

UMA ANÁLISE ASSINTÓTICA DA CAMADA LIMITE TURBULENTA  
BIFÁSICA FLUIDO/PARTÍCULA

Guilherme Gonçalves Camozzato

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS  
DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO  
DE JANEIRO COMO O ÚLTIMO REQUISITO NECESSÁRIO PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

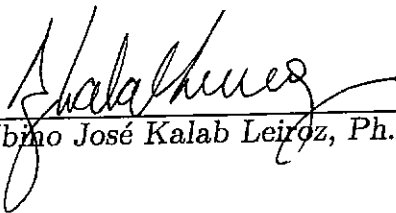
Aprovado por :



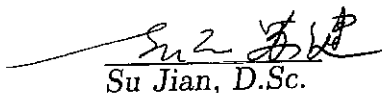
Atila P. Silva Freire, Ph.D.



Philippe Patrick Marie Menut, Ph.D.



Albino José Kalab Leiroz, Ph.D.



Su Jian, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ-BRASIL

ABRIL DE 1997

CAMOZZATO, GUILHERME GONÇALVES

Uma Análise Assintótica da Camada Limite  
Turbulenta Bifásica Fluido/Partícula.

[Rio de Janeiro]1997

XV, 71 p 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,  
Engenharia Mecânica, 1997).

Tese - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE.

1. Fenômenos de Transporte I. COPPE/UFRJ  
II. Título (Série).

Aos Meus Pais e Meus Irmãos.

# **Agradecimentos**

Terminado este trabalho, gostaria de agradecer a todos aqueles que de alguma maneira colaboraram ou incentivaram a realização do mesmo. Em particular, gostaria de agradecer a:

## **Atila P. S. Freire**

por nestes anos todos ter se revelado muito mais que um orientador, sendo um amigo que depositou confiança e respeito em mim, ajudando assim não só na minha formação profissional, como também na formação pessoal.

## **Patricia Paiva Gomes Cruz**

pelo seu carinho, amizade e incentivo demonstrados a todo momento, fundamentais durante a elaboração desta tese.

## **Daniel Onofre de Almeida Cruz**

por sua amizade e interesse pelo assunto, possibilitando sempre um novo debate.

## **CAPES**

pelo apoio financeiro.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

## **UMA ANÁLISE ASSINTÓTICA DA CAMADA LIMITE TURBULENTA BIFÁSICA FLUIDO/PARTÍCULA**

Guilherme Gonçalves Camozzato

Abril de 1997

Orientador: Atila P. Silva Freire

Programa : Engenharia Mecânica

O presente trabalho estuda o comportamento de camadas limite turbulentas quando sujeitas à ação de partículas sólidas que se encontrem imersas em seu meio. O trabalho utiliza o conceito de limites de Kaplun para realizar uma análise assintótica do escoamento de modo que as estruturas de ambos, os campos de velocidade e de concentração, sejam obtidas. Esta análise mostra possuírem ambos os campos uma estrutura de dois pisos onde as camadas internas são regidas por efeitos moleculares e as camadas mais externas por efeitos turbulentos e de inércia, respectivamente. A partir deste resultado, pode-se então aplicar técnicas assintóticas clássicas ao problema para se obter soluções analíticas locais para os perfis de velocidade e de concentração do problema. Estas soluções, válidas na região logarítmica do escoamento, podem ser utilizadas como condições de contorno em formulações diferenciais de duas equações para a modelagem do problema. Todos os resultados teóricos obtidos aqui são comparados com dados experimentais.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Science (M.Sc.).

## **AN ASYMPTOTIC ANALYSIS OF PARTICLE LADEN TURBULENT BOUNDARY LAYERS**

Guilherme Gonçalves Camozzato

April, 1997

Supervisor: Atila P. Silva Freire

Department: Mechanical Engineering

The present work studies the behaviour of turbulent boundary layers when subjected to the action of solid particles immersed in the fluid medium. The work applies the single limit concept of Kaplun to the boundary layer, to find the asymptotic structure of both, the velocity and the concentration fields. The analysis shows both fields to have a two deck structure consisting of a near wall region, where the molecular effects dominate, an intermediate region, where the turbulent effects dominate, and an external region where the inertia effects dominate. From this result, classical asymptotic theories can be applied to the problem to find local analytical solutions for the velocity and concentration fields. These solutions are valid in the logarithmic region of the flow, being therefore appropriate for the specification of wall boundary conditions when using two equation differential models for the turbulence modelling. All theoretical results are compared with some of the available experimental data.

# Índice

Índice de Figuras	ix
Índice de Tabelas	xi
Glossário	xii
1. Introdução	1
2. Estado da Arte	4
3. O Método da Variável Intermediária	10
4. Análise Assintótica	17
4.1. Formulação Física	18
4.2. Aplicação de Limites de Kaplun	21
4.3. A Estrutura Assintótica da Camada Limite Turbulenta	25
4.4. A Modelagem dos Termos Turbulentos	29
5. Resultados	33
5.1. A Calibração do Modelo Numérico	34
5.2. O Parâmetro $\alpha$	36
5.3. As Leis de Parede	39
5.4. As Constantes do Problema	40

5.5. As Condições Iniciais do Problema	44
5.6. Resultados Numéricos	44
5.6.1. Constantes de Integração Iguais a 5,0	45
5.6.2. Constantes de Integração com Valores Negativos	59
5.6.3. Constantes de Integração com Sinais Opostos	60
5.6.4. Constantes de Integração Nulas	61
6. Conclusões	62
7. Trabalhos Futuros	66
Bibliografia	67



# Índice de Figuras

- 3.1 - Comparação da Solução Numérica e Aproximada para a Equação Exemplo -  $\epsilon = 0.01$
- 3.2 - Comparação da Solução Numérica e Aproximada para a Equação Exemplo -  $\epsilon = 0.0001$
- 4.3.1 - Estrutura Assintótica da Camada Limite Turbulenta
- 5.2.1 - Resultados Experimentais da Velocidade Relativa entre o Fluido e as Partículas
- 5.3.1 - Resultados Experimentais de Concentração
- 5.6.1.1 - Resultados Experimentais do Perfil de Velocidade de um Escoamento Saturado com Partículas
- 5.6.1.2 - Resultados Experimentais para a Tensão de Reynolds em Escoamentos Saturados com Partículas
- 5.6.1.3 - Resultados Numéricos para o Coeficiente de Atrito em Escoamentos com Partículas
- 5.6.1.4 - Resultados Numéricos para o Coeficiente de Concentração em Escoamentos com Partículas
- 5.6.1.5 - Resultados Numéricos para o Coeficiente de Atrito em Escoamentos com Diferentes Condições Iniciais para a Concentração
- 5.6.1.6 - Resultados Numéricos para o Coeficiente de Concentração em Escoamentos com Diferentes Condições Iniciais para a Concentração
- 5.6.1.7 - Resultados Numéricos para a Nova Lei de Parede em Escoamento com Partículas

5.6.1.8 - Resultados Numéricos para a Nova Lei de Parede de Concentração para Escoamentos com Partículas

5.6.1.9 - Resultados Numéricos para a Nova Lei de Parede em Escoamento com Partículas

# Índice de Tabelas

5.1.1 - Resultados Numéricos para  $C_f$

5.1.2 - Cálculo da Constante de Proporcionalidade entre  $Re_\delta$  e  $Re_x$

5.4.1 - Estudo da Ordem de Grandeza dos Termos de Segunda Ordem

5.6.1.1 - Comparação entre Coeficientes de Atrito  $C_f$  para Diferentes Valores de  $\alpha$ , onde Escoamento 1:  $U_\infty = 36,4 \text{ m/s}$ ,  $C_\infty = 1,0 \text{ kg/m}^3$  e Escoamento 2:  $U_\infty = 36,4 \text{ m/s}$ ,  $C_\infty = 10,0 \text{ kg/m}^3$

5.6.1.2 - Comparação entre as ordens de  $u_\tau$  e de  $c_\tau$  para Diferentes Valores de  $\alpha$ , onde  $U_\infty = 36,4 \text{ m/s}$  e  $C_\infty = 1,0 \text{ kg/m}^3$

5.6.1.3 - Comparação entre as ordens de  $u_\tau$  e de  $c_\tau$  para Diferentes Valores de  $\alpha$ , onde  $U_\infty = 36,4 \text{ m/s}$  e  $C_\infty = 10,0 \text{ kg/m}^3$

# Glossário

## LETRAS LATINAS

$A, B, D, E$  - Constantes de integração

$c$  - Concentração média ( $Kg/m^3$ )

$c'$  - Flutuação de concentração ( $Kg/m^3$ )

$c^*$  - Concentração dimensional ( $Kg/m^3$ )

$\hat{c}'$  - Flutuação de concentração em limites de Kaplun ( $Kg/m^3$ )

$\hat{c}$  - Concentração após as substituições de limites de Kaplun ( $Kg/m^3$ )

$\hat{c}_a$  - Componente de primeira ordem da concentração ( $Kg/m^3$ )

$\hat{c}_b$  - Componente de segunda ordem da concentração ( $Kg/m^3$ )

$C_c$  - Coeficiente de concentração, definido como  $2(c_\tau/C_\infty)^2$

$C_f$  - Coeficiente de atrito ( $\tau_w/\frac{1}{2}\rho U_\infty$ )

$c_\tau$  - Concentração de atrito na parede ( $Kg/m^3$ )

$const$  - Constante auxiliar, constante de integração

$d_p$  - Diâmetro da partícula (m)

$D_c$  - Domínio das equações de concentração

$D_e$  - Domínio externo

$D_i$  - Domínio interno

$D_u$  - Domínio das equações de velocidade

$E^*$  - Equação aproximada

$E(x, y; \epsilon)$  - Equação qualquer em função de  $x(\epsilon), y(\epsilon)$

$E_1, E_2$  - Equações quaisquer

$F$  - Equação  $E(x, y; \epsilon)$  alterada

$F_i^*$  - Força de corpo dimensional (N)

$H$  - Altura do canal experimental

$L$  - Comprimento característico do escoamento não viscoso (m)

$p$  - Pressão média dimensional (Pa)

$p^*$  - Pressão dimensional (Pa)

$\hat{p}$  - Pressão média dimensional para as substituições dos limites de Kaplun (Pa)

$r$  - Kaplun Limits

$Re_x$  - Número de Reynolds com relação a  $x_1^*$

$Re_\delta$  - Número de Reynolds com relação a  $\delta$

$S_c$  - Termo de produção de concentração

$t$  - Tempo (s)

$\hat{u}_a$  - Componente de primeira ordem da velocidade (m/s)

$\hat{u}_b$  - Componente de segunda ordem da velocidade (m/s)

$u_i$  - Velocidade média do fluido na direção  $i$  (m/s)

$u_j$  - Velocidade média do fluido na direção  $j$  (m/s)

$u'_i$  - Flutuações das velocidades do fluido na direção  $i$  (m/s)

$u'_j$  - Flutuações das velocidades do fluido na direção  $j$  (m/s)

$\hat{u}_i$  - Velocidade média do fluido na direção  $i$ , para as substituições dos limites de Kaplun (m/s)

$\hat{u}_j$  - Velocidade média do fluido na direção  $j$ , para as substituições dos limites de Kaplun (m/s)

$\hat{u}'_i, \hat{u}'_j$  - Flutuações das velocidades de limites de Kaplun nas direções  $i$  e  $j$  (m/s)

$U_\infty$  - Velocidade do escoamento principal (m/s)

$u_i^*, u_j^*$  - Velocidades dimensionais do escoamento nas direções  $x_i^*$  e  $x_j^*$  (m/s)

$u_\tau$  - Velocidade de atrito na parede (m/s)

$v'_i$  - Flutuações das velocidades das partículas na direção  $i$  (m/s)

$v_i^*$  - Velocidade dimensional das partículas (m/s)

$v_i$  - Velocidade média das partículas (m/s)

$x_i, x_j$  - Coordenadas cartesianas (m)

- $x_1^*$  - Direção paralela ao escoamento dimensional (m)
- $x_2^*$  - Direção transversal ao escoamento dimensional (m)
- $\hat{x}$  - Variável Intermediária
- $x$  - Variáveis de limites de Kaplun
- $y_{ap}, y^*$  - Solução Aproximada
- $y(x)$  - Solução Original
- $y(\eta x^*)$  - Função de limites de Kaplun
- $y_\eta$  - Variável intermediária de limites de Kaplun
- $y^\dagger$  - Valor adimensional para a distância de um ponto à parede

## LETRAS GREGAS

- $\alpha$  - Parâmetro adimensional pequeno da expansão assintótica
- $\alpha'$  - Parte do parâmetro pequeno  $\alpha$
- $\delta$  - Espessura da Camada limite (m)
- $\hat{\delta}$  - Espessura da Sub-Camada Laminar (m)
- $\tilde{\delta}$  - Espessura da Camada de Termos Turbulentos (m)
- $\Delta$  - Divergente da velocidade
- $\delta_{ij}$  - Delta de Kronecker
- $\epsilon$  - Dissipação Turbulenta
- $\epsilon$  - Kaplun Limits
- $\epsilon - u_r/U_\infty$
- $k$  - Constante de Von Karman
- $k_c$  - Constante de Von Karman para concentração
- $K$  - Energia Cinética Turbulenta
- $\lambda$  - Coeficiente de transporte turbulento de concentração
- $\mu \simeq \mu_f$  - Viscosidade (Kg/m s)

$\eta$  - Fator de escala da variável  $y$

$\eta(\epsilon)$  - Função Arbitrária de  $\epsilon$

$\rho$  - Massa Específica ( $Kg/m^3$ )

$\rho_w$  - Massa Específica na Parede ( $Kg/m^3$ )

$\rho_p$  - Massa específica da partícula ( $Kg/m^3$ )

$\tau_{ij}$  - Tensão de Reynolds

$\tau_w$  - Tensão cizalhante na superfície sólida

$\tau_p$  - Constante de tempo da partícula :  $\rho_p d_p^2 / 18\mu_f$  (s)

$\phi^*$  - Grandeza qualquer dimensional

$\phi$  - Grandeza qualquer média

$\phi'$  - Flutuação de uma grandeza qualquer

$\nu$  - Viscosidade cinemática  $\mu/\rho$  ( $m^2/s$ )

# 1. Introdução

Escoamentos turbulentos com partículas sólidas são comumente encontrados na natureza e na indústria. A deposição de partículas em aerossóis, o transporte de rejeitos em rios, as concentrações de poluentes sólidos encontrados na atmosfera, além de inúmeros processos no setor siderúrgico são apenas alguns exemplos desse tipo de escoamento e locais onde eles podem ser encontrados.

Apesar da vasta aplicação industrial e ocorrências naturais, esse fenômeno é pouco compreendido, e os estudos sobre ele são relativamente recentes. Muitos são os motivos para que esse desconhecimento sobre o assunto ocorra; dentre eles destacamos a adição de novos parâmetros importantes para o escoamento e a dificuldade de se conseguir realizar experimentos precisos.

Dentre os novos parâmetros encontrados no problema pode-se citar os relacionados com o tamanho, a massa específica, a constante de tempo e a concentração de partículas, o que torna o problema assim muito rico e complexo em seu entendimento. As dificuldades experimentais surgem com a determinação das características das partículas, montagem do experimento e distribuição das partículas no escoamento, juntamente com a restrição ao uso de instrumentação para a medição de velocidades.

Dos sistemas existentes, apenas os ópticos são indicados para esses tipo de escoamento. No entanto, esses instrumentos ainda não são precisos o suficiente para que se possa determinar com clareza e precisão as fases de um escoamento bifásico fluido/partículas, tornando assim a interpretação dos sinais gerados um novo tópico de discussão e a compreensão do problema físico muito difícil.

O objetivo deste trabalho é achar soluções para os campos de velocidade e de concentração perto da parede para escoamentos carregados com partículas em uma camada limite turbulenta sobre uma placa plana. O conceito de limite de Kaplun será usado para avaliar



as estruturas assintóticas dos perfis de velocidade e da concentração. Mostra-se que o campo de concentração apresenta uma estrutura de duas camadas, na qual as camadas internas dependem do coeficiente de transporte turbulento.

Uma modelagem algébrica para o fenômeno, usando equações eulerianas para a concentração e o transporte de quantidade de movimento acopladas através da força de arrasto modelada linearmente para partículas de pequeno diâmetro, é utilizada para se deduzir uma nova lei da parede. As novas leis apresentam termos de ordem superior que são obtidos a partir da aplicação de expansões assintóticas nas equações do movimento e da concentração. Estes termos se apresentam na forma funcional  $y \ln y$ .

As novas equações para as leis de parede obtidas possuem uma clara dependência nos parâmetros relevantes aos escoamentos com partículas. Assim, elas podem ser usadas como funções de parede de forma a buscar uma melhor representação das condições de contorno em modelos diferenciais que busquem simular este tipo de escoamento. Mostra-se que, de acordo com a ordem de grandeza do coeficiente de transporte turbulento, as camadas internas do campo de concentração podem ou não coincidir com as camadas internas do campo de velocidade. Esse resultado vem a confirmar experimentos realizados em camada limite turbulenta. A definição da concentração de atrito, a ser detalhada nos próximos capítulos, possibilita a constatação dos efeitos causados pelas partículas no escoamento.

É através dos termos de segunda ordem, incluídos nas equações pela análise assintótica, que a influência das partículas no escoamento pode ser sentida não só nos perfis de velocidade e de concentração, como também em outras propriedades como nos coeficiente de atrito e de concentração. Esse resultado, como será mostrado a seguir, é importante pois essas propriedades estão diretamente ligadas aos perfis de velocidades.

Os resultados obtidos mostram razoável concordância com os experimentos, apresentando a vantagem de poderem prever situações mais adversas, as quais ainda não são possíveis de tratamento experimental, como é o caso de uma concentração elevada e uniforme.

Em problemas relacionados a escoamentos carregados com partículas sólidas, a abor-

dagem pode ser feita de duas maneiras distintas, uma lagrangeana onde cada partícula é acompanhada individualmente no tempo e no espaço, e outra euleriana onde a concentração, por ser uma grandeza escalar, possui uma equação de transporte própria e portanto um campo definido. Pela própria natureza deste trabalho a segunda opção foi escolhida para a análise do fenômeno.

## 2. Estado da Arte

A riqueza de escalas é, sem dúvida alguma, a maior característica dos escoamentos turbulentos. O fato da energia ser produzida nas maiores escalas e dissipada nas menores, onde o comprimento característico pode atingir valores muito pequenos, torna o entendimento deste tipo de escoamento um assunto não trivial.

Quando a um escoamento turbulento é acrescentada mais uma fase, composta de partículas sólidas, o número de parâmetros relevantes para a descrição do fenômeno aumenta consideravelmente, fazendo com que as dificuldades relacionadas com a modelagem do problema cresçam ainda mais. Rogers and Eaton(1991), dentre outros (Eaton(1994), Hunt et alli(1994)), mostram que entre estes parâmetros destacam-se: o número de Reynolds, a constante de tempo, a concentração, a distribuição e o diâmetro das partículas, além da razão das massas específicas das partículas e do fluido.

Na literatura existente, os escoamentos turbulentos bifásicos fluido-partículas são apresentados de três maneiras: escoamentos em jato, escoamentos em dutos horizontais e verticais e escoamento em camada limite. As pesquisas e resultados obtidos em estudos dos dois primeiros fenômenos, escoamentos em jato e escoamentos em dutos, se mostram em um estágio de entendimento mais avançado. Isto é, os modelos apresentados na literatura bem como os códigos numéricos propostos apresentam resultados bastante próximos dos experimentos realizados. Experimentos estes que por sua vez são menos complicados de se realizar e controlar do que o caso de experimentos em escoamento de camada limite. O motivo para que isso ocorra, em parte, se deve às condições de contorno impostas pela geometria de cada caso, e ainda às simplificações possíveis para as respectivas modelagens.

Uma quarta maneira que o problema vem sendo tratado (Squires and Eaton(1990,1991), Wang and Maxey(1993), Pedinotti et alli(1992), Truesdell and Elghobashi(1994)) é através da simulação numérica direta. Este método consiste em usar uma malha de discretização

muito pequena para que todas as escalas do escoamento turbulento possam ser representadas e calculadas sem utilizar nenhum tipo de modelagem durante a simulação computacional. Ou seja, procura-se resolver diretamente as equações do escoamento. Devido à própria natureza do método, existem limitações geométricas, assim como ocorre nos três casos descritos anteriormente. No entanto, a implementação deste método só é possível nos computadores mais modernos com grande capacidade de cálculo. Essas limitações computacionais forçam os estudos a se manterem em um domínio restrito, geralmente em escoamentos com baixo número de Reynolds onde procura-se simular uma região característica do escoamento. Normalmente esta região encontra-se no seio do escoamento e as condições de contorno são periódicas. É possível ainda encontrar casos onde se usa simulação de grandes escalas para a validação de códigos numéricos de novos modelos propostos, como é o caso de Viollet and Simonin(1994).

Devido à dificuldade de se realizar experimentos, normalmente estes são conduzidos em condições especiais onde a concentração é baixa e as partículas possuem diâmetros pequenos de forma a não alterar muito as características gerais do escoamento. Esse tipo de artifício experimental possibilita que o novo tipo de escoamento estudado possa ser comparado com os escoamentos turbulentos previamente conhecidos; no entanto, surge a desvantagem da dificuldade de se fazer uma interpretação precisa dos sinais gerados.

De acordo com Rogers and Eaton(1991), um dos fatores que faz com que os problemas de escoamentos em jatos e em tubos sejam mais estudados, e portanto melhores compreendidos do que a camada limite em escoamentos cisalhantes simples, é a maior simplicidade na concepção dos experimentos. Uma concentração de partículas não uniforme, por exemplo, modificará o perfil de velocidade médio de um escoamento em uma camada limite, podendo assim modificar o nível de turbulência; no entanto, este efeito não poderá ser atribuído à interação partícula/turbulência. Assim, as dificuldades em se controlar as propriedades para um experimento de camada limite já se mostram muito maiores.

Em todos os experimentos realizados (Rashidi et ali(1990), Hetsroni(1989), Elghobashi and Truesdell(1993), Snyder and Lumley(1971)) observou-se que independentemente do tipo

de escoamento houve uma mudança nos efeitos turbulentos, ou seja, partículas com baixos números de Reynolds tendem a diminuir esses efeitos, enquanto aquelas para altos Reynolds provocam um aumento de turbulência no escoamento.

Modarress et ali(1983) mostram que as flutuações de velocidade para jatos carregados com partículas, assim como as tensões de Reynolds, são afetadas de acordo com o grau de carregamento. Sinclair and Jackson(1989) mostram que para tubos verticais, dependendo dos valores da concentração e do tamanho das partículas, estas ao serem conduzidas pelo fluido tendem a se aglutinar em nuvens no meio do tubo ou a se deslocarem para as regiões de menor velocidade junto às paredes. Nesse trabalho seus autores reafirmam as dificuldades encontradas para se determinar as condições de contorno ideais para tal escoamento. Como não é o objetivo do presente trabalho estudar este tipo de escoamento, sua análise não será aqui apresentada, sendo, no entanto, citada vasta bibliografia para seu estudo e entendimento. Esses estudos se dividem em teóricos (Chen and Wood(1986), Gonesbet et ali(1984)), numéricos/experimentais (Eaton and Fessler(1994), Shuen et ali(1989)), experimentais (Tsuji and Morikawa(1982)) e numéricos (Tsuji et ali(1994), Squires and Eaton(1991)).

Alguns modelos de duas equações  $K - \epsilon$ , modificados para escoamentos bifásicos, já foram propostos em literatura (Elghobashi et ali (1983,1984)). Porém esses modelos apenas apresentam resultados aceitáveis para escoamentos em jatos, sendo difícil estender seus resultados para qualquer outro escoamento com partículas. Pela modelagem apresentada por esses autores, duas equações de transporte de quantidade de movimento são propostas, uma para cada fase.

Recentes experimentos em placas planas (Rogers and Eaton(1991), Rashidi et ali(1990)) mostraram a existência de uma forte correlação entre o nível de turbulência e a concentração de partículas na região logarítmica da camada limite.

Rogers and Eaton(1991) realizaram experimentos em escoamentos cisalhantes simples com o intuito de estender as teorias usadas em jatos e tubos para esse tipo de escoamento. Durante a realização deste trabalho, foram tomadas as devidas precauções com relação à

uniformidade da concentração de partículas a serem lançadas no escoamento. Os resultados mostram uma variação significativa nas flutuações turbulentas; no entanto, não é possível afirmar se as diferenças de valores encontrados nos perfis de velocidade média são devido a presença das partículas ou devem ser atribuídas a erros experimentais. Juntamente com os resultados experimentais obtidos por estes autores, é apresentada uma modelagem analítica do problema, onde propõe-se que as forças de Stokes exercidas no fluido sejam representadas por uma força de arrasto linear. Nesta força leva-se em consideração a concentração das partículas, a velocidade relativa entre as partículas e o fluido, bem como a constante de tempo das partículas. A linearidade desta força advém do fato de serem usadas partículas com diâmetros pequenos e uma concentração não superior a vinte por cento. Uma nova equação para energia cinética ( $K$ ), onde são consideradas a concentração e a velocidade das partículas, também é apresentada. Os autores mostram que ao deduzir a nova expressão para a energia cinética turbulenta, surgem termos cruzados de segunda e de terceira ordem com as flutuações de velocidade do fluido, velocidade da partícula e concentração. No entanto, a partir das observações experimentais e simulações numéricas diretas, é constatado que os termos de terceira ordem podem ser desprezados assim como os termos que envolvem flutuações de velocidade que não sejam na direção principal do escoamento. Assim, a nova equação proposta para a energia cinética apresenta em um de seus termos a concentração, bem como as flutuações de velocidade do fluido e das partículas na direção principal do escoamento.

Em Rashidi et ali(1990) são explorados resultados de experimentos nos quais partículas de diâmetros e massa específica variadas são lançadas em escoamentos com diferentes concentrações e números de Reynolds. De acordo com sua análise, as partículas com maiores diâmetros, assim como concentrações mais elevadas, aumentam o nível de turbulência do escoamento ao contrário das menores partículas e índices de concentrações mais baixos. Esses resultados vem confirmar outros antes encontrados onde pode-se constatar o mesmo tipo de comportamento. A mudança no índice de turbulência do escoamento está, de acordo com os

autores, ligada com a alteração do período de tempo entre um “bursting” ou ejeção e outro; isto é, o tamanho das partículas influencia diretamente nesse período, fazendo com que este aumente ou diminua, modificando assim o nível de turbulência no escoamento. Através de medidas experimentais é mostrado que para a região turbulenta a lei de parede clássica é mantida onde, no entanto, de acordo com as características das partículas e da concentração, um desvio próximo à região da esteira pode ser observado. Para a velocidade das partículas é mostrado que quanto maiores essas forem, maior será a velocidade relativa entre elas e o fluido, e maior será sua constante de tempo, definida como o tempo que a partícula leva para do repouso atingir 63% da velocidade do escoamento principal. Algumas medidas com relação ao tensor de Reynolds são realizadas pelos autores, mostrando que partículas de menor diâmetro tendem a diminuir essas tensões turbulentas ao contrário das maiores partículas.

Alguns autores, (Yung et ali(1989), Cleaver and Yates(1976)), preferem se concentrar no estudo de um fenômeno conhecido como reentrada de partículas na camada limite. Devido às baixas velocidades encontradas na região perto da parede, encontra-se nessa região uma maior concentração de partículas. Porém, em vista das ejeções ocorridas nessa camada do escoamento, algumas partículas são lançadas para o seio do escoamento principal. Ao se encontrarem em regiões de alta velocidade essas partículas tendem a voltar para a camada limite, ocorrendo então a reentrada. De acordo com essa linha de pesquisa as características principais desses escoamentos seriam determinadas por este fenômeno, pois ele seria responsável pelo transporte das partículas encontradas no fluido.

É interessante notar que a discussão em torno do fenômeno de reentrada não encontra um consenso, ou seja, para os autores que estudam a reentrada o motivo pelo qual esta ocorre ainda não se encontra completamente definido. As divergências surgem no momento de descrever as forças que atuam nas partículas e sua importância na ocorrência da reentrada. Cleaver and Yates(1975) defendem o ponto de vista de que devido à gravidade e, conseqüentemente, à massa das partículas, as forças na direção transversal ao escoamento levam a partícula de volta para a camada limite. Nesse caso, a gravidade seria a principal responsável pelo retorno

das partículas para as camadas de baixa velocidade e, dependendo de sua massa específica, essas encontrariam dificuldades para saírem dessas camadas.

Por outro lado, Mutlu Sumer and Deigaard(1981) afirmam que devido ao ângulo das ejeções e à intensidade de força com que essas ocorrem, a componente tangencial da força exercida nas partículas é, em muitas vezes, superior à componente transversal, sendo assim responsável pela saída e depois pela reentrada das partículas por elas atingidas na camada limite. Esse fenômeno aconteceria devido ao ângulo de incidência ser pequeno, proporcionando assim uma trajetória paralela ao escoamento e próxima da camada limite.



### 3. O Método da Variável Intermediária

Será feito neste capítulo uma introdução ao método da variável intermediária (Kaplan (1967), Lagerstrom and Caster(1972), Silva Freire e Hirata(1990)). O objetivo aqui é mostrar como esta técnica pode ser utilizada para a obtenção de soluções aproximadas para uma equação diferencial cujo termo de derivada de maior ordem está multiplicado por um parâmetro pequeno,  $\epsilon$ . Isto é feito dividindo-se a equação diferencial em um conjunto de equações aproximadas as quais são uniformemente válidas em diferentes partes do domínio. As equações aproximadas são obtidas aplicando-se um processo de limite à equação diferencial original.

O processo de limite acima mencionado ( $\eta$ -limit) aplicado à uma equação  $E(x, y; \epsilon)$  é definido como se segue:

Seja a variável intermediária  $\hat{x}$  tal que,

$$\hat{x}\eta(\epsilon) = x, \tag{3.1}$$

onde  $\eta(\epsilon)$  é uma função arbitrária de  $\epsilon$ .

Então o limite em  $\eta$  de  $E(x, y; \epsilon)$  é:

$$\lim_{\eta} E(x, y; \epsilon) = \lim E(\hat{x}\eta(\epsilon), y; \epsilon), \tag{3.2}$$

com  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $\hat{x}$  fixo.

A definição acima é de grande importância para o que vem a seguir. Esta definição será estudada em mais detalhes juntamente com alguns importantes conceitos no exemplo abaixo.

Considere o problema de camada limite descrito pela seguinte equação:

$$\epsilon \ddot{y} + x \dot{y} - xy = 0, \tag{3.3}$$

com as seguintes condições de contorno :

$$y(0) = 0, \quad y(1) = e. \quad (3.4)$$

Com o objetivo de obter uma solução aproximada da equação acima substituiremos (3.1) em (3.3) obtendo:

$$\frac{\epsilon}{\eta^2} \ddot{\hat{y}} + \hat{x} \dot{\hat{y}} - \eta \hat{x} \hat{y} = 0, \quad (3.5)$$

onde  $\hat{y} = y(\eta \hat{x})$ ,  $\dot{\hat{y}} = d\hat{y}/d\hat{x}$  e  $\ddot{\hat{y}} = d^2\hat{y}/d\hat{x}^2$ .

Dependendo da ordem de  $\eta$ , cada termo da equação (3.5) terá uma ordem formal em  $\epsilon$ . As derivadas são consideradas como tendo formalmente ordem um. Assim, o primeiro termo de (3.5) é formalmente de ordem  $\epsilon/\eta^2$ .

Aplicando agora o limite em  $\eta$  à equação (3.5), teremos o conjunto de equações aproximadas para as várias ordens de  $\eta$ .

$$O(\eta) = 1: \quad \dot{\hat{y}} - \hat{y} = 0 \quad (3.6a)$$

$$O(\epsilon^{1/2}) < O(\eta) < 1: \quad \dot{\hat{y}} = 0 \quad (3.6b)$$

$$O(\eta) = O(\epsilon^{1/2}): \quad \ddot{\hat{y}} + \hat{x} \dot{\hat{y}} = 0 \quad (3.6c)$$

$$O(\eta) < O(\epsilon^{1/2}): \quad \ddot{\hat{y}} = 0. \quad (3.6d)$$

As equações (3.6a) e (3.6c) possuem uma importante propriedade. Se  $\eta$  é tal que o processo de limite em  $\eta$  aplicado a (3.6a) e (3.6c) fornece (3.6b). Estas duas equações são consideradas como sendo “ricas o suficiente” para conter (3.6b). Lagerstrom e Caster(1972) fazem as seguintes definições:

**Definição 1:**

Se  $E$  é uma equação e  $\lim_{\eta_1} E = E_1$ ,  $\lim_{\eta_2} E = E_2$  e ainda  $\lim_{\eta_2} E_1 = E_2$ , então  $E_1$  contém  $E_2$ .

**Definição 2:**

O domínio formal de validade de uma equação  $F$ , relativa à uma equação original  $E$ , é a ordem de grandeza de  $\eta$  tal que  $\lim_{\eta} E$  ou é igual a  $F$  ou é igual a alguma equação contida em  $F$ .

Deste modo, de acordo com as definições acima, os domínios de validade das equações (3.6a) e (3.6c) são respectivamente:

$$D_e = \{\eta / \text{ord}(\eta) > \text{ord}(\epsilon^{1/2})\}, \quad (3.7a)$$

e

$$D_i = \{\eta / \text{ord}(\eta) < \text{ord}(1)\}. \quad (3.7b)$$

As equações (3.6a) e (3.6c) podem ser chamadas de equações principais pois elas contém todas as informações presentes na equação original (3.5). As demais equações (3.6b) e (3.6d) são chamadas de equações intermediárias.

Supondo agora que exista alguma relação entre os domínios formais de validade definidos pelos conjuntos (3.7a) e (3.7b) e o domínio real de validade das soluções das equações (3.6a) e noção de que equações “vizinhas” devem fornecer soluções também “vizinhas”, Kaplun (1967) enunciou o seguinte princípio heurístico:

**Princípio:**

Se  $y$  é a solução de uma equação  $E$  e  $E^*$  é uma equação aproximada, então existe uma

solução  $y^*$  de  $E^*$  cujo domínio de validade inclui o domínio formal de validade de  $E^*$ .

Este princípio não é sempre verdadeiro e, em particular, falha quando pequenos termos causam grandes efeitos após um processo de integração. No presente caso, contudo, este princípio pode ser aplicado. A interseção dos domínios  $D_e$  e  $D_i$  é dada por:

$$D_e \cap D_i = \{\eta/\epsilon^{1/2} < \eta < 1\}. \quad (3.8)$$

Continuaremos agora com o processo de determinação de uma solução aproximada do problema (3.3). Resolvendo as equações (3.6.a) e (3.6.c) obteremos as soluções externa e interna respectivamente, as quais são fornecidas por:

$$f(\hat{x}) = A e^{\hat{x}}, \quad (3.9a)$$

$$g(\hat{x}) = B \int_0^{\hat{x}} e^{-t^2/2} dt + C. \quad (3.9b)$$

Uma vez que o domínio de (3.7a) inclui o ponto  $x = 1$ , logo a equação (3.9a) deve satisfazer a condição de contorno  $y(1) = e$ . Sendo assim, teremos:

$$f(x) = e^x. \quad (3.10)$$

Por analogia, a solução interna então deve satisfazer a condição de contorno em  $x = 0$ , portanto:

$$C = 0. \quad (3.11)$$

Como se pode notar, uma terceira condição se faz necessária para que possamos determinar os valores de  $B$  e  $C$ . Esta condição virá do fato de que as soluções externa e interna devem ser iguais na interseção de seus domínios (3.8) ou seja,

$$\lim_{\eta} f(x) = \lim_{\eta} g(x/\epsilon^{1/2}), \quad (3.12a)$$

$$\epsilon^{1/2} < \eta < 1, \quad (3.12b)$$

onde  $\hat{x} = x$  para a solução externa e  $\hat{x} = x/\epsilon^{1/2}$  para a solução interna. Aplicando a condição (3.12a) e (3.12b) às equações (3.9b), (3.10) e (3.11) teremos que:

$$B = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad C = 0. \quad (3.13)$$

Assim, a função pode ser rescrita na forma:

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \quad (3.14)$$

Uma vez obtidas as equações (3.10) e (3.14), cada uma válida em uma parte do domínio da equação (3.3), podemos agora combiná-las de modo a obter uma solução aproximada única, válida ao longo de todo intervalo  $[0, 1]$ . Para obter esta solução aproximada usaremos aqui o método da adição composta. Neste método, as soluções interna e externa são somadas e sua parte em comum é subtraída. Fazendo isto, temos então a seguinte expressão:

$$y_{ap}(x) = e^x - 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x/\epsilon^{1/2}} e^{-t^2/2} dt, \quad (3.15)$$

onde  $y_{ap}(x)$  representa a solução aproximada procurada. Esta solução pode ser comparada com a solução do problema original. Como o problema original não possui solução analítica, as soluções aproximadas e exatas serão comparadas por gráficos. Isto é, neste exemplo a solução exata do problema será a sua própria solução numérica. Serão mostrados dois exemplos onde o valor da constante pequena,  $\epsilon$ , será alterado. Pode-se notar que, quanto menor o valor do parâmetro  $\epsilon$ , melhor será a aproximação entre as soluções aproximada e exata. As figuras comparativas são mostradas a seguir:

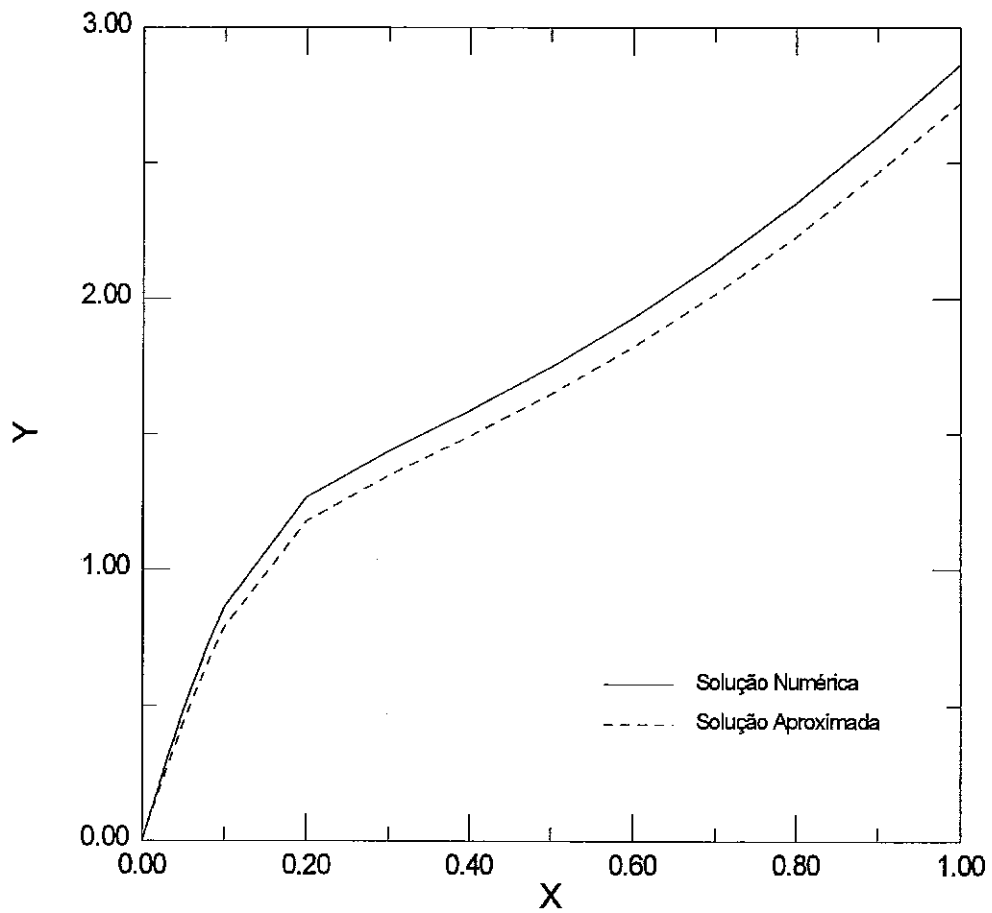


Figura 3.1. Comparação das Soluções Numérica e Aproximada para a Equação Exemplo - Epsilon = 0.01

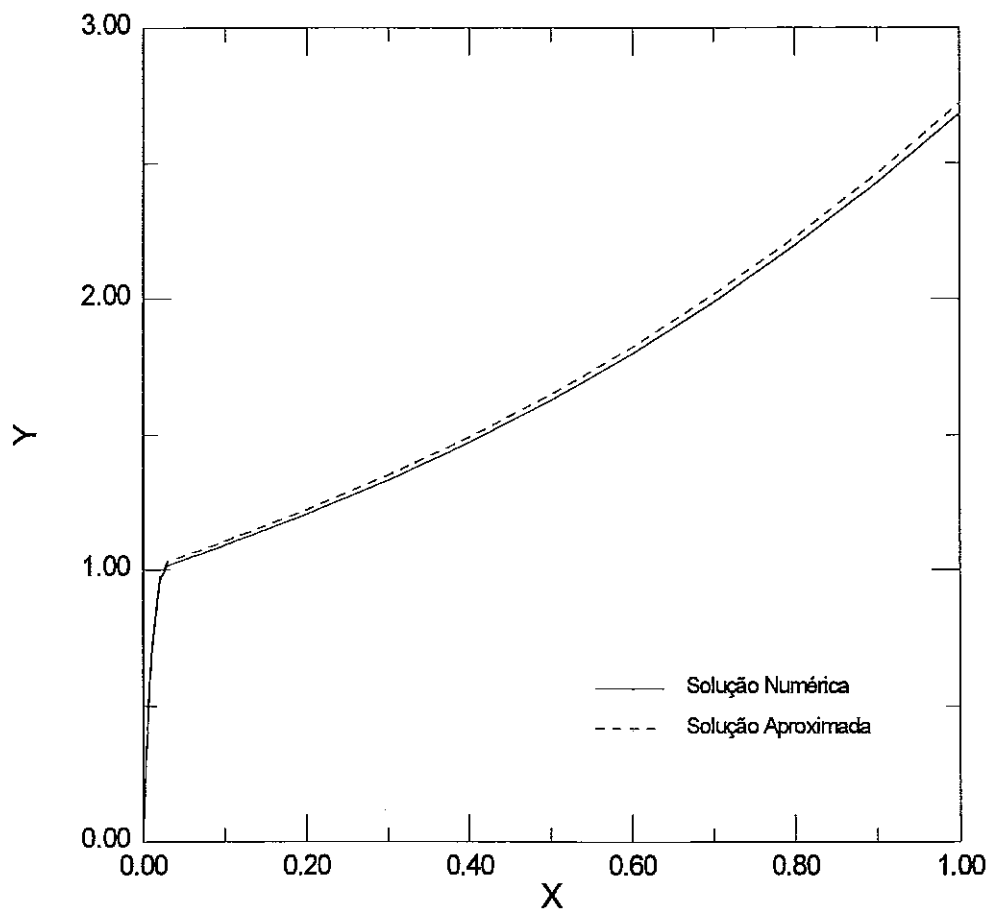


Figura 3.2. Comparação das Soluções Numérica e Aproximada para a Equação Exemplo - Epsilon = 0.0001

## 4. Análise Assintótica

O estudo de um escoamento cisalhante sobre uma placa plana encontra seus fundamentos na teoria de camada limite, onde considera-se ser a dimensão característica transversal muito menor do que o comprimento característico longitudinal. Isto equivale a dizer que nas equações de Navier-Stokes os gradientes dos termos difusivos na direção  $x_1^*$ , direção longitudinal ao escoamento, podem ser desprezados perante os gradientes na direção  $x_2^*$ , direção transversal ao escoamento.

Nos experimentos conhecidos da literatura sobre camada limite turbulenta, constata-se que esta pode ser dividida em três regiões distintas. Estas regiões possuem características predominantes bem determinadas e por isso apresentam perfis de velocidade também distintos. Como será mostrado na secção 4.3, através de argumentos assintóticos é possível encontrar o limite de cada região característica, bem como suas equações governantes. Todos estes resultados são comprovados através de dados experimentais e adimensionalizações adequadas.

Conforme será mostrado, o acréscimo de partículas ao escoamento não muda as características principais da camada limite. Isto é, continuarão a existir três regiões distintas, com características próprias. Entretanto, devido à presença das partículas, surgirá uma nova estrutura relacionada com a concentração. Esta nova estrutura estará sobreposta à estrutura fluidodinâmica estando as equações governantes de ambas acopladas.

Em cada uma das três regiões existentes na camada limite há termos dominantes representados nas equações de movimento. No final deste capítulo, será mostrado que as novas regiões de domínio dos termos turbulentos na camada limite de partículas continuam a apresentar características logarítmicas, como ocorre no caso fluidodinâmico clássico. No entanto, estes perfis serão corrigidos por um termo de ordem superior que apresentará a forma funcional  $y \ln y$  e representará a presença das partículas no escoamento.



## 4.1. Formulação Física :

O movimento completo de um fluido newtoniano é regido pelas equações de Navier-Stokes (4.1.2), acrescida da equação da conservação de massa (4.1.1),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i^*}{\partial x_i^*} = 0, \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[ 2\nu \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} \right) - \frac{1}{3} \Delta \delta_{ij} \right] \right] + F_i^*, \quad (4.1.2)$$

Nas equações acima o sinal (\*) denomina uma grandeza dimensional. Os símbolos possuem seu significado clássico.

As equações (4.1.1) e (4.1.2) podem ser bastante simplificadas se as hipóteses de escoamento incompressível e de propriedades constantes forem consideradas. Com as simplificações adequadas as equações tornam-se,

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0, \quad (4.1.3)$$

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \nu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} + \frac{1}{\rho} F_1^*, \quad (4.1.4)$$

As condições de contorno apropriadas para o problema dependerão da geometria considerada. Normalmente em superfícies sólidas utiliza-se as condições de não deslizamento e de não penetrabilidade, as quais podem ser expressas como:

$$x_2^* = 0,$$

$$u_i^*(x_1^*, 0) = 0, \quad (4.1.5a)$$

No infinito, as condições podem ser representadas por:

$$x_2^* = \delta,$$

$$u_i^*(x_1^*, \delta) = U_{i,\infty}, \quad (4.1.5b)$$

Em adição, condições adequadas devem ser prescritas para  $(x_1^* = 0, x_2^*)$  e  $(x_1^* = L, x_2^*)$ .

Na equação (4.1.4),  $F_i^*$  representa a força de corpo sobre o fluido. No caso de escoamentos carregados com partículas, esta será a força de arrasto instantânea das partículas por unidade de volume que atua no fluido, a qual pode ser modelada como,

$$F_i^* = \frac{c^*}{\tau_p}(u_i^* - v_i^*), \quad (4.1.6)$$

onde  $c^*$  é a concentração e  $\tau_p$  a constante de tempo da partícula definida por  $\tau_p = \rho_p d_p^2 / 18\mu_f$ . Esta constante representa fisicamente o tempo que a partícula leva para do repouso atingir 63% da velocidade média do escoamento principal (Rogers and Eaton(1991)). As grandezas  $u_i^*$  e  $v_i^*$  representam as velocidades do fluido e da partícula respectivamente. A hipótese de linearidade é possível devido à baixa concentração e pelo pequeno diâmetro das partículas aqui considerados.

Através da modelagem considerada na equação (4.1.6), para a força de arrasto das partículas no fluido, é possível acoplar as equações de quantidade de movimento junto à uma equação de transporte para a concentração, descrita da seguinte forma (Gomes(1995)),

$$\frac{\partial c^*}{\partial t} + u_i^* \frac{\partial c^*}{\partial x_i^*} = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left( \lambda \frac{\partial c^*}{\partial x_i^*} \right) + S_c, \quad (4.1.7)$$

onde  $\lambda$  é o coeficiente de transporte de concentração e  $S_c$  o termo de produção, aqui considerado nulo.

Portanto, as equações (4.1.3) a (4.1.7) descrevem o comportamento do escoamento de um fluido carregado com partículas. Nessas equações será feita a hipótese clássica de Reynolds, onde uma propriedade qualquer, aqui representada genericamente por  $\phi^*$ , será substituída por uma média no tempo ( $\phi$ ), acrescida de uma variação instantânea ( $\phi'$ ); logo,

$$\phi^* = \phi + \phi'. \quad (4.1.8)$$

Após a substituição da eq.(4.1.8) nas equações acima e passagem da média, ficamos com o sistema que descreve o comportamento dos campos de velocidade e de concentração para um escoamento turbulento incompressível carregado com partículas :

a) Continuidade,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.1.9)$$

b) Quantidade de movimento,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{c}{\tau_p} (u_i - v_i) + \left\langle \frac{c'}{\tau_p} (u'_i - v'_i) \right\rangle \right), \quad (4.1.10)$$

c) Concentração,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_j \frac{\partial c}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \langle c' u'_j \rangle + \lambda \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (4.1.11)$$

onde o tensor tensão de Reynolds é definido por  $\tau_{ij} = -\langle u'_i u'_j \rangle$  e os colchetes significam a média no tempo. Na equação (4.1.11),  $\lambda$  é o coeficiente de transporte de concentração, como já dito anteriormente. O fluxo turbulento de concentração é representado por,  $-\frac{\partial}{\partial x_j} \langle c' u'_j \rangle$ .

As condições de contorno para o caso fluidodinâmico continuam as mesmas. Porém, para a concentração, as condições de contorno são difíceis de serem definidas. Fazendo-se uma analogia com o caso térmico pode-se chamar a condição de contorno na parede para a concentração de fluxo de concentração. Entretanto, as dificuldades para se determinar valores para este fluxo são enormes. A princípio, o fluxo através da parede é nulo, visto que as partículas, independentemente do seu tamanho, não podem atravessar a superfície que limita o escoamento. No entanto, pode-se considerar um fluxo entre a subcamada viscosa e a região logarítmica da camada limite. Este fluxo estará diretamente relacionado com as características das partículas, pois, como citam alguns autores, são muito poucas as partículas pequenas que conseguem sair da subcamada viscosa. No entanto, esses mesmos autores

afirmam que as dificuldades para que estas partículas cheguem a esta região também são grandes. Já as partículas de maior diâmetro, justamente por serem maiores que a subcamada viscosa, apesar de não conseguirem atingir a subcamada viscosa, tendem devido ao seu próprio peso a se concentrar muito próximas à esta camada. Esta indefinição entre a camada que as partículas devem ocupar, aliada ao processo de “bursting”, reforçam a possibilidade da existência de um fluxo de concentração. Portanto, pode-se considerar que existe um fluxo negativo cada vez que existam partículas migrando da região logarítmica para a sub região viscosa. No caso contrário, partículas saindo da sub região viscosa para a região logarítmica, o fluxo seria considerado positivo. No entanto, a tarefa de determinar estas condições não é simples, podendo apresentar outras dificuldades.

A força instantânea de arrasto na equação (4.1.10) possui um termo médio e uma flutuação sobre a qual, a princípio, nada pode-se afirmar. Mais adiante será mostrado que esse termo pode ser desprezado sem provocar maiores perdas à modelagem.

## 4.2. Aplicação de Limites de Kaplun

Uma vez definida a formulação física, antes de resolver o sistema de equações do movimento, faz-se necessário a análise das grandezas características do problema, para que seja estimada a ordem de grandeza dos termos turbulentos. As flutuações de velocidade são da ordem de grandeza da velocidade de atrito,  $ord(u'_1) \sim ord(u'_2) \sim ord(u_\tau)$ , sendo esse um resultado clássico. Algumas medidas feitas por Rogers and Eaton(1991), juntamente com argumentos assintóticos, mostram que o termo

$$(u'_i - v'_i), \quad (4.2.1)$$

da equação (4.1.10) é no mínimo da ordem da velocidade de atrito,  $ord(u_\tau)$ . Portanto, é necessário se definir aqui a concentração de atrito,  $c_\tau$ , a qual terá sua ordem de grandeza

analisada mais a frente.

Para  $c_\tau$  e  $u_\tau$  com a mesma ordem de grandeza o resultado é, que em princípio,  $(c'/\tau_p)$   $(u'_i - v'_i)$  é pelo menos da ordem dos termos do tensor de Reynolds e portanto não pode ser desprezado. Porém, a análise assintótica do escoamento irá mostrar que esse termo pode ser desprezado em todas regiões do escoamento em uma primeira aproximação.

Como a formulação de função de parede é suposta abranger toda a região turbulenta, as equações de movimento (4.1.9) a (4.1.11) serão resolvidas em uma região específica do escoamento. A região onde os efeitos turbulentos dominam serão encontradas através da aplicação direta do limite de Kaplun nas equações de movimento. Para determinar a estrutura assintótica do escoamento, será usado aqui o mesmo procedimento de Silva Freire e Hirata(1990), Cruz e Silva Freire(1995) e Silva Freire(1996).

Considere as variáveis intermediárias,

$$\hat{x}_2 = \frac{x_2}{\eta(\epsilon)}, \quad \hat{u}_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = u_i(x_1, x_2), \quad \hat{c}(x_1, \hat{x}_2) = c(x_1, x_2). \quad (4.2.2)$$

Sustituindo as equações (4.2.2) nas equações do movimento e fazendo o processo de passagem do  $\eta$ -limite, as equações resultantes serão :

a) equação da quantidade de movimento :

$$ord(\eta) = ord(1) : \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} - \frac{\hat{c}}{\rho \tau_p} (\hat{u}_i - \hat{v}_i), \quad (4.2.3a)$$

$$ord(u_\tau^2) < ord(\eta) < ord(1) : \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} - \frac{\hat{c}}{\rho \tau_p} (\hat{u}_i - \hat{v}_i), \quad (4.2.3b)$$

$$ord(\eta) = ord(u_\tau^2) : \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \langle \hat{u}'_1 \hat{u}'_2 \rangle - \frac{\hat{c}}{\rho \tau_p} (\hat{u}_i - \hat{v}_i), \quad (4.2.3c)$$

$$ord(\nu/u_\tau) < ord(\eta) < ord(u_\tau^2) : 0 = -\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \langle \hat{u}'_1 \hat{u}'_2 \rangle - \frac{\hat{c}}{\rho \tau_p} (\hat{u}_i - \hat{v}_i), \quad (4.2.3d)$$

$$ord(\eta) = ord(\nu/u_\tau) : 0 = \nu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}_2^2} - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \langle \hat{u}'_1 \hat{u}'_2 \rangle, \quad (4.2.3e)$$

$$ord(\eta) < ord(\nu/u_\tau) : 0 = \nu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}_2^2}; \quad (4.2.3f)$$

b) equação da concentração:

$$ord(\eta) = ord(1) : \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{x}_j} = 0, \quad (4.2.4a)$$

$$ord(u_\tau c_\tau) < ord(\eta) < ord(1) : \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{x}_j} = 0, \quad (4.2.4b)$$

$$ord(\eta) = ord(u_\tau c_\tau) : \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{x}_j} = - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \langle \hat{c}' \hat{u}'_2 \rangle, \quad (4.2.4c)$$

$$ord(\lambda/u_\tau) < ord(\eta) < ord(u_\tau c_\tau) : 0 = - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \langle \hat{c}' \hat{u}'_2 \rangle, \quad (4.2.4d)$$

$$ord(\eta) = ord(\lambda/u_\tau) : 0 = \lambda \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial \hat{x}_2^2} - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \langle \hat{c}' \hat{u}'_2 \rangle, \quad (4.2.4e)$$

$$ord(\eta) < ord(\lambda/u_\tau) : 0 = \lambda \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial \hat{x}_2^2}. \quad (4.2.4f)$$

Uma estrutura de camada limite em duas camadas é observada nas equações (4.2.3c), (4.2.3e), (4.2.4c) e (4.2.4e). Essas quatro equações são distinguidas em duas formas:

- i) são determinadas por escolhas específicas de  $\eta(\epsilon)$ , e
- ii) pelo menos uma das equações, ou as duas, possuem cada uma das outras equações, porém nenhuma delas está “contida” na outra.

Portanto, de acordo com a teoria de limites de Kaplun, essas equações são “ricas o bastante” para providenciar soluções aproximadas, que cubram todo o domínio e se sobreponham

em uma determinada região. Essas equações são chamadas de equações principais. Assim, as definições do Capítulo 3, juntamente com o princípio enunciado por Kaplun sobre os domínios de validade, asseguram que existe uma solução para o problema que está na região do domínio das equações principais e que, portanto, cobre todo o domínio. As equações (4.2.3c) e (4.2.4c) são chamadas de equações externas, enquanto as equações (4.2.3e) e (4.2.4e) são chamadas de equações internas. O balanço de forças nas várias regiões do escoamento está ilustrado nas equações acima. Percebe-se que, enquanto as equações de velocidade principal estão nos pontos onde  $ord(\eta) = ord(u_\tau^2)$  e  $ord(\eta) = ord(\nu/u_\tau)$ , as equações de concentração principal encontram-se nos pontos onde  $ord(\eta) = ord(u_\tau c_\tau)$  e  $ord(\eta) = ord(\lambda/u_\tau)$ .

Então, se e apenas se,  $ord(u_\tau) = ord(c_\tau)$ , e,  $ord(\nu) = ord(\lambda)$ , os dois domínios sobrepostos

$$D_u = \{\eta/ord(\nu/u_\tau) < ord(\eta) < ord(u_\tau^2)\}, \quad (4.2.5)$$

e

$$D_c = \{\eta/ord(\lambda/u_\tau) < ord(\eta) < ord(u_\tau c_\tau)\}, \quad (4.2.6)$$

irão coincidir. Portanto a camada limite de concentração terá uma estrutura assintótica diferente da camada limite fluidodinâmica, dependendo da ordem de magnitude de  $c_\tau$  e de  $\lambda$ . Para achar soluções locais para os campos de velocidade e de concentração, serão consideradas as equações na região de interseção (4.2.5) e (4.2.6).

Devido ao acoplamento das equações que modelam o fenômeno e aos parâmetros que as relacionam, pode-se notar que as características gerais das partículas presentes no escoamento estão representadas justamente pelos valores de  $c_\tau$  e  $\lambda$ , além da concentração no escoamento principal (condição inicial para a concentração). É conveniente notar que a princípio nenhum tipo de modelagem pode ser proposta para esses termos e apenas pode-se determinar os grupos de parâmetros que serão importantes para sua definição.

### 4.3. A Estrutura Assintótica da Camada Limite Turbulenta

Após a passagem do  $\eta$ -limite, na Seção 4.2, e a identificação das equações principais e intermediárias, pode-se definir a estrutura da camada limite turbulenta. Conforme apresentado, esta estrutura não necessariamente será igual ou coincidente para o caso fluidodinâmico e o caso da concentração.

Analisando primeiramente o caso fluidodinâmico, pode-se observar no conjunto das equações (4.2.3) que existem duas equações principais, (4.2.3c) e (4.2.3e). Além disto, são três as equações intermediárias, pois as equações (4.2.3a) e (4.2.3b) são exatamente iguais.

A definição de equação principal diz que: para uma determinada equação ou conjunto de equações ser principal, ela deve possuir uma ou mais de uma das outras equações, sem no entanto estar contida em nenhuma outra equação. Por este motivo, considera-se que as equações principais representam fronteiras de validade das equações intermediárias. Com isso, surge a estrutura de três camadas, como mostra a figura (4.3.1). As ordens de grandeza de cada camada são determinadas pela ordem de grandeza de  $\eta$ , estipulada no processo de limite de Kaplun.

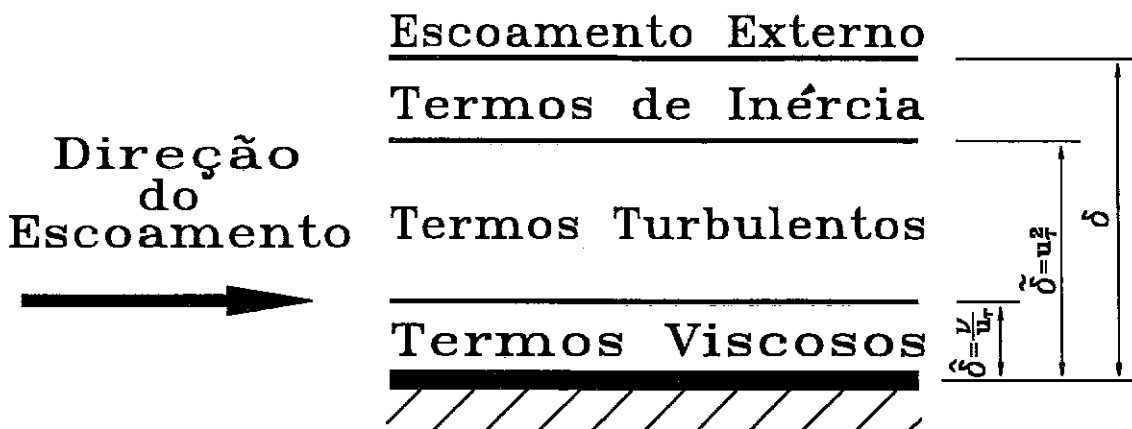


Figura 4.3.1 - Estrutura assintótica da camada limite turbulenta



Observando a figura anterior (4.3.1), nota-se que através da resolução das equações intermediárias é possível se ter uma idéia do comportamento do perfil de velocidade para cada região distinta.

Consideremos a equação (4.2.3f). Esta equação representa a região delimitada entre a parede e  $\hat{\delta}$ , eq.(4.2.3e). No entanto, a equação (4.2.3f) pode ser resolvida por integração direta, o que fornecerá um perfil de velocidade linear como mostra o procedimento a seguir.

Uma integral primeira de

$$\nu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_\eta^2} = 0; \quad (4.3.2)$$

nos fornece:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial y_\eta^2} = const; \quad (4.3.3)$$

que sob uma integração sucessiva, resulta em

$$\hat{u} = const y_\eta. \quad (4.3.4)$$

Portanto, para a região mais próxima à parede, o perfil de velocidade é linear. Este perfil linear é crescente, ou seja, a constante de integração que multiplica a variável  $\hat{x}_2$  é positiva. Esta afirmação está baseada no fato da velocidade do fluido, junto à parede, ser igual à velocidade da parede e existir uma continuidade entre os valores da velocidade em cada região da camada limite. Isto é, visto a parede estar a uma velocidade inferior do fluido que sobre ela escoar, e o fluido possuir uma determinada velocidade no início da região logarítmica, a função linear descrita em (4.3.4) deve ter como limite estes dois valores. Como neste ponto o predomínio é dos termos viscosos, a região é denominada de subcamada viscosa, ou subcamada laminar.

Passando para a equação (4.2.3d), pode-se observar que esta equação representa os termos turbulentos, através da tensão turbulenta. Conforme será mostrado na seção posterior, para se resolver o problema do fechamento em turbulência, é necessário a modelagem da tensão turbulenta. Esta modelagem consiste em obter mais uma equação para o sistema de equações que governam o movimento. Com a especificação dessa nova equação, iguala-se o número de incógnitas ao número de equações, possibilitando a resolução do problema.

O objetivo desta seção é obter um perfil de velocidade para cada região da estrutura da camada limite. Por esse motivo, aqui será adotado um modelo algébrico simples, sem maiores considerações de outras possibilidades. Estas outras possibilidades serão descritas em seção posterior.

O modelo algébrico de comprimento de mistura de Prandtl, define que a tensão turbulenta pode ser representada pelo produto de uma velocidade característica e de um comprimento característico. Prandtl ainda reduziu o problema apenas para a modelagem do comprimento característico, o qual ele afirmou ser proporcional a distância da parede ( $\kappa x_2$ ), onde  $\kappa$  é a constante de von Karman. Seguindo a formulação proposta por Prandtl, tem-se que

$$-\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \langle \hat{u}'_1 \hat{u}'_2 \rangle = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left( \kappa^2 y_\eta^2 \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_2} \right)^2 \right) = 0. \quad (4.3.5)$$

Integrando a equação(4.3.5),

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left( \kappa^2 y_\eta^2 \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_2} \right)^2 \right) = 0,$$

obtemos

$$d\hat{u}_1 = \frac{const}{\kappa} \frac{d\hat{x}_2}{\hat{x}_2}, \quad (4.3.6)$$

a qual resulta em

$$\frac{u_1}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\hat{x}_2 u_\tau}{\nu} + const. \quad (4.3.7)$$

A equação (4.3.7) é conhecida como a lei da parede. Este resultado mostra que, na região onde os termos turbulentos dominam, o perfil de velocidade é logarítmico. Seguindo as adimensionalizações para velocidade e distância da parede corretas, como as usadas na equação (4.3.7), é possível se obter a lei da parede verificada experimentalmente. Estes experimentos mostram que a constante deve ter seu valor igual a 5,0.

A última região, aquela que se encontra mais próxima do escoamento principal, é dominada pelos termos de inércia. Muitas vezes a literatura a denomina região da esteira. Geralmente ela corresponde à maior parte da camada limite. Mostra-se experimentalmente que esta camada pode ser representada pela lei da parede acrescida de uma função cossenoidal. Esta lei é conhecida como a lei de Coles e não será aqui enfatizada.

Logo, a estrutura da camada limite turbulenta fica representada conforme mostra a figura (4.3.1), onde a região mais próxima à parede é dominada pelos termos viscosos e apresenta um perfil de velocidade linear. A região central, conhecida como região da lei da parede é dominada pelos termos turbulentos e tem um perfil de velocidade logarítmico. Por último, aparece a região da esteira, onde os termos de inércia são os mais importantes, com um perfil de velocidade cossenoidal.

O mesmo procedimento deve ser seguido para o conjunto de equações (4.2.4) relacionadas com a concentração. Observando estas equações pode-se chegar à conclusão de que elas apresentam as mesmas características gerais das equações fluidodinâmicas. Porém, é necessário observar que existem diferenças significativas. A primeira delas está relacionada com a ordem de grandeza dos limites das camadas. Isto é, para a concentração surgem os termos de concentração de atrito,  $c_\tau$ , e o coeficiente de transporte de concentração,  $\lambda$ . Estes termos possuem influência direta na ordem de grandeza das camadas, assim como na sobreposição da estrutura da camada de concentração com a camada fluidodinâmica. Também é necessário ressaltar que a modelagem de comprimento de mistura será estendida para a equação (4.2.4d), resultando no aparecimento uma constante, ( $\kappa_c$ ). Nos resultados, pode-se afirmar que na região próxima à parede, o perfil de concentração apresenta-se linear, enquanto na região intermediária ele apresenta um perfil logarítmico. No entanto, não se pode afirmar se esses perfis são crescentes ou decrescentes, não existindo experimentos para se determinar o valor da constante, no caso da lei da parede de concentração. Na região inercial, nada se pode afirmar quanto ao perfil cosseinodal.

## 4.4. A Modelagem dos Termos Turbulentos

O processo de tomada de média realizado na seção (4.1) faz aparecer correlações envolvendo flutuações de velocidade na equação do movimento médio e de concentração na equação de concentração média, anteriormente denominados de tensor de Reynolds e fluxo de concentração turbulenta. Devido a esses termos, o número de incógnitas encontradas no problema torna-se superior ao número de equações disponíveis. Para resolver qualquer problema que envolva um escoamento turbulento é então necessário providenciar um novo conjunto de equações que relacione as grandezas médias às grandezas instantâneas. Este problema de se obter novas equações é chamado em turbulência de “o problema do fechamento”.

O problema do fechamento pode ser resolvido propondo-se novas equações de forma a tornar o sistema completo. Essas novas equações podem ser algébricas ou diferenciais, classificando assim os modelos como modelos algébricos, ou de zero equações; ou diferenciais de uma, ou duas equações.

Os modelos algébricos, ou de zero equações, foram os primeiros a surgir e são os mais simples de se implementar. Por esse motivo, são os normalmente utilizados na dedução da lei da parede. No entanto, como consideram a turbulência isotrópica, não podem ser usados para casos mais complexos como por exemplo, escoamentos com separação ou com rotação. Já os modelos de uma e duas equações, propoem equações diferenciais para a energia cinética turbulenta ( $K$ ), e para a taxa de dissipação por unidade de massa ( $\epsilon$ ), para modelar a tensão turbulenta. A equação da energia cinética pode ser deduzida diretamente da equação de Navier-Stokes, enquanto a equação para a dissipação é normalmente modelada empiricamente.

Para uma primeira análise do problema de um escoamento com partículas, será usado um modelo algébrico de comprimento de mistura, tanto para o tensor de Reynolds, quanto para o fluxo de concentração turbulenta. Nesse modelo, diversos autores consideraram a viscosidade turbulenta ser definida por um produto de uma velocidade característica e de

um comprimento característico. Prandtl reduziu o problema à especificação do comprimento característico. Para a camada limite, Prandtl propôs que esse comprimento fosse proporcional à distância da parede. No presente trabalho, esta proposta foi estendida para a equação da concentração. Como resultado, as equações (4.2.3d) e (4.2.4d) se reduzem a

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left( k^2 \hat{y}_\eta^2 \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}_2} \right)^2 \right) - \frac{\hat{c}}{\rho \tau_p} (\hat{u} - \hat{v}) = 0, \quad (4.4.1)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left( k \kappa_c \hat{y}_\eta^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{x}_2} \right) = 0, \quad (4.4.2)$$

onde  $\kappa$  e  $\kappa_c$  são as constantes do modelo, constantes de proporcionalidade.

A velocidade e a concentração serão expandidas da seguinte forma

$$\hat{u} = \hat{u}_a + \alpha \hat{u}_b, \quad (4.4.3)$$

$$\hat{c} = \hat{c}_a + \alpha \hat{c}_b, \quad (4.4.4)$$

onde o parâmetro pequeno  $\alpha$ , adimensional, é igual a  $[(\hat{u} - \hat{v})/\rho \tau_p][(\nu c_\tau)/(u_\tau)^3]$  e  $\hat{u}$ ,  $\hat{c}$  e  $\hat{x}_2$  são adimensionalizadas respectivamente por  $u_\tau$ ,  $c_\tau$  e  $\nu/u_\tau$ . Uma análise da ordem de grandeza dos termos que compõem  $\alpha$  verifica que esse parâmetro realmente se apresenta com valores pequenos e, sendo assim, ele pode ser considerado de ordem superior. O valor da constante de tempo,  $\tau_p$ , depende do diâmetro e das propriedades físicas das partículas; ou seja, uma vez constatadas as características das partículas, sua constante de tempo estará definida. Por questões de simplificação, o termo  $(\hat{u} - \hat{v})$  foi considerado constante.

Mais uma vez, as características das partículas existentes no escoamento estão representadas através de  $\alpha$  e de  $c_\tau$ , e influem diretamente nas leis a serem propostas.

Substituindo as equações (4.4.3) e (4.4.4) em (4.4.1) e (4.4.2), e depois separando os termos de mesma ordem de grandeza, temos as equações para todas as ordens de aproximações:

a) para as equações de primeira ordem

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left( k^2 y_\eta^2 \left( \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial \hat{x}_2} \right)^2 \right) = 0, \quad (4.4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left( k k_c y_\eta^2 \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial \hat{x}_2} \right) = 0, \quad (4.4.6)$$

b) para as equações de segunda ordem

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left( 2 k^2 y_\eta^2 \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{u}_b}{\partial \hat{x}_2} \right) - \hat{c}_a = 0, \quad (4.4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left[ k k_c y_\eta^2 \left( \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{c}_b}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{u}_b}{\partial \hat{x}_2} \right) \right] = 0. \quad (4.4.8)$$

A integração das equações acima, fornece :

a) solução de primeira ordem

$$\hat{u}_a = \left( \frac{1}{k} \ln \hat{x}_2 + A \right), \quad (4.4.9)$$

$$\hat{c}_a = \left( \frac{1}{k_c} \ln \hat{x}_2 + B \right), \quad (4.4.10)$$

b) solução de segunda ordem

$$\hat{u}_b = \left[ \frac{\hat{x}_2}{k k_c} \left( \frac{1}{2} \ln \hat{x}_2 + \left( \frac{B k_c}{2} - 1 \right) \right) + D \right], \quad (4.4.11)$$

$$\hat{c}_b = \left[ \frac{\hat{x}_2}{k_c^2} \left( -\frac{1}{2} \ln \hat{x}_2 - \left( \frac{B k_c}{2} - 1 \right) \right) + E \right]. \quad (4.4.12)$$

Com esses resultados, uma nova lei da parede para o campo de velocidade é proposta, considerando os efeitos de uma determinada concentração de partículas adicionadas ao fluido. Também uma lei de parede para a equação de transporte de concentração é proposta, de maneira a representar o comportamento das partículas perto da parede. Nota-se que para o

caso fluidodinâmico a influência das partículas no escoamento está representada na correção de segunda ordem, adicionada à lei de parede clássica.

## 5. Resultados

Após deduzir novas equações para os perfis de velocidade e de concentração, necessitamos agora da validação experimental desses resultados. Como já mencionado antes, os experimentos em escoamentos carregados com partículas são difíceis de serem realizados, principalmente pelas restrições aos equipamentos de medição e pela dificuldade de se conseguir uma concentração homogênea em toda a extensão do perfil de velocidade. Para esses tipos de escoamentos apenas sistemas ópticos são recomendados. É importante observar que, quando nos aproximamos da parede, essa dificuldade tende a aumentar, visto as diminutas escalas encontradas e os problemas físicos para a realização de medidas. Como ilustração, pode-se citar a impossibilidade de se obter dados confiáveis de perfil de velocidade perto da parede, na sub-camada viscosa.

Nas técnicas ópticas de medida, a distinção entre as partículas do fluido e as partículas sólidas é baseada na amplitude do sinal recebido. No entanto, as incertezas experimentais são grandes devido a uma série de fatores como a falta de precisão na determinação das fases dos sinais, os pequenos ruídos que afetam os sinais, as limitações na aquisição de dados e muitos outros. Essas incertezas chegam a atingir um valor de 6% da velocidade média, tornando a análise dos resultados mais difícil, pois não se pode ter certeza se algum desvio observado no perfil é devido à presença das partículas ou ao erro experimental.

A dificuldade de se conseguir realizar experimentos nesses escoamentos está refletida na escassez de referências nas quais se fazem medidas em camada limite turbulenta de escoamentos carregados com partículas. Apenas dois resultados foram encontrados em toda literatura e, ainda assim, os pontos onde foram realizadas as medições não se encontram situados na região logarítmica e sim na região conhecida como região da esteira do escoamento.

Outros resultados com visões diferentes do problema são encontrados; é o caso em que a trajetória de uma determinada partícula isolada é estudada. Nesses casos, os resultados



servem como ilustração do comportamento geral que as partículas com as mesmas características devem seguir, mas não pode ser usado para a corroboração de resultados.

Não é objetivo do presente trabalho realizar experimentos, ou procurar melhores técnicas de medições para esse tipo de escoamento, e sim propor um novo conjunto de equações para modelá-los. Simulações numéricas para o perfil de velocidade usando a nova lei proposta, bem como para os valores da velocidade de atrito e a concentração de atrito na parede, foram feitas e comparadas com a lei de parede clássica e os resultados experimentais disponíveis.

## 5.1. Calibração do Modelo Numérico

Para que os cálculos realizados pudessem ser validados, tornou-se necessário testar o modelo numérico a ser utilizado. Valendo-se de resultados experimentais para camadas limite turbulentas sobre uma placa plana (Simpson R.L.(1968)), utilizou-se a lei de parede tradicional acrescida da função de Coles, lei da esteira, juntamente com os valores experimentais da velocidade do escoamento principal ( $U_\infty = 14.4 \text{ m/s}$ ) e da espessura da camada limite turbulenta ( $\delta$ ) em uma determinada posição da placa, para se calcular os valores dos coeficientes de atrito ( $C_f$ ). Os resultados obtidos foram satisfatórios, como mostra a tabela 5.1.1, podendo o procedimento passar a ser utilizado nos testes numéricos para os novos modelos de lei de parede da velocidade e da concentração propostos.

Tabela 5.1.1. Resultados Numéricos para  $C_f$

Posição $x_1^*$ (m)	$Re_x$	$\delta(m)$	$C_{fExp}$	$C_{fNum}$
0,455	4,05E+05	0,0116	2,20E-03	2,17E-03
1,063	9,45E+05	0,0254	1,90E-03	1,85E-03
1,676	1,45E+06	0,0360	1,76E-03	1,74E-03
2,284	1,99E+06	0,0465	1,65E-03	1,66E-03

Com os mesmos dados experimentais, foi possível estimar uma expressão para relacionar a espessura da camada limite ( $\delta$ ) com a posição do perfil na placa. Assumindo-se que o número de Reynolds, baseado na espessura da camada limite, é proporcional ao número de Reynolds, baseado na posição longitudinal elevado a 0,8, a constante de proporcionalidade pode ser calculada. Os resultados estão descritos na tabela 5.1.2. O valor final assumido pela constante foi a média dos valores obtidos sendo igual a 0,36.

Tabela 5.1.2. Cálculo da Constante de Proporcionalidade

$Re_\delta$	$Re_x$	Constante
9493,7	28747,4	0,3302
20886,2	56621,4	0,3688
29566,3	81543,0	0,3625
38246,3	104419,0	0,3662

A partir da validação do procedimento de cálculo para a velocidade de atrito na parede e com a extensão desse conceito para o caso da concentração de atrito, passou-se a utilizar as equações (4.4.3) e (4.4.4), ao invés da lei de parede clássica, para o cálculo dos valores de  $u_\tau$  e  $c_\tau$ . O procedimento numérico adotado consistiu em somar as equações (4.4.3) e (4.4.4) à função de Coles, formando assim uma lei da esteira modificada. Uma vez existindo esse sistema de duas equações, uma para a velocidade e outra para a concentração, passam a ser incógnitas deste cinco variáveis: a velocidade ( $u_1^*$ ), a concentração ( $c^*$ ), a posição transversal ( $x_2^*$ ), além da velocidade de atrito ( $u_\tau$ ) e a concentração de atrito ( $c_\tau$ ). Assim, se um ponto com velocidade e concentração conhecidas for identificado dentro da região da camada limite, as cinco variáveis se reduzem a duas: a velocidade de atrito e a concentração de atrito. O ponto utilizado será a espessura total da camada limite turbulenta, onde os valores da velocidade ( $u_1^*$ ), e concentração ( $c^*$ ), foram substituídos pelos valores da velocidade e de concentração no escoamento principal, bem como o valor da dimensão transversal ( $x_2^*$ ), pela espessura da camada limite ( $\delta$ ). Dessa forma, ao resolver o sistema de equações em cada posição da placa plana ( $x_1^*$ ), obteve-se os valores das velocidades e concentrações de atrito.

É importante notar que as equações mencionadas são acopladas pelos termos procurados e, portanto, deveriam ser resolvidas simultaneamente.

## 5.2. O Parâmetro Pequeno Alfa

Na resolução dessas equações, o parâmetro  $\alpha$  mostra sua relevância, pois ele deve ser pequeno o suficiente de modo que o termo de ordem superior permaneça como uma correção do termo de primeira ordem. Entretanto, esse parâmetro é formado por um conjunto de grandezas importantes para o problema, dentre elas os próprios valores da velocidade de atrito ( $u_\tau$ ) e da concentração de atrito ( $c_\tau$ ), além de outras constantes e variáveis, as quais devem ser analisadas cuidadosamente.

De acordo com o capítulo 4,  $\alpha = [(\hat{u} - \hat{v})/\rho\tau_p][(\nu c_\tau)/(u_\tau)^3]$ , onde  $\nu$  e  $\rho$  são propriedades do fluido, mas  $(\hat{u} - \hat{v})$  e  $\tau_p$  dependem do escoamento, do fluido e das partículas que o fluido carrega. A velocidade relativa entre o fluido e as partículas foi considerada constante para cada diâmetro de partícula conforme mencionado no capítulo 4. Obter experimentalmente valores para a diferença de velocidade entre o fluido e as partículas significa medir um perfil para cada fase do escoamento. Logo, como antes mencionado, esses resultados não são simples de se obter.

Uma modelagem para a velocidade relativa entre o fluido e as partículas pode ser encontrada em Mutlu Sumer et alli(1974), onde o autor propõe um modelo baseado em dados estatísticos para partículas pesadas, com diâmetro relativamente grande. No entanto, um exemplo de valores medidos experimentalmente pode ser encontrado em Rashidi et alli(1990), conforme mostra a figura 5.2.1 a seguir.

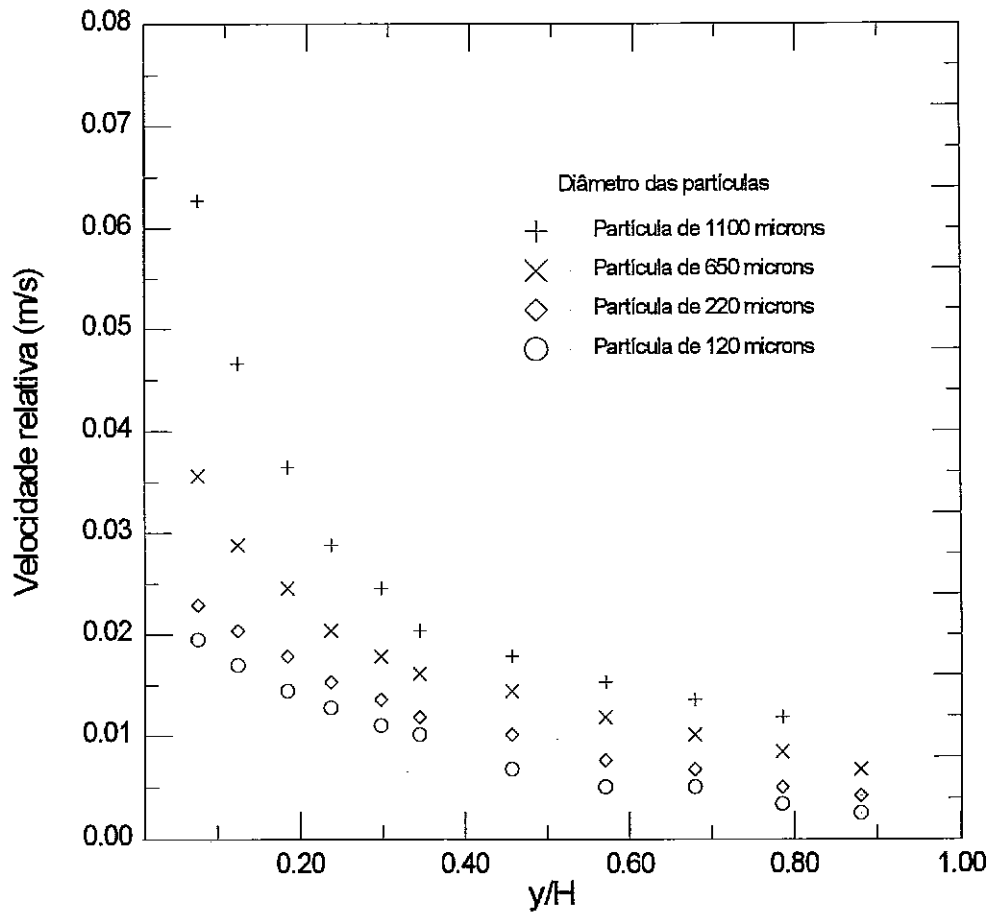


Figura 5.2.1. Resultados Experimentais da Velocidade Relativa entre Fluido e Partícula

Pelos dados observados na figura, nota-se que a hipótese de velocidade relativa constante deve ser cuidadosamente analisada, pois na região mais próxima da parede onde os gradientes de velocidades do fluido são maiores, os gradientes de velocidade relativa também o são. Esse fato torna-se mais nítido para diâmetros maiores, ocorrendo porém para todos os tamanhos de partículas. Todavia, a hipótese constitui-se em boa aproximação, pois as pequenas variações ocorridas não influenciam nos resultados finais.

No caso da constante de tempo,  $\tau_p$ , essa dependerá das características das partículas e do fluido que as carrega. Para os mesmos experimentos de Rashidi et alii(1990), os valores da constante de tempo variam de acordo com o diâmetro das partículas, de valores que vão de 0.001 a 0.1 segundos. Conforme antes mencionado, o fundamento da constante de tempo está baseado no tempo que a partícula leva para atingir uma determinada fração da velocidade do escoamento principal. No entanto, esta proporção, bem como a modelagem utilizada, pode variar com diferentes autores.

Rogers and Eaton(1991) propoem uma formulação para a constante de tempo, onde  $\tau_p = \rho_p d_p^2 / 18\mu_f$ . De acordo com esses autores, devido ao fato dessa constante ser um parâmetro relacionado com a inércia das partículas, ela não poderá ser usada indiscriminadamente para qualquer partícula, sendo necessário um estudo sobre o tipo de escoamento bem como da força de arrasto que existe em torno das partículas em questão.

Seguindo pela modelagem da constante de tempo sugerida por Rogers and Eaton(1991), pode-se observar que o aumento do diâmetro, bem como o aumento da massa específica das partículas, devem ocasionar um aumento da constante de tempo e conseqüentemente uma diminuição do parâmetro  $\alpha$ . É importante notar que essa modelagem não é única, mas busca traçar o comportamento predominante do parâmetro  $\alpha$  com relação à constante de tempo, visto que os termos de  $\alpha$  não devem variar independentemente uns dos outros.

Outra hipótese de variação dos valores de  $\alpha$  está relacionada com a mudança de fluido, ou seja, das propriedades inerentes ao fluido condutor de partículas.

Uma vez analisada cada componente do parâmetro pequeno  $\alpha$ , pode-se citar os valores

utilizados nesse trabalho. Na realidade os valores aqui expostos representam apenas a parte dimensional do parâmetro  $\alpha$ . Isto é, para que as iterações das simulações numéricas pudessem ser realizadas, determinou-se que  $\alpha' = [(\hat{u} - \hat{v})/\rho\tau_p]$ . Com essa formulação, permitiu-se que os valores de  $u_\tau$  e  $c_\tau$  fossem atualizados a cada nova iteração com a viscosidade cinemática,  $(\nu)$ , comportando-se apenas como uma constante multiplicadora. Convém observar que o valor zero foi utilizado apenas como referência, pois ele representa a ausência de partículas, tornando a equação para a concentração sem sentido físico e, conseqüentemente, temos o caso de um escoamento de camada limite turbulenta sobre uma placa plana simples.

Utilizou-se aqui  $\alpha' = \{0.0, 0.05, 0.1, 0.5, 1.0, 5.0, 10.0\}$ . Os valores de  $\alpha'$  considerados não são necessariamente físicos e passíveis de corroboração experimental. Como esse parâmetro tem um comportamento não linear e dependente de muitos fatores inerentes, não só às partículas, mas também ao escoamento e ao fluido, procurou-se entender o comportamento geral e a influência que cada valor de  $\alpha$  acarretaria nas soluções finais dos perfis de velocidade e de concentração para a nova lei aqui proposta. É importante notar que a variação dos valores dos termos que compõem  $\alpha$ , independentemente uns dos outros, é uma tarefa sem consistência física, visto que na maioria das vezes os termos têm ligação entre si.

Uma vez determinados os valores de  $\alpha'$ , passou-se à realização das simulações numéricas, onde os parâmetros relacionados com as condições do escoamento e das partículas foram variados e analisados, bem como as constantes desconhecidas das equações (4.4.3) e (4.4.4). Esses resultados serão apresentados posteriormente, assim como o estudo realizado sobre os valores aos quais cada constante deve assumir.

### 5.3. As Leis de Parede

No caso fluidodinâmico, baseado nos domínios definidos para as equações propostas, em experimentos escassos, e em conhecimento prévio do comportamento do perfil de velocidade

na forma de lei de parede, sabe-se que devido ao fato de se propor um perfil logarítmico modificado, esse deve ser ascendente e ter sua faixa de validade estabelecida na mesma faixa do escoamento de camada limite turbulenta tradicional, como mostra a equação (4.2.5).

Já para a concentração, algumas dúvidas permanecem, como por exemplo, a inclinação que o perfil deve assumir. Baseado em experimentos de Rashidi et ali(1990), figura 5.3.1, bem como nos resultados encontrados nos estudos de Mutlu Sumer et ali(1974), assume-se que o perfil de concentração deve ser descendente e sua validade estará relacionada com os domínios antes descritos na equação (4.2.6).

Nesta figura, o eixo das abcissas é representado por  $y/H$ , onde  $y$  é a posição longitudinal na qual foi feita a medida e  $H$  denomina a altura do canal onde o experimento foi realizado. Portanto, nota-se que, apesar dos resultados apresentarem uma curva decrescente, não foram feitas medidas na região logarítmica da camada limite, o que faz com que permaneça o desconhecimento sobre o comportamento da concentração nessa região. No entanto, de acordo com os resultados de Mutlu Sumer et ali(1974), considerando um carregamento de partículas pesadas, inicialmente constante, o perfil de concentração tenderá a assumir uma função decrescente. Inicialmente, esta função é, dentre outros parâmetros, dependente do tempo. Porém, depois de atingir um estado de regime permanente, os autores afirmam que o perfil de concentração passa a ser independente do tempo e apresenta uma função definida decrescente.

## 5.4. As Constantes do Problema

As constantes de integração das equações propostas, devido ao comportamento mostrado nas simulações numéricas, merecem um estudo profundo, relacionando-as com as propriedades físicas das partículas e grandezas características do escoamento. No presente trabalho considerou-se apenas as ordens de grandeza para os valores que cada constante deveria assumir.

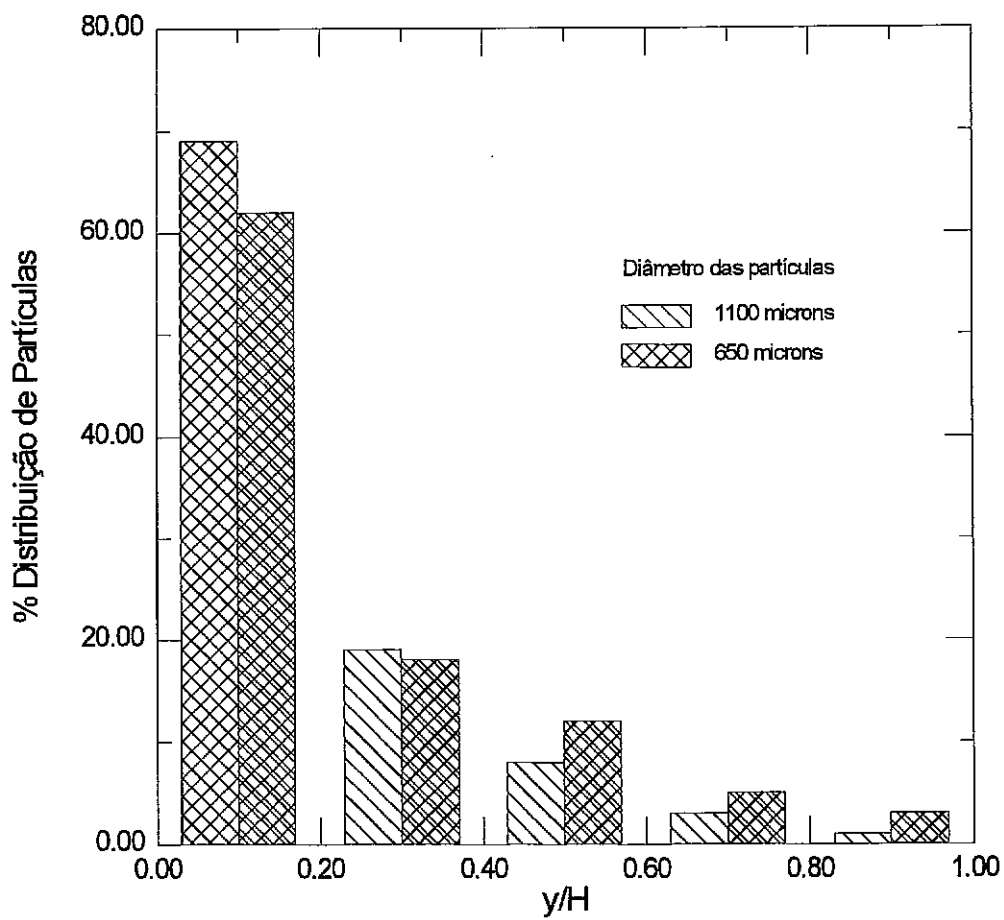


Figura 5.3.1. Resultados Experimentais de Concentração



Sendo assim, os valores utilizados para as constantes foram a princípio determinados por analogia às constantes já existentes para o caso de escoamentos turbulentos sem partículas.

Para o perfil de velocidade, os valores das constantes do termo de primeira ordem ( $\hat{u}_a$ ) foram mantidos os mesmos da lei de parede tradicional; ou seja, a constante de von Karman foi mantida com o valor 0,41, enquanto a constante de integração assumiu o valor 5,0, como não poderia deixar de acontecer, visto que a solução proposta deve se reduzir à lei de parede clássica caso não existam partículas no escoamento.

No termo de ordem superior ( $\hat{u}_b$ ), um estudo mais detalhado das constantes foi realizado, observando-se os efeitos ocasionados pelas mudanças de seus valores. É conveniente notar que nesse termo, devido ao próprio método assintótico, aparecem a constante de integração para a segunda ordem além das constantes de integração de primeira ordem da equação de concentração e do valor da constante equivalente à constante de von Karman para a concentração. Isto enfatiza o acoplamento dos modelos propostos. Em uma primeira análise foi determinada que, por analogia, a constante de integração do termo de segunda ordem fluidodinâmico teria o mesmo valor da constante encontrada no termo de primeira ordem sendo, em seguida, estudados outros valores.

Com relação às equações (4.4.11) e (4.4.12), onde são apresentados os termos de segunda ordem das equações (4.4.3) e (4.4.4), propostas como as novas leis de parede para a velocidade e para a concentração, será apresentado um estudo de ordem de grandeza desses termos. Desconsiderando as constantes  $D$  e  $E$ , pois estas não podem fazer parte da análise, tem-se que o termo  $1/2 \log(u_{\tau}y/\nu)$  é comum às duas equações e que ambas dependem da constante de integração,  $B$ , e do termo de primeira ordem da equação da concentração,  $\hat{c}_a$ .

Portanto, variando os valores de  $B$ , pode-se ter uma estimativa da ordem de grandeza do termo de segunda ordem, sem sua própria constante de integração. Esse resultado é importante para que o valor das constantes de integração de segunda ordem não sejam escolhidos aleatoriamente, distoando dos valores aos quais estas serão somadas.

Para se ter uma idéia correta de como se comportam os termos  $\hat{u}_b$  e  $\hat{c}_b$ , esses serão

divididos em dois outros termos, o comum e logarítmico e a parte proporcional à constante de integração de primeira ordem  $B$ , como mostra a tabela 5.4.1 a seguir. Vale ressaltar que para adimensionalizar a posição longitudinal ( $y^+$ ) usou-se a espessura da camada limite ( $\delta$ ) dividida pela viscosidade cinemática ( $\nu$ ).

Tabela 5.4.1. Estudo da ordem de grandeza dos termos de segunda ordem

Const. $B$	$\hat{u}_b$			$\hat{c}_b$		
	$0.5 \log(y^+)$	$(Bk_c)/2 - 1$	$\hat{u}_b$	$-0.5 \log(y^+)$	$-(Bk_c)/2 + 1$	$\hat{c}_b$
<b>-15</b>	4.02	-4.08	<b>-0.06</b>	-4.02	4.08	<b>0.06</b>
<b>-10</b>	4.02	-3.05	<b>0.97</b>	-4.02	3.05	<b>-0.97</b>
<b>-5</b>	4.02	-2.03	<b>1.99</b>	-4.02	2.03	<b>-1.99</b>
<b>0</b>	4.02	-1.00	<b>3.02</b>	-4.02	1.00	<b>-3.02</b>
<b>5</b>	4.02	0.03	<b>4.05</b>	-4.02	-0.03	<b>-4.05</b>
<b>10</b>	4.02	1.05	<b>5.07</b>	-4.02	-1.05	<b>-5.07</b>
<b>15</b>	4.02	2.08	<b>6.10</b>	-4.02	-2.08	<b>-6.10</b>

Com o auxílio dessa tabela é possível observar que, é claro, o valor do termo logarítmico em ambos os casos não se altera. No entanto, o valor do termo proporcional à constante  $B$  muda de forma considerável, originando valores de  $\hat{u}_b$  e  $\hat{c}_b$  bastante distintos, de sinais opostos, para cada caso. Portanto, fica a constante  $B$  responsável pela ordem de grandeza dos termos de segunda ordem.

As constantes de integração  $D$  e  $E$  são somadas respectivamente aos termos  $\hat{u}_b$  e  $\hat{c}_b$ . Sendo assim, visto que as parcelas do termo devem apresentar a mesma ordem de grandeza, torna-se possível a variação dos valores dessas constantes de acordo com o valor assumido pela constante de integração de primeira ordem  $B$ . Por consideração de ordem de grandeza, observemos que o termo ao qual  $B$  deve ser somado possui  $ord(10)$ , bem como ocorre com o caso fluidodinâmico e a constante  $A$ . Por esses motivos, alguns casos foram testados e seus resultados serão posteriormente apresentados.

No caso da concentração, nenhuma relação pode ser estipulada a priori, devido à origi-

nalidade do modelo proposto. No entanto, devido ao fato dessa grandeza ser um escalar, novamente uma analogia com as equações utilizadas para o caso térmico torna-se natural. Portanto, para o valor de  $\kappa_c$ , considerou-se que este deveria ser igual a própria constante de von Karman ( $\kappa$ ), podendo apresentar correções futuras baseadas em dados experimentais. Baseado nos mesmos argumentos, assumiu-se que as constantes de integração do termo de primeira e segunda ordem deveriam ter, a princípio, os mesmos valores do caso fluido-dinâmico, sendo posteriormente modificadas para que uma análise da mudança de comportamento no perfil final pudesse ser feita.

## 5.5. As Condições Iniciais do Problema

Outros fatores estudados, determinantes nos resultados finais, são as condições iniciais para a velocidade e a concentração. Os valores foram alterados procurando simular o maior número de combinações possíveis. Novamente, o uso dos recursos numéricos possibilitou a simulação de resultados difíceis de se obter na prática como, por exemplo, uma grande concentração inicial de partículas. Esse resultado não é impossível fisicamente; no entanto, a realização de experimentos com altas concentrações de partículas não é uma tarefa fácil de se realizar; a análise de seus resultados certamente deixaria muitas dúvidas com relação às incertezas dos processos de medições.

## 5.6. Resultados Numéricos

Foram obtidos numericamente quatro resultados: o perfil de velocidade, o perfil de concentração e as curvas do coeficiente de atrito e coeficiente de concentração. A figura

5.6.1 mostra que, de acordo com os resultados obtidos por Rashidi et ali(1990), a lei de parede clássica não deve se alterar com a presença de partículas. Essas apenas influenciariam na região próxima à esteira e em outras grandezas como, por exemplo, a tensão na parede (figura 5.6.2). Novamente, nesses resultados experimentais,  $y$  representa a posição transversal onde foram realizadas as medidas e  $H$  a altura do canal onde foram feitos os experimentos. Ao contrário de Rashidi et ali(1990), Mutlu Sumer et ali(1974) afirma que, de acordo com seus estudos, o perfil de velocidade na região logarítmica deve se alterar de acordo com a velocidade de queda das partículas.

Outros autores (Gore and Crowe(1989)) afirmam que o comportamento do coeficiente de atrito sempre deve se alterar e atribuem esse fenômeno à mudança do período do processo de “bursting”. De acordo com estes, o fenômeno de “bursting”, ocorrido na camada limite de um escoamento turbulento e descrito por Murlis(1982), será alterado com a introdução de partículas sólidas no escoamento. Essas alterações dependerão das características gerais das partículas. De acordo com essas, o intervalo de tempo entre dois “burstings” pode aumentar ou diminuir, ocasionando com isso uma mudança no comportamento do coeficiente de atrito.

O presente trabalho mostra que os resultados de Rashidi et ali(1990) foram obtidos devido ao tamanho das partículas e às concentrações usadas, e que, portanto, esse comportamento não pode ser entendido como um comportamento universal e invariável.

### **5.6.1. Constantes de Integração Iguais a 5,0**

Considerando as constantes de integração todas iguais a 5,0, ou seja, com o mesmo valor clássico para o caso fluidodinâmico, pode-se observar que o coeficiente de atrito,  $C_f$ , e o coeficiente de concentração,  $C_c$ , diminuem em valores absolutos para escoamentos carregados com partículas. As figuras 5.6.1.3 e 5.6.1.4 mostram este comportamento que se intensifica e fica mais claro para os maiores valores do parâmetro  $\alpha$ .

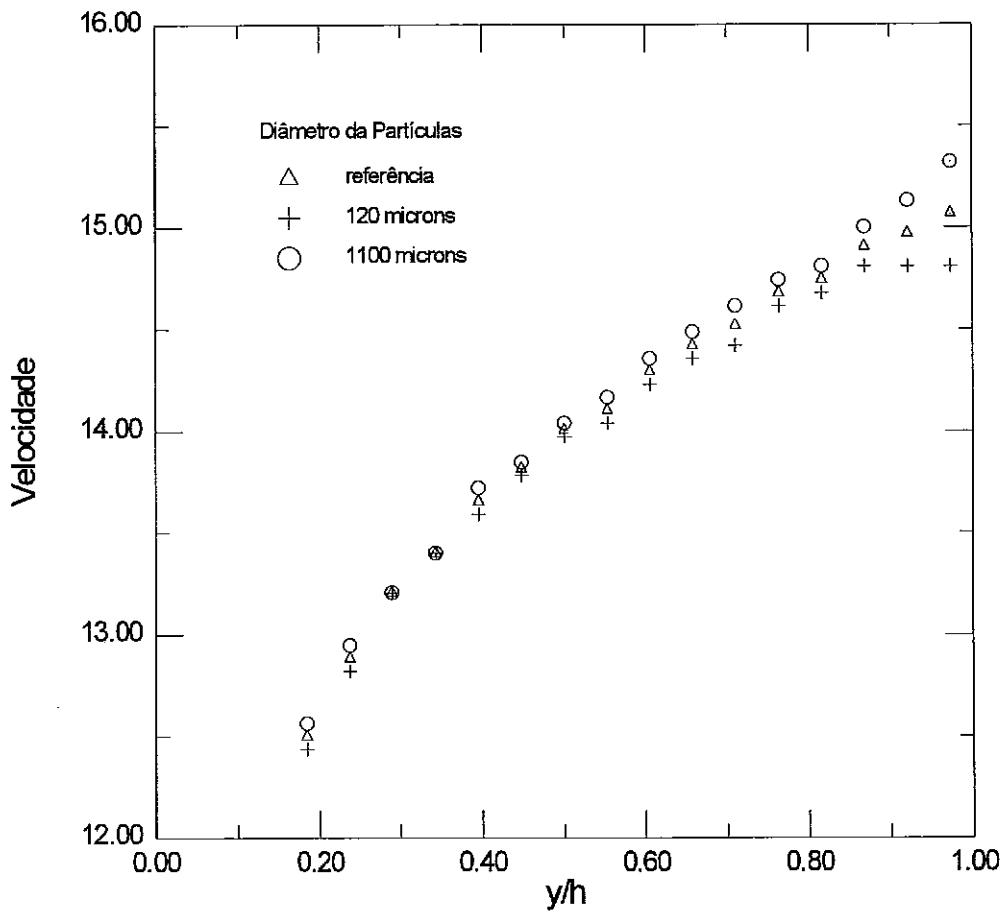


Figura 5.6.1.1. Resultados Experimentais do Perfil de Velocidade de um Escoamento Saturado com Partículas

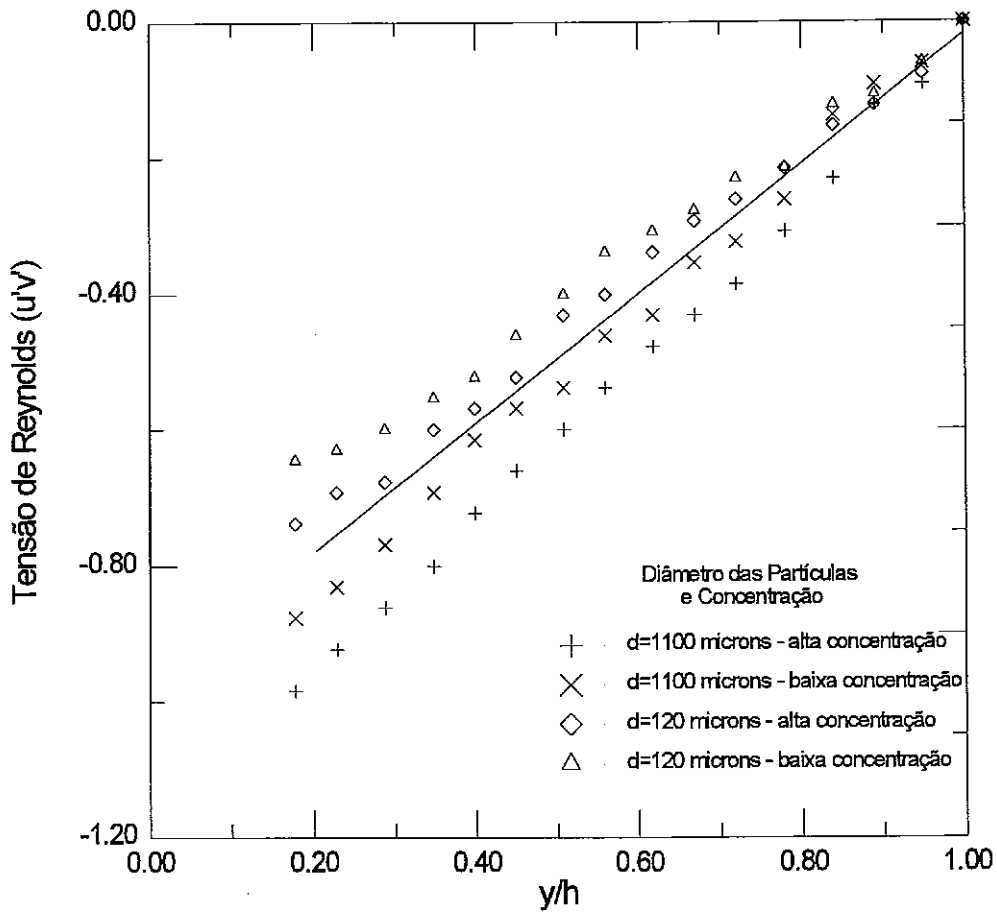


Figura 5.6.1.2. Resultados Experimentais para a Tensão de Reynolds em Escoamentos Saturados com Partículas

Novamente, convém ressaltar que os valores de  $\alpha$  não são necessariamente representativos de condições reais, buscando apenas demonstrar um comportamento característico.

A condição inicial para a concentração no escoamento principal, denotada aqui como  $C_\infty$ , também altera os resultados finais encontrados para os valores dos coeficientes de atrito, sendo o caso fluidodinâmico muito mais aparente que o caso da concentração, como pode-se observar nas figuras 5.6.1.5 e 5.6.1.6, a seguir.

Convém notar que a diferença entre uma curva e outra não apresenta valores acentuados ou mudanças bruscas de direção; este resultado é esperado devido a não existência de alterações bruscas no problema físico. A ordem de grandeza dessas mudanças é mostrada na tabela 5.6.1.1.

Tabela 5.6.1.1. Comparação entre coeficientes de atrito  $C_f$  para diferentes valores de  $\alpha$ , onde escoamento 1:  $U_\infty = 36,4$  m/s,  $C_\infty = 1,0$  kg/m<sup>3</sup> e escoamento 2:  $U_\infty = 36,4$  m/s,  $C_\infty = 10,0$  kg/m<sup>3</sup>.

$Re_\delta$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 5.0$	$\alpha = 5.0$
	$C_f \times 10^3$	$C_f \times 10^3$	$C_f \times 10^3$	$C_f \times 10^3$
	Escoamento 1	Escoamento 2	Escoamento 1	Escoamento 2
46165	2.973	2.971	2.958	2.824
63853	2.813	2.812	2.794	2.606
80378	2.707	2.706	2.683	2.444
96090	2.630	2.627	2.601	2.3106
111175	2.568	2.565	2.535	2.193
125770	2.518	2.515	2.480	2.085
139950	2.476	2.472	2.434	1.984

No capítulo 4 mostrou-se que a ordem de grandeza dos resultados de  $u_\tau$  e  $c_\tau$  determinariam as extremidades superiores dos domínios de validade das equações de camada limite aqui propostas. De acordo com as equações (4.2.5) e (4.2.6), os domínios apenas irão apresentar o mesmo limite superior se  $ord(u_\tau) = ord(c_\tau)$ .

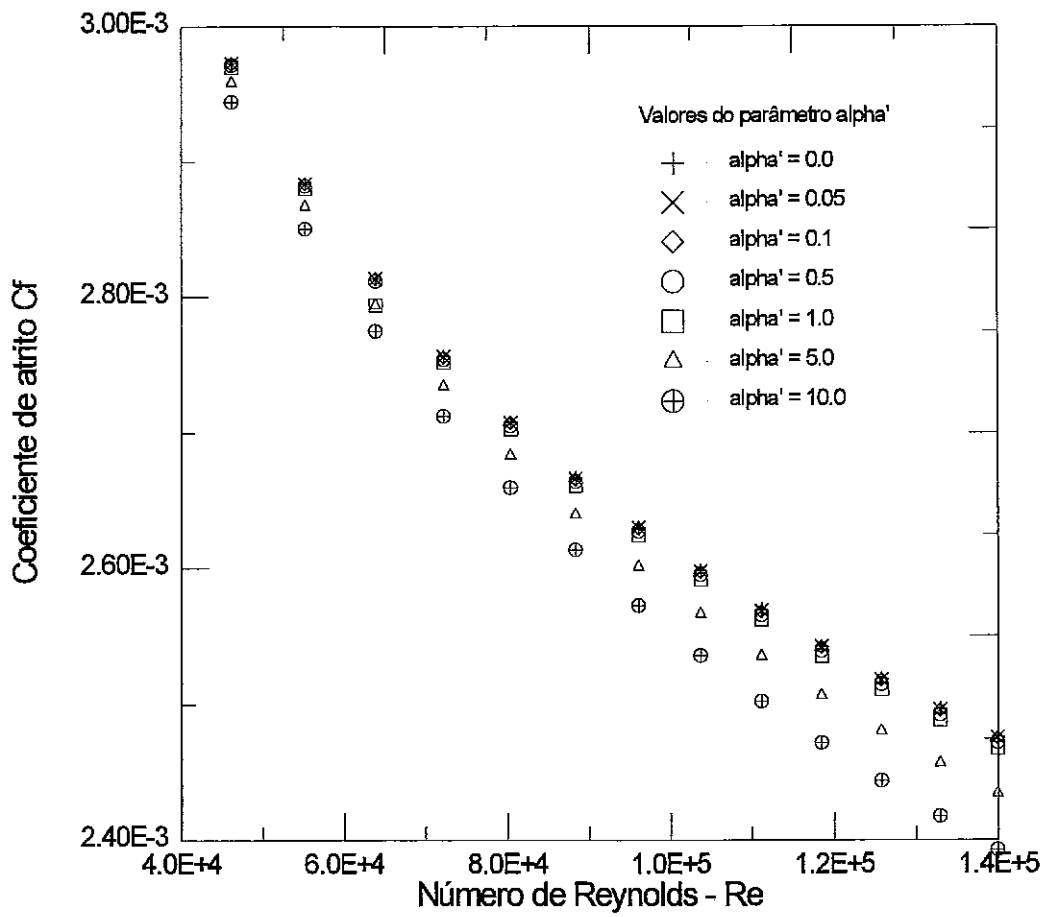


Figura 5.6.1.3. Resultados Numéricos para o Coeficiente de Atrito de Velocidade em Escoamentos com Partículas



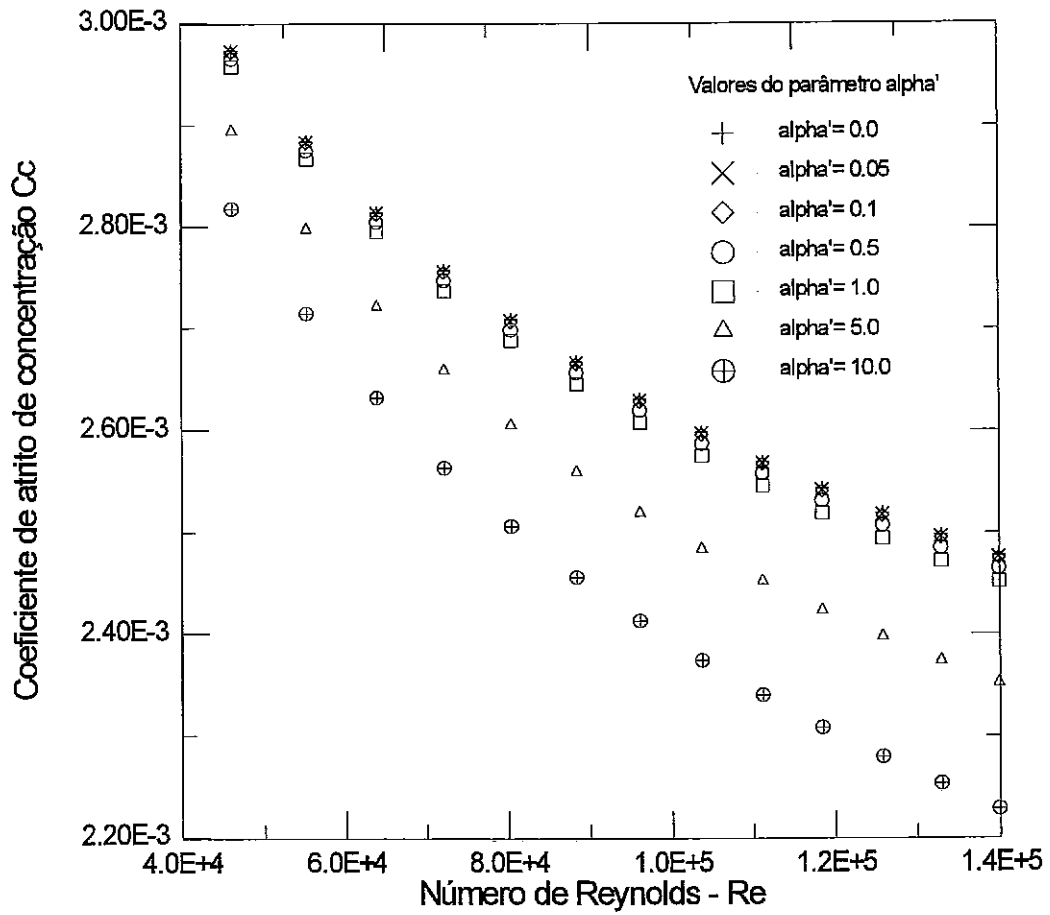


Figura 5.6.1.4. Resultados Numéricos para o Coeficiente de Concentração em Escoamentos com Partículas

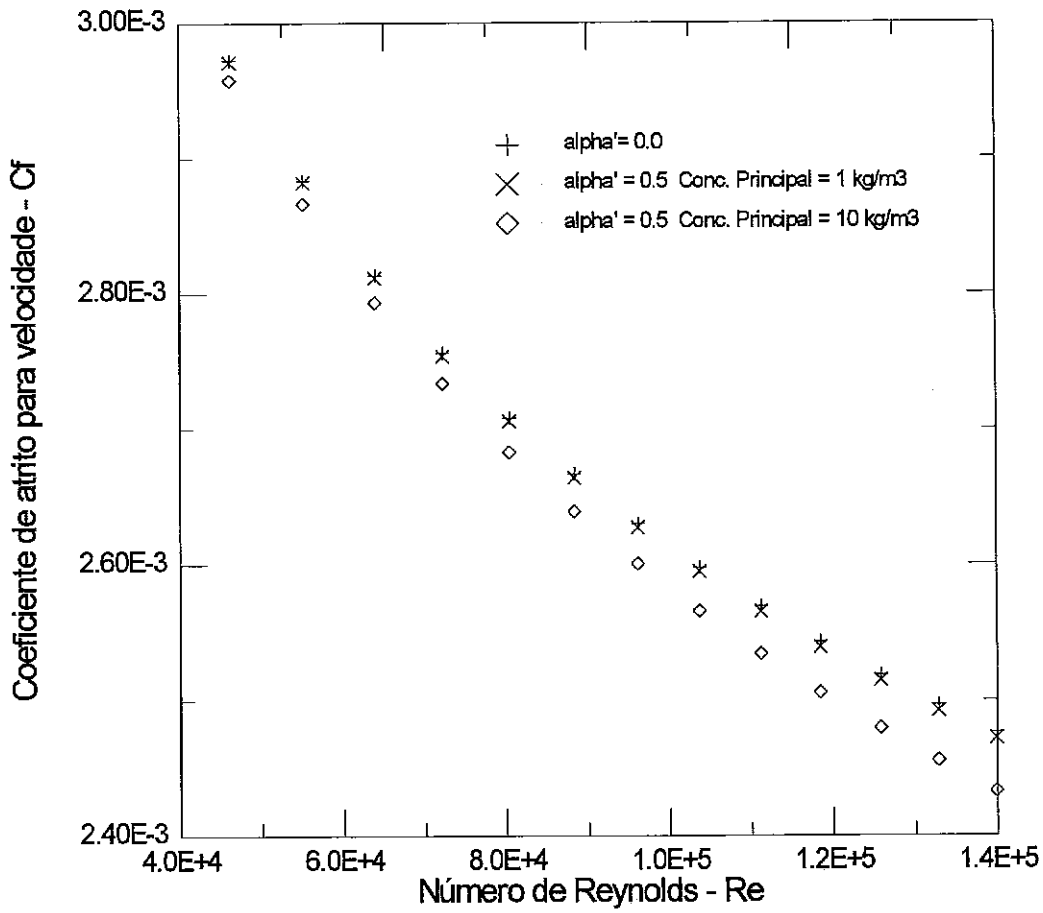


Figura 5.6.1.5. Resultados Numéricos para o Coeficiente de Atrito em Escoamentos com Diferentes Condições Iniciais para a Concentração

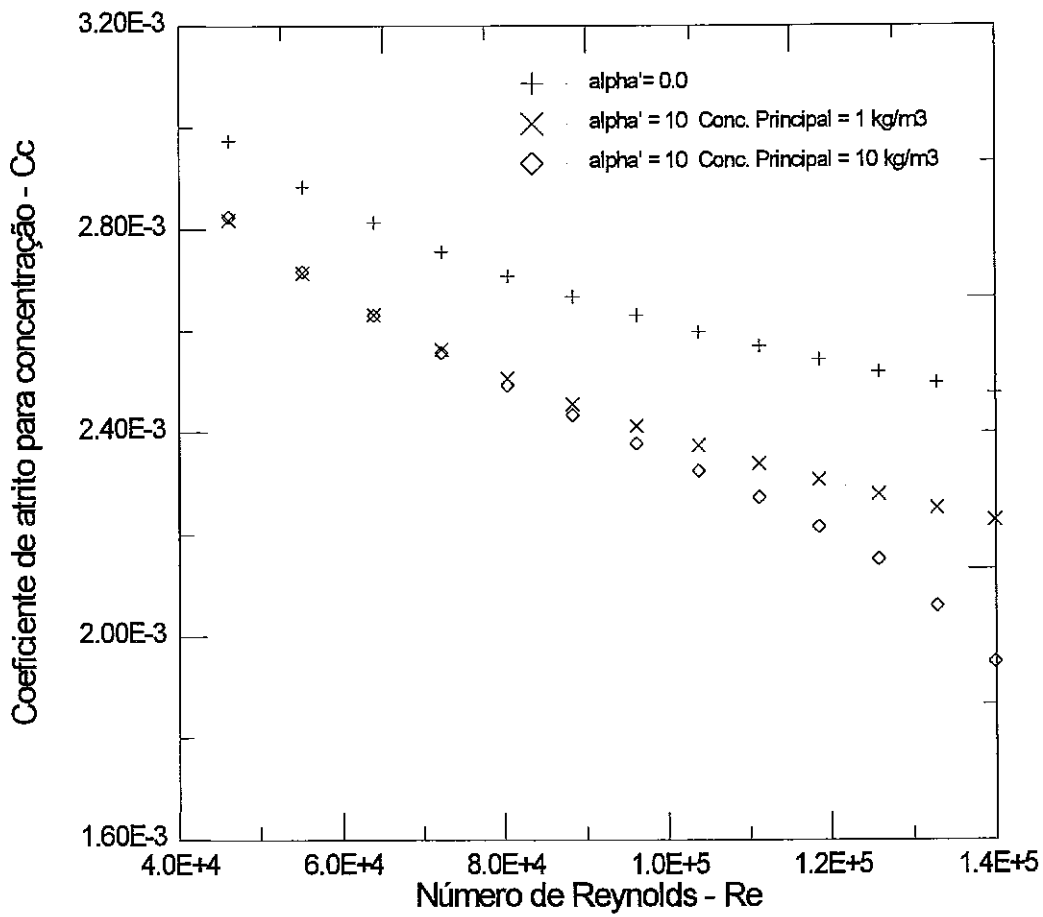


Figura 5.6.1.6. Resultados Numéricos para o Coeficiente de Concentração em Escoamentos com Diferentes Condições Iniciais para Concentração

No caso do limite inferior, nenhum estudo aprofundado foi feito no presente trabalho; porém, Gomes(1995) afirma que um bom valor para  $\lambda$ , no caso da camada limite, é dado pelo valor da viscosidade turbulenta dividido por 0.9.

Uma vez resolvidas as equações (4.4.3) e (4.4.4), e determinados os valores de  $u_\tau$  e de  $c_\tau$ , os resultados mostram que a ordem de grandeza desses termos está diretamente ligada ao valor das grandezas da velocidade e da concentração no escoamento principal. Ou seja, se uma condição inicial de  $ord(U_\infty) \gg ord(C_\infty)$  for imposta ao escoamento, as ordens de grandeza dos coeficientes de atrito e de concentração seguirão a mesma diferença, isto é  $ord(u_\tau) \gg ord(c_\tau)$ , o que acarretará uma defasagem de domínio de validade das equações aproximadas. Nesse caso, a lei de parede para a concentração estará imposta a uma dimensão física muito inferior à lei de parede da velocidade, que tem sua região de validade previamente conhecida. A tabela 5.6.1.2 mostra os valores encontrados numericamente para um escoamento dentro das condições acima descritas.

Tabela 5.6.1.2. Comparação entre  $ord(u_\tau)$  e  $ord(c_\tau)$  para diferentes valores de  $\alpha$ , onde  $U_\infty = 36,4 \text{ m/s}$  e  $C_\infty = 1,0 \text{ kg/m}^3$

$Re_\delta$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 1.0$
	$u_\tau$	$c_\tau$	$u_\tau$	$c_\tau$
46165	1.403	0.03854	1.402	0.03845
63853	1.365	0.03750	1.364	0.03738
80378	1.339	0.03679	1.338	0.03665
96090	1.319	0.03625	1.318	0.03611
111175	1.304	0.03583	1.302	0.03567
125770	1.291	0.03547	1.290	0.03531
139950	1.280	0.03517	1.279	0.03501

Exemplos onde os limites dos domínios se encontram na mesma região são encontrados na condição de mesma ordem de grandeza para  $U_\infty$  e  $C_\infty$ . Porém, a alteração das condições iniciais para  $U_\infty$  e  $C_\infty$ , é claro, implicam não só na mudança de ordem de grandeza da

velocidade de atrito e da concentração de atrito, mas também na mudança da discrepância entre as curvas do coeficiente de atrito e do coeficiente de concentração. Estas alterações de valor acompanham as modificações feitas nas condições iniciais. Conforme antes mencionado, não é fisicamente possível estudar o efeito da mudança de um parâmetro separadamente dos outros. Por esse motivo, procurou-se estudar razões entre as grandezas velocidade e concentração no escoamento principal; logo, a tabela 5.6.1.2 acima mostrada, foi construída utilizando-se uma relação onde  $ord(U_\infty) \gg ord(C_\infty)$ .

Para valores de  $U_\infty$  e  $C_\infty$ , com mesma ordem de grandeza, encontra-se resultados de  $u_\tau$  e  $c_\tau$  também com mesma ordem, como mostra a tabela 5.6.1.3. Os coeficientes de atrito calculados seguem praticamente a mesma razão em que as grandezas do escoamento principal são modificadas.

Tabela 5.6.1.3. Comparação entre  $ord(u_\tau)$  e  $ord(c_\tau)$  para diferentes valores de  $\alpha$ , onde  $U_\infty = 36,4 \text{ m/s}$  e  $C_\infty = 10,0 \text{ kg/m}^3$

$Re_\delta$	$\alpha = 0.05$		$\alpha = 1.0$	
	$u_\tau$	$c_\tau$	$u_\tau$	$c_\tau$
46165	1.403	0.3855	1.396	0.3847
63853	1.365	0.3750	1.356	0.3740
80378	1.339	0.3679	1.327	0.3668
96090	1.319	0.3626	1.305	0.3614
111175	1.304	0.3583	1.287	0.3571
125770	1.291	0.3548	1.271	0.3535
139950	1.280	0.3518	1.258	0.3505

Os valores de  $U_\infty$  e  $C_\infty$  não podem, no entanto, ser alterados aleatoriamente, devendo esses valores buscar simular condições reais. Caso contrário, divergências numéricas podem ser encontradas, como acontece quando absurdamente tenta-se resolver uma situação onde  $ord(C_\infty) \gg ord(U_\infty)$ .

De acordo com Mutlu Sumer and Oguz(1974,1978), os domínios de validade das equações

de velocidade e de concentração não devem ocupar a mesma região e o principal fator de influência sobre o quanto eles devem se sobrepor deveria ser o peso das partículas. Portanto, os resultados apresentados anteriormente mostram-se satisfatórios, principalmente, se observado que os experimentos feitos usam baixas concentrações de partículas.

Outros resultados obtidos estão relacionados com a lei da parede, para velocidade e concentração. As curvas logarítmicas propostas nas equações (4.4.3) e (4.4.4) foram traçadas e a influência das partículas através do termo  $\alpha$  analisadas. Novamente, os resultados foram comparados com casos sem partículas ( $\alpha = 0$ ). No caso da concentração,  $\alpha = 0$  não possui significado físico, porém a equação permanece matematicamente correta e serve como um parâmetro para comparação dos novos resultados.

Pode-se observar pelos resultados numéricos que, para os menores valores de  $\alpha$ , as curvas permaneceram inalteradas, isto é, o perfil de velocidade não se modifica em comparação com o perfil clássico e o perfil de concentração proposto assume a mesma forma da equação de comparação, onde  $\alpha = 0, 0$ . Já nos casos onde são atribuídos a  $\alpha$  valores maiores, pode-se constatar uma mudança de perfil, tanto de velocidade como de concentração. Essa mudança está relacionada com a mudança dos valores de  $u_\tau$  e  $c_\tau$  e conseqüentemente com a inclinação e posição da curva, como mostram as figuras 5.6.1.7, 5.6.1.8 e 5.6.1.9.

As alterações encontradas no comportamento das leis de parede, a exemplo dos coeficientes de atrito, também são afetadas pelas condições iniciais do problema, ou seja, a razão entre  $U_\infty$  e  $C_\infty$ . Quando esta razão é elevada, as mudanças de características nas curvas podem ser consideradas desprezíveis, tanto para o caso fluidodinâmico, como para o caso da concentração.

Um resultado da alteração mais acentuada de um perfil de velocidade pode ser observado em um escoamento onde  $ord(U_\infty) > ord(C_\infty)$ . Nesse caso, a velocidade do escoamento principal é, em modulo, mais baixa do que o caso apresentado nas figuras anteriores. Porém, o escoamento continua sendo turbulento e, por isso, devendo obedecer a lei de parede clássica para o caso de um escoamento sem partículas.

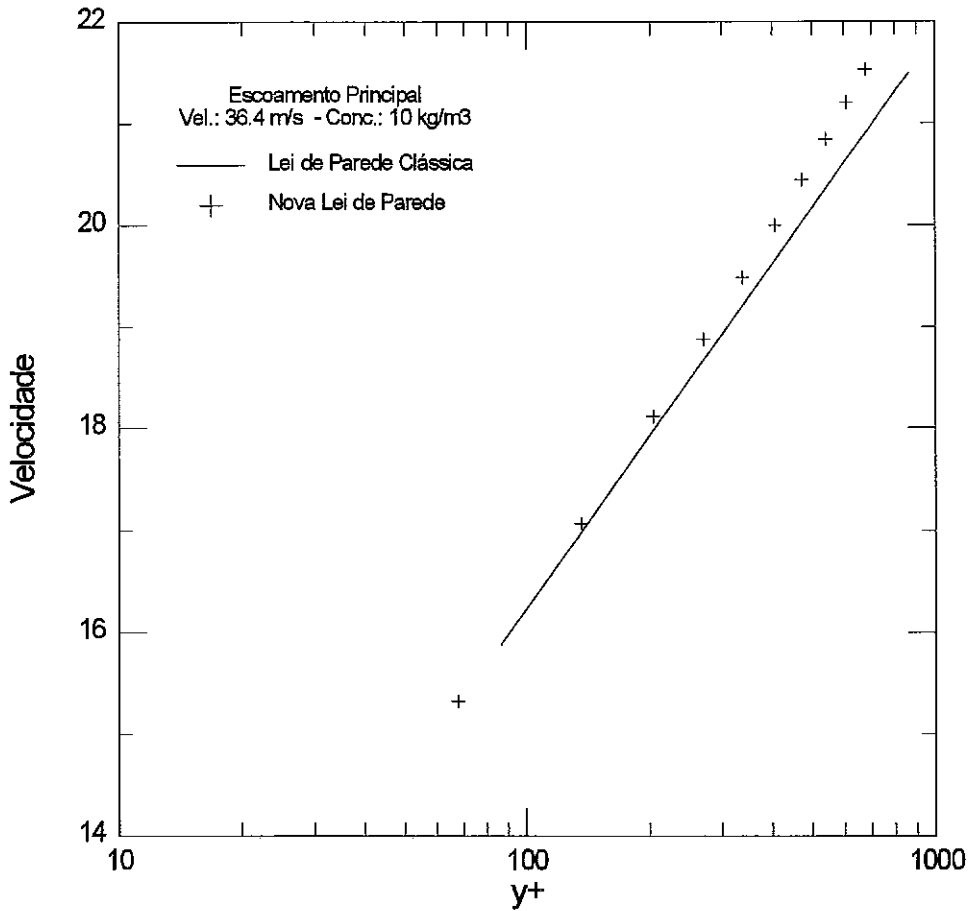


Figura 5.6.1.7. Resultados Numéricos para a Nova Lei de Parede em Escoamento com Partículas

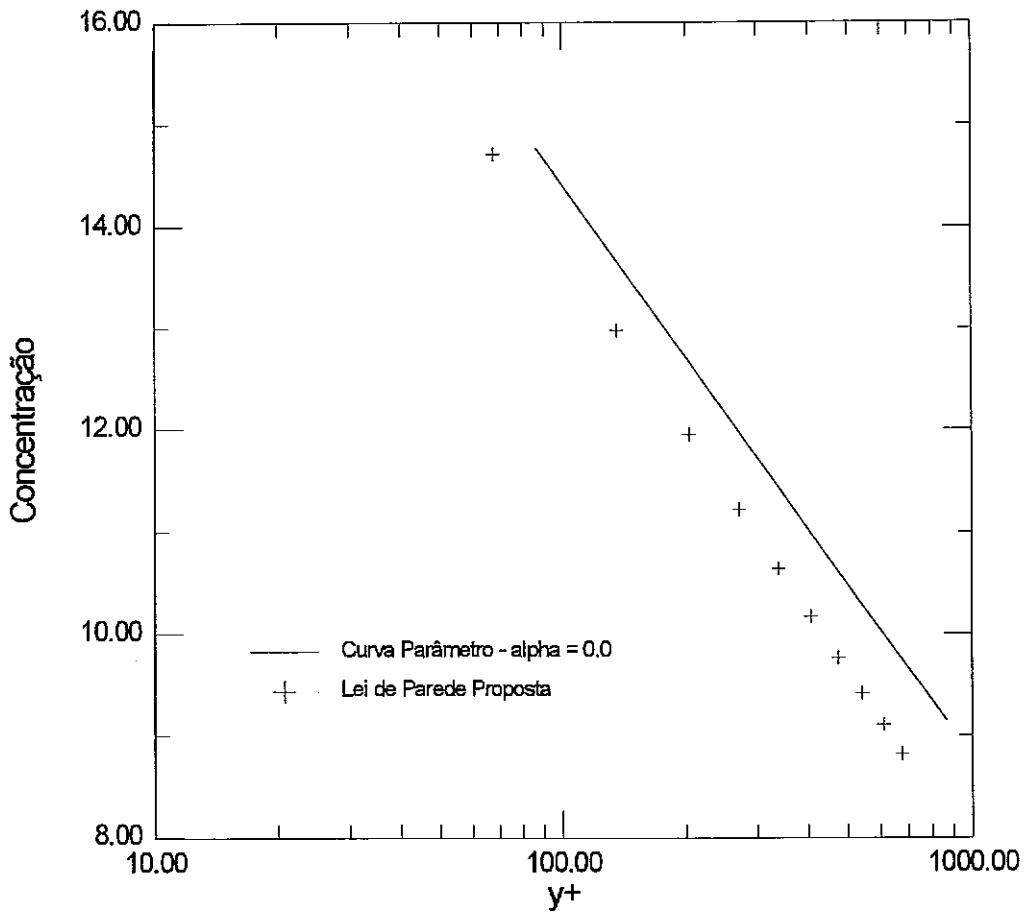


Figura 5.6.1.8. Resultados Numéricos para a Nova Lei de Parede de Concentração para Escoamentos com Partículas



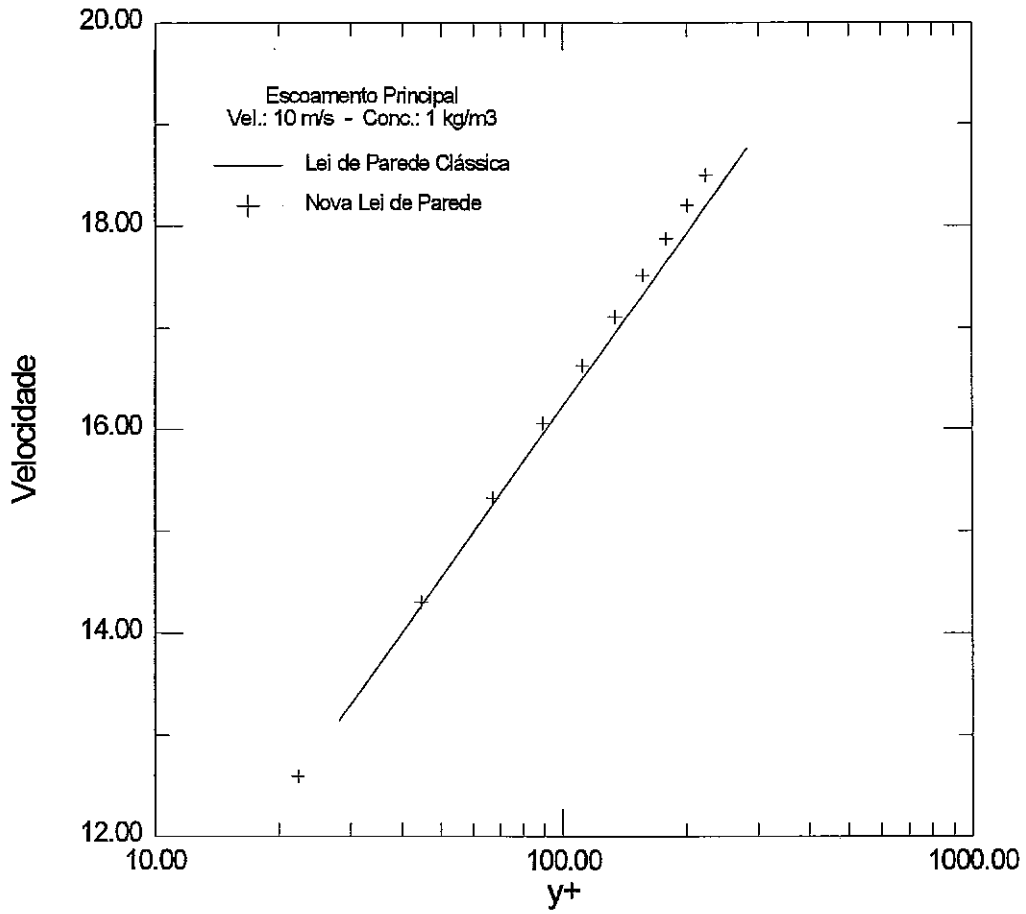


Figura 5.6.1.9. Resultados Numéricos para a Nova Lei de Parede em Escoamento com Partículas

É claro que para escoamentos como esses, onde a proporção entre a velocidade e a concentração no escoamento externo são menores, não só os resultados de velocidades são mais distoantes. As curvas de concentração, coeficiente de atrito e coeficiente de concentração também o são. As duas últimas grandezas são responsáveis por alterações ocorridas com as primeiras, visto que a velocidade e a concentração são usadas como parâmetro de adimensionalização nas curvas logarítmicas de velocidade e de concentração.

Uma vez analisada as possibilidades de alterações dos resultados clássicos para o caso onde as constantes de integração das equações propostas são todas iguais a 5,0, por simples analogia ao caso fluidodinâmico de escoamento turbulento, torna-se necessário um aprofundamento no estudo dos valores das constantes de integração.

### 5.6.2. Constantes de Integração com Valores Negativos

Quando as constantes de integração  $D$  e  $E$ , dos termos de segunda ordem  $\hat{u}_b$  e  $\hat{c}_b$ , são ambas negativas, os valores do coeficiente de atrito,  $C_f$ , e do coeficiente de concentração,  $C_c$ , tendem a aumentar em comparação com os coeficientes do escoamento sem partícula. Esse comportamento será intensificado com o aumento do parâmetro  $\alpha$ . A diferença de velocidade e de concentração nas condições iniciais no escoamento principal também afeta os resultados finais, sendo que quanto maior for o valor da concentração no escoamento principal e quanto menor for o valor da velocidade neste, mais pronunciado serão os resultados obtidos.

Em alguns casos, as curvas de coeficiente de atrito e de coeficiente de concentração apresentam uma inversão de curvatura, ou seja, passam de decrescente para crescente. Isto acontece apenas para determinados valores do parâmetro  $\alpha$ .

Para as leis de parede com termos de segunda ordem, propostas no presente trabalho, é observado que alterações quanto ao comportamento da lei de parede tradicional ocorrem, principalmente, com as menores razões de velocidade e concentração no escoamento principal.

No entanto, quando comparados os resultados com os obtidos para o caso anterior, onde as constantes de integração foram todas consideradas iguais a 5, 0, pode-se notar que para situações semelhantes a discrepância ocorrida neste caso são maiores.

De acordo com os estudos numéricos, o aumento da discrepância entre os valores do coeficiente de atrito de escoamentos com partículas, comparados com os escoamentos sem partículas, aumentará, não só com o aumento da concentração inicial, assim como com o aumento do módulo das constantes propriamente ditas. Esses resultados mostram que provavelmente as constantes de integração estão relacionadas com as propriedades das partículas.

### 5.6.3. Constantes de Integração com Sinais Opostos

Outros dois casos possíveis de se encontrar são quando os sinais das constantes de integração forem opostos. Quando a constante da equação para velocidade ( $D$ ) for positiva e a constante da equação da concentração ( $E$ ) for negativa, haverá um aumento dos valores absolutos do coeficiente de concentração ( $C_c$ ) e uma diminuição para o caso da velocidade ( $C_f$ ), conforme o aumento que o parâmetro  $\alpha$  sofrer.

Devido a problemas de convergência numérica, esse caso só pode ser resolvido para valores de concentrações no escoamento principal muito pequenos. Por esse motivo, as alterações nas curvas dos coeficientes de atrito são muito pequenas, sendo apenas dignas de observação para os maiores valores do parâmetro  $\alpha$ .

Seguindo o mesmo comportamento, as leis de parede também só se alteram para os maiores valores de  $\alpha$  e ainda assim nas regiões onde a espessura da camada limite é maior. No entanto, apesar de pequenas, as modificações apresentadas são de grande importância, visto que de uma maneira geral as velocidades serão menores, com destaque para a região mais próxima à parede, e a concentração será maior em toda a camada limite. Esse fato observado vem a representar por completo a situação física em que partículas tendem a se acumular na

região de baixas velocidades.

Já para o caso contrário, ou seja, sinal negativo para a constante da equação de velocidade e positivo para o caso da concentração, os valores absolutos do coeficiente de atrito de velocidade serão maiores, enquanto o coeficiente de concentração apresentará valores menores. Esses comportamentos são sempre acentuados com o aumento do parâmetro  $\alpha$ , o aumento da concentração inicial, bem como a diminuição da velocidade inicial.

As leis de parede são afetadas da mesma maneira que o caso anterior, isto é, existe uma redução no módulo da velocidade e um aumento na concentração. A alteração dos valores das constantes de integração também influencia no resultado final, porém de maneira mais branda que no caso de ambas constantes positivas.

#### 5.6.4. Constantes de Integração Nulas

Assumindo que essas constantes podem variar de valor de um caso para outro, torna-se claro que os valores das constantes estão relacionados com as propriedades das partículas que carregam o escoamento. Portanto, se as constantes foram analisadas em uma faixa que varia de um determinado valor negativo até o mesmo valor com sinal positivo, espera-se que em determinado momento essas constantes possam vir a ser nulas.

Nesse caso, quando ambas as constantes assumem valores nulos, o valor do coeficiente de atrito tende a diminuir com o aumento do parâmetro  $\alpha$  enquanto o coeficiente de concentração tende a aumentar. As leis de parede se alteram muito pouco, inclusive para casos de maiores concentrações no escoamento principal. O módulo da velocidade aumenta ligeiramente na região anterior a esteira. A concentração também tende a aumentar nesta região. No entanto, ambos os casos podem ser considerados desprezíveis.

## 6. Conclusões

No presente trabalho, foi descrita e analisada a estrutura assintótica de escoamentos em camada limite carregados com partículas. A aplicação do limite de Kaplun nas equações de quantidade de movimento e de concentração mostram que tanto o campo de velocidade como o campo de concentração apresentam uma estrutura de duas camadas (“decks”), e que em geral a camada limite de concentração terá uma estrutura diferente da camada limite fluidodinâmica, sendo a correlação entre elas estabelecida através da ordem de grandeza do coeficiente de transporte turbulento ( $\lambda$ ) e da concentração de atrito ( $c_\tau$ ).

Através de um modelo de turbulência algébrico para as equações de transporte, foi mostrado que ambos os perfis de velocidade e de concentração possuem um termo de ordem superior com a forma funcional  $y \ln y$ . Este termo, juntamente com o acoplamento das equações, tem como um de seus principais resultados o ajuste do perfil de velocidade para a presença de partículas no escoamento. Além disso, ele mostra um perfil de concentração determinado por uma lei de parede semelhante àquela encontrada para o campo de velocidade. Outras consequências importantes originadas da adição do novo termo às leis de parede são a modificação dos valores da velocidade de atrito na parede e o surgimento da concentração de atrito.

Simulações numéricas da solução teórica foram feitas e mostraram que os resultados são plausíveis. Os novos perfis de velocidades encontrados na região logarítmica do escoamento concordam com resultados e previsões experimentais. No caso do perfil de concentração os resultados experimentais são inexistentes; portanto, apenas um comportamento funcional é previsto de forma a estimar valores para essa propriedade próximo a parede. No entanto, como foi mostrado, o perfil de concentração obtido e proposto obedece relações fisicamente corretas com o perfil de velocidade. Esse comportamento é mostrado experimentalmente por Mutlu Sumer et alli(1974,1978).

Em seus experimentos, Rashidi et ali(1990) busca mostrar o comportamento de um escoamento submetido a um carregamento de partículas pequenas. Para isso, os autores realizam uma série de experimentos, nos quais são variadas algumas propriedades dessas partículas e do escoamento, como por exemplo o diâmetro, a concentração inicial e, em um caso específico, o material do qual as partículas são constituídas. Como resultado geral desses experimentos, pode-se dizer que para as partículas feitas de polyester o aumento do diâmetro significa um aumento de velocidade na região próxima a esteira e um aumento da tensão cisalhante na parede. Já para o caso de menores diâmetros o comportamento é o oposto, ou seja, ocorre uma diminuição do módulo da velocidade na região próxima a esteira e uma diminuição das tensões na parede. Em ambos os casos o aumento da concentração inicial tende a aumentar as discrepâncias observadas.

Esse comportamento levaria a conclusão da existência de um diâmetro limite para que o comportamento dos perfis de velocidade e das tensões na parede assumissem formas distintas. No entanto, como dito antes, as mudanças nas características físicas das partículas não podem ser analisadas separadamente. É o que mostra os resultados experimentais obtidos para partículas de vidro, que apresentam diâmetros inferiores a todas as partículas de polyester, e massa específica muito superior a esse material, apresentando resultados completamente diferentes. De acordo com os resultados obtidos para as partículas de vidro, não ocorre modificações em nenhuma propriedade do escoamento como se este não estivesse carregado com uma determinada concentração.

Os resultados obtidos pelo presente trabalho mostram que as leis propostas representam essas modificações de perfil, bem como as de tensões. Nas equações propostas, as propriedades das partículas que carregam o escoamento estão representadas no parâmetro  $\alpha$ . Porém, foi mostrado que essas propriedades também estão representadas nas constantes de integração dos termos de segunda ordem, visto que a alteração dessas influi no resultado final obtido. Essa influência é constatada principalmente nos fatores que dizem respeito a variação do comportamento geral das curvas, ou seja, se há aumento ou diminuição do módulo de velocidade,

concentração, ou coeficientes de atrito e de concentração. Com esse fator, torna-se muito clara a importância das constantes de integração, as quais na verdade determinaram o tipo de partículas que estão sendo representadas, deixando para o parâmetro  $\alpha$  atuar nos resultados mostrando como essas partículas afetam o escoamento. No entanto, essas constantes não sofreram nenhuma modelagem específica, sendo então atribuídos apenas valores arbitrários para a observação do comportamento geral.

De acordo com as simulações numéricas, quando as constantes de integração de ordem superior forem ambas negativas, ou quando a constante para a velocidade for negativa e a constante para concentração for positiva, os resultados obtidos, para as grandezas fluidodinâmicas, estarão representando as maiores partículas de polyester utilizadas no experimento de Rashidi et alii(1990). No caso da constante da equação de velocidade ser positiva e a constante de concentração ser negativa, as partículas representadas seriam as também feitas de polyester, porém com menores diâmetros.

Quando ambas constantes são positivas, o que ocorre pode ser considerado um caso intermediário, visto que o comportamento das curvas analisadas pode variar com a velocidade do escoamento principal. O caso das partículas de vidro, que a princípio parece destoar de todos os outros, pode ser representado quando as constantes se anulam, ou ainda quando  $\alpha$  é muito pequeno ou as partículas se concentram na região viscosa.

A lei de parede da concentração não pode ser comparada com valores experimentais obtidos na região logarítmica da camada limite. Porém, seu comportamento decrescente, como já foi mencionado no capítulo anterior, se deve a modelos e a observações experimentais feitas em regiões do escoamento principal e da esteira. De acordo com as soluções numéricas, a concentração tende a aumentar nas regiões onde a velocidade diminui e a diminuir nos locais onde ocorre um aumento de velocidade. Esses resultados se mostram importantes e fisicamente corretos, como observa Mutlu Sumer et alii(1974,1978). De acordo com os experimentos desse autor, as partículas tendem a se concentrar nas regiões de baixa velocidade do escoamento, porém, não devendo atingir a região da subcamada viscosa por razões geométricas, isto é, o

diâmetro das partículas não possibilitaria que estas atingissem a subregião viscosa. Entretanto, caso esse fenômeno venha ocorrer, muito provavelmente as partículas permaneceriam acumuladas nessa região. Em seu trabalho, os autores afirmam que, além de se acumularem em regiões de baixa velocidade do escoamento, entenda-se aqui a região logarítmica, as partículas não devem ocupar essa região por completo, permanecendo predominantemente na parte inferior desta. Este resultado é obtido praticamente em todas as simulações numéricas feitas no presente trabalho, onde os valores das concentrações de atrito encontradas sempre foram inferiores aos valores das velocidades de atrito. Portanto, como já dito antes, devido ao fato do domínio de validade das equações estarem diretamente relacionados com essas grandezas, a camada logarítmica de concentração permaneceu dentro da camada logarítmica de velocidade. A ordem de grandeza que esses termos assumiram nas simulações foi apresentada no capítulo anterior, e está diretamente relacionada com os valores da velocidade e da concentração no escoamento principal. Com isso, é mostrada a importância da concentração de atrito e do coeficiente de concentração, grandezas propostas pelo presente trabalho.

O aumento da concentração no escoamento principal, bem como o aumento do parâmetro  $\alpha$ , ou a diminuição da velocidade principal do escoamento, tem como consequência o crescimento da influência do termo da segunda ordem proposto para as equações de lei de parede e, portanto, a apresentação mais nítida dos resultados anteriormente apresentados.

O presente trabalho, ao propor uma nova lei de parede para a velocidade e para a concentração, ambas corrigidas por um termo de segunda ordem, o qual está relacionado com as características das partículas, busca assim uma melhor representação do fenômeno de um escoamento carregado com partículas sólidas, principalmente na região próxima à parede onde normalmente residem as dificuldades experimentais. Os novos parâmetros,  $\alpha$  e  $c_\tau$ , assim como  $C_c$ , aqui propostos são de fundamental importância para a modelagem desse tipo de escoamento, bem como para uma posterior análise de seus resultados.



## 7. Futuros Trabalhos

Conforme apresentado no presente trabalho, o fenômeno de escoamentos bifásicos, principalmente sólidos/líquidos, é muito pouco entendido atualmente, constituindo assim uma fonte inesgotável de assuntos e temas de interesse e relevância científica.

Restringindo-nos ao vasto tema de escoamentos bifásicos fluido/partículas em camadas limites de placa plana, e ainda com ênfase na formulação de leis de parede, fica aqui proposto uma série de temas de pesquisa. Dentre eles pode-se citar como continuidade do presente trabalho:

- i) a implementação de um código numérico onde sejam usadas como condições de contorno para as equações de transporte as leis aqui propostas.
- ii) uma nova análise do fenômeno utilizando um modelo de turbulência diferencial de duas equações.
- iii) um estudo mais profundo e conseqüente modelagem das constantes de integração.

De uma maneira geral, os trabalhos propostos seriam a realização de novos experimentos, o que provavelmente acarretaria o desenvolvimento de novos equipamentos de medição. O estudo das condições de contorno da equação da concentração, bem como sua analogia com os casos térmicos, também constitui-se tema de relevância.

## Bibliografia :

- [1] Chen C.P. and Wood P.E., "Turbulence Closure Modeling of the Dilute Gas-Particle Axisymmetric Jet", *AIChE Journal*, vol. 32, n 1, pp. 163-166, 1986.
- [2] Cleaver, J.W. and Yates, B., "A Sublayer Model for Deposition of the Particles from Turbulent Flow", *Chem. Engng. Sci.* 30, pp. 983-992, 1975.
- [3] Cleaver, J.W. and Yates, B., "The Effect of Re-Entrainment on Particle Deposition", *Chem. Engng. Sci.* 31, pp. 147-151, 1976.
- [4] Cruz, D.O.A. and Silva Freire A.P., "The Asymptotic Structure of The Thermal Turbulent Boundary Layer Near a Separation Point", Begell House Inc. Publishers, 1995.
- [5] Eaton J.K., "Experiments and Simulations on Turbulence Modification by Dispersed Particles", Part of *Mechanics U.S.A.*, *Appl. Mech. Rev.*, vol. 47, n 6, part 2, 1994.
- [6] Eaton J.K. and Fessler J.R., "Preferential Concentration of Particles by Turbulence", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 20 Suppl. pp. 169-209, 1994.
- [7] Elghobashi S. and Truesdell G.C., "On the Two-Way Interaction Between Homogeneous Turbulence and Dispersed Solid Particles I: Turbulence Modification", *Phys. Fluids A* 5 (7), 1993.
- [8] Elghobashi S.E. and Abou-Arab T.W., "A Two Equation Turbulence Model for Two-Phase Flows", *Phys Fluids* 26 (4), 1983.
- [9] Elghobashi S. E., Abou-Arab T., Risk M. and Mostafa A., "Prediction of the Particle-Laden Jet with a Two-Equation Turbulence Mode", *International Journal of Multiphase Flow* 10, pp. 697, 1984.

- [10] Gomes M.S.P., "Inertial Effects on the Retention of Particles in the Near Wake of Blunt Obstacles", Anais do COBEM/CIDIM, 1995.
- [11] Gonesbet G., Berlemont A. and Picart A., "Dispersion of Discrete Particles by Continuous Turbulent Motions. Extensive Discussion of the Tchen's Theory, Using a Two-Parameter Family of Lagrangian Correlation Functions", Phys. Fluids 27 (4), 1984.
- [12] Gore R.A. and Crowe C.T., "Effect of Particle Size on Modulating Turbulent Intensity", Int. J. Multiphase Flow, vol. 15, n 2, pp. 279-285, 1989.
- [13] Hetsroni G., "Particles-Turbulence Interaction", Int. J. Multiphase Flow, vol. 15, n 5, pp. 735-745, 1989.
- [14] Hunt, J.C.R., Perkins, R.J. and Fung, J.C.H., "Problems in Modeling Disperse Two-Phase Flows", Part of Mechanics U.S.A. 1994, Appl. Mech. Rev. vol. 47, n 6, part 2, 1994.
- [15] Kaplun S., Fluid Mechanics and Singular Perturbation, Academic Press, 1967.
- [16] Lagéstrom P.A. and Casten R.G., Basic Concepts Underlying Singular Perturbation Techniques, SIAM Review, vol. 14, n 1, 1972.
- [17] Lian-Ping Wang and Martin R.M., "Settling Velocity and Concentration Distribution of Heavy Particles in Homogenous Isotropic Turbulence", J. Fluid Mech., vol. 256, pp. 27-68, 1993.
- [18] Meyer, R.E., "On the Approximation of Double Limits by Single Limits and the Kaplun Extension Theorem", J. Inst. Maths. Applics., Vol.3, pp. 245-249, 1967.
- [19] Moduress D., Tan H., Elghobashi S., "Two-Component LDA Measurement in Two-Phase Turbulent Jet", AIAA Journal, vol. 22, n 5, pp. 624-630, 1988.

- [20] Murlis, J., Tsai H.M. and Bradshaw P., "The Structure of Turbulent Boundary Layers at Low Reynolds Numbers", *Journal of Fluids Mechanics* 122, pp. 13-56, 1982.
- [21] Mutlu Sumer B. and Beyhan Oguz, "Mean Velocity and Longitudinal Dispersion of Heavy Particles in Turbulent Open Channel Flow", *J. Fluid Mech.* 65, part 1, pp. 11-28, 1974.
- [22] Mutlu Sumer B. and Beyhan Oguz, "Particle Motions Near the Bottom in Turbulent Flow in an Open Channel", *J. Fluid Mech.* 80, part 1, pp. 109-127, 1978.
- [23] Mutlu Sumer B. and Rolf Deigaard, "Particle Motions Near the Bottom in Turbulent Flow in an Open Channel. Part 2", *J. Fluid Mech.* 109, pp. 311-337, 1981.
- [24] Pedinotti S., Mariotti G. and Banerjee S., "Direct Numerical Simulation of Particle Behaviour in the Wall Region of Turbulent Flows in Horizontal Channels", *Int. J. Multiphase Flow* 18, pp. 927-941, 1992.
- [25] Rashidi M., Hetsroni G. and Banerjee S., "Particle-Turbulence Interaction in a Boundary Layer", *Int. J. Multiphase Flow* 16 (6), pp. 935-949, 1990.
- [26] Rogers C.B. and Eaton J.K., "The effect of Small Particles on Fluid Turbulence in a Flat-Plate, Turbulent Boundary Layer in Air", *Phys. Fluids A* 3 (5), 1991.
- [27] Shuen J.S., Solomon A.S.P., Zhang Q-F., Faeth G.M., "Structure of Particle-Laden Jets: Measurement and Predictions", *AIAA Journal*, vol. 23, n 3, pp. 396-404, 1989.
- [28] Silva Freire A.P., "On Kaplun Limits and the Asymptotic Structure of the Turbulent Boundary Layer", *RBCM Vol. XVIII*, n 1, pp. 80-87, 1996.
- [29] Silva Freire A.P. and Hirata M.H., "Approximate Solutions to Singular Perturbation Problems: the Intermediate Variable Technique", *J. Math. Analysis and Appl.*, Vol. 145, pp. 241-253, 1990.

- [30] Simpson R.L., "The Turbulent Boundary Layer on a Porous Plate: An Experimental Study of the Fluid Dynamics with Injection and Suction", Stanford PhD. Thesis, 1968.
- [31] Sinclair J.L. and Jackson R., "Gas-Particles Flow in a Vertical Pipe with Particle-Particle Interactions", *AIChE Journal*, vol. 35, n 9, 1989.
- [32] Snyder W.H. and Lumbey J.L., "Some Measurements of Particles Velocity Autocorrelation Functions in a Turbulent Flow", *J. Fluid Mech.*, vol. 48, part 1, pp. 41-71, 1971.
- [33] Squires K.D. and Eaton J.K., "Particle Response and Turbulence Modification in Isotropic Turbulence", *Phys. Fluids A* 2 (7), 1990.
- [34] Squires K.D. and Eaton J.K., "Preferential Concentration of Particles by Turbulence", *Phys. Fluids A* 3 (5), 1991.
- [35] Squires K.D. and Eaton J.K., "Preferential Concentration of Particles by Turbulence", *Phys. Fluids A* 3 (5), 1991.
- [36] Truesdell G.C. and Elghobashi S., "On the Two-Way Interaction Between Homogeneous Turbulence and Dispersed Solid Particles II: Particle Dispersion", *Phys. Fluids A* 6 (3), 1994.
- [37] Tsuji Y., and Morikawa Y., "LDV Measurements of an Air-Solid Two-Phase Flow in a Horizontal Pipe", *J. Fluid Mech.*, vol. 120, pp. 385, 1982.
- [38] Tsuji Y., Tanaka T., Yonemura S., "Particle Induced Turbulence", Part of Mechanics U.S.A. 1994, *Appl. Mech. Rev.*, vol. 47, n 6, part 2, 1994.
- [39] Viollet P.L. and Simonin O., "Modelling Dispersed Two-Phase Flows: Closure, Validation and Software Development", Part of Mechanics U.S.A. 1994, *Appl. Mech. Rev.*, vol. 47, n 6, part 2, 1994.
- [40] Yung, B.P.K., Merry, H. and Bott T.R., "The Role of Turbulent Bursts in Particle

Re-Entrainment in Aqueous Systems", Chem. Engng. Sci. 44, pp. 873-882, 1989.