serfaty, R. e Cotta, R.M. (1991). Hybrid Analysis of Transient Nonlinear Convection-Diffusion Problems. *Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Flow*, in press.
- Shen, S.F. (1954). Calculated Amplified Oscillations in the Plane Poiseuille and Blasius Flows. *J. Aero. Sci.*, **21**, 62–64.
- Silva-Freire, A.P. (1992). Uma Introdução à Teoria da Estabilidade Hidrodinâmica. *Cadernos de Mecânica dos Fluidos 92-001* Laboratório de Mecânica dos Fluidos/Aerodinâmica, COPPE/UFRJ.
- Smith, F.T. (1979a). On the Non-Parallel Flow Stability of the Blasius Boundary Layer. *Proc. Roy. Soc. lond.*, **A366**, 91–109.
- Smith, F.T. (1979b) Nonlinear Stability of Boundary Layers for Disturbances of Various Sizes. *Proc. Roy. Soc. lond.*, **A368**, 573–589.
- Smith, F.T. e Bodonyi, R.J. (1982). Nonlinear Critical Layers and their Development in Streaming-Flow Stability. *J. Fluid Mech.*, **118**, 165.
- Smith, F.T., Papageorgiou, D. e Elliott, J.W. (1984). An Alternative Approach to Linear and Nonlinear Stability Calculations at Finite Reynolds Number. *J. Fluid Mech.*, **146**, 313–330.
- Spalart, P.R. (1986). Numerical Simulation of Boundary Layers. Part 1. Weak Formulation and Numerical Method. *NASA TM 88222*.
- Stewartson, K. (1960). The theory of unsteady boundary layers. *Advances in Applied Mechanics*, vol. VI. Academic Press, New York, pp.1–37.

- Stewartson, K. (1969). On the Flow near the Trailing Edge of a Flat Plate, II. *Mathematika*, **16**, 106–121.
- Stokes, G.G. (1851). On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **9**, 8–106.
- Stuart, J.J. (1960). On the Nonlinear Mechanics of of Wave Disturbances in Stable and Unstable Parallel Flows. Part 1. The Basic Behavior in Plane Poiseuille Flow. *J. Fluid Mech.***9**, 353–370.
- Taylor. G.I. (1938). Some Recent Developments in the Study of Turbulence. *Proc. 5th int. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge, U.S.A., 294–310.
- Telionis, D.P. e Tsahalis, D.Th. (1976). Unsteady Turbulent Boundary Layers and Separation. *AIAA J.*, vol. 14. pp.468–474.
- Telionis, D.P. Tsahalis, D.Th. e Werle, M.J. (1973). Numerical Investigation of Unsteady Boundary Layer Separation. *Phys. Fluids***16**, 968–973.
- Tollmien, W. (1929). Über die Entstehung der Turbulenz, *Nacht. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl.*, 21–44.
- Wang, K.C. (1975). Aspects of “multitime initial-value problem” originating from boundary layer equations. *Phys. Fluids*,**18**, 951–955.
- Warming, R.F. e Beam, R.M. (1975). Upwind Second-Order Difference Schemes and Applications in Unsteady Aerodynamic Flows. *Proc. AIAA 2nd Computational fluid Dynamics Conf.*, Hartford, Conneticut, 17–28.
- Watson, J. (1960). On the Nonlinear Mechanics of Wave Disturbaces in Stable and Unstable Parallel Flows. Part 2. The Development of a Solution for Plane Poiseuille Flow. *J. Fluid Mech.*, **9**, 371–389.
- Watson, J. (1962). On Spatially-Growing Finite Disturbances in Plane Poiseuille Flow. *J. Fluid Mech.*, **14**, 211–221.
- Winant ,C.D. e Browand, F.K.(1974). Vortex pairing: the mechanism of turbulent mixing layer growth at moderate Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **63**, 237–255.
- Wirz, H.J. (1975). Computation of Unsteady Boundary Layers. *Progress in Numerical Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, No.41*, Springer-Verlag.
- Zachmanoglou, E.C. e Thoe, D.W. (1976). *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*. Williams & Wilkins, Baltimore.

Apendice A

Avaliação de Coeficientes da Equação (7.24)

Os coeficientes da equação (7.24) são definidos como

$$A_{ijk} = \frac{1}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}} N_{\eta j}^{\frac{1}{2}} N_{\eta k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^H \psi_i(\eta) \psi_j(\eta) \psi_k(\eta) d\eta, \quad (A1)$$

$$B_{ijk} = \frac{1}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}} N_{\eta j}^{\frac{1}{2}} N_{\eta k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^H \psi_i(\eta) F_j(\eta) \psi'_k(\eta) d\eta, \quad (A2)$$

$$C_{ik} = \frac{1}{N_{\eta i}^{\frac{1}{2}} N_{\eta k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^H \psi_i(\eta) \psi'_k(\eta) d\eta, \quad (A3)$$

onde

$$\psi_i(\eta) = \sin(\mu_i \eta), \quad (A4)$$

$$F_j(\eta) = \int_0^\eta \psi_j(\eta') d\eta' = \frac{1}{\mu_j} - \frac{\cos(\mu_j \eta)}{\mu_j}, \quad (A5)$$

$$\psi'_k(\eta) = \mu_k \cos(\mu_k \eta), \quad (A6)$$

$$\mu_i = \frac{(2i - 1)\pi}{2H}. \quad (A7)$$

$$\mu_j = \frac{(2j - 1)\pi}{2H}. \quad (A8)$$

$$\mu_k = \frac{(2k - 1)\pi}{2H}. \quad (A9)$$

$$N_{\eta i} = N_{\eta j} = N_{\eta k} = \frac{H}{2} \quad (A10)$$

Pela tabela de integrais[A1], temos

$$\int \sin(\mu_i \eta) \sin(\mu_j \eta) \sin(\mu_k \eta) d\eta = -\frac{1}{4} \left[\frac{\cos(\mu_i - \mu_j + \mu_k) \eta}{\mu_i - \mu_j + \mu_k} + \frac{\cos(\mu_j + \mu_k - \mu_i) \eta}{\mu_j + \mu_k - \mu_i} \right. \\ \left. + \frac{\cos(\mu_i + \mu_j - \mu_k) \eta}{\mu_i + \mu_j - \mu_k} - \frac{\cos(\mu_i + \mu_j + \mu_k) \eta}{\mu_i + \mu_j + \mu_k} \right] \quad (A11)$$

$$\int \sin(\mu_i \eta) \cos(\mu_j \eta) \cos(\mu_k \eta) d\eta = -\frac{1}{4} \left[\frac{\cos(\mu_i + \mu_j + \mu_k) \eta}{\mu_i + \mu_j + \mu_k} - \frac{\cos(\mu_j + \mu_k - \mu_i) \eta}{\mu_j + \mu_k - \mu_i} \right. \\ \left. + \frac{\cos(\mu_i + \mu_j - \mu_k) \eta}{\mu_i + \mu_j - \mu_k} + \frac{\cos(\mu_i + \mu_k - \mu_j) \eta}{\mu_i + \mu_k - \mu_j} \right] \quad (A12)$$

Para $i \neq k$

$$\int \sin \mu_i \eta \cos \mu_k \eta d\eta = -\frac{\cos(\mu_i + \mu_k) \eta}{2(\mu_i + \mu_k)} - \frac{\cos(\mu_i - \mu_k) \eta}{2(\mu_i - \mu_k)} \quad (A13)$$

Para $i = k$

$$\int \sin \mu_i \eta \cos \mu_k \eta d\eta = -\frac{1}{4\mu_i} \cos(2\mu_i \eta) \quad (A14)$$

Utilizando as integrais, podemos avaliar os coeficientes

$$A_{ijk} = -\frac{1}{\left(\frac{H}{2}\right)^{3/2}} \frac{1}{4} \left[\frac{\cos(\mu_i - \mu_j + \mu_k) \eta}{\mu_i - \mu_j + \mu_k} + \frac{\cos(\mu_j + \mu_k - \mu_i) \eta}{\mu_j + \mu_k - \mu_i} \right. \\ \left. + \frac{\cos(\mu_i + \mu_j - \mu_k) \eta}{\mu_i + \mu_j - \mu_k} - \frac{\cos(\mu_i + \mu_j + \mu_k) \eta}{\mu_i + \mu_j + \mu_k} \right]_0^H \\ = \frac{1}{\left(\frac{H}{2}\right)^{3/2}} \left[\frac{1}{\mu_i - \mu_j + \mu_k} + \frac{1}{\mu_j + \mu_k - \mu_i} + \frac{1}{\mu_i + \mu_j - \mu_k} - \frac{1}{\mu_i + \mu_j + \mu_k} \right] \\ = \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{H}} \left[\frac{1}{2(i - j + k) - 1} + \frac{1}{2(i + j - k) - 1} + \frac{1}{2(j + k - i) - 1} - \frac{1}{2(i + j + k) - 3} \right] \quad (A15)$$

Para $i \neq k$

$$B_{ijk} = \frac{1}{\left(\frac{H}{2}\right)^{3/2}} \frac{\mu_k}{\mu_j} \left(\int_0^H \sin(\mu_i \eta) \cos(\mu_k \eta) d\eta - \int_0^H \sin(\mu_i \eta) \cos(\mu_j \eta) \cos(\mu_k \eta) d\eta \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left(\frac{H}{2}\right)^{3/2}} \frac{\mu_k}{\mu_j} \left[-\frac{\cos(\mu_i + \mu_k)\eta}{2(\mu_i + \mu_k)} - \frac{\cos(\mu_i - \mu_k)\eta}{2(\mu_i - \mu_k)} \right. \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{\cos(\mu_i + \mu_j + \mu_k)\eta}{\mu_i + \mu_j + \mu_k} - \frac{\cos(\mu_j + \mu_k - \mu_i)\eta}{\mu_j + \mu_k - \mu_i} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\cos(\mu_i + \mu_j - \mu_k)\eta}{\mu_i + \mu_j - \mu_k} + \frac{\cos(\mu_i - \mu_j + \mu_k)\eta}{\mu_i - \mu_j + \mu_k} \right) \right]_0^H \\
&= \frac{1}{\left(\frac{H}{2}\right)^{3/2}} \frac{2k-1}{2j-1} \left[\frac{1}{2(\mu_i + \mu_k)} + \frac{1}{2(\mu_i - \mu_k)} - \frac{\cos(\mu_i + \mu_k)H}{2(\mu_i + \mu_k)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos(\mu_i - \mu_k)H}{2(\mu_i - \mu_k)} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu_i + \mu_j + \mu_k} - \frac{1}{\mu_j + \mu_k - \mu_i} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\mu_i + \mu_j - \mu_k} + \frac{1}{\mu_i - \mu_j + \mu_k} \right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{H}} \frac{2k-1}{2j-1} \left[\frac{1}{(i+k-1)} + \frac{1}{(i-k)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(-1)^{(i+k)}}{i+k-1} - \frac{(-1)^{(i-k+1)}}{i-k} + \frac{1}{2(i+j+k)-3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2(j+k-i)-1} + \frac{1}{2(i+j-k)-1} + \frac{1}{2(i-j+k)-1} \right] \quad (A16)
\end{aligned}$$

Para $i = k$

$$\begin{aligned}
B_{ijk} &= \frac{1}{\left(\frac{H}{2}\right)^{3/2}} \frac{\mu_k}{\mu_j} \left(\int_0^H \sin(\mu_i\eta) \cos(\mu_k\eta) d\eta - \int_0^H \sin(\mu_i\eta) \cos(\mu_j\eta) \cos(\mu_k\eta) d\eta \right) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{H}{2}\right)^{3/2}} \frac{\mu_k}{\mu_j} \left[-\frac{1}{4\mu_i} \cos(2\mu_i\eta) + \frac{1}{4} \left(\frac{\cos(\mu_i + \mu_j + \mu_k)\eta}{\mu_i + \mu_j + \mu_k} - \frac{\cos(\mu_j + \mu_k - \mu_i)\eta}{\mu_j + \mu_k - \mu_i} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\cos(\mu_i + \mu_j - \mu_k)\eta}{\mu_i + \mu_j - \mu_k} + \frac{\cos(\mu_i - \mu_j + \mu_k)\eta}{\mu_i - \mu_j + \mu_k} \right) \right]_0^H \\
&= \frac{1}{\left(\frac{H}{2}\right)^{3/2}} \frac{2k-1}{2j-1} \left[\frac{1}{4\mu_i} (1 - \cos(2\mu_i H)) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu_i + \mu_j + \mu_k} - \frac{1}{\mu_j + \mu_k - \mu_i} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{1}{\mu_i + \mu_j - \mu_k} + \frac{1}{\mu_i - \mu_j + \mu_k} \right) \Big] \\
& = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{H}} \frac{2k-1}{2j-1} \left[\frac{2}{2i-1} + \frac{1}{2(i+j+k)-3} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2(j+k-i)-1} + \frac{1}{2(i+j-k)-1} + \frac{1}{2(i-j+k)-1} \right] \quad (A16)
\end{aligned}$$

Para $i \neq k$

$$\begin{aligned}
C_{ik} &= \frac{2}{H} \left[-\frac{\cos(\mu_i + \mu_k)\eta}{2(\mu_i + \mu_k)} - \frac{\cos(\mu_i - \mu_k)\eta}{2(\mu_i - \mu_k)} \right]_0^H \\
&= \frac{2}{H} \left[\frac{1}{2(\mu_i + \mu_k)} + \frac{1}{2(\mu_i - \mu_k)} - \frac{\cos(\mu_i + \mu_k)H}{2(\mu_i + \mu_k)} - \frac{\cos(\mu_i - \mu_k)H}{2(\mu_i - \mu_k)} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{(i+k-1)} + \frac{1}{(i-k)} - \frac{(-1)^{(i+k)}}{i+k-1} - \frac{(-1)^{(i-k+1)}}{i-k} \right] \quad (A17)
\end{aligned}$$

Para $i = k$

$$\begin{aligned}
C_{ik} &= \frac{2}{H} \int \sin \mu_i \eta \cos \mu_k \eta d\eta = -\frac{2}{H} \frac{1}{4\mu_i} [\cos(2\mu_i \eta)]_0^H \\
&= -\frac{1}{(2i-1)\pi} [\cos(2i-1)\pi - 1] = \frac{2}{(2i-1)\pi} \quad (A18)
\end{aligned}$$