

ANÁLISE TEÓRICO/NUMÉRICA DA INTERAÇÃO
DE UMA ONDA DE CHOQUE COM UMA
CAMADA LIMITE COMPRESSÍVEL

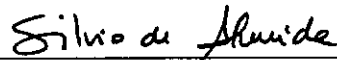
Guilherme Saad Terra

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSI-
DADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA MECÂNICA

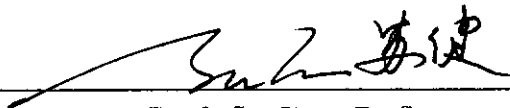
Aprovada por:



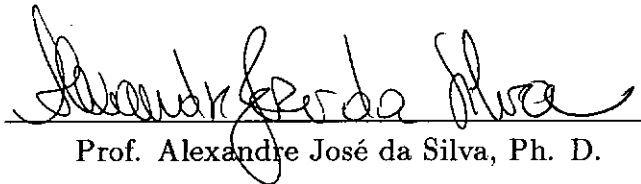
Prof. Atila P. Silva Freire, Ph.D.
(Presidente)



Prof. Silvio Carlos Ambal de Almeida, D. Sc.



Prof. Su Jian, D. Sc.



Prof. Alexandre José da Silva, Ph. D.

Rio de Janeiro, RJ - BRASIL
Março de 1996

TERRA, Guilherme Saad

Análise Teórico/Numérica da Interação de uma Onda de Choque
com uma Camada Limite Compressível. [Rio de Janeiro]1996.

xv, 74p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Mecânica, 1996)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Método de Perturbações
2. Aerodinâmica
3. Modelos de Turbulência

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

À Deus,
aos meus avós
José, Nilza,
Grimaldi e Délia

À Valda

AGRADECIMENTOS

À quem tenho aprendido a admirar cada vez mais nestes anos de convívio, amigo e orientador, professor Atila Pantaleão Silva Freire, pelo exemplo, apoio, compreensão ... dedicado.

À quem não tenho palavras que possam expressar meus sinceros agradecimentos, amigo e orientador professor Su Jian pelo interesse, apoio, ... dedicado desde sua chegada ao Brasil.

Aos amigos do Laboratório de Aerodinâmica Daniel, Guilherme, Patrícia, Mila, Leonardo, Nicolau, Jader, Leniza, Leandro, Adriana, Luis Claudio, Renata, Flávio, ... pelo companherismo que fizeram do ambiente de trabalho uma extensão do paraíso.

A todos os professores da COPPE Mecânica que contribuíram transmitindo seus conhecimentos indispensáveis para realização deste trabalho.

Aos funcionários da Mecânica, Vera, Maysa, Tito, Renato, Vitória ... que sempre tornaram alegres os momentos vividos na secretaria.

Aos companheiros da UED/Macaé Hilton, Sandro, Guilherme, Carlos Arthur, Everton, Sérgio, Deise, ... pelo incentivo e ajuda dada no domínio de suas possibilidades.

Aos amigos Fernando Duda, João Carlos, Neide, Glaucio, Darlene, Sumaya, Carlos Hamilton, Claude, Sérgio, Andréia, Marília ... pelo carinho, dedicação, pela cor do trigo (Saint Exupéry-O Pequeno Prncipe), ...

À *minha namorada* e amiga Valdecira Flaubert Jassus pelo incentivo constante, dedicação amorosa e compreensão quanto ao tempo de convívio furtado.

A todos os meus familiares pela felicidade que sinto por ser mais um entre eles.

Ao Instituto Militar de Engenharia por ter me acolhido nestes últimos meses de trabalho.

À CAPES que apoiou financeiramente este trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

ANÁLISE TEÓRICO/NUMÉRICA DA INTERAÇÃO DE UMA ONDA DE CHOQUE COM UMA CAMADA LIMITE COMPRESSÍVEL

Guilherme Saad Terra

Março, 1996

Supervisores : Prof. Atila Pantaleão Silva Freire e Su Jian

Programa : Engenharia Mecânica

O fenômeno físico da interação de uma onda de choque com uma camada limite compressível turbulenta (CLCT), sobre uma superfície plana, que leva a perda de performance em muitas áreas da aerodinâmica, é o tema deste trabalho. Para estudá-lo, dois códigos numéricos foram desenvolvidos. O primeiro usa o método das diferenças finitas para resolver as equações aproximadas obtidas por Silva Freire em seu modelo teórico baseado em argumentos e deduções provenientes dos métodos de perturbações. O segundo resolve numericamente a equação de Navier-Stokes completa em regime transiente, usando também o método das diferenças finitas com o esquema explícito proposto por Bralovskaya (1965).

O modelo algébrico de Cebeci-Smith (1970) e o de meia equação de Johnson-King (1985) são usados para calcular a tensão turbulenta.

Os escoamentos laminar e turbulento, adiabáticos, compressíveis, sobre uma placa plana sem gradiente de pressão foram estudados para validar o segundo código numérico, por serem melhores compreendidos possuindo solução de similaridade (laminar) e leis da parede e esteira bem definidos respectivamente (turbulento).

Os resultados obtidos por estes códigos numéricos são comparados com os dados experimentais de Sawyer e Long mostrando que o modelo teórico de Silva Freire prevê, apesar de um custo computacional pequeno, o coeficiente de arrasto com excelente precisão.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for obtaining the degree of Master of Science (M.Sc.).

**A Theoretical Analysis of the Interaction
Problem Between a Shock-Wave and a
Compressible Boundary Layer**

Guilherme Saad Terra

March, 1996

Thesis Supervisors : Prof. Atila Pantaleão Silva Freire and Su Jian
Department : Mechanical Engineering

The interaction between a shock-wave and a compressible turbulent boundary layer is the subject of this work. Two numerical codes were developed here in order to study the problem. The former uses a finite difference procedure to solve an approximate set of equations obtained by Silva Freire in his simplified theoretical model. The latter, solves the full Navier-Stokes equations, through a finite difference procedure that uses the explicit scheme of Bralovskaya(1965).

The turbulent stresses are evaluated through the algebraic model of Cebeci-Smith(1970) and the half-equation differential model of Johnson and King(1985).

The full N-S code is validated by comparison with the analytical results provided by the laminar turbulent boundary layer case, as well as, by the classical law of the wall and law of the wake formulations for the compressible turbulent boundary layers.

The results of both codes are compared with the experimental data of Sayer and Long, showing that the simplified model of Silva Freire does provide good predictions for the skin-friction coefficient despite its low computational cost.

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

Letras Romanas

a^*	Velocidade sônica
D	Fator de amortecimento
C_f	Coefficiente de arrasto ($2\tau_w/\rho_\delta u_\delta^2$)
c_p	Calor específico a pressão constante
g	Definido como $(-\overline{u'v'}_m)^{-1/2}$
g_{eq}	Definido como $(-\overline{u'v'}_{m,eq})^{-1/2}$
h_o	Entalpia total
k_c	Energia cinética turbulenta
M	Número de Mach
M_∞	Número de Mach no escoamento externo à camada limite
M_{cr}^*	Número de Mach no escoamento externo a partir do qual uma onda de choque aparece seguida de separação
u_τ	Velocidade de atrito ($\sqrt{\tau_w/\rho_w}$)
u	Velocidade tangencial à parede
v	Velocidade normal à parede
p	Pressão
R	Constante universal dos gases
R_w	Número de Reynolds na parede
s	Entropia
t	Tempo
Δt	Intervalo de tempo computacional
T	Temperatura
Δx	Espaçamento da malha na direção x
x	Coordenada tangencial adimensional à parede
X	Coordenada tangencial à parede
Δy	Espaçamento da malha na direção y
y	Coordenada normal adimensional à parede
Y	Coordenada normal à parede

Letras Gregas

ϵ	Parâmetro definido como $(M_{cr}^* - 1)$
δ	Espessura da camada limite
$\hat{\delta}$	Espessura da sub-camada laminar
$\tilde{\delta}$	Espessura da camada de acoplamento
δ^*	Espessura de deslocamento da camada limite $(\int_0^{\delta} (1 - \rho u / \rho_{\delta} u_{\delta}) dy)$
ΔL	Comprimento da região onde ocorre forte interação
γ	Razão entre os calores específicos
Γ	Função de intermitência de Klebanoff
ρ	Massa específica
κ	Constante de von Karman
μ	Viscosidade molecular
μ_{eff}	Viscosidades efetiva
ν	Viscosidade cinemática molecular
ν_t	Viscosidade cinemática turbulenta
σ	Tensão normal
τ	Tensão cisalhante

Sub índices

o	Parâmetros da camada limite (δ, δ^*): no início da interação
δ	Borda da camada limite
m	Ponto de máxima tensão turbulenta
w	Parede
aw	Parede adiabática
i, j	Coordenadas x,y

ÍNDICE DAS TABELAS

	Página
Tabela IX.1 - Características do escoamento laminar compressível.	43
Tabela IX.2 - Características do escoamento turbulento compressível.	45
Tabela IX.3a - Parâmetros do escoamento - Método das perturbações.	48
Tabela IX.3b - Parâmetros do escoamento - Método das perturbações.	48
Tabela IX.4a - Parâmetros globais do escoamento.	48
Tabela IX.4b - Parâmetros globais do escoamento na fronteira (X_{min}).	48
Tabela IX.4c - Parâmetros globais do escoamento na fronteira (X_{max}).	48

ÍNDICE DAS FIGURAS

	Página
Figura III.1 - Campo do escoamento em três regiões.	5
Figura III.2 - Comprimentos característicos do escoamento.	6
Figura IV.1 - Notação do método das diferenças finitas.	12
Figura V.1 - Domínio e condições de contorno.	19
Figura VI.1 - Variação de ν_t ao longo da camada limite.	27
Figura VI.2 - Variação de τ_{xy} ao longo da camada limite.	27
Figura VII.1 - Domínio computacional.	29
Figura VII.2 - Malha não uniforme.	30
Figura VIII.1 - Solução do escoamento laminar compressível em variáveis de similaridade ($f' \times \eta$).	34
Figura VIII.2 - Lei logarítmica ($\frac{u^*}{u_\tau} \times y^+$).	39
Figura VIII.3 - Lei da esteira ($\frac{u^* - u^*}{u_\tau} \times \ln \frac{y}{\Delta^*}$).	40
Figura VIII.4 - Lei logarítmica ($\frac{u}{u_\tau} \times y^+$).	42
Figura IX.1 - Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações.	44
Figura IX.2 - Variação de T ao longo da camada limite para diferentes estações.	44
Figura IX.3 - Variação da variável de similaridade f' ao longo da camada limite para diferentes estações.	45
Figura IX.4 - Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações.	46
Figura IX.5 - Variação de T ao longo da camada limite para diferentes estações.	46

Figura IX.6	- Variáveis de similaridade u^*/u_τ e y^+ ao longo da camada limite para diferentes estações.	47
Figura IX.7	- Variáveis de similaridade $\Delta U^*/u_\tau$ e $\log(y/\Delta^*)$ ao longo da camada limite para diferentes estações.	47
Figura IX.8	- Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações(Cond.: 1.3-a).	49
Figura IX.9	- Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações(Cond.: 1.4-a).	50
Figura IX.10	- Variação da pressão ao longo da direção principal do escoamento na parede e na região externa (Cond.: 1.3-a).	50
Figura IX.11	- Variação da pressão ao longo da direção principal do escoamento na parede e na região externa (Cond.: 1.4-a).	51
Figura IX.12a	- Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações(Cond.: 1.3-a).	52
Figura IX.12b	- Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações(Cond.: 1.3-a).	53
Figura IX.12c	- Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações(Cond.: 1.3-a).	54
Figura IX.13a	- Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações(Cond.: 1.4-a).	55
Figura IX.13b	- Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações(Cond.: 1.4-a).	56
Figura IX.13c	- Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações(Cond.: 1.4-a).	57
Figura IX.14	- Variação de Cf ao longo da direção principal do escoamento (Cond.: 1.3-a).	58
Figura IX.15	- Variação de Cf ao longo da direção principal do escoamento (Cond.: 1.4-a).	58

ÍNDICE

	Página
I. INTRODUÇÃO	1
II. ESTADO DA ARTE	3
III. O MODELO TEÓRICO DE SILVA FREIRE	5
III.1 A Estrutura Assintótica da Camada Limite Compressível Turbulenta	5
III.2 As Equações do Movimento	6
III.3 Análise Assintótica do Fenômeno	6
IV. ANÁLISE NUMÉRICA DO MODELO DE SILVA FREIRE	12
IV.1 Método das Diferenças Finitas	12
IV.2 Algoritmo Desenvolvido	14
V. EQUAÇÕES GERAIS DO FENÔMENO PARA UMA FORMULAÇÃO GERAL DE NAVIER-STOKES	17
V.1 Introdução	17
V.2 Equações que Governam o Fenômeno	17
V.3 Condições de Contorno e Inicial	19
V.3.1 Fronteira de Entrada	19
V.3.2 Fronteira Superior	20
V.3.3 Fronteira na Saída	20
V.3.4 Fronteira Inferior(Superfície Sólida)	20
V.3.5 Domínio - Condição Inicial	20

VI. MODELOS DE TURBULÊNCIA	21
VI.1 Introdução	21
VI.2 Modelo de Cebeci-Smith	21
VI.3 Modelo de Johnson-King	23
VI.3.1 Modelo de Não Equilíbrio	23
VI.3.2 Equação que Descreve a Máxima Energia Cinética Turbulenta	24
VI.3.3 Modelo de Equilíbrio	26
VI.4 Distribuição da Viscosidade Turbulenta Modelada	26
VII. SOLUÇÃO NÚMERICA	28
VII.1 Introdução	28
VII.2 Método Numérico	28
VII.2.1 O Esquema	28
VII.2.2 Domínio Computacional	29
VII.2.3 Malha	29
VII.2.4 Discretização	30
VII.2.5 Viscosidade Artificial	30
VIII. VALIDAÇÃO NUMÉRICA	33
VIII.1 Introdução	33
VIII.2 Laminar Compressível - Solução de Similaridade	33
VIII.3 Turbulento Compressível - Solução de Similaridade	35
VIII.3.1 Hipótese de Morkovin	35
VIII.3.2 Soluções Semi-Empíricas para a Distribuição de Temperatura	35
VIII.3.3 Leis de Similaridade no Escoamento Turbulento Compressível	36
VIII.3.3.1 Camada Interna	36
VIII.3.3.2 Subcamada Laminar	37
VIII.3.3.3 Região Logarítmica	38
VIII.3.3.4 Região Externa - Lei da Esteira	39
VIII.4 Turbulento Compressível com Choque	41

IX. ANÁLISE DE RESULTADOS	43
IX.1 Introdução	43
IX.2 Laminar Compressível	43
IX.3 Turbulento Compressível	45
IX.4 Turbulento Compressível com Choque	48
X. CONCLUSÃO E SUGESTÕES	59
XI. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA	61
APÊNDICE I	64

I. INTRODUÇÃO

O fenômeno da interação de uma onda de choque com uma camada limite turbulenta compressível (CLTC) tem sua importância tecnológica respaldada principalmente pelo esforço realizado pela indústria aeronáutica na melhoria da performance de aerofólios que operam no regime transônico, sendo esta a realidade da maioria dos vôos comerciais.

Ressaltando ainda a importância deste fenômeno, pode-se citar o comprometimento do desempenho de várias situações de interesse prático como escoamentos ao redor de hélices de helicópteros, em bocais de propulsão que operam em condições diferentes do projeto, turbomáquinas, superfícies defletoras de escoamentos a alta velocidades.

Sendo este fenômeno extremamente complexo, seja com relação a natureza da camada limite, se laminar ou turbulenta, seja com relação a geometria e a intensidade da onda de choque, não foi possível até o presente momento desenvolver uma teoria geral para a análise deste problema que abranja todos os aspectos relevantes. A execução de experimentos com geometria similar à encontrada na realidade é praticamente inviável corroborando para a escassez de dados experimentais. A natureza tridimensional do problema e a presença de descolamento são fatores que tornam a modelagem mais complicada, dificultando a obtenção de resultados analíticos. A citação presente em Fernholz e Finley[1] ilustra estes comentários e o espírito deste trabalho : 'Se acontecer progressos na modelagem de escoamentos compressíveis estes virão através da combinação de um grande esforço experimental com o desenvolvimento das técnicas computacionais e idéias relativas a modelagem'.

Analisando o fenômeno da interação de uma onda de choque com uma camada limite turbulenta compressível sob uma superfície plana Silva Freire[2-5] propõe um modelo físico-matemático utilizando o método de perturbações. Em sua análise ele assume que o escoamento é bidimensional e que não ocorre descolamento. Com isto, é possível se obter três equações diferenciais parciais para três diferentes ordens de aproximação e uma quarta equação, algébrica, que prediz o coeficiente de atrito . Estas equações são resolvidas através de um código numérico desenvolvido neste trabalho, baseado nos moldes do código proposto em Murman e Cole[6] e Melnik e Grossman[7]. Detalhes relativos à implementação do código e à extensão da formulação para o fenômeno associado a transpiração, sucção após e injeção à frente da onda de choque devido a diferença de pressão existente, são descritas em Silva Freire e Terra[8] e Terra[9]. Trabalhos experimentais vem mostrando que o uso de transpiração pode ser uma boa maneira de melhorar o desempenho de aerofólios que operem em condições fora de projeto, ampliando a faixa de atuação em condições não previstas. Os resultados indicam que, com a transpiração, há uma diminuição do arrasto e um aumento no coeficiente de sustentação.

O objetivo do presente trabalho é realizar uma comparação detalhada entre a teoria assintótica de Silva Freire[2] e uma formulação do fenômeno pelas equações completas de Navier-Stokes. Para isso, códigos específicos para cada uma das formulações foram desenvolvidos aqui. Como resultado principal, espera-se investigar, identificando-se com clareza, as regiões exatas do escoamento onde a presença do termo turbulento torna-se importante para a descrição do fenômeno. Ainda, em outras palavras, pretende-se mostrar como a presença da onda de choque inibe o termo turbulento, restringindo-o a uma pequena região no pé da onda de choque.

Os resultados obtidos com a formulação proposta por Silva Freire[2] são comparados com dados experimentais de Sawyer & Long[10] e com dados numéricos obtidos pelo código numérico desenvolvido a partir de Atkin[11]. Este código utiliza o método das diferenças finitas para resolver as equações de Navier-Stokes completa, em regime transiente, usando o esquema explícito de Bralovskaya[12]. A viscosidade turbulenta é calculada através dos modelos de turbulência de Cebeci-Smith[13] e de Johnson-King[14], sendo o primeiro um modelo algébrico e o segundo um modelo de meia equação, derivado da equação da energia cinética turbulenta. O segundo modelo objetiva capturar os efeitos de história do escoamento a um custo computacional inferior aos modelos de duas equações. Sendo estas equações válidas para descrever fenômenos, mais simples, como os escoamentos laminar e turbulento adiabático sobre uma placa plana sem gradiente de pressão estes foram inicialmente usados para validar o código numérico.

Como resultado, concluímos que o modelo proposto por Silva Freire[2] consegue prever com boa precisão o coeficiente de atrito com um custo computacional muito inferior ao apresentado pela formulação com N-S. O segundo código numérico consegue resolver os dois casos mais simples usados para validar o código, sendo que o seu custo computacional é mais alto. Os resultados obtidos pelo segundo código com o modelo de Cebeci é superior ao obtido pelo modelo de Johnson-King como poderá ser visto nos gráficos de C_f com um custo computacional inferior.

II. ESTADO DA ARTE

Os primeiros estudos a respeito do problema da interação de uma onda de choque com uma camada limite datam dos anos 50. A primeira tentativa de desenvolver uma teoria para o fenômeno foi concretizada por Lighthil[15] em um artigo onde ele claramente identificou os mecanismos físicos principais da interação, reconhecendo que na maior parte da camada limite o gradiente de pressão longitudinal é de ordem de grandeza tal que numa primeira aproximação as tensões cisalhantes podem ser desprezadas. Este modelo, chamado posteriormente de o modelo das interações viscosas-não viscosas, tornou-se a base para todos os modelos teóricos que se seguiram. A teoria de Lighthil está geralmente correta para escoamentos laminares. Para escoamentos turbulentos alguns detalhes devem ser modificados de modo a torná-la consistente com os resultados assintóticos obtidos nos anos 60 e 70 sobre a estrutura da camada limite turbulenta. O único outro trabalho relevante no assunto à época de Lighthil, foi o trabalho experimental de Gadd[16]. De fato, esses dois trabalhos tornaram-se por muitos anos as referências básicas no assunto.

Em 1974, Melnik e Grossman[7] utilizando técnicas assintóticas, proporam um modelo para o caso de uma interação fraca. Por interação fraca entenda uma interação onde o parâmetro pequeno baseado no número de Mach e o parâmetro pequeno baseado na velocidade de atrito possuem a mesma ordem de grandeza. Nesse caso a mudança de velocidade através da onda de choque é da mesma ordem de grandeza da mudança de velocidade através da camada limite. A região de interação é dividida em região de interação forte e fraca, sendo expressões obtidas para os coeficientes de pressão e de atrito. A novidade deste estudo foi a utilização de três camadas para descrever o fenômeno na região de interação.

O caso de interações moderadas foi estudado por Messiter[17] e Liou e Adamson[18]. Nesse caso a onda de choque penetra bastante na região externa da camada limite, permanecendo fora da camada viscosa. O escoamento atrás da onda de choque pode então ser descrito por uma perturbação linear do escoamento à frente da onda de choque.

Vários outros exemplos de trabalhos teóricos poderiam ser mencionados aqui, inclusive vários trabalhos dos mesmos autores citados acima. Esses dois trabalhos, entretanto, tipificam bem e de modo completo o que foi proposto na época. Para maiores informações sobre trabalhos de natureza assintótica consulte Melnik e Grossman[7].

Os trabalhos experimentais sofreram um grande avanço no final dos anos 70 principalmente devido ao trabalho extremamente detalhado de Sawyer e Long[10]. Esse trabalho, no conhecimento do presente autor, é o mais completo, sendo portanto daqui para frente utilizado como referência experimental básica.

Todos os estudos analíticos foram motivados pelos baixos recursos computacionais disponíveis naquele tempo. Nos anos 80 e 90 a ênfase dos trabalhos mudou

para a área numérica. Entre os trabalhos iniciais, podemos mencionar Shang e Law[19], Viegas e Horstman[20], Visbal e Knight[21], Benay, Coet e Délerly[22]. As formulações para resolução do problema envolvem desde o uso da teoria de camada limite até esquemas envolvendo as equações de Navier-Stokes completa. A primeira destas técnicas tem se mostrado apropriada para escoamentos com interações viscosas-não viscosas moderadas; os modelos turbulentos desenvolvidos por Johnson e King[14] e por Stock e Haase[23] são exemplos típicos da utilização desta formulação com excelentes resultados. Para escoamentos sujeitos à separação e a alto grau de interação viscosa-não viscosa as equações de Navier-Stokes oferecem um resultado melhor. Revisões completas sobre a resolução numérica das equações podem ser obtidas dos trabalhos de revisão de Délerly[24] e Raghunathan[25].

III. O MODELO TEÓRICO DE SILVA FREIRE

III.1 A Estrutura Assintótica da Camada Limite Compressível Turbulenta

O método de perturbação, utilizado na análise deste fenômeno, é particularmente útil na identificação dos comprimentos de escala relevantes do escoamento e na descoberta das dependências entre as variáveis do escoamento e os parâmetros deste.

Na análise que se segue o campo do escoamento será dividido em três regiões. Duas regiões de fraca interação, uma à frente e outra atrás da onda de choque, e uma região de forte interação (figura III.1[3]). A região de forte interação é aquela onde as tensões de Reynolds podem ser desprezadas na camada da esteira. Isto conduz a uma formulação com três camadas (pisos) nesta região: a camada da parede, a camada de mistura ou acoplamento e a camada da esteira. A camada de mistura tem a finalidade de garantir que as soluções da primeira e terceira camadas sejam acopladas já que na primeira os termos predominantes são os viscosos enquanto na terceira são o gradiente de pressão e os termos de inércia. Isso significa que o único mecanismo físico capaz de transferir quantidade de movimento de uma para outra são as tensões de Reynolds. De qualquer forma, mostra-se que na região de interação, a espessura característica das duas regiões internas é muito menor que aquela da camada da esteira, de modo que numa primeira aproximação, a pressão ao longo da camada limite é constante nas duas primeiras. Esta característica do fenômeno de interação permite calcular a solução do escoamento na região de forte interação sem que qualquer hipótese relacionada à turbulência seja feita. Nas regiões de fraca interação o escoamento é dividido em duas camadas. É necessário que as soluções analíticas para cada camada sejam coincidentes nas fronteiras ao longo das direções principal do escoamento X e perpendicular a fronteira Y . Segue que a solução para a camada da esteira na região de forte interação dependerá fortemente da solução da camada à sua frente. Para fazer uma análise do problema da interação é portanto necessário obter uma solução assintótica para o escoamento não perturbado à frente da onda de choque. Para isso, recomenda-se à estrutura assintótica clássica da camada limite (Melnik e Grossmann[7]).

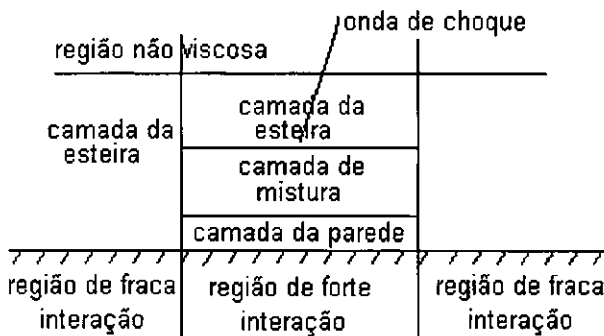


Figura III.1 Campo do escoamento em três regiões

III.2 Equações do Movimento

As equações do movimento válidas na região de interação são :

$$\left[u^2 - a^2 \right] \frac{\partial u}{\partial X} + \left[v^2 - a^2 \right] \frac{\partial v}{\partial Y} + uv \left[\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right] = 0, \quad (3.1)$$

$$a^2 = \frac{1}{2}[\gamma + 1] - \frac{1}{2}[\gamma - 1][u^2 + v^2], \quad (3.2)$$

$$\rho \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} = -\gamma^{-1} \nabla p, \quad (3.3)$$

$$\text{rot } \bar{u} = \gamma^{-1} T \nabla s. \quad (3.4)$$

Nas equações acima, $\bar{u} = [u, v]$, as velocidades são adimensionalizadas com relação a velocidade sônica, a^* , e as coordenadas X e Y com relação a ΔL e δ respectivamente (figura III.2). Pressão, massa específica e temperatura são referidos aos seus valores críticos à frente da onda de choque. O rotacional de \bar{u} é representado por $\text{rot } \bar{u}$, s significa entropia e γ é a razão entre os calores específicos.

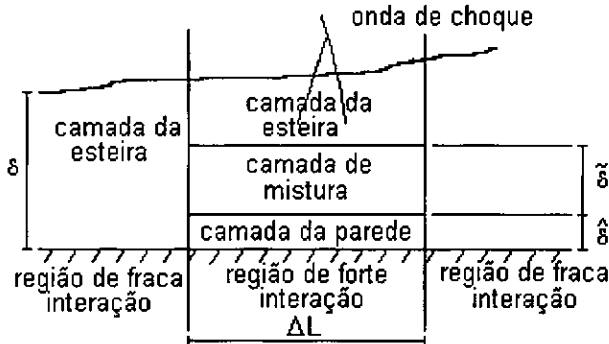


Figura III.2 Comprimentos característicos do escoamento

III.3 Análise Assintótica do Fenômeno

Analisando o fenômeno através do método de perturbações, Silva Freire[2] assumiu, para obter soluções analíticas, que os perfis de velocidades nas direções X e Y são

$$u(X, Y) = 1 + \epsilon u_1(x, y) + u_\tau u_2(y) \quad (3.5)$$

e

$$v(X, Y) = \epsilon^{3/2} v_1(x, y). \quad (3.6)$$

Na equação (3.5) u_τ corresponde a velocidade de atrito adimensional e ϵ é definido como $(M_{cr}^* - 1)$ sendo M_{cr}^* o número de Mach crítico. Os termos u_1 , $O(\epsilon)$, e v_1 , $O(\epsilon^{3/2})$, correspondem aos efeitos irrotacionais decorrentes do alto gradiente de pressão e o termo $u_2(y)$, $O(u_\tau)$, aos efeitos rotacionais devido à presença da camada limite. Com isto é possível se definir um potencial de velocidade ϕ_1 tal que $u_1 (= \phi_{1x})$ e $v_1 (= \phi_{1y})$.

Substituindo (3.5) e (3.6) em (3.1) chega-se as expressões para cada um dos seus respectivos termos :

1o. termo : $\left[u^2 - a^2 \right] \frac{\partial u}{\partial X}$

$$= \frac{\gamma + 1}{2} u^2 \frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\gamma - 1}{2} v^2 \frac{\partial u}{\partial X} ,$$

$$= \frac{\gamma + 1}{2\Delta L} \left(1 + 2\epsilon u_1 + 2u_\tau u_2 + 2\epsilon u_\tau u_1 u_2 + \epsilon^2 u_1^2 + u_\tau^2 u_2^2 \right) \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

$$- \frac{\gamma + 1}{2\Delta L} \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\gamma - 1}{2\Delta L} \epsilon^4 v_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} ,$$

2o. termo : $\left[v^2 - a^2 \right] \frac{\partial v}{\partial Y}$

$$= \frac{\gamma + 1}{2} v^2 \frac{\partial v}{\partial Y} - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\gamma - 1}{2} u^2 \frac{\partial v}{\partial Y} ,$$

$$= \frac{\gamma + 1}{2\delta} \epsilon^{9/2} v_1^2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\gamma + 1}{2\delta} \epsilon^{3/2} \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

$$+ \frac{\gamma - 1}{2\delta} \left(1 + 2\epsilon u_1 + 2u_\tau u_2 + 2\epsilon u_\tau u_1 u_2 + \epsilon^2 u_1^2 + u_\tau^2 u_2^2 \right) \epsilon^{3/2} \frac{\partial v_1}{\partial y} ,$$

3o. termo : $uv \left[\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right]$

$$= (1 + \epsilon u_1 + u_\tau u_2) \epsilon^{3/2} v_1 \left[\frac{\epsilon}{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{u_\tau}{\delta} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\epsilon^{3/2}}{\Delta L} \frac{\partial v_1}{\partial x} \right] .$$

A multiplicação dos termos acima por (ΔL) seguida da substituição da razão $(\Delta L/\delta)$ por $(\epsilon^{1/2})$, já que (ΔL) é $O(\epsilon^{1/2}\delta)$ [4], dá origem a expressão

$$\begin{aligned}
& (\gamma + 1) \left[\epsilon^2 u_1 + \epsilon u_\tau u_2 + \epsilon^2 u_\tau u_1 u_2 + \epsilon^3 \frac{u_1^2}{2} + \epsilon u_\tau^2 \frac{u_2^2}{2} \right] \frac{\partial u_1}{\partial x} + \\
& \quad \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) \epsilon^4 v_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \epsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + \\
& (\gamma - 1) \left[\epsilon^3 u_1 + \epsilon^2 u_\tau u_2 + \epsilon^3 u_\tau u_1 u_2 + \frac{1}{2} \epsilon^4 u_1^2 + \epsilon^2 u_\tau^2 \frac{u_2^2}{2} \right] \frac{\partial v_1}{\partial y} + \\
& \quad \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) \epsilon^5 v_1^2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + (\epsilon^3 + \epsilon^4 u_1 + \epsilon^3 u_\tau u_2) v_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \\
& \quad \left(\epsilon^2 u_\tau + \epsilon^3 u_\tau u_1 + \epsilon^2 u_\tau^2 u_2 \right) v_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 .
\end{aligned}$$

Reescrevendo a equação acima agrupando os termos de mesma ordem de grandeza chega-se a forma

$$\begin{aligned}
& \epsilon^2 \left[(\gamma + 1) u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] + \epsilon u_\tau \left[(\gamma + 1) u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] + \\
& \epsilon^3 \left[\left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) u_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + (\gamma - 1) u_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \right] + \\
& \epsilon^2 u_\tau \left[(\gamma + 1) u_1 u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + (\gamma - 1) u_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] + \epsilon u_\tau^2 \left[(\gamma + 1) \frac{u_2^2}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] + \\
& \epsilon^4 \left[\left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) v_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) u_1^2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + u_1 v_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \right] + \\
& \epsilon^3 u_\tau \left[(\gamma - 1) u_1 u_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + u_2 v_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + u_1 v_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] + \\
& \epsilon^2 u_\tau^2 \left[\left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) u_2^2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + u_2 v_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] + \epsilon^5 \left[\left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) v_1^2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] = 0 .
\end{aligned}$$

As três equações de diferentes ordem de aproximação para o caso sem transpiração obtidas por Silva Freire introduzindo potencial são

$O(\epsilon^2, \epsilon u_\tau)$

$$\left[\left(\gamma + 1 \right) \left(\phi_{1x} + \frac{u_\tau}{\epsilon} u_2 \right) \right] \phi_{1xx} + \left[-1 \right] \phi_{1yy} = 0, \quad (3.7)$$

$O(\epsilon^2, \epsilon u_\tau, \epsilon^3)$

$$\left[\left(\gamma + 1 \right) \left(\phi_{1x} + \frac{u_\tau}{\epsilon} u_2 + \epsilon \frac{\phi_{1x}^2}{2} \right) \right] \phi_{1xx} + \left[-1 + \epsilon(\gamma - 1)\phi_{1x} \right] \phi_{1yy} + \left[2\epsilon\phi_{1y} \right] \phi_{1xy} = 0, \quad (3.8)$$

$O(\epsilon^2, \epsilon u_\tau, \epsilon^3, \epsilon^2 u_\tau, \epsilon u_\tau^2)$

$$\left[\left(\gamma + 1 \right) \left(\phi_{1x} + \frac{u_\tau}{\epsilon} u_2 + \epsilon \frac{\phi_{1x}^2}{2} + \frac{u_\tau^2}{\epsilon} \frac{u_2^2}{2} + u_\tau u_2 \phi_{1x} \right) \right] \phi_{1xx} +$$

$$\left[-1 + \epsilon(\gamma - 1)\phi_{1x} + u_\tau(\gamma - 1)u_2 \right] \phi_{1yy} + \left[2\epsilon\phi_{1y} \right] \phi_{1xy} + u_\tau u_2 \phi_{1y} = 0. \quad (3.9)$$

Nas equações acima, $u_2(y)$, o perfil de velocidade obtido da região de fraca interação à frente da onda de choque, é calculado com a expressão[5]

$$u_2(y) = \frac{1}{\kappa} \ln y + \frac{P}{\kappa} \left[1 + \cos \pi y \right], \quad (3.10)$$

onde κ ($= 0.41$) é a constante de von Karman e P ($= 0.55$) é o perfil da função de Coles.

A formulação (3.7) é distinta de Melnik e Grossman[7] que apresenta correção de ordem (ϵ/u_τ) e não de ordem (u_τ/ϵ) como obtido aqui. É importante ressaltar que o procedimento aqui é mais rigoroso e que portanto, a presente formulação, deve ser correta.

A singularidade logarítmica da função $u_2(y)$ na parede foi contornada definindo-se um ponto de corte y_c para o perfil de velocidade e usando-se o fato da espessura da camada interna ser consideravelmente menor que a espessura δ da camada limite. Este ponto de corte é determinado pela camada de acoplamento $\tilde{\delta}$ ($= \Delta L u_\tau^2 / \epsilon$). A camada de acoplamento é a região onde os termos de inércia e de pressão possuem a mesma ordem de grandeza que os termos viscosos na equação da quantidade de movimento. O domínio na direção y será portanto $[y_c, 1]$.

As condições de contorno válidas para estas equações são :

$$\phi_{1x}[-0.5, y] = 1, \quad y \in [y_c, 1], \quad (3.11a)$$

$$\phi_{1x}[+0.5, y] = -1, \quad y \in [y_c, 1], \quad (3.11b)$$

$$\phi_{1x}[x, 1] = 1, \quad x \in [-0.5, 0), \quad (3.11c)$$

$$\phi_{1x}[x, 1] = -1, \quad x \in (0, 0.5], \quad (3.11d)$$

A distribuição de pressão é obtida ao resolver a equação (3.3). O procedimento é semelhante ao exposto anteriormente para as equações (3.7)-(3.9). A substituição de (3.5) e (3.6) em (3.3) da origem a expressão

$$[1 + \epsilon\phi_{1x} + u_\tau u_2] \epsilon\phi_{1xx} + \epsilon^2\phi_{1y} [\epsilon\phi_{1xy} + u_\tau(u_2)_y] = -\gamma^{-1}p_x.$$

Como a pressão deve ser constituída por termos da mesma ordem de grandeza daqueles do perfil de velocidade, é possível reescreve-la como

$$p_x = [\epsilon p_{1x} + \epsilon^2 p_{11x} + \epsilon u_\tau p_{2x} + \epsilon^3 p_{12} + \epsilon^2 u_\tau p_{21}].$$

Integrando na direção x a expressão acima obtem-se os termos

$$p_1 = -\gamma\phi_{1x},$$

$$p_2 = -\gamma u_2(\phi_{1x} - 1),$$

$$p_{11} = -\frac{\gamma}{2}(\phi_{1x}^2 - 1),$$

$$p_{12} = -\frac{\gamma}{2}(\phi_{1y}^2(x, y) - \phi_{1y}^2(-0.5, y)),$$

$$p_{21} = -\gamma \frac{du_2(y)}{dy} \int_{-0.5}^x \phi_{1y}(x, y) dx.$$

As três equações para as diferentes ordem de aproximação são :

$$O(\epsilon^2, \epsilon u_\tau)$$

$$p = 1 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_{11} + \epsilon u_\tau p_2, \quad (3.12)$$

$$O(\epsilon^2, \epsilon u_\tau, \epsilon^3)$$

$$p = 1 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_{11} + \epsilon u_\tau p_2 + \epsilon^3 p_{12}, \quad (3.13)$$

$$O(\epsilon^2, \epsilon u_\tau, \epsilon^3, \epsilon^2 u_\tau, \epsilon u_\tau^2)$$

$$p = 1 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_{11} + \epsilon u_\tau p_2 + \epsilon^3 p_{12} + \epsilon^2 u_\tau p_{21}. \quad (3.14)$$

A equação algébrica que prediz a velocidade de atrito na região de interação tem a forma

$$1 + \epsilon \phi_{1x}[x, 0] - \frac{2P}{\kappa} u_\tau = u_\tau \left[\frac{1}{\kappa} \ln \frac{\delta}{\bar{\delta}} + A \right] \left[1 + u_{\tau i}(x) \right], \quad (3.15)$$

onde A é o parâmetro obtido da lei da parede, $u_{\tau i}$ é a velocidade de atrito na região de interação, $(\delta/\bar{\delta} = u_\tau R_w)$ e $(\phi_{1x}(x, 0) = \phi_{1x}(x, y_c))$.

Os gráficos de (C_f) apresentados posteriormente são calculados com a expressão

$$C_f = 2 \left[\frac{u_\tau [1 + u_{\tau i}(x)]}{1 + \epsilon} \right]. \quad (3.16)$$

IV. ANÁLISE NUMÉRICA DO MODELO DE SILVA FREIRE

IV.1 Método das Diferenças Finitas

Baseado nas Refs.[6,7] escolheu-se o método das diferenças finitas. Este método consiste em substituir o domínio real por um domínio computacional, um domínio discreto formado por uma malha de M colunas por N linhas, e aproximar as derivadas da equação por diferenças finitas permitindo transformar a equação diferencial parcial(EDP) em um sistema algébrico de equações. Existem diversos esquemas de diferenças finitas[26-31] classificados como esquemas avançados, atrasados e centrados sendo que estes podem envolver um número de pontos diferentes tornando seus erros associados de maior ou menor ordem. A seguir são apresentados os esquemas de diferenças utilizados no código numérico desenvolvido. A malha utilizada é uniforme. A notação indicial usada atribui para as coordenadas x e y os índices i e j respectivamente significando coluna e linha.

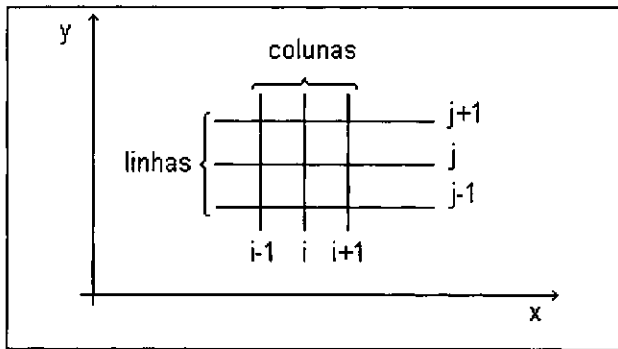


Figura IV.1 Notação do método das diferenças finitas

Os esquemas de diferenças finitas centrados são escritos como

$$\phi_x)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2),$$

$$\phi_y)_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2),$$

$$\phi_{xx})_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2),$$

$$\phi_{yy})_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2),$$

$$\phi_{xy})_{i,j} = \frac{\phi_y)_{i+1,j} - \phi_y)_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2, \Delta y^2),$$

e os esquemas atrasados são

$$\phi_x)_{i,j} = \frac{2\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i-2,j} + \phi_{i-3,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2),$$

$$\phi_x)_{i,j} = \frac{3\phi_{i,j} - 4\phi_{i-1,j} + \phi_{i-2,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2),$$

$$\phi_x)_{i,j} = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x),$$

$$\phi_{xx})_{i,j} = \frac{2\phi_{i,j} - 5\phi_{i-1,j} + 4\phi_{i-2,j} - \phi_{i-3,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2),$$

$$\phi_{xy})_{i,j} = \frac{2\phi_y)_{i,j} - \phi_y)_{i-1,j} - 2\phi_y)_{i-2,j} + \phi_y)_{i-3,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2, \Delta y^2),$$

$$\phi_{xy})_{i,j} = \frac{3\phi_y)_{i,j} - 4\phi_y)_{i-1,j} + \phi_y)_{i-2,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2, \Delta y^2),$$

$$\phi_{xy})_{i,j} = \frac{\phi_y)_{i,j} - \phi_y)_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x, \Delta y^2).$$

A necessidade de utilizar diferentes esquemas vem do comportamento das EDP que modelam o fenômeno. Estas apresentam característica de serem equações hiperbólicas na região supersônica e elípticas na região subsônica, onde são usados esquemas atrasados e centrados respectivamente. Desta forma pode-se respeitar as características matemáticas da equação.

Em uma dada região do domínio uma EDP pode ser classificada como elíptica, parabólica ou hiperbólica através do cálculo de seu discriminante $Disc$ sendo este positivo, nulo ou negativo respectivamente. Uma EDP em sua forma geral e a fórmula para calcular o discriminante são escritas como:

$$A\phi_{xx} + B\phi_{xy} + C\phi_{yy} + D\phi_x + E\phi_y + F\phi + G = 0,$$

$$Disc = B^2 - 4AC.$$

onde os coeficientes A, B, C, D, E, F e G são funções de x e y ou x, y, ϕ, ϕ_x e ϕ_y quando a equação é linear ou quase linear respectivamente.

Para cada ordem de aproximação apresentada no capítulo anterior os coeficientes A, B e C são :

$$O(\epsilon^2, \epsilon u_\tau)$$

$$\begin{aligned} A &= (\gamma + 1) \left(\phi_{1x} + \frac{u_\tau}{\epsilon} u_2 \right), \\ B &= 0, \\ C &= -1, \end{aligned}$$

$$O(\epsilon^2, \epsilon u_\tau, \epsilon^3)$$

$$\begin{aligned} A &= (\gamma + 1) \left(\phi_{1x} + \frac{u_\tau}{\epsilon} u_2 + \epsilon \frac{\phi_{1x}^2}{2} \right), \\ B &= 2\epsilon \phi_{1y}, \\ C &= -1 + \epsilon(\gamma - 1)\phi_{1x}, \end{aligned}$$

$$O(\epsilon^2, \epsilon u_\tau, \epsilon^3, \epsilon^2 u_\tau, \epsilon u_\tau^2)$$

$$\begin{aligned} A &= (\gamma + 1) \left(\phi_{1x} + \frac{u_\tau}{\epsilon} u_2 + \epsilon \frac{\phi_{1x}^2}{2} + \frac{u_\tau^2}{\epsilon} \frac{u_2^2}{2} + u_\tau u_2 \phi_{1x} \right), \\ B &= 2\epsilon \phi_{1y}, \\ C &= -1 + \epsilon(\gamma - 1)\phi_{1x} + u_\tau(\gamma - 1)u_2. \end{aligned}$$

IV.2 Algoritmo Desenvolvido

As soluções numéricas das equações são obtidas de um processo iterativo. A partir de uma condição inicial para a propriedade ϕ_1 no domínio computacional gera-se o sistema algébrico de equações, associado a EPD, que resolvido dará um novo valor para a propriedade ϕ_1 . Este valor, que marca o fim de uma iteração, será a condição inicial para a próxima iteração. Este processo se repete até a convergência.

Detalhando este algoritmo, chamo a atenção para o fato de não ser gerado um sistema algébrico de equações envolvendo todos os pontos da malha de uma só vez. Para cada iteração, monta-se um sistema algébrico de equações para os pontos de uma coluna, partindo para a próxima coluna após a solução do sistema algébrico e assim sucessivamente até chegar a última coluna completando assim uma iteração.

A seguir é mostrado como se gera, para uma certa coluna, o sistema de equações algébrico associado a equação (3.7). O mesmo raciocínio se aplica às equações (3.8) e (3.9). Esta equação será reescrita sendo que os seus coeficientes

A e B são calculados com os valores da iteração anterior linearizando-a. Desta forma (3.7) equivale a

$$A\phi_{1xx} - C\phi_{1yy} = 0.$$

Caso o discriminante seja positivo, caso de equação hiperbólica, ou negativo, caso de equação elíptica, as derivadas na direção x serão calculados com um esquema atrasado ou centrado, como já explicados. Para cada ponto j de uma dada coluna i a diferencial ϕ_{1xx} e ϕ_{1yy} será substituída pela diferença associada gerando a equação algébrica

$$a[j]\phi_1)_{i,j+1} + b[j]\phi_1)_{i,j} + c[j]\phi_1)_{i,j-1} = d[j].$$

Nesta equação $d[j]$ é formada pelos termos que envolvem os valores da variável ϕ_1 em pontos que não pertencem a coluna i . Estes pontos podem estar atrás ou à frente da coluna em questão de forma que valores da atual e da última iteração são usados. Para cada coluna então é gerado o sistema

$$MAT \times \Phi|_i = Vet,$$

onde $\Phi|_i$ é o vetor coluna ($N \times 1$)

$$\Phi|_i = \begin{pmatrix} \phi_{1i,1} \\ \phi_{1i,2} \\ \vdots \\ \phi_{1i,N-1} \\ \phi_{1i,N} \end{pmatrix},$$

MAT é a matrix tridiagonal ($N \times N$)

$$MAT = \begin{pmatrix} b[1] & c[1] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a[2] & b[2] & c[2] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a[N-1] & b[N-1] & c[N-1] & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a[N] & b[N] & \cdot \end{pmatrix}$$

e Vet é o vetor coluna ($N \times 1$)

$$Vet = \begin{pmatrix} d[1] \\ d[2] \\ \vdots \\ d[N-1] \\ d[N] \end{pmatrix}.$$

A matriz MAT é tridiagonal pois o esquema de diferenças na direção y é centrado. Este sistema algébrico é resolvido usando a inversão da matriz com o algoritmo de Thomas. Poderíamos aqui ter usado o método de Newton caso não fossem feitas as linearizações exposta como sugere Murman e Cole[6].

Ao final da solução do sistema para cada coluna, um fator de relaxação é usado para recalcular os valores de ϕ_1 dando origem a expressão

$$\Phi|_i^{n+1} = \omega \Phi|_i^{n+1} + (1 - \omega) \Phi|_i^n,$$

sendo ω ($-0.9 < \omega < 1.1$) o fator de relaxação.

A condição inicial para a variável ϕ_1 ao longo do domínio foi idêntica à condição na fronteira $y = 1$ onde uma variação linear e contínua para ϕ_1 é usada de tal forma que as condições de contorno (2.11c) e (2.11d) sejam satisfeitas. Finalizando, nas expressões acima $\Delta x = 1/(N - 1)$ e $\Delta y = (1 - y_c)/(M - 1)$.

V. EQUAÇÕES GERAIS DO FENÔMENO PARA UMA FORMULAÇÃO GERAL DE NAVIER-STOKES

V.1 Introdução

O escoamento turbulento é caracterizado por suas grandezas apresentarem comportamento aleatório no tempo e no espaço. O fato de a partir dessas grandezas poder se definir um valor médio no tempo, deu origem às equações de transporte para grandezas médias. Estas equações serão apresentadas neste capítulo. Na forma aqui apresentada, essas equações são idênticas às equações válidas para o escoamento laminar caso as propriedades não sejam interpretadas como valores médios no tempo e a viscosidade turbulenta seja desprezada. Esta característica permite que o código desenvolvido seja testado para situações mais simples como os escoamentos laminar ou turbulento sob uma placa plana adiabática sem gradiente de pressão. Também serão apresentadas neste capítulo as condições de contorno e inicial válidas para os escoamentos estudados.

V.2 Equações que Governam o Fenômeno

As equações da continuidade e Navier-Stokes podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial G_i}{\partial y} = \frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y}, \quad (5.1)$$

sendo

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}, F_i = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \end{pmatrix}, G_i = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ p + \rho v^2 \end{pmatrix},$$
$$F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}.$$

As tensões turbulentas são definidas como

$$\sigma_{xx} = \frac{4}{3}\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (5.2)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{4}{3}\mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5.3)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y} + \mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.4)$$

Nas expressões acima μ_{eff} é a soma da viscosidade molecular e turbulenta ($\mu + \rho\nu_t$) sendo μ calculada pela lei de Sutherland que é escrita como

$$\mu = 1.458 \times 10^6 \frac{T^{1.5}}{T + 110.4} \text{ [Kg/m.s]}. \quad (5.5)$$

A viscosidade cinemática turbulenta ν_t será calculada com os modelos algébrico de Cebeci-Smith e de meia equação de Johnson-King os quais serão detalhados no capítulo VI.

O fenômeno será considerado adiabático com temperatura na parede constante podendo ser tratado como isoentálpico. Atkin afirma que o erro associado a esta aproximação é menor que 3% próximo a parede e consideravelmente menor na camada externa. A equação da energia é substituída pela condição de temperatura total constante para todos os pontos do domínio, o que reduz o tempo computacional em 20%. A equação que representa esta condição é

$$h_o = c_p T + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = const, \quad (5.6)$$

onde c_p ($= 1004.98$ [J/Kg]) é o calor específico a pressão constante.

No capítulo VIII serão descritas as hipóteses que permitem escrever outras expressões que relacionam o campo de velocidade na direção do escoamento com a temperatura. Estas expressões são válidas para os escoamentos laminar e turbulento sem gradiente de pressão.

Considerando que o fluido possui comportamento de gás ideal, a equação de estado pode ser usada, sendo escrita como

$$p = \rho RT, \quad (5.7)$$

onde R ($= 287.1387$ [m^2/s^2K]) é a constante universal dos gases.

As equações são adimensionalizadas usando como referência U_∞ , L , T_∞ , ρ_∞ , μ_∞ .

V.3 Condições de Contorno e Inicial

Pode ser feita uma distinção entre as condições inicial e de contorno para os escoamentos sem e com a presença de uma onda de choque. Os primeiros, laminar ou turbulento, sem gradiente de pressão, possuem velocidade constante fora da camada limite, não sendo esta a realidade dos escoamentos com presença de uma onda de choque. Por serem considerados, os escoamentos, adiabáticos, a temperatura pode ser especificada apenas nas condições de reservatório. A figura V.1 apresenta o domínio com suas condições de contorno. A fronteira pode ser dividida em quatro partes: parede ou inferior, superior, entrada e saída.

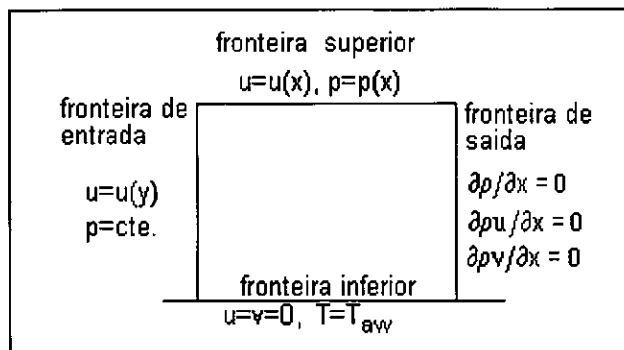


Figura V.1 Domínio e condições de contorno

V.3.1 Fronteira de Entrada

No caso laminar o perfil de velocidade u foi obtido da solução de Blasius (laminar incompressível) com um fator de correção devido a compressibilidade, como será visto no capítulo VIII. No caso turbulento estes perfis foram obtidos por um código que resolve as equações da camada limite desenvolvido por Su Jian[32]. No escoamento com presença de choque este perfil foi utilizado em conjunto com uma lei da parede derivada por East[33] que é válida para a subcamada laminar e para região logarítmica. A pressão ao longo da camada limite é constante. Com a propriedade u pode-se calcular T , e com a equação de estado e a pressão obter a massa específica.

V.3.2 Fronteira Superior

Ao contrário de Atkins[11], que utilizou as relações de Rankine-Hugoniot para modelar as propriedades ao longo desta fronteira, foram utilizados os dados experimentais de Sawyer e Long[10] para obter o valor da velocidade na direção principal do escoamento u fazendo com que os resultados numéricos gerados correspondam aos resultados experimentais com os quais eles serão comparados. A massa específica foi calculada pela hipótese de conservação de massa ($\rho u = cte$). A temperatura é uma função de u enquanto a pressão pode ser calculada pela equação de estado. Este procedimento altera ligeiramente a distribuição de pressão em relação aos dados experimentais mais elimina certas oscilações indesejáveis na massa específica ρ .

V.3.3 Fronteira na Saída

Os valores das propriedades nesta fronteira fazem parte da solução do código numérico sendo, as propriedades ρ , u e v , calculados através de uma extrapolação linear[11,30 e 34] para os fluxos de massa e quantidade de momento. A partir da distribuição para massa específica e velocidade pode-se calcular a temperatura e pressão.

V.3.4 Fronteira Inferior (Superfície Sólida)

As velocidades são nulas e a temperatura, constante, é um dado experimental. Para calcular a pressão assume-se que a derivada normal da pressão é nula, indicando que não há variação da pressão ao longo de Y próximo a parede.

V.3.5 Condição Inicial para o Domínio

Valores iniciais para as propriedades do domínio são necessários para inicializar o procedimento iterativo. Estas podem ser escritas como uma função de seus valores no contorno. Um exemplo é a variação linear da propriedade entre os perfis de entrada e saída para a velocidade u onde os valores para esta propriedade na fronteira de saída pode ser calculado pelo esquema apresentado para a fronteira de entrada.

VI. MODELOS DE TURBULÊNCIA

VI.1 Introdução

O tensor de Reynolds ($\tau_{i,j} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$) que surge na dedução das equações de transporte para as grandezas médias no tempo foi incorporado as expressões (5.2), (5.3) e (5.4) através do coeficiente viscosidade efetiva ($\mu_{eff} = \mu + \rho \nu_t$) dando origem ao problema de fechamento que consiste em modelar a viscosidade cinemática turbulenta (ν_t). Dois modelos foram implementados com este intuito, Cebeci-Smith e Johnson-King, e serão detalhados a seguir.

VI.2 Modelo de Cebeci-Smith

A viscosidade cinemática turbulenta é calculada através de expressões algébrica sendo o domínio dividido em duas regiões : interna e externa. Na região interna a hipótese do comprimento de mistura de Prandtl(1925) é usada, sendo a viscosidade cinemática turbulenta igual ao produto de um comprimento característico com uma velocidade característica. Na região externa utiliza-se a formulação de Clauser escrita como

$$\left. \begin{array}{l} \nu_t = \nu_{ti} \quad \text{para } y < y_c \\ \nu_t = \nu_{to} \quad \text{para } y > y_c \end{array} \right\} \text{ onde } (y = y_c) \text{ quando } (\nu_{ti} = \nu_{to}). \quad (6.1)$$

Na camada interna a hipótese de Prandtl é utilizada para calcular (ν_{ti}) dando origem a expressão

$$\nu_{ti} = (D \kappa y)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (6.2)$$

onde $\kappa (= 0.41)$ é a constante de von Karman.

O fator de amortecimento D é calculado pela expressão

$$D = \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right]. \quad (6.3)$$

Na expressão acima A^+ geralmente assume o valor 26, porém este valor faz com que o termo de amortecimento se reduza a zero quando a tensão na parede é

próxima de zero. A modificação proposta por Cebeci(1970) foi trocar a tensão na parede τ_w pela tensão cisalhante local. Perto da parede

$$A^+ = \frac{26}{\sqrt{1 + y^{++} p^+}}, \quad (6.4)$$

sendo

$$y^{++} = \frac{y}{\nu_w} \sqrt{\tau / \rho_w}, \quad (6.5)$$

$$p^+ = \frac{\nu_w}{\rho_w u_\tau^3} \frac{\partial p_w}{\partial x}, \quad (6.6)$$

$$\tau = \tau_w + y \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (6.7)$$

Na camada externa a formulação de Clauser é usada sendo escrita como

$$\nu_{to} = 0.0168 u_\delta \delta_i^* \Gamma. \quad (6.8)$$

Na expressão acima, a espessura de deslocamento da camada limite incompressível (δ_i^*) e a função de intermitência de Klebanoff (Γ) são calculadas pelas expressões :

$$\delta_i^* = \int_0^\delta \left[1 - \frac{u}{u_\delta} \right] dy, \quad (6.9)$$

$$\Gamma = \left[1 + 5.5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \right]^{-1}. \quad (6.10)$$

Por ser um modelo algébrico este parte do princípio que existe um equilíbrio local, a produção de turbulência é dissipada localmente não sendo convectada. Isto não é uma boa aproximação como pode ser observado nos escoamentos onde ocorre descolamento e $\partial u / \partial y = 0$ fazendo com que $\nu_{ti} = 0$. Para tentar capturar os efeitos de história do escoamento, modelos mais elaborados, foram propostos no intuito de refinar o calculo da viscosidade turbulenta. Neste trabalho o modelo de meia equação de Johnson-King foi utilizado com este objetivo.

VI.3 Modelo de Johnson-King

O modelo de turbulência de Johnson-King, chamado de modelo de meia equação, pode ser resumido como sendo composto de três partes :

- 1) Um modelo de não equilíbrio para a viscosidade cinemática turbulenta.
- 2) Uma equação que descreve o comportamento da máxima viscosidade cinemática turbulenta ao longo do domínio.
- 3) Um modelo de equilíbrio para a viscosidade cinemática turbulenta.

Desde sua apresentação[14], muitas modificações nele foram feitas[35,36], sendo uma discussão detalhada encontrada em [37]. A modelagem apresentada aqui é a mesma utilizada em [11], que serviu de base para o desenvolvimento deste trabalho.

Na sua primeira versão, a distribuição da viscosidade turbulenta é calculada por

$$\nu_t = \nu_{to} \left[1 - \exp\left(-\frac{\nu_{ti}}{\nu_{to}}\right) \right]. \quad (6.11)$$

Esta expressão é válida para o modelo de equilíbrio e não equilíbrio sendo que $\nu_t \approx \nu_{ti}$ quando $\nu_{ti} \ll \nu_{to}$ e $\nu_t \approx \nu_{to}$ quando $\nu_{ti} \gg \nu_{to}$. O modelo faz com que ν_t seja dependente de ν_{to} em quase toda a camada limite e promove um acoplamento suave entre as regiões onde $\nu_t \approx \nu_{ti}$ e $\nu_t \approx \nu_{to}$.

VI.3.1 Modelo de Não Equilíbrio

Na expressão acima ν_{ti} é calculada por

$$\nu_{ti} = D^2 \kappa y \sqrt{-u'v'_m}. \quad (6.12)$$

O mesmo termo de amortecimento, D , apresentado na formulação de Cebeci é válido aqui sendo que o valor $A^+ = 15$ é usado ao invés de $A^+ = 26$. Isto se deve ao fato da expressão (6.12) depender de y e não y^2 perto da parede como é o caso anterior. Sendo assim A^+ é escrito como :

$$A^+ = \frac{15}{\sqrt{1 + y^{++}p^+}}. \quad (6.13)$$

A expressão válida para calcular ν_{to} é

$$\nu_{to} = \text{constante} \times \Gamma, \quad (6.14)$$

sendo Γ a função de intermitência de Klebanoff. A constante na equação (6.14) é determinada iterativamente, após se resolver a equação

$$\nu_t|_m = \frac{(-\overline{u'v'}_m)}{(\partial\bar{u}/\partial y)|_m} = \frac{(-\overline{u'v'}_m)^{1/2}}{(\partial\bar{u}/\partial y)|_m} (-\overline{u'v'}_m)^{1/2}. \quad (6.15)$$

Na equação (6.15) seus termos foram rearranjados mostrando que a viscosidade pode ser escrita como o produto de um comprimento característico e uma velocidade característica. A expressão (6.11) é usada para calcular ν_t . Antes de resolver iterativamente esta equação para determinar a constante é necessário encontrar o valor de $-\overline{u'v'}_m$. Este é obtido ao se resolver a equação diferencial ordinária (EDO) que descreve a máxima energia cinética turbulenta (apresentada na próxima secção). A hipótese de viscosidade turbulenta é usada para determinar a distribuição de tensão ao longo da camada limite, porém é a EDO para a tensão de Reynolds que determina o nível de tensão turbulenta.

VI.3.2 Equação que Descreve a Máxima Energia Cinética Turbulenta

A equação que permite determinar a energia cinética turbulenta ao longo do domínio é obtida a partir das equações de Navier-Stokes sendo

$$\underbrace{\bar{u} \frac{\partial k_c}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k_c}{\partial y}}_{\text{conveccão}} = - \underbrace{\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\text{produção}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v'k'_c} + \frac{\overline{p'v'}}{\rho} \right)}_{\text{difusão}} - \underbrace{\epsilon}_{\text{dissipação}}. \quad (6.15)$$

Este modelo parte da hipótese de que a máxima energia cinética turbulenta (k_c), ocorre ao longo de um caminho s que é aproximadamente paralelo ao eixo x . Esta hipótese permite simplificar a equação acima, eliminando o termo convectivo $\bar{v} \partial k_c / \partial y$ gerando a equação

$$\underbrace{\bar{u}_m \frac{\partial k_{cm}}{\partial x}}_{\text{conveccão}} = - \underbrace{\bar{u}'v'_m \left(\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial y} \right)_m}_{\text{produção}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v'k_c'} + \frac{\overline{p'v'}}{\rho} \right)_m}_{\text{difusão}} - \underbrace{\epsilon_m}_{\text{dissipação}} \quad (6.16)$$

O índice m indica que as propriedades são avaliadas ao longo do caminho de máxima energia cinética turbulenta.

Continuando a simplificar esta equação, um comprimento de escala de dissipação é definido como

$$L_m = \left(-\overline{u'v'_m} \right)^{3/2} / \epsilon_m. \quad (6.17)$$

Usando a hipótese de que $((-\overline{u'v'_m}/\epsilon_m) = a_1 = cte)$ e multiplicando a equação (6.16) por $(L_m/(-\overline{u'v'_m}))$ chega-se a expressão

$$\left(-\overline{u'v'_m} \right)^{1/2} = \underbrace{L_m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_m}_{\text{produção}} - \underbrace{\frac{L_m}{(-\overline{u'v'_m})} D_m}_{\text{difusão}} - \underbrace{\frac{L_m \bar{u}_m}{a_1 (-\overline{u'v'_m})} \frac{d(-\overline{u'v'_m})}{dx}}_{\text{conveccão}}. \quad (6.18)$$

Por conveniência o termo de difusão turbulenta foi representado por (D_m) . O comprimento de escala de dissipação (L_m) e o termo de difusão (D_m) são modelados pelas expressões

$$\begin{aligned} L_m &= 0.40 y_m \quad \text{para } y/\delta \leq 0.225 \\ L_m &= 0.09 \delta \quad \text{para } y/\delta > 0.225 \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$D_m = \frac{C_{dif} (-\overline{u'v'_m})^{3/2}}{a_1 \delta [0.7 - (y_m/\delta)]} \left| 1 - \sqrt{\frac{\nu_{to}}{\nu_{to,eq}}} \right|. \quad (6.20)$$

As constantes C_{dif} e a_1 assumem os valores 0.3 e 0.2 respectivamente.

Na equação (6.18) o termo $L_m(\partial \bar{u}/\partial y)_m$ é interpretado como a raiz quadrada da tensão turbulenta resultante se os termos de difusão e convecção fossem desprezíveis. Este termo é então reescrito como $(-\overline{u'v'_{m,eq}})^{1/2}$, o qual será determinado pela formulação de equilíbrio.

Para resolver a equação (6.18) é interessante linearizá-la fazendo

$$g = (-\overline{u'v'_m})^{-1/2} \quad \text{e} \quad g_{eq} = (-\overline{u'v'_{m,eq}})^{-1/2}.$$

Após estas alterações é possível reescrever a equação (6.18) como

$$\frac{dg}{dx} = \frac{a_1}{2u_m L_m} \left\{ \left(1 - \frac{g}{g_{eq}} \right) + \frac{C_{dif} L_m}{a_1 \delta [0.7 - (y_m/\delta)]} \left| 1 - \sqrt{\frac{\nu_{to}}{\nu_{to,eq}}} \right| \right\}. \quad (6.21)$$

VI.3.3 Modelo de Equilíbrio

As expressões usadas para calcular a distribuição de viscosidade cinemática turbulenta são

$$\nu_{t,eq} = \nu_{to,eq} \left[1 - \exp\left(-\frac{\nu_{ti,eq}}{\nu_{to,eq}}\right) \right], \quad (6.22)$$

$$\nu_{ti,eq} = D^2 \kappa y \sqrt{-u'v'_{m,eq}}, \quad (6.23)$$

$$\nu_{to,eq} = 0.0168 u \delta_i^* \Gamma. \quad (6.23)$$

A equação (6.23) é idêntica a (6.8). A tensão turbulenta máxima é calculada de forma semelhante à explicada para o modelo de não equilíbrio. O modelo de equilíbrio é muito importante. Primeiro, ele é usado para se obter os valores de $\nu_{to,eq}$ e g_{eq} que são usados na equação (6.21). Segundo, ele fornece a distribuição resultante para a viscosidade quando $dg/dx \approx 0$. Finalmente, ele é usado para inicializar a distribuição da viscosidade no princípio do cálculo como segue :

$$\nu_t = \nu_{t,eq} \quad e \quad g = g_{eq} \left(i.e. \frac{dg}{dx} = 0 \right). \quad (6.24)$$

VI.4 Distribuição da Viscosidade Turbulenta Modelada

Com o intuito de ilustrar os resultados numéricos obtidos com os modelos apresentados acima as figuras 6.1 e 6.2 apresentam a variação da viscosidade cinemática turbulenta e da tensão τ_{xy} ao longo da camada limite para os dois diferentes modelos. As condições de escoamento (caso 1.3a, $x = -0.162$) serão definidas no capítulo IX.

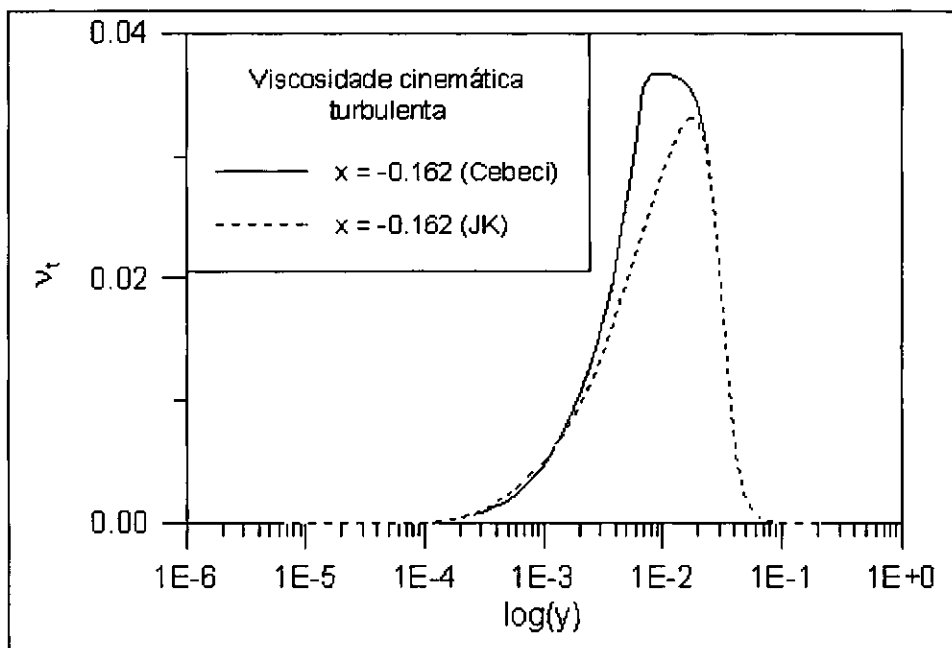


Figura VI.1- Variação de ν_t ao longo da camada limite

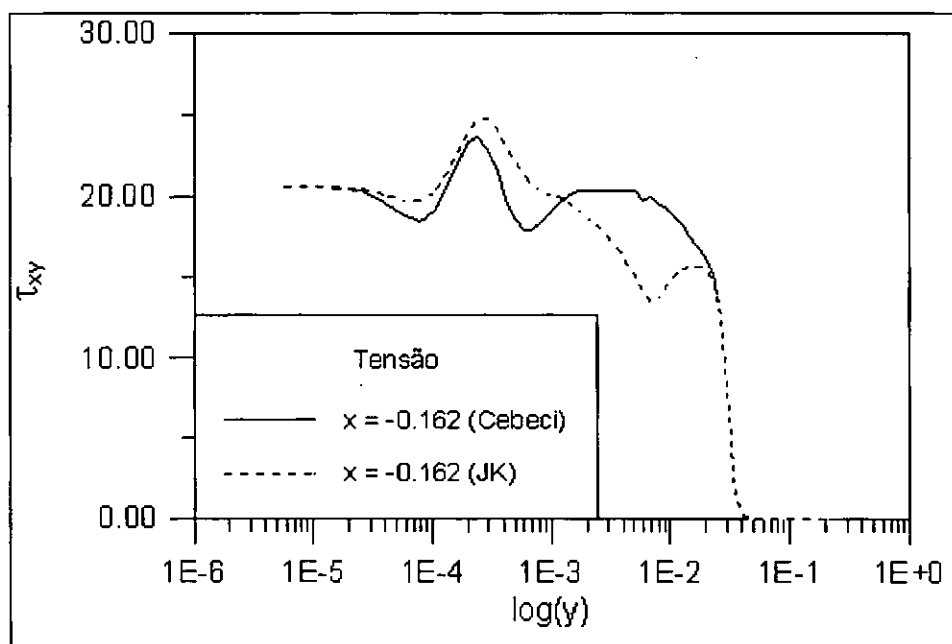


Figura VI.2- Variação de τ_{xy} ao longo da camada limite

VII. SOLUÇÃO NÚMERICA

VII.1 Introdução

Serão descritas ao longo deste capítulo as técnicas utilizadas para desenvolver um código numérico bi-dimensional que resolva as equações de Navier-Stokes apresentadas no capítulo V em conjunto com as equações que modelam a viscosidade cinemática turbulenta apresentadas no capítulo VI. A malha numérica na direção do escoamento(x) é uniforme apenas para os dois primeiros casos sem gradiente de pressão, sendo não uniforme na presença de choque com a malha concentrada na região onde as propriedades variam bruscamente. Na direção transversal(y) a malha é não uniforme concentrando o maior número de pontos próximo da parede.

VII.2 Método Numérico

VII.2.1 O Esquema

O esquema explícito de Bralovskaya possui a vantagem de facilitar a sua implementação para malhas não uniformes. Contribui ainda mais para se desenvolver um código conciso, o fato de ser um esquema de dois passos de diferenças centradas com os cálculos apresentando a mesma estrutura, como segue :

1o. Passo

$$U^* = U^n + \Delta t(\partial_x F_v^n + \partial_y G_v^n - \partial_x F_i^n - \partial_y G_i^n), \quad (7.1)$$

2o. Passo

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t(\partial_x F_v^n + \partial_y G_v^n - \partial_x F_i^* - \partial_y G_i^*). \quad (7.2)$$

Na equações acima, os operadores ∂_x e ∂_y correspondem às aproximações de segunda ordem para as derivadas $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$ respectivamente. Os termos viscosos não são recalculados no tempo intermediário (*).

Carter[38], após análise, propôs uma expressão para calcular o valor máximo de Δt para cada iteração como sendo o menor valor entre as expressões

$$\Delta t_{conv} = \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + a\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}}, \quad (7.3)$$

$$\Delta t_{visc} = \frac{0.5}{\gamma\nu\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)}. \quad (7.4)$$

VII.2.2 Domínio Computacional

A domínio computacional para todos os tipos de escoamento estudado neste trabalho possui a forma apresentada na fig. VII.1.

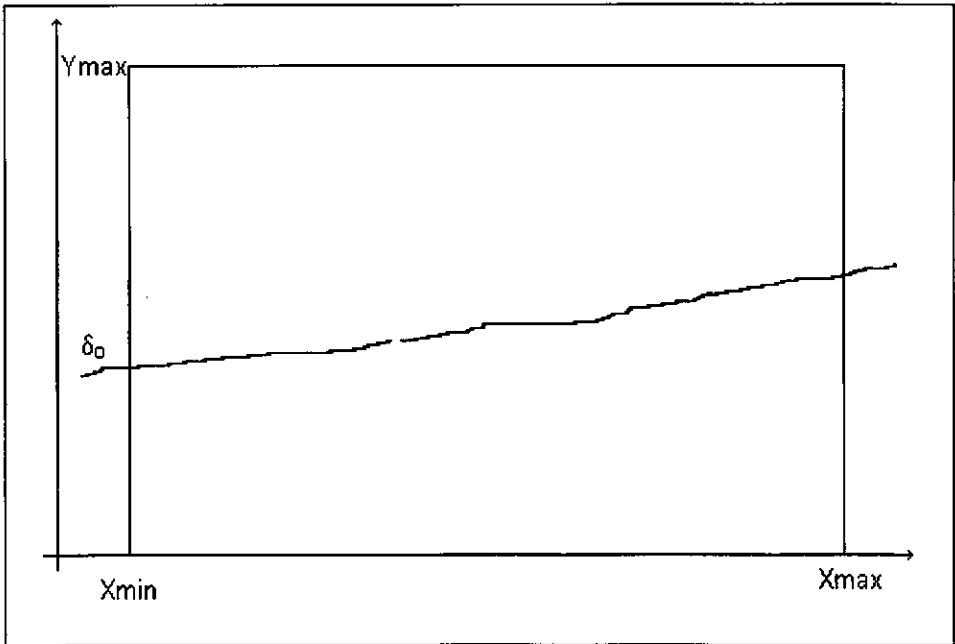


Figura VII.1 Domínio computacional.

Os valores das grandezas X_{min} , X_{max} , δ_0 e Y_{max} variam para cada escoamento e serão apresentados no capítulo IX. Estas e outras grandezas são definidas em um arquivo de configuração lido pelo código numérico.

VII.2.3 Malha

A geração da malha visa obter um menor número de pontos sem comprometer a precisão da solução. Em Atkin[11], pode-se encontrar resumido os fatores de espaçamento utilizado em ambas direções. Estes fatores são funções de δ_0 e serão apresentados no capítulo IX. A figura VII.2 ilustra bem as características da malha não uniforme em ambas as direções.

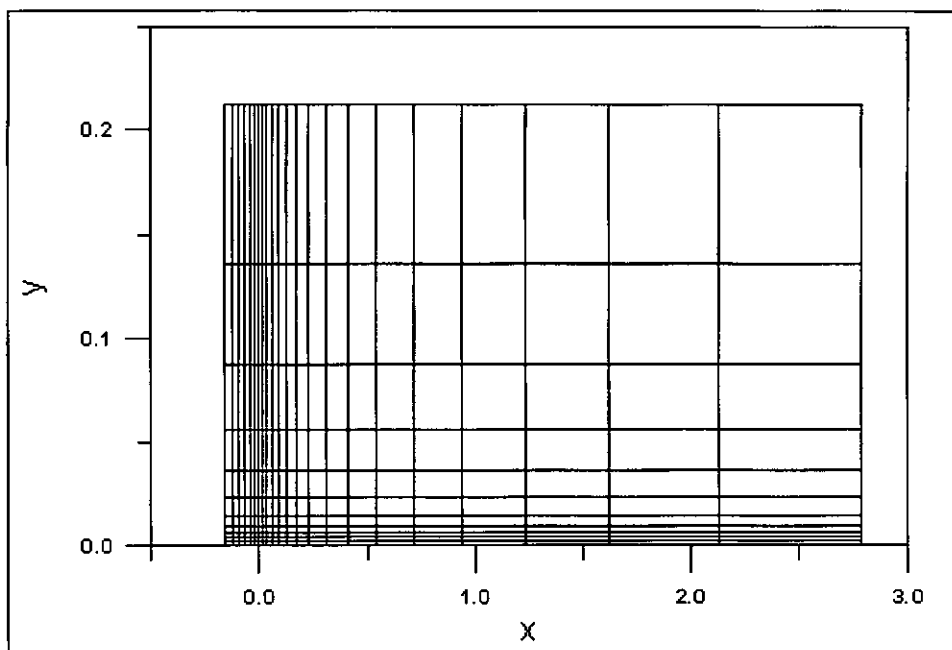


Figura VII.2 Malha não uniforme.

VII.2.4 Discretização

O método das diferenças finitas, apresentado no capítulo IV, possui diversos esquemas para representar uma derivada, sendo estes de diferentes ordens de aproximação. O esquema de Bralovskaya, como dito, usa esquemas de diferenças centrados. Há porém a necessidade de mostrar a dedução de esquemas gerais válidos para malhas não uniformes. Esquemas elaborados envolvendo um número grande de pontos podem ser deduzidos. Neste trabalho são usados esquemas de 2a. ordem.

VII.2.5 Viscosidade Artificial

A viscosidade artificial surge pela necessidade de eliminar oscilações que ocorrem na região onde existe descontinuidades devido a utilização de um esquema de diferenças centrada. Ela é simulada pelo acréscimo dos dois termos vistos a seguir :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial G_i}{\partial y} = \frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + k_x \Delta_x (D_x) + k_y \Delta_y (D_y). \quad (7.9)$$

Nas expressões acima Δ_x e Δ_y são operadores definidos como $\Delta_x(D_x) = D_{x,i+1/2} - D_{x,i-1/2}$. Os termos k_x , k_y , D_x e D_y são

$$k_x = 2\frac{y}{\delta_o} \quad \text{para} \quad y < \frac{\delta_o}{2}, \quad (7.10a)$$

$$k_x = 1 \quad \text{para} \quad y > \frac{\delta_o}{2}, \quad (7.10b)$$

$$k_y = 0 \quad \text{para} \quad y < \frac{\delta_o}{2}, \quad (7.10c)$$

$$k_y = 2\frac{y}{\delta_o} - 1 \quad \text{para} \quad \frac{\delta_o}{2} < y < \delta_o, \quad (7.10d)$$

$$k_y = 1 \quad \text{para} \quad y > \delta_o, \quad (7.10e)$$

$$D_x = \lambda\epsilon_2\Delta_x\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \lambda\epsilon_4\Delta_x^3\left(\frac{\partial^3 q}{\partial x^3}\right) \quad \text{com} \quad q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}, \quad (7.11a)$$

$$D_y = \lambda\epsilon_2\Delta_y\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) + \lambda\epsilon_4\Delta_y^3\left(\frac{\partial^3 q}{\partial y^3}\right) \quad \text{com} \quad q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}. \quad (7.11b)$$

O segundo termo da expressão (7.11) é destinado a gerar uma estabilidade contra as oscilações espaciais na solução longe do choque. O primeiro é destinado a gerar uma suavização do choque que é necessário para prevenir a solução de valores elevados e oscilações perto do choque. Nestas equações surgiram dois novos coeficientes ϵ_2 e ϵ_4 que são responsáveis por abilitar ou desabilitar os termos próximo do choque e são escritos como

$$\epsilon_2 = \min\left(\frac{1}{2}, k_2\varsigma_m\right) \quad \text{e} \quad \epsilon_4 = \max(0, k_4 - \alpha\varsigma_m), \quad (7.12)$$

sendo

$$k_2 = 1, \quad k_4 = 0.025 \quad \text{e} \quad \alpha = 2.$$

O sensor relacionado ao choque ς_m é calculado pela expressão :

$$\varsigma_m = \max (\varsigma_{i+1}, \varsigma_i, \varsigma_{i-1}), \quad (7.13)$$

sendo

$$\varsigma_i = \left| \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{p_{i+1} + 2p_i + p_{i-1}} \right|. \quad (7.14)$$

VIII. VALIDAÇÃO NUMÉRICA

VIII.1 Introdução

Uma forma de se testar um código numérico é comparar o seu resultado com um resultado padrão. Este padrão pode ser :

- uma solução analítica ou analítica-numérica,
- dados experimentais ou
- resultado de um outro código numérico testado e aprovado.

O fato de existir uma transformada para as equações que descrevem o escoamento laminar compressível sob uma placa plana adiabática sem gradiente de pressão que permite relacionar a solução de Blasius para o escoamento incompressível foi determinante para usá-lo na validação do código desenvolvido.

A existência de leis da parede e esteira comprovadas[1] com uma gama de dados experimentais[39] válidas para o escoamento turbulento compressível sobre uma placa plana adiabática sem gradiente de pressão, motivou usá-las também neste processo de validação.

Este capítulo apresenta a solução válida para o escoamento laminar, as leis da parede e esteira existentes para o escoamento turbulento e inclui ainda algumas relações usados no trabalho de Sawyer e Long[10] na compilação dos seus resultados experimentais.

VIII.2 Laminar Compressível - Solução de Similaridade

As transformadas de Illingworth[41,42] possibilitam a partir das equações da camada limite compressível chegar a equação diferencial ordinária

$$(Cf'')' + ff'' = 0, \quad (8.1)$$

sendo

$$C = C(\eta) = \frac{\rho\mu}{\rho_\delta\mu_\delta}, \quad (8.2)$$

onde as variáveis de similaridade com suas respectivas condições de contorno são

$$\xi = \rho_\delta u_\delta \mu_\delta x, \quad (8.3a)$$

$$\eta = \left(\frac{Re_{xe}}{2} \right)^{1/2} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_s} \frac{dy}{x}, \quad (8.3b)$$

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(\infty) = 1.0. \quad (8.4)$$

A solução desta equação pode ser relacionada a solução da equação de Blasius para o escoamento laminar incompressível (vide figura VIII.1) através da transformação

$$\frac{u}{u_s} = f'(\eta) \approx f'(\eta_B \sqrt{C_w}). \quad (8.5)$$

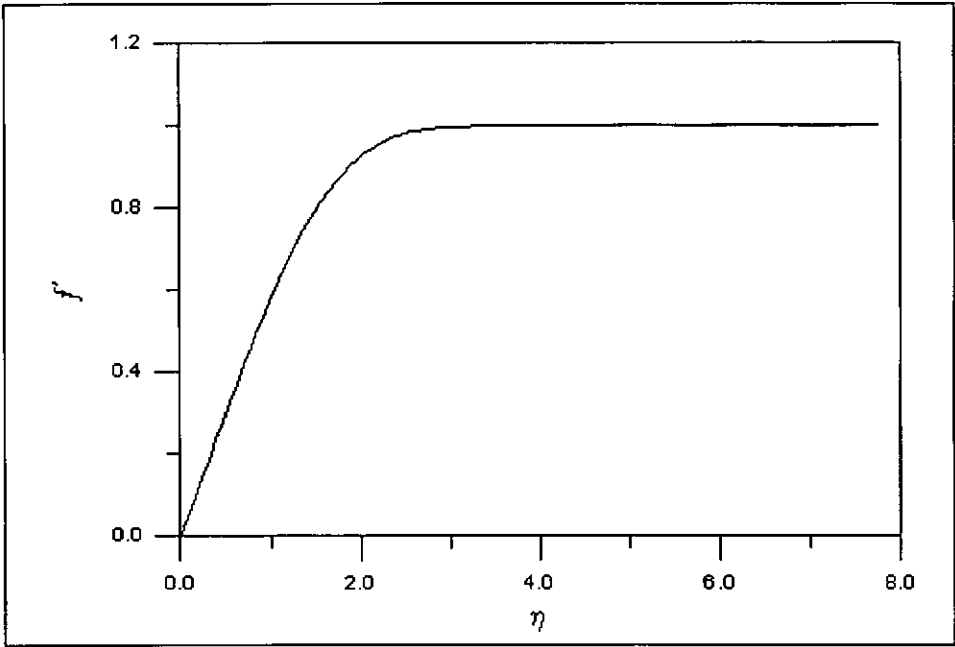


Figura VIII.1- Solução do escoamento laminar compressível em variáveis de similaridade ($f' \times \eta$)

A relação proposta por Crocco-Busemann[41,42] relaciona o perfil de velocidade com a temperatura sendo

$$T \approx T_w + (T_{aw} - T_w) \frac{u}{u_s} - \frac{ru^2}{2c_p}, \quad (8.6)$$

onde $r (\approx Pr^{1/2})$ é o fator de recuperação, T_w é a temperatura na parede e $T_{aw} (= T_s + \frac{ru_s^2}{2c_p})$ é a temperatura adiabática na parede.

VIII.3 Turbulento Compressível - Solução de Similaridade

VIII.3.1 Hipótese de Morkovin

No escoamento turbulento compressível os mecanismos de transportes associados a flutuações de propriedades como temperatura, massa específica, pressão, viscosidade e velocidade influenciam, no sentido de aumentar, a troca de quantidade de movimento e energia quando comparado com o escoamento laminar[1]. Morkovin, em 1960, deduziu a expressão

$$\frac{T'}{T} = -\frac{\rho'}{\rho} = -(\gamma - 1)M^2 \frac{u'}{u}. \quad (8.7)$$

Bradshaw e Ferris deduziram, a partir desta expressão, que se a razão ρ'/ρ é pequena, a estrutura turbulenta da camada limite não seria afetada pelos efeitos de compressibilidade. Chamaram isto de hipótese de Morkovin. Como na região externa da camada limite as flutuações da velocidade são geralmente pequenas e o número de Mach grande, $(T'^2)^{1/2}/T$ não assume em qualquer parte do domínio valor superior a 0.1 mesmo para números de Mach igual a 5. Pode-se concluir então que as flutuações de temperatura e massa específica não assumem importância significativa no campo de turbulência até o número de Mach igual a 5. Isto significa que o conhecimento adquirido sobre a estrutura turbulenta em escoamento subsônico pode ser estendida para o escoamento supersônico.

Esta hipótese, que pode ser interpretada como uma afirmativa de que a estrutura turbulenta da camada limite para escoamento com número de Mach até 5 - possivelmente 7 - é virtualmente a mesma dos escoamentos incompressível. Muito interessante do ponto de vista da mecânica dos fluidos, esta hipótese não pode ser provada rigorosamente do ponto de vista matemático. Se fosse possível prová-la, seria necessário existir uma transformada que transformasse as equações de conservação de massa e quantidade de movimento para um escoamento compressível nas equações válidas para o escoamento incompressível com os coeficientes de transportes variáveis.

VIII.3.2 Soluções Semi-Empíricas para a Distribuição de Temperatura

A equação da energia sob certas restrições possui solução analítica sendo uma função da velocidade média. A seguir serão apresentadas duas equações. A primeira,

$$\frac{T}{T_\delta} \Big|_{T_w=cte} = -\frac{T_w}{T_\delta} + \frac{(T_r - T_w)}{T_\delta} \frac{u}{u_\delta} - r \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \left(1 - \left(\frac{u}{u_\delta} \right)^2 \right), \quad (8.8)$$

válida para os casos em que a temperatura na parede é constante e a segunda,

$$\frac{T}{T_\delta} \Big|_{q_w=0} = 1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \left(1 - \left(\frac{u}{u_\delta} \right)^2 \right), \quad (8.9)$$

quando a parede é adiabática onde $r (= 0.896)$ é o fator de recuperação, T_w é a temperatura na parede, T_δ é a temperatura na região externa da camada limite e $T_r (= T_\delta (1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2))$ é a temperatura de recuperação.

A restrição válida para as equações (8.8) e (8.9) é que o número de Prandtl misto (Pr_M), definido a seguir, esteja compreendido no intervalo ($0.7 \leq Pr_M \leq 1.0$) sendo

$$Pr_l = \frac{c_p \mu}{k_t} = \frac{\text{dissipação}}{\text{condução}}, \quad Pr_t = \frac{c_p \mu_t}{k_{t_t}} \quad \text{e} \quad Pr_M = \frac{c_p (\mu + \mu_t)}{(k_t + k_{t_t})}.$$

A equação (8.9) é tida como uma primeira aproximação para o caso de haver gradiente de pressão por ser semelhante a equação válida para este caso com a hipótese $Pr_M = 1$.

VIII.3.3 Leis de Similaridade no escoamento Turbulento Compressível

Respaldados pela hipótese de Morkovin, estudos a respeito de escoamentos compressíveis começam pela busca de relações que, sendo válidas com sucesso para o escoamento incompressível, possam ser estendidas para este. Sendo assim, é compreensível que se tente encontrar relações matemáticas que se assemelhem às leis da parede e da esteira. É esperado também que se utilize da estrutura assintótica da camada limite dividindo-a então em uma região externa e outra interna, sendo esta formada por uma subcamada laminar, e uma região onde é válida a lei logarítmica.

VIII.3.3.1 Camada Interna

A distribuição de velocidade na camada interna é baseada nas seguintes hipóteses :

- (1) o termo convectivo da equação do movimento na direção do escoamento principal é pequeno,

- (2) o termo relativo ao gradiente de pressão é ignorado para simplificar a discussão e
- (3) a tensão total τ_{total} é constante na região da camada interna e é dado pela expressão

$$\tau_{total} = \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \overline{\rho u'v'}. \quad (8.10)$$

VIII.3.3.2 Subcamada laminar

Assumindo que na subcamada laminar a tensão molecular $\mu \partial u / \partial x$ é grande comparado com a tensão de Reynolds $-\overline{\rho u'v'}$ e igual a tensão na parede τ_w , o gradiente de velocidade pode ser escrito como

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau^2}{\nu_w} \left(\frac{T_w}{T} \right)^\omega. \quad (8.11)$$

Na equação (8.11) a viscosidade varia com a temperatura segundo a expressão

$$\mu = \mu_w \left(\frac{T}{T_w} \right)^\omega. \quad (8.12)$$

Substituindo a expressão (8.8) em (8.11) e fazendo $\omega = 1$ é possível escrever

$$\frac{u_{s,l}}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu_w}, \quad (8.13)$$

onde $u_{s,l}$ é definido como

$$u_{s,l} = u \left[1 + \frac{1}{2} a^* \frac{u}{u_{\delta/}} - \frac{1}{3} b^{*2} \left(\frac{u}{u_\delta} \right)^2 \right], \quad (8.14)$$

e

$$a^* = \frac{T_\delta}{T_w} \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \right) - 1, \quad (8.15a)$$

$$b^{*2} = r \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \frac{T_\delta}{T_w}. \quad (8.15b)$$

Quando $T = T_w$ e $M_\delta \rightarrow 0$, a equação (8.13) se reduz a expressão válida para o escoamento turbulento incompressível.

VIII.3.3.3 Região logarítmica

Entre a subcamada laminar e a camada externa existe uma região onde a tensão de Reynolds $-\overline{\rho u'v'}$ é dominante sendo, por hipótese, igual a τ_w . Fazendo a suposição adicional que a teoria do comprimento de mistura de Prandtl é válida para a camada limite compressível turbulenta ($\tau_w = -\overline{\rho u'v'} = l^2 \rho \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$) o gradiente de velocidade é

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\kappa y} u_\tau \left(\frac{T}{T_w}\right)^{1/2}, \quad (8.16)$$

Nas expressões acima κ é a constante de von Karman e l é o comprimento de mistura de Prandtl. Uma integração da equação acima, com o uso da expressão (8.8), nos fornece

$$\frac{u^*}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y u_\tau}{\nu_w} \right) + C_1^*, \quad (8.17)$$

a lei da parede clássica para escoamentos compressíveis, onde u^* e C_1^* são escritos como

$$u^* = \frac{u_\delta}{b^*} \sin^{-1} \left[\frac{2b^{*2} \frac{u}{u_\delta} - a^*}{(a^{*2} + 4b^{*2})^{1/2}} \right]. \quad (8.18)$$

O sufixo 1 significa que as grandezas são obtidas no extremo inferior onde ainda é válida a lei logarítmica, que só pode, a princípio, ser determinada experimentalmente. As constantes a^* e b^* já foram definidas em (8.15a) e (8.15b).

Quando a parede é adiabática a temperatura na parede é igual a temperatura de recuperação ($T_w = T_r$). Isto faz com que $a^* = 0$. Neste caso os dados experimentais mostram que a razão u_1/u_δ fica compreendida entre os limites ($0.3 \leq u_1/u_\delta \leq 0.6$). Fazendo $u_1/u_\delta = 0.5$, a função \sin^{-1} pode ser substituída pela expressão interna ao colchetes. Isto é válido para número de Mach superior a 8 com um erro relativo inferior a 4%. Com isto C_1 pode ser escrito como :

$$C_1^* \approx \frac{u_1}{u_\tau} - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y_1 u_\tau}{\nu_w} \approx 5.10. \quad (8.19)$$

Observe que este valor é o mesmo usado no caso incompressível. A figura VIII.2 ilustra a expressão (8.17).

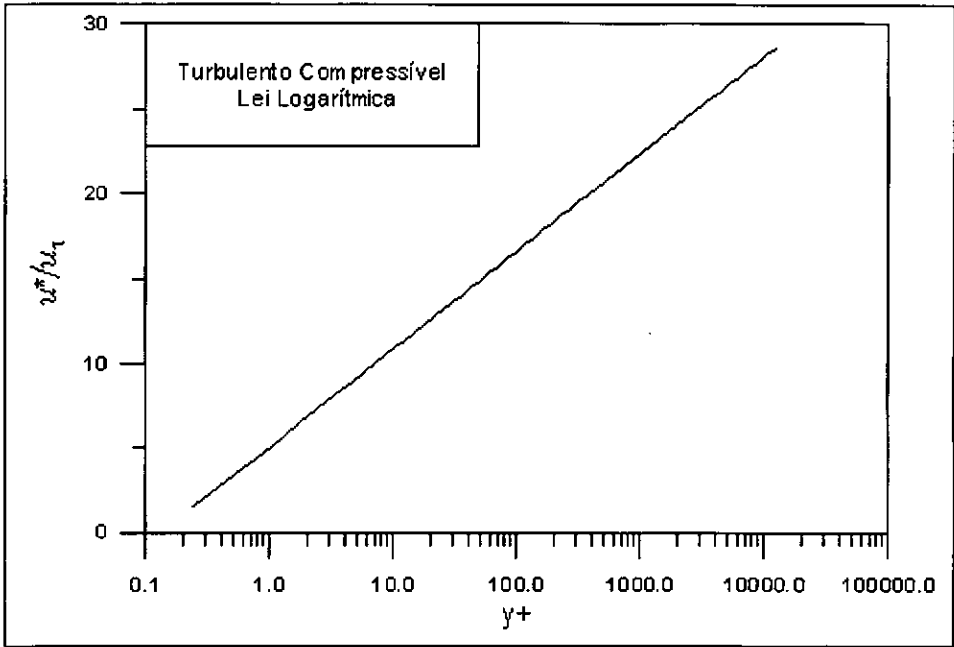


Figura VIII.2- Lei logarítmica ($\frac{u^*}{u_\tau} \times y^+$)

VIII.3.3.4 Região externa - lei da esteira

A existência de um perfil de similaridade na região externa em uma camada limite compressível turbulenta pode ser verificado se for feito um gráfico da diferença de velocidade $(u_\delta^* - u^*)/u_\tau$ por y/δ' onde as transformadas para as velocidades u_δ^* , u^* e o comprimento característico δ' devem ser determinadas. Como a velocidade média u converge assintoticamente para o seu valor limite u_δ o comprimento da camada limite é uma quantidade mal definida, sendo interessante usar um comprimento característico oriundo de uma integral. Para o escoamento turbulento incompressível

$$\Delta = \int_0^\delta \frac{u_\delta - u}{u_\tau} dy. \quad (8.21)$$

A única dificuldade em usar como referência o comprimento (Δ) é que ambos, o perfil de velocidade e o coeficiente de atrito devem ser conhecidos, não sendo sempre isto possível. Se ambos são conhecidos, então a distribuição da diferença de velocidade e o comprimento característico (Δ) podem ser transformados e utilizados para o escoamento compressível. É esperado então que a expressão

$$\frac{u_\delta^* - u^*}{u_\tau} = f_4\left(\frac{y}{\Delta^*}, \text{parâmetro devido ao gradiente de pressão}\right) \quad (8.22)$$

exista onde

$$\Delta^*/\delta = \int_0^1 \frac{u_\delta^* - u^*}{u_\tau} d(y/\delta). \quad (8.23)$$

A transformada apresentada em (8.18) é válida para u_δ e u^* . Não existe outra justificativa para a relação (8.22) que não seja a verificação experimental. O estudo de vários dados experimentais de escoamentos sob uma placa plana sem gradiente de pressão, principalmente ao longo de paredes adiabáticas, conduziram a expressão semi-empírica

$$\frac{u_\delta^* - u^*}{u_\tau} = -M \ln \frac{y}{\Delta^*} - N, \quad (8.24)$$

representada na figura VIII.3 onde $M (= 4.70)$ e $N (= 6.74)$ são constantes. Esta expressão é válida para Re_{δ_2} compreendido no intervalo $(1.5 \times 10^3 \leq Re_{\delta_2} \leq 4 \times 10^4)$ onde

$$Re_{\delta_2} = \frac{\rho_\delta u_\delta \delta_2}{\mu_w}, \quad (8.25)$$

e

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_\delta u_\delta} \left(1 - \frac{u}{u_\delta}\right) dy. \quad (8.26)$$

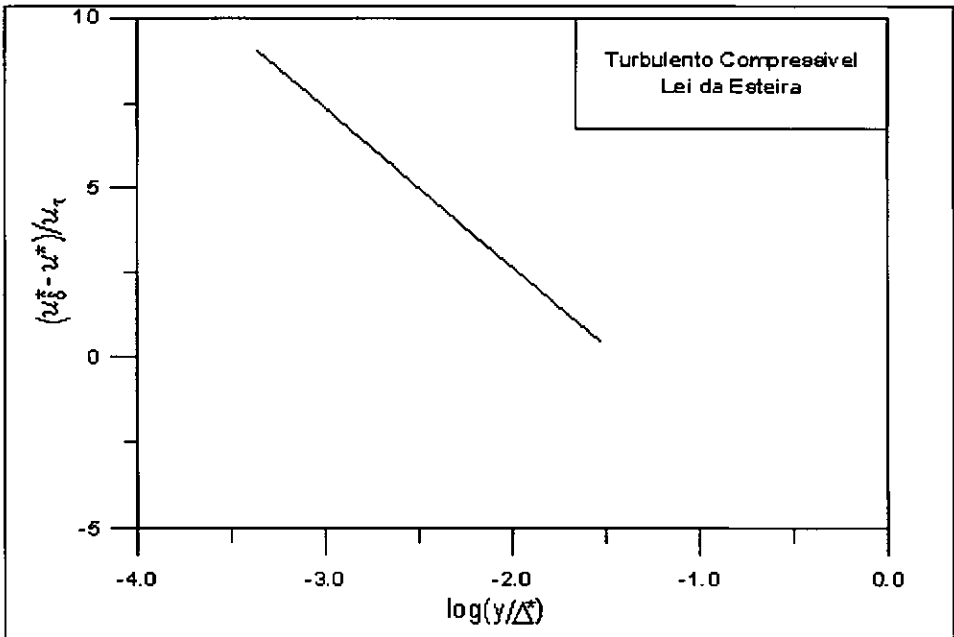


Figura VIII.3- Lei da esteira $\left(\frac{u_\delta^* - u^*}{u_\tau} \times \ln \frac{y}{\Delta^*}\right)$

VIII.4 Turbulento Compressível com Choque

Os resultados numéricos obtidos pelos dois códigos para o escoamento turbulento com presença de uma onda de coque foram comparados com os dados experimentais de Sawyer e Long[10]. Ao compilarem os dados experimentais estes autores escrevem a lei da parede através da expressão :

$$\frac{u}{u_\tau} = A \log \left(\frac{yu_\tau}{\nu_\delta} \right) + B. \quad (8.27)$$

Para cada situação experimental, sete no total, os coeficientes (A) e (B) foram calculados para cada estação à frente e atrás da onda de choque. A média destes coeficientes foi calculada permitindo reescrever a expressão (8.27) para os perfis localizados à frente e atrás da onda de choque. Este procedimento dá origem as expressões (8.28) e (8.29) mostradas abaixo :

$$\frac{u}{u_\tau^i} = 6.16 \log \left(\frac{yu_\tau^i}{\nu_\delta} \right) + 3.6, \quad (8.28)$$

$$\frac{u}{u_\tau^i} = 4.77 \log \left(\frac{yu_\tau^i}{\nu_\delta} \right) + 6.6. \quad (8.29)$$

Onde u_τ^i , a velocidade de atrito incompressível, é calculada pela expressão :

$$u_\tau^i = u_\delta \left(\frac{C_{fp}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 0.2M_\delta^2 \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (8.30)$$

Na expressão (8.30) C_{fp} é o coeficiente de fricção obtido segundo procedimento experimental explicado em [10].

Não é possível medir com precisão a velocidade para pontos próximos à superfície. Uma expressão, útil para se calcular a velocidade na direção principal para estes pontos particulares, é a lei da parede de East[33] escrita como

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{F} \sin \left[F \left\{ (2\kappa)^{-1} \ln \left(y^{+2} \frac{\kappa}{D} + 1 \right) + D \left(1 - \exp(-y^+/D) \right) \right\} \right], \quad (8.31)$$

onde

$$F = M_\tau \sqrt{\frac{r(\gamma - 1)}{2}} = \frac{u_\tau}{T_w} \times 0.021033, \quad (8.32)$$

$$D = 8.73 \left(1 + 45F^2 \right), \quad (8.33)$$

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu_w}. \quad (8.34)$$

Na expressão acima κ é a constante de von Karman e r é o fator de recuperação.

Segundo Sawyer e Long[10] a velocidade de atrito (u_τ) é obtida usando a expressão (8.31) em conjunto com o valor experimental da velocidade na direção do escoamento medida em ($y \approx 0.8$). Com este valor pode-se calcular a velocidade nos pontos próximos a parede. A figura VIII.4 permite a visualização das expressões (8.28), (8.29) e (8.31). Nesta, a variável de similaridade y^+ assume dois valores ao mesmo tempo. O primeiro, válido para a lei da parede de East, é $y^+ = yu_\tau/\nu_w$ enquanto o segundo, válido para as outras duas expressões, é $y^+ = yu_\tau^2/\nu_w$.

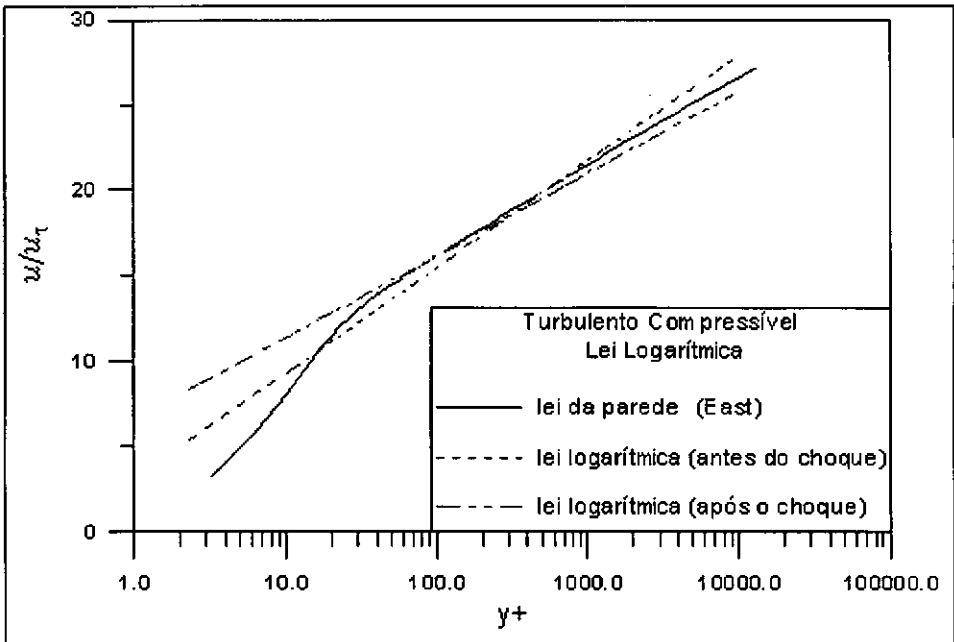


Figura VIII.4- Lei logarítmica ($\frac{u}{u_\tau} \times y^+$)

IX. ANÁLISE DE RESULTADOS

IX.1 Introdução

Um dos objetivos alcançados ao desenvolver o segundo código numérico, foi torná-lo flexível procurando guardar as principais informações que caracterizem um escoamento em um arquivo de configuração como pode ser visto no apêndice I. Estas informações principais que caracterizam o escoamento e os resultados numéricos obtidos são apresentados neste capítulo.

IX.2 Laminar Compressível

A tabela IX.1 mostra os valores que caracterizam o escoamento laminar compressível estudado:

Tabela IX.1 - Características do escoamento laminar compressível.

X_{min} [m]	X_{max} [m]	P [N/m ²]	T_w [K]	M_δ
1.000	2.000	100000.0	300.0	5.0

A malha usada pelo código numérico foi uniforme contendo 33 colunas e 33 linhas. Nas figuras IX.1 e IX.2 as variações de u/u_δ e T ao longo da camada limite para diferentes estações (x) pode ser visto.

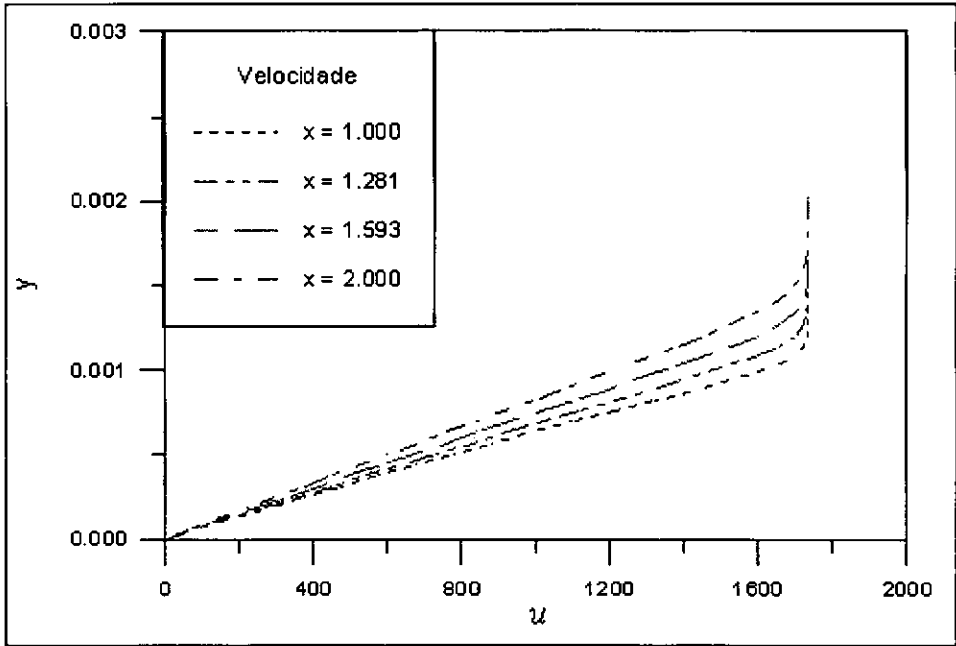


Figura IX.1- Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações

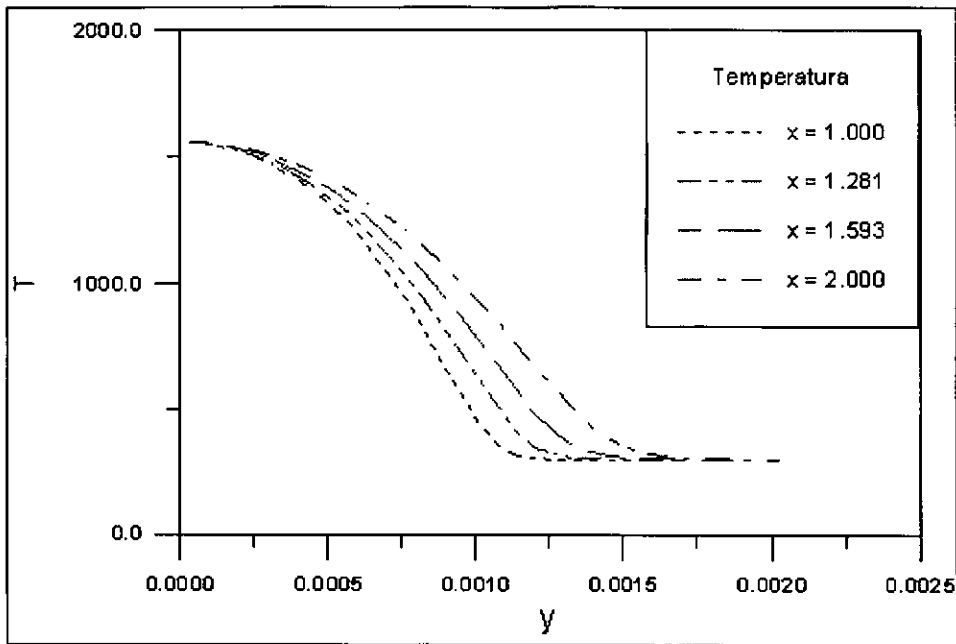


Figura IX.2- Variação de T ao longo da camada limite para diferentes estações

A figura IX.3 apresenta um gráfico da solução através das variáveis de similaridade.

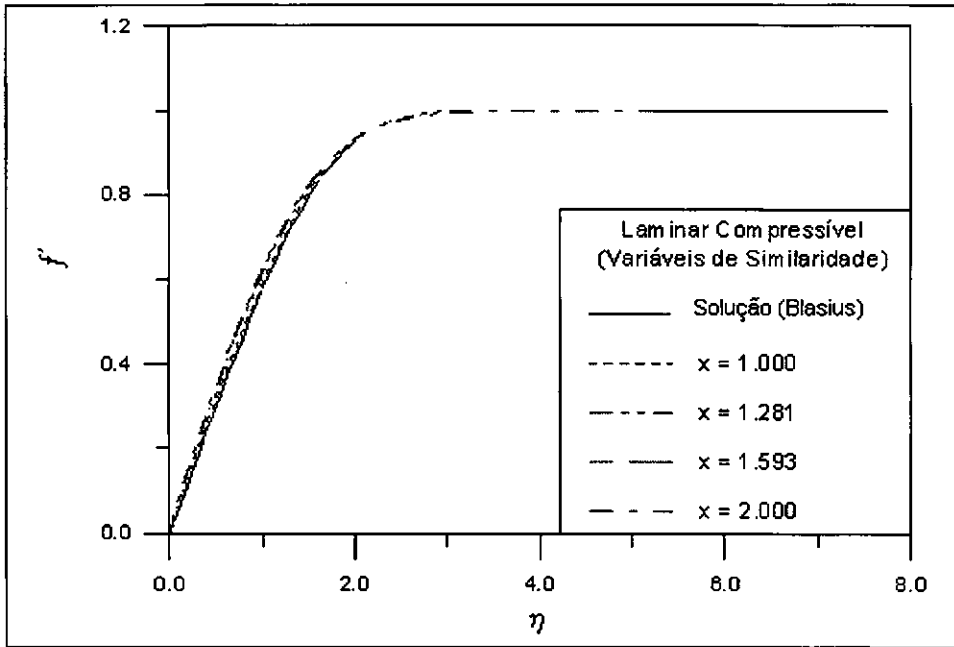


Figura IX.3- Variação da variável de similaridade f' ao longo da camada limite para diferentes estações

IX.3 Turbulento compressível

O escoamento turbulento estudado está documentado em [39] pelo número 7402. Caracteriza-se ele por ser adiabático e não possuir gradiente de pressão na região de teste. A tabela IX.2 mostra os valores que o caracterizam.

Tabela IX.2 - Características do escoamento turbulento compressível.

Numero	X [m]	M_δ	P_δ [N/m ²]	T_w [K]	U_δ [m/s]
74021801	0.368	4.5169	3119.3	294.75	711.97
74021805	1.384	4.4928	3231.9	289.20	719.10

A malha usada pelo código numérico foi uniforme na direção x contendo 33 colunas, e não uniforme na direção y com 33 linhas sendo que a maioria dos pontos se encontram próximas à parede.

As figuras IX.4 e IX.5 mostram como a velocidade na direção do escoamento (u) e a temperatura (T) variam ao longo da camada limite para diferentes estações.

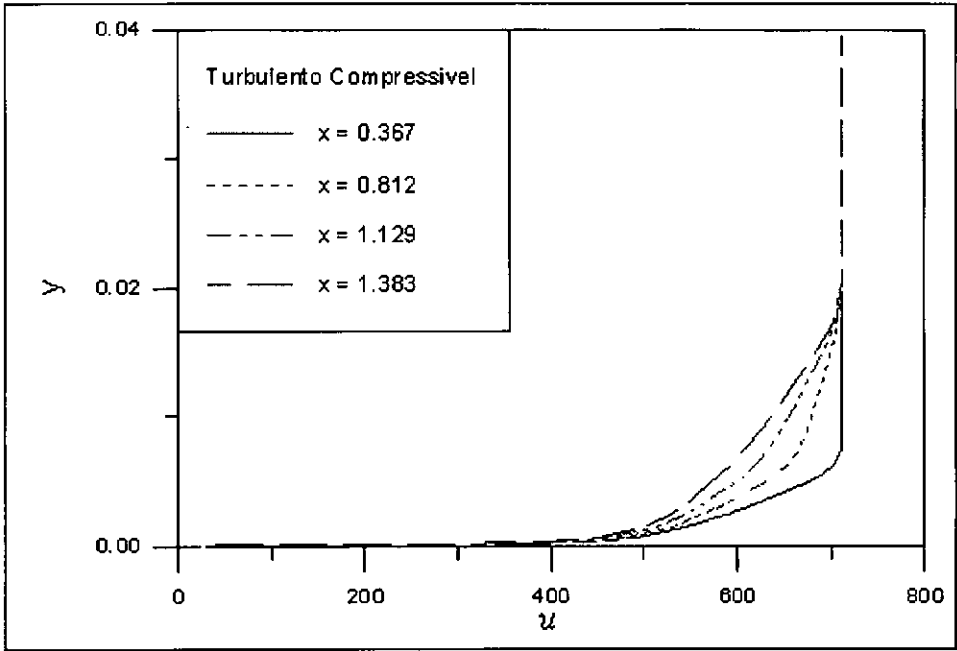


Figura IX.4- Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações

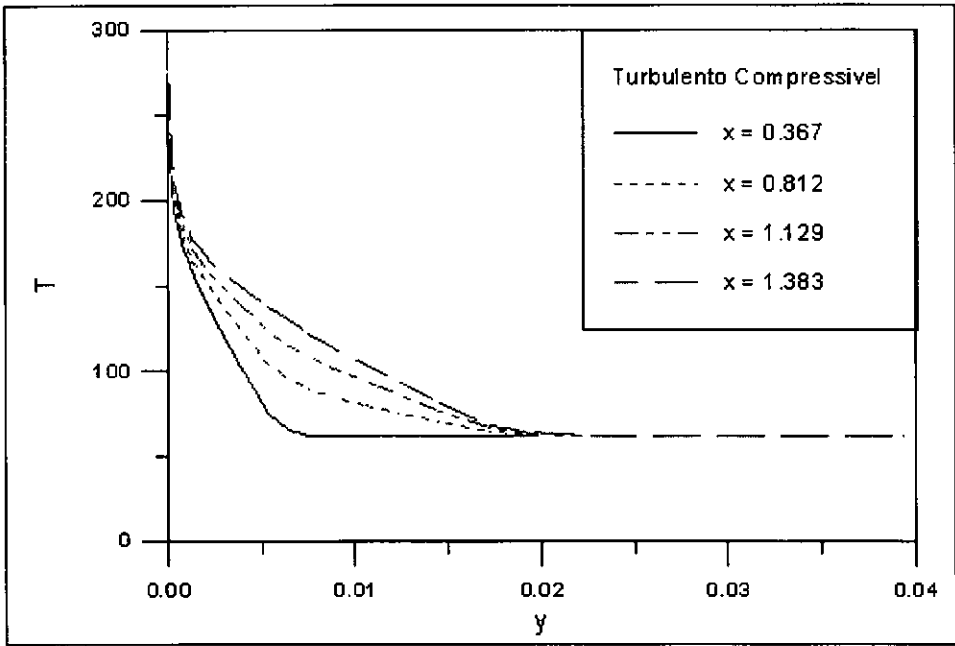


Figura IX.5- Variação de T ao longo da camada limite para diferentes estações

As figuras IX.6 e IX.7 mostram como se comportam ao longo de várias estações as variáveis de similaridade u^*/u_τ por y^+ e $\Delta U^*/u_\tau$ por $\log y/\Delta^*$. Ambas apresentam boa concordância para as diferentes estações quando comparados com os dados experimentais corroborando para aumentar o crédito do código numérico.

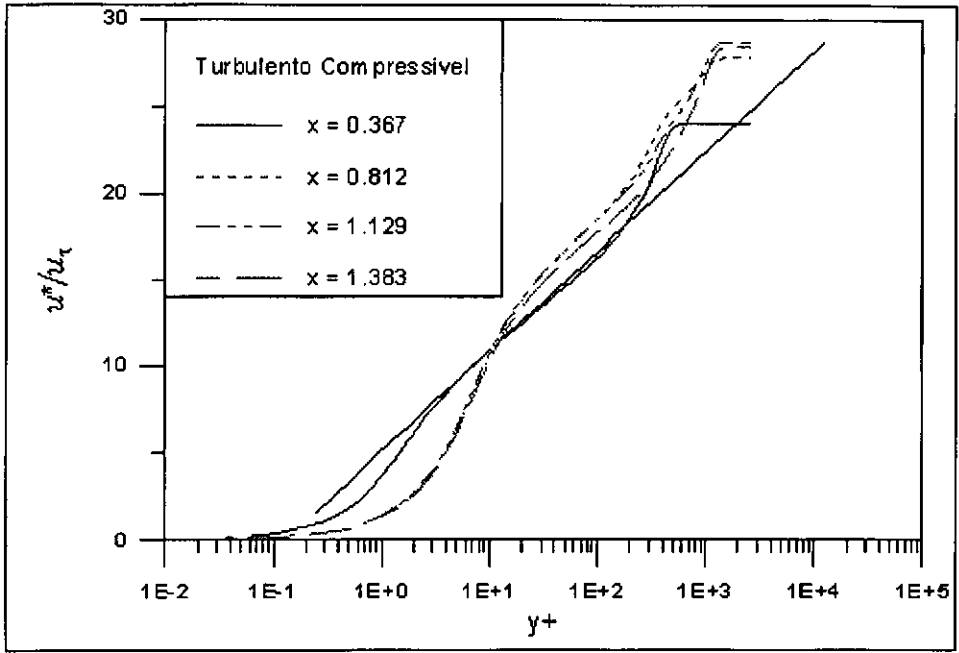


Figura IX.6- Variável de similaridade u^*/u_τ por y^+ ao longo da camada limite para diferentes estações

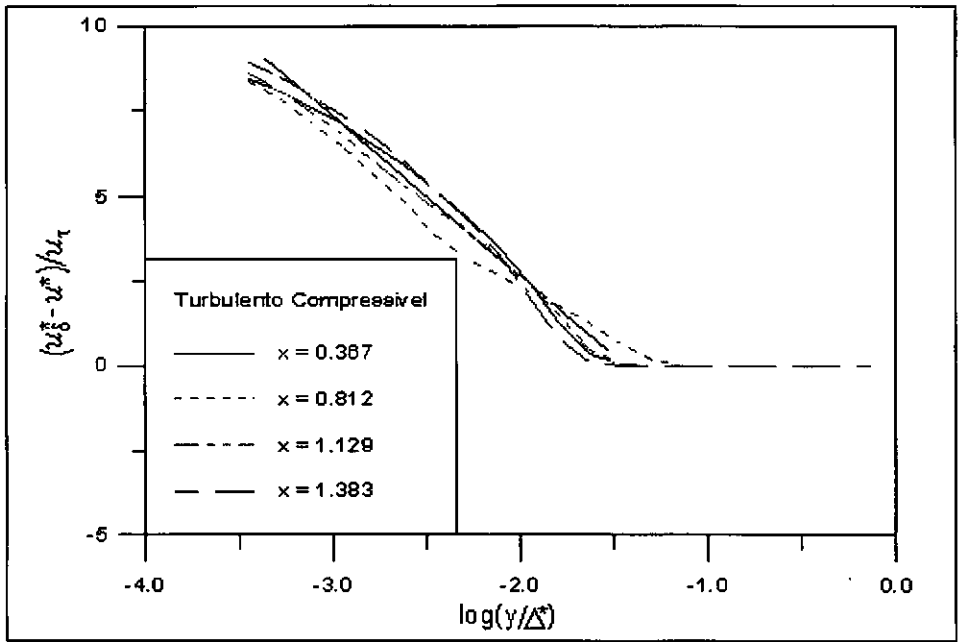


Figura IX.7- Variável de similaridade $\Delta U^*/u_\tau$ por $\log(y/\Delta^*)$ ao longo da camada limite para diferentes estações

IX.4 Turbulento compressível com choque

Os dois códigos desenvolvidos serão comparados através de gráficos que mostrem a variação do coeficiente de arrasto ao longo da direção principal do escoamento. Existem parâmetros que definem o escoamento que foram usados apenas para caracterizá-lo na formulação de Silva Freire. Outros parâmetros são utilizados apenas pelo segundo código. Os parâmetros apresentados nas tabelas IX.3 e IX.4 caracterizam o escoamento para o primeiro e segundo código respectivamente, sendo que para o segundo código elas incluem valores antes e depois da onda de choque.

Tabela IX.3a - Parâmetros do escoamento - Método das perturbações.

cond.	M	Re/m	ϵ	u_τ
1.3-a	1.270	3.66×10^6	0.209	0.0380
1.4-a	1.370	3.66×10^6	0.281	0.0405

Tabela IX.3b - Parâmetros do escoamento - Método das perturbações.

cond.	Δ [mm]	δ_e [mm]	y_{corte} [mm]
1.3-a	175	41.1	0.029
1.4-a	249	40.1	0.036

Tabela IX.4a - Parâmetros globais do escoamento.

cond.	X_{min} [m]	X_{max} [m]	T_w [K]
1.3-a	-0.162	2.789	293.4
1.4-a	-0.710	2.752	290.6

Tabela IX.4b - Parâmetros globais do escoamento na fronteira (X_{min}).

cond.	δ_{995} [mm]	δ [mm]	Re/m	M
1.3-a	41.1	50.71	3.66×10^6	1.270
1.4-a	40.1	45.71	3.66×10^6	1.370

Tabela IX.4c - Parâmetros globais do escoamento na fronteira (X_{max}).

cond.	δ_{995} [mm]	δ [mm]	Re/m	M
1.3-a	115.0	131.43	3.35×10^6	0.869
1.4-a	137.4	151.44	3.33×10^6	0.839

Uma malha não uniforme com 93 colunas (41 colunas localizadas antes da estação ($x = 0$)) e 55 linhas foi utilizada. O fator de expansão $\Delta x_{i+1}/\Delta x_i$ deve ser inferior a 1.022 e 1.093 para os pontos localizados antes e depois da estação $x = 0$. O Δx inicial localizado na estação $x = 0$ foi calculado pela relação $\Delta x = 0.0625\delta_{995}$. Na direção y a maioria dos pontos se encontram próximos à parede. O valor para Δy próximo à parede foi bem inferior ao sugerido por Atkin sendo determinado pelo programa desenvolvido por Su Jian[32] que faz automaticamente este cálculo durante a solução das equações da camada limite com a condição do primeiro ponto do domínio na direção y ser tal que $y^+ = 0.1$. A comparação com os dados experimentais mostrou que $Y_{max} \approx 6 \delta_{995}$.

Uma visão geral da variação da propriedade u ao longo da camada limite para diferentes estações pode ser obtida nas figuras IX.8 e IX.9. As figuras IX.10 e IX.11 mostram como a pressão varia ao longo da direção principal do escoamento na parede e na região externa.

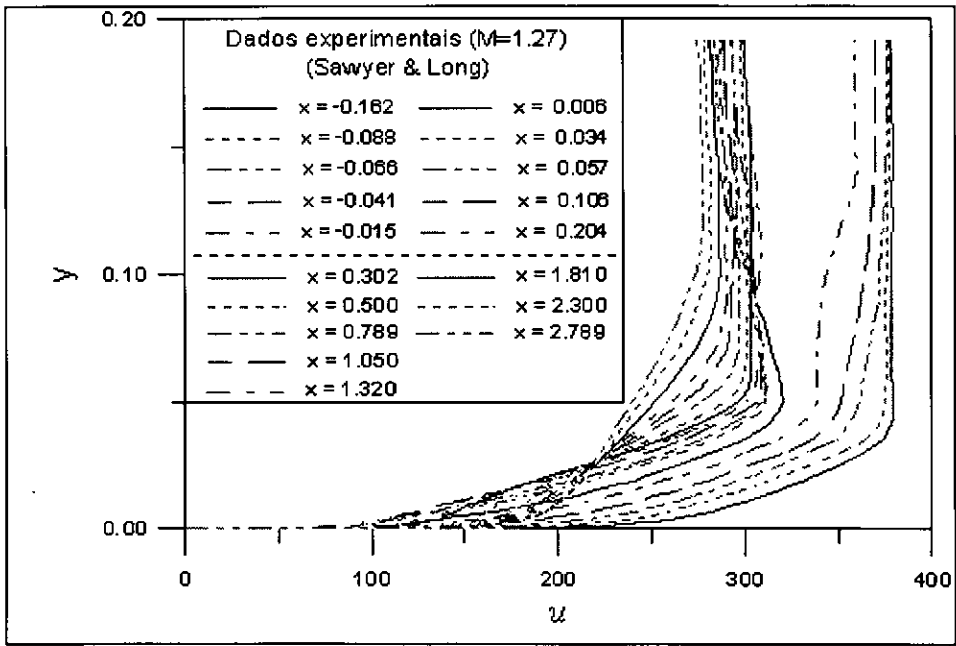


Figura IX.8 Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações.
(Cond.: 1.3-a)

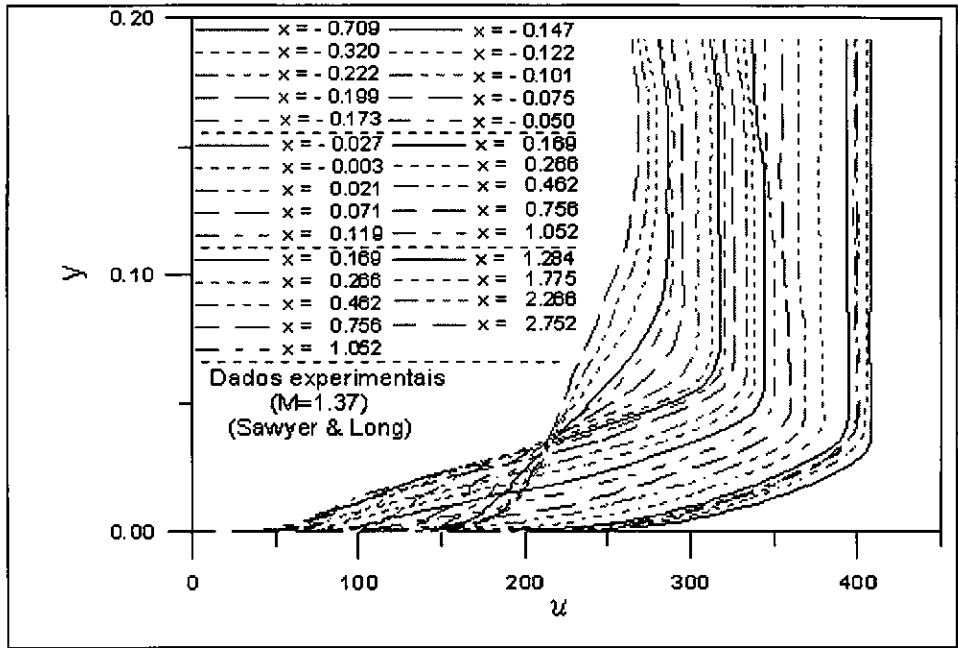


Figura IX.9 Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações. (Cond.: 1.4-a)

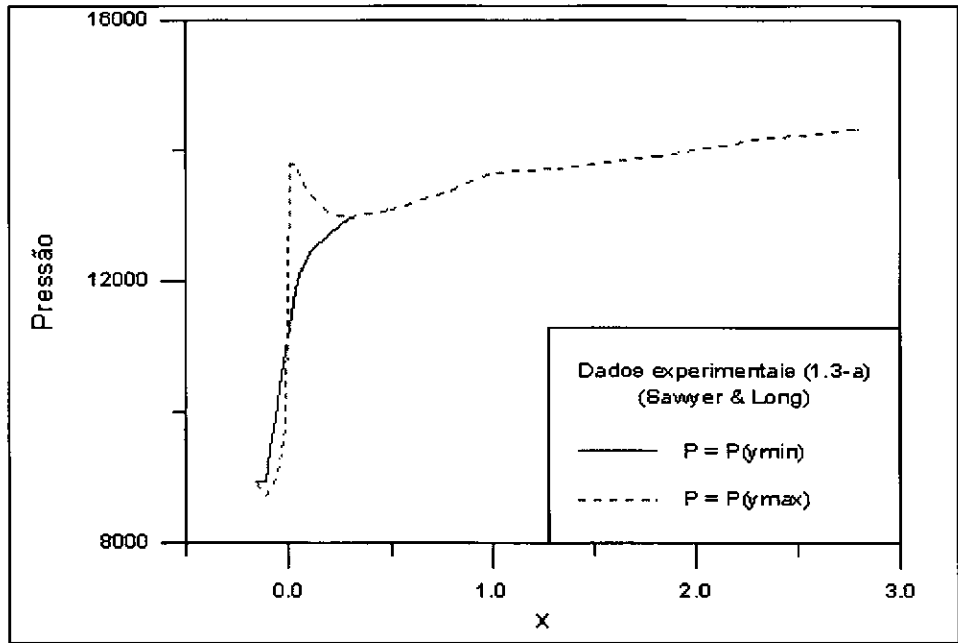


Figura IX.10 Variação da pressão ao longo da direção principal do escoamento na parede e na região externa. (Cond.: 1.3-a)

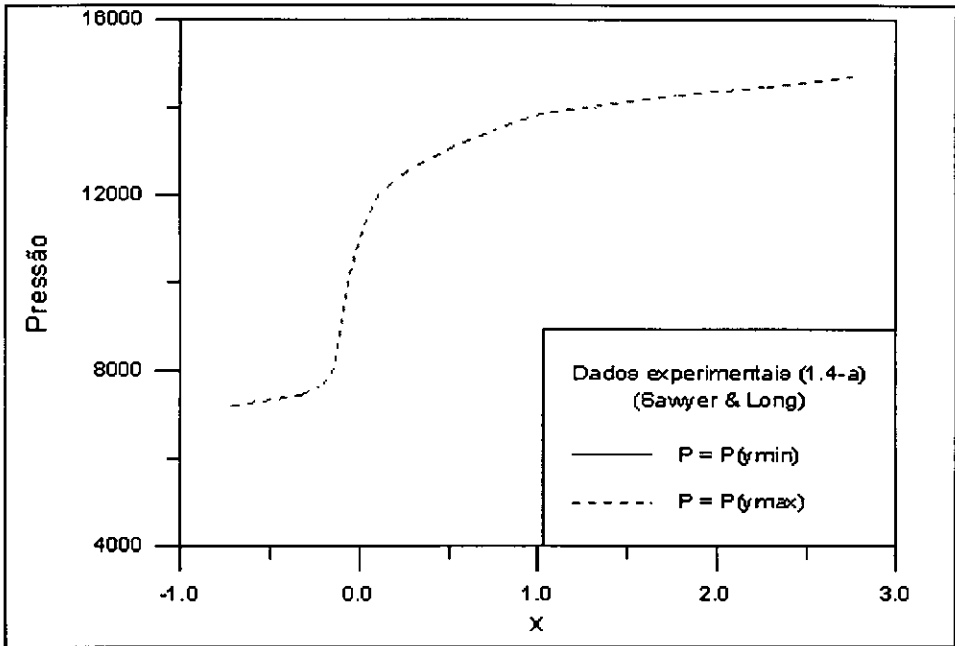


Figura IX.11 Variação da pressão ao longo da direção principal do escoamento na parede e na região externa. (Cond.: 1.4-a)

As próximas figuras mostram os resultados numéricos obtidos, pelo segundo código através do modelo algébrico de Cebeci, para a propriedade u . Estes gráficos mostram a variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações usando uma escala logarítmica com o objetivo de melhorar a visualização dos dados para os pontos próximos a parede.

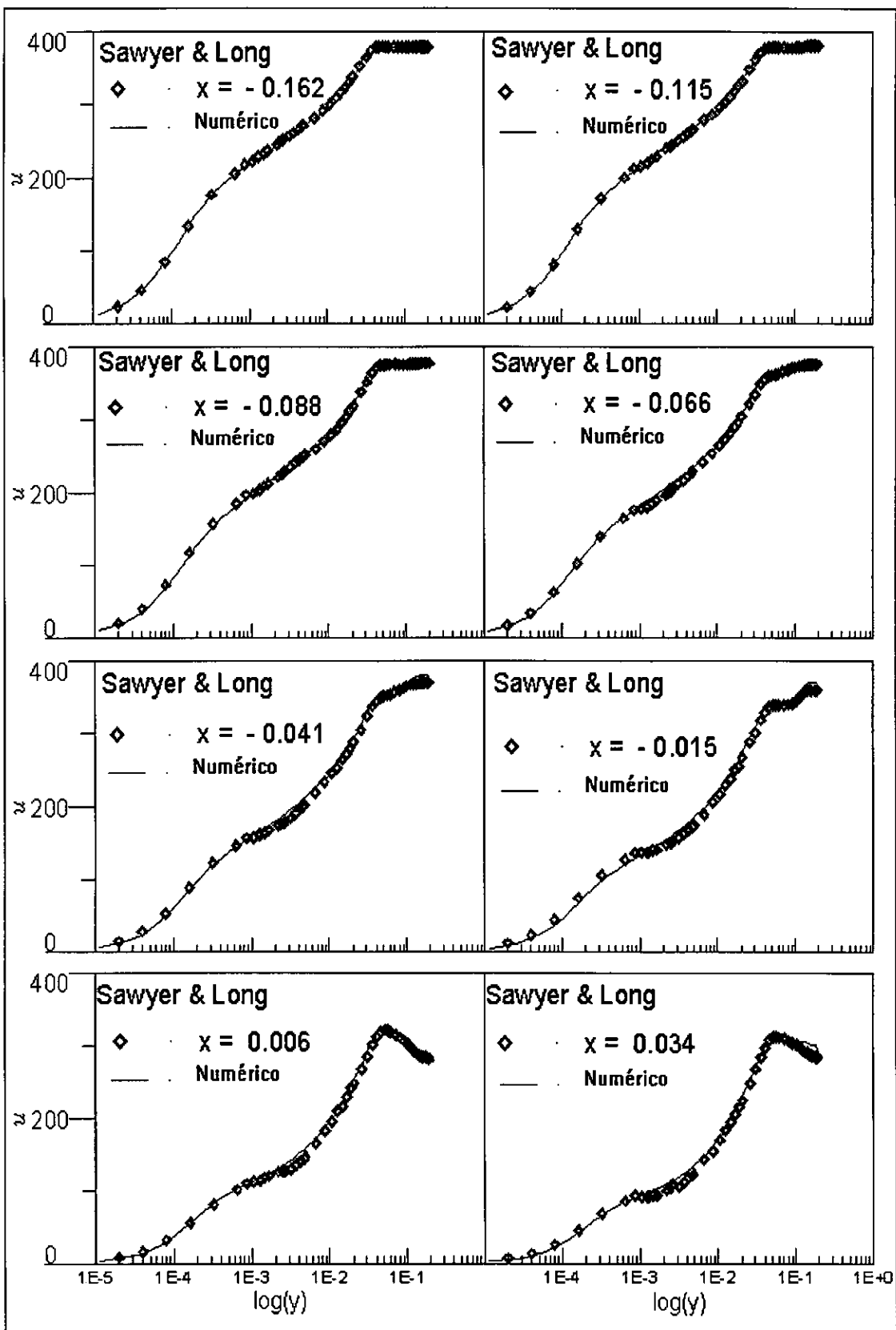


Figura IX.12a Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações. (Cond.: 1.3-a)

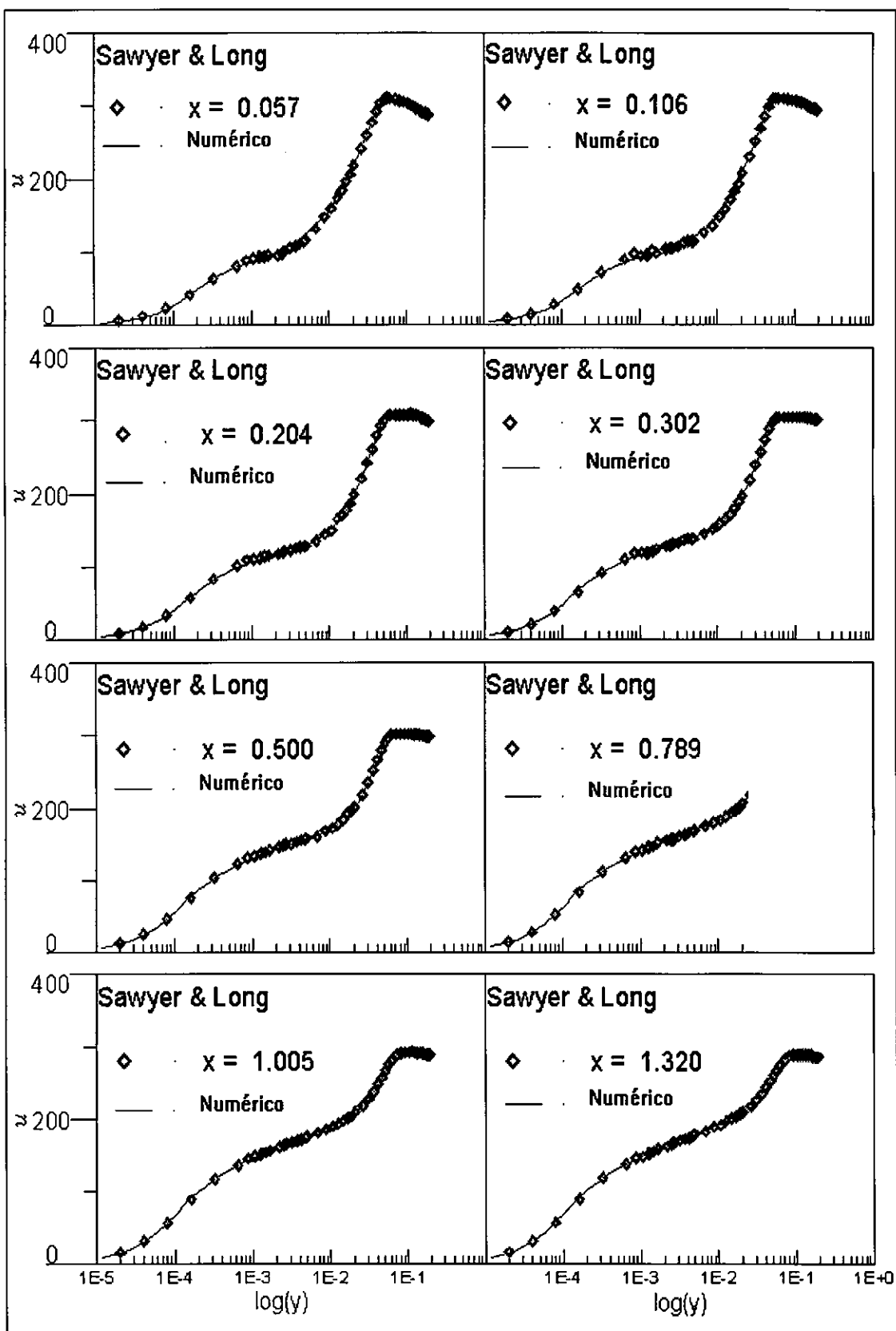


Figura IX.12b Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações. (Cond.: 1.3-a)

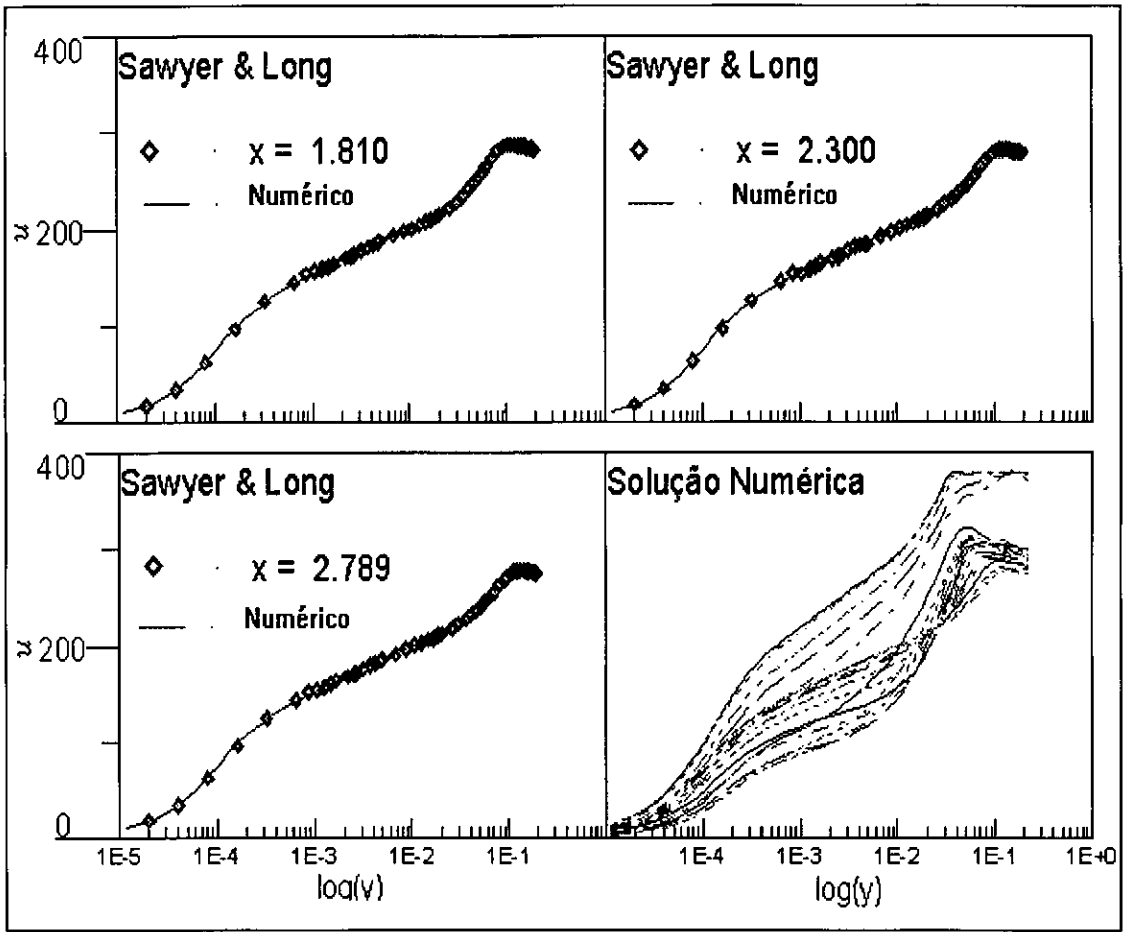


Figura IX.12c Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações.
(Cond.: 1.3-a)

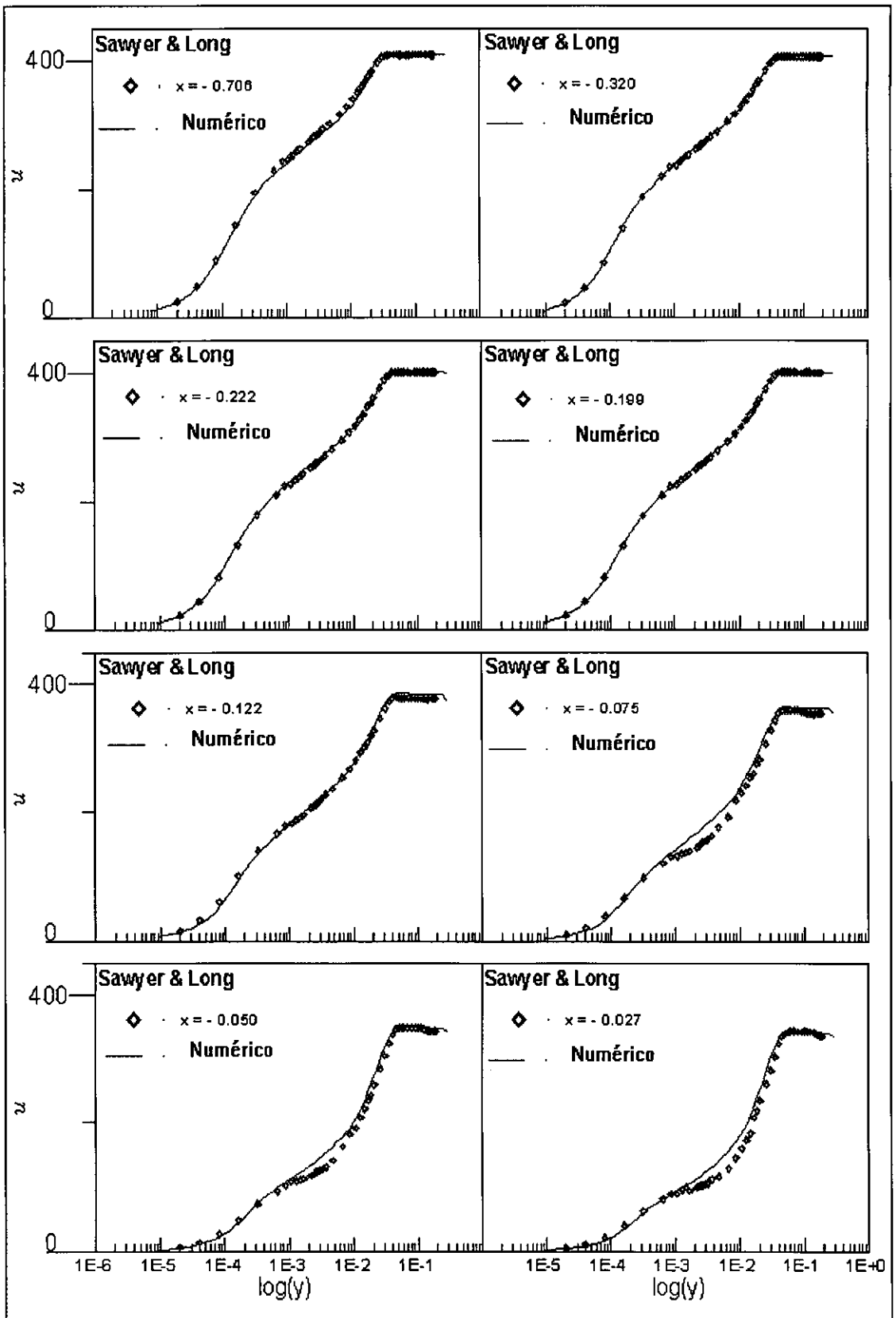


Figura IX.13a Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações.
(Cond.: 1.4-a)

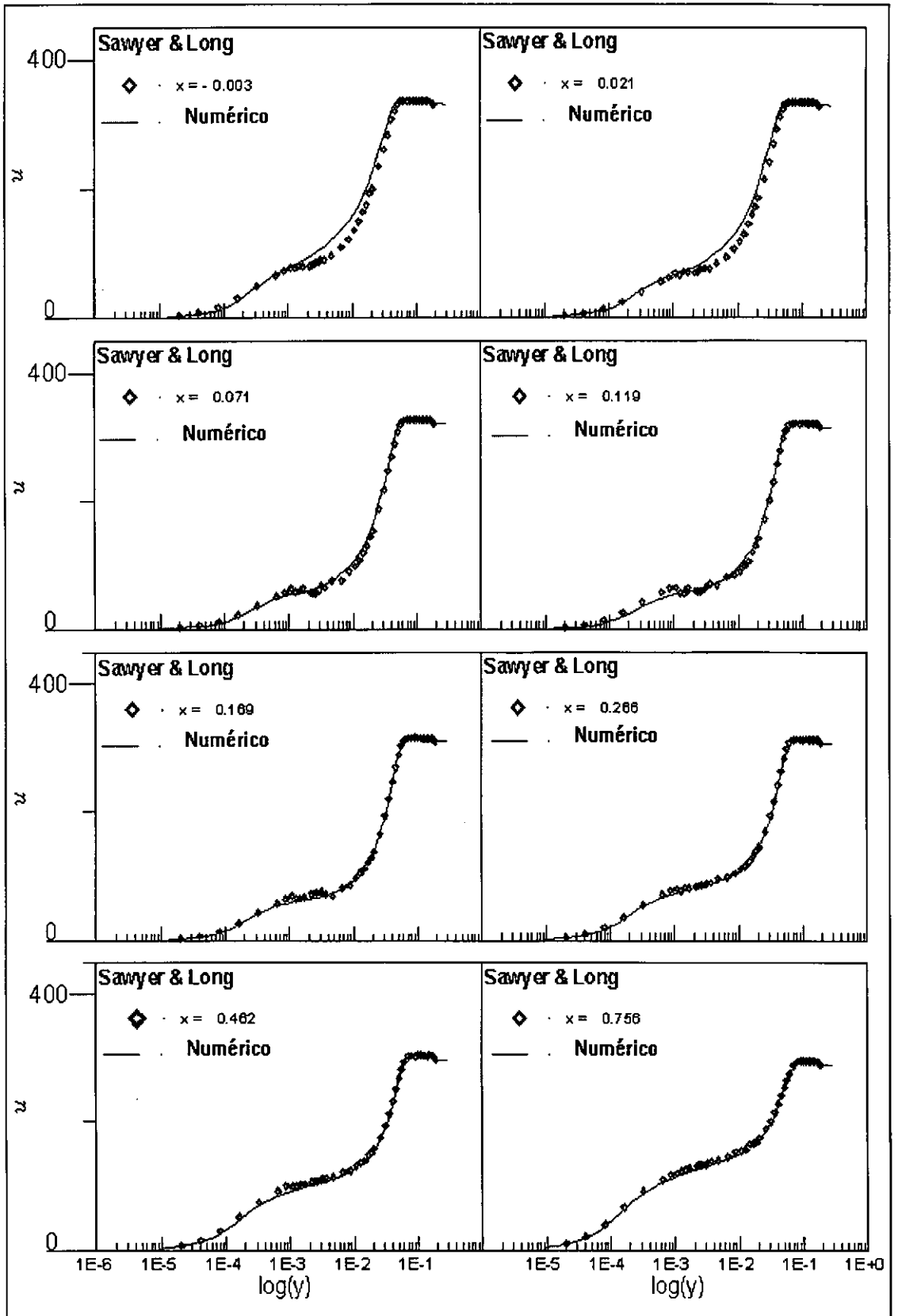


Figura IX.13b Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações. (Cond.: 1.4-a)

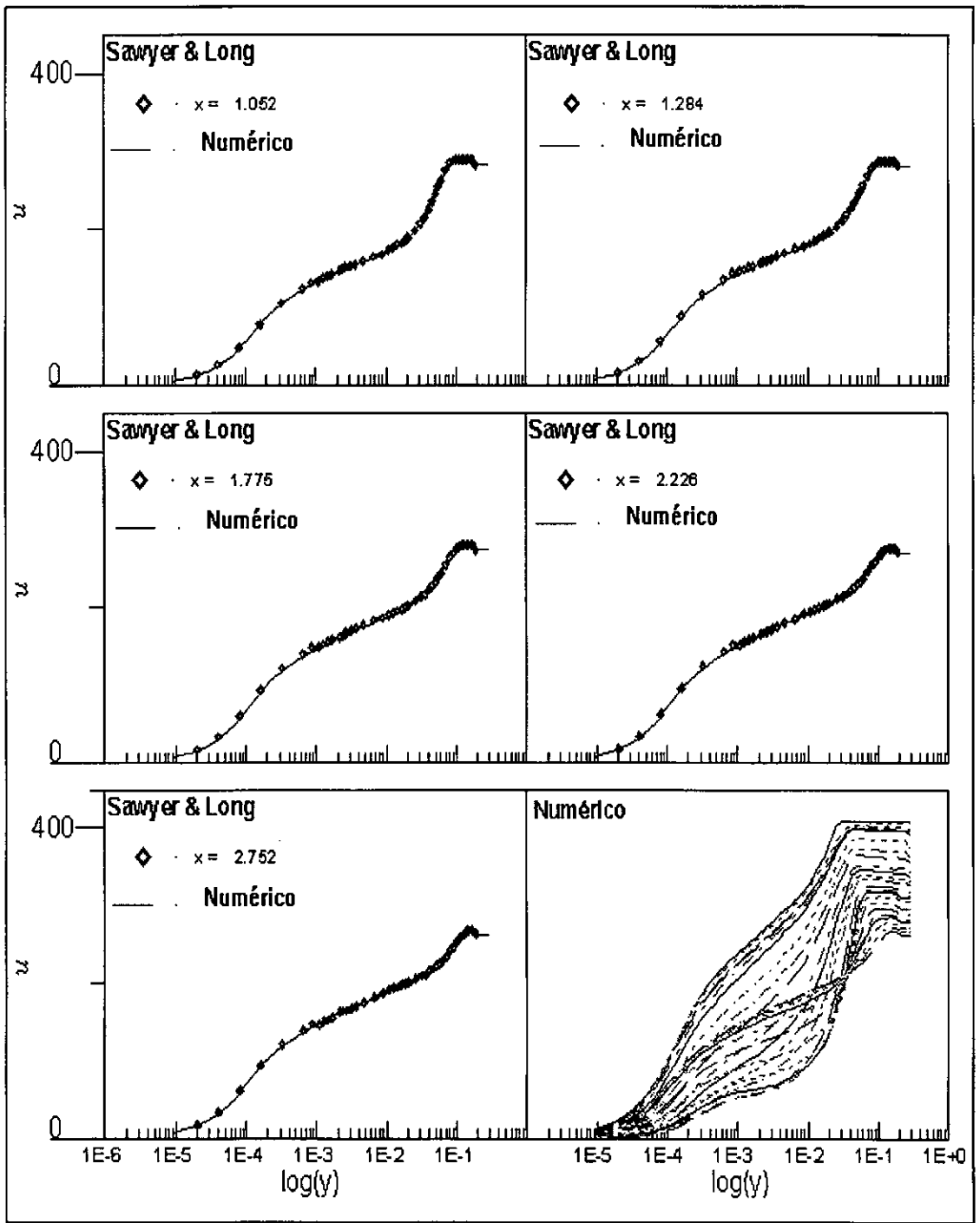


Figura IX.13c Variação de u ao longo da camada limite para diferentes estações. (Cond.: 1.4-a)

Os resultados obtidos pelo segundo código usando os dois modelos de turbulência e o primeiro código são comparados com os dados experimentais do coeficiente de atrito como podem ser vistos nas figuras IX.14 e IX.15.

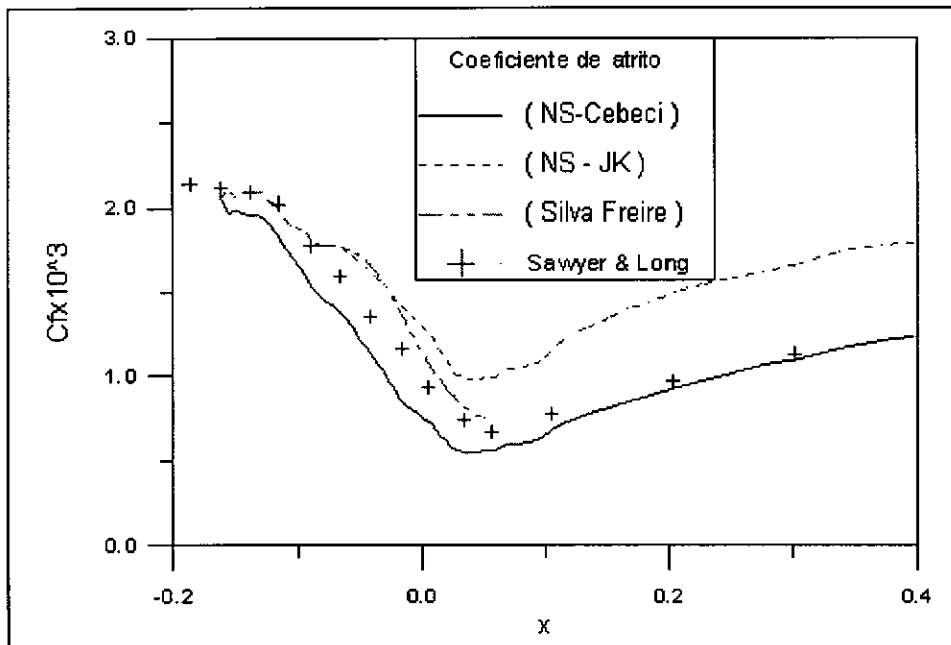


Figura IX.14 Variação de C_f ao longo da direção principal do escoamento. (Cond.: 1.3-a)

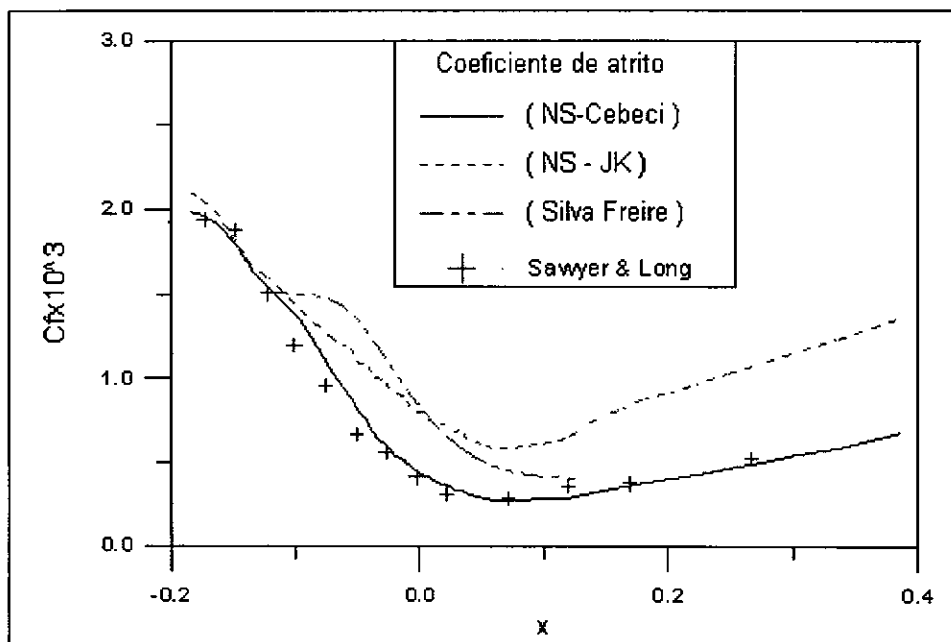


Figura IX.15 Variação de C_f ao longo da direção principal do escoamento. (Cond.: 1.4-a)

X. CONCLUSÃO E SUGESTÕES

O equipamento usado para executar os dois códigos numéricos foi um microcomputador AT 486 DX2-80. O primeiro código converge após 400 iterações onde o tempo para cada iteração é de 0.4 segundos. O segundo converge após 2000 iterações, sendo os tempos de cada iteração iguais a 6 e 9 segundos aproximadamente quando se usa o modelo algébrico e o de meia equação respectivamente. Esta constatação mostra a vantagem de se usar a formulação de Silva Freire já que ela preve com boa precisão o coeficiente de atrito na região de forte interação. Isto, de fato, pode ser visto nas figuras do capítulo anterior.

O segundo código tem apresentado problemas de estabilidade quando a equação para quantidade de movimento na direção y é incluída no processo iterativo. Este fato ocorreu em todos os casos estudados incluindo o laminar compressível. Como exemplo pode-se citar a divergência do processo iterativo, escoamento laminar sem gradiente de pressão sob uma placa plana adiabática, quando a condição inicial para as propriedades foram calculadas como segue :

u - a partir da solução de Blasius,

T - a partir da equação que relaciona o campo de velocidade ao campo de temperatura,

ρ - a partir da equação de estado já que o escoamento é sem gradiente de pressão,

v - a partir da equação da continuidade.

Esta instabilidade ao incluir no processo iterativo a equação da quantidade de movimento na direção y talvez esteja associada ao próprio esquema explícito de Bralovskaya.

As oscilações previstas pela teoria na região externa para u ao longo da direção principal do escoamento tem ocorrido ressaltando a importância de se compreender melhor o efeito da dissipação artificial utilizado no código.

As duas condições experimentais estudadas pelo segundo código não apresentam descolamento, uma das hipóteses principais da teoria de Silva Freire, não permitindo verificar o comportamento do modelo de Johnson-King quando os efeitos de história são mais intensos. O modelo de turbulência de JK usado aqui foi o apresentado na Ref[11], já tendo sido atualizado como pode ser visto em [37]. Analisando o gráfico de Cf , se constata um pior desempenho deste em relação ao modelo algébrico de Cebeci devido ao fato do nível de tensão Reynolds ser mais elevado que o previsto pelo modelo algébrico.

A utilização da expressão da lei logarítmica de East associado com o resultado numérico do código de Su Jian[32] para as condições de contorno na fronteira de entrada foi um dos fatores que contribuiu para a convergência do segundo código. Este fato leva a crer que uma condição necessária para estes perfis é que

tenham variação suave nas derivadas de ordem superior.

Devido ao fato de utilizar na fronteira superior o princípio de conservação de massa e a partir da distribuição de velocidade u , calcular a distribuição de massa específica e temperatura e depois pressão com a equação de estado, não foram feitos gráficos do coeficiente de pressão C_p pois estes iriam apresentar, naturalmente, valores diferentes do experimental.

Nesta linha de pesquisa futuros trabalhos podem ser direcionados no sentido de :

- melhor compreender as limitações deste algoritmo,
- a possibilidade de usar um esquema implícito,
- utilização de procedimentos que acelerem o processo de convergência como a utilização de um tempo local para diferentes regiões do domínio,
- estudar este fenômeno associado com a transpiração, sucção após e injeção à frente da onda de choque, comparando com o código numérico já desenvolvido que usa a formulação de Silva Freire.

XI. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Fernholz, H.H. e Finley, P.J.(1980). A critical commentary on mean flow data for two-dimensional compressible turbulent boundary layers, AGARD No. 253.
- [2] Silva Freire, A.P.(1988). An asymptotic approach for shock-wave/transpired turbulent boundary layer interaction, *ZaMP*, 39, pp. 478-503.
- [3] Silva Freire, A.P.(1989). A skin-friction equation for shock-wave/turbulent boundary layer interaction, *Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Rio de Janeiro, pp. 69-73, dezembro.
- [4] Silva Freire, A.P.(1990). Drag reduction by passive control at transonic speeds : the skin-friction equation, *Proceedings of I International Symposium on Experimental and Computational Aerodynamics of Internal Flows*, Chinese Academy of Sciences, Beijing, pp. 151-158, July.
- [5] Silva Freire, A.P.(1989). A detailed review of a solution procedure for shock-wave/turbulent boundary layer interaction problems, *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, 4, pp. 210-246.
- [6] Murman, E.M. e Cole, J.D.(1971). Calculation of plane steady transonic flows, *AIAA J*, vol 9, pp.114-121.
- [7] Melnik, R.E. e Grossmann, B.(1974). Analysis of the interaction of a weak normal shock wave with a turbulent boundary layer, *AIAA paper No. 74-598*.
- [8] Silva Freire, A.P. e Terra, G.S.(1991). A higher order theory for two-dimensional interactions between shock-waves and turbulent boundary layers, *Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, São Paulo, 453-456, dezembro, 1991.
- [9] Terra, G.S.(1992). Análise numérica de um modelo físico-matemático do fenômeno da interação de uma onda de choque com uma camada limite turbulenta, Projeto final de curso, Departamento de Engenharia Mecânica, UFRJ.
- [10] Sawyer, W.G. e Long, C.J.(1982). A study of normal shock-wave turbulent boundary-layer interactions at mach numbers of 1.3, 1.4 and 1.5., *Royal Aircraft Establishment, Technical Report No 82099*.
- [11] Atkin, J.(1990). A numerical study of unsteady shock/boundary layer interactions. PhD thesis, Cambridge University Engineering Department.
- [12] Brailovskaya, I.Yu. (1965). A finite-difference scheme for numerical solution of the two-dimensional non-stationary Navier-Stokes equations for a compressible flow, *Soviet Physics-Doklady*, vol. 10, no. 2, pp. 107-110.

- [13] Cebeci, T., Smith, A.M.O. e Mosinski, G.(1970). Calculation of compressible adiabatic turbulent boundary layers, AIAA Journal, vol 8, no. 11, pp. 1974-1982.
- [14] Johnson, D.A. e King, L.S.(1985). A mathematically simple turbulence closure model for attached and separated turbulent boundary layers, AIAA J., vol 23 no.11, pp. 1684-1692.
- [15] Lighthil, M.J.(1953). On boundary layers upstream influence II : Supersonic flow without separation. Proc R Soc London Ser A217, pp. 478-507
- [16] Gadd, G.E.(1961). Interactions between normal shocks and boundary layers. ARC R&M 3262.
- [17] Messiter, A.F.(1980). Interaction between a normal shock wave and a turbulent boundary layer at high transonic speeds. Part I: Pressure distribution, ZaMP 31, pp. 204-227.
- [18] Liou, M.S. e Adamson, T.C.(1980). Interaction between a normal shock wave and a turbulent boundary layer at high transonic speeds. Part II: Wall shear stress, ZaMP 31, pp. 227-246.
- [19] Shang, J.S., Hankey, W.L. e Law C.H.(1976). Numerical simulation of shock wave/turbulent boundary layer interaction. AIAA J., vol. 14, no. 10, pp. 1451-1457.
- [20] Viegas, J.M. e Horstman, C.C.(1979). Comparison of multiequation turbulence models for several shock/boundary layer interaction flows. AIAA J., vol. 17 no. 8, pp. 811-820.
- [21] Visbal, M. e Knight, D.(1984). The Baldwin-Lomax turbulence model for two-dimensional shock wave/boundary layer interaction. AIAA J., vol. 22 no. 7, pp. 921-928.
- [22] Benay, R., Coet, M.C. e Délery, J.(1987). Validation of turbulence models applied to transonic shock-wave/boundary-layer interaction. Rech. Arosp.1987-3
- [23] Stock, H.W. e Haase, W.(1989). Determination of length scales in algebraic turbulence models for Navier-Stokes methods. AIAA J., vol. 27 no.1, pp. 5-14
- [24] Délery, J.M.(1985). Shock wave/turbulent layer interaction and its control. Prog. Aero. Sci., vol. 22, pp. 209-280.
- [25] Raghunathan, S.(1988). Passive control of shock/boundary layer interaction. Prog. Aero. Sci., vol. 25, pp. 271-296.
- [26] Rice, J.R.(1983). Numerical Methods, Software and Analysis, McGraw-Hill.
- [27] Smith, G.D.(1978). Numerical Solution of Partial Differential Equations Finite Difference Methods, 2nd ed. Oxford University Press, 1978.

- [28] Ames, W.F.(1977). Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2nd ed. Academic Press, New York, 1977.
- [29] Fletcher, C.A.(1988). Computational Techniques for Fluid Dynamics, vol I e II, Springer-Verlag.
- [30] Peyret, R. e Taylor, T.D.(1983). Computational methods for fluid flow. Sprinfer-Verlag, New York.
- [31] Anderson, D.A., Tannehill, J. C. e Pletcher, R. H.(1984). Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Hemisphere Publishing Corporation, New York.
- [32] Su, Jian(1996). A generalized adaptive finite difference program for two-dimensional and axisymetrical turbulent shear flows, Submetido ao VI ENCIT.
- [33] East, L.F.(1972). A prediction of the law of the wall in compressible three-dimensional turbulent boundary layers. Royal Aircraft Establishment Technical Report 72178.
- [34] Murphy, J.D., Presley, L. L. e Rose, W. C.(1975). On the calculation of supersonic separating and reattaching flows, NASA SP 347, pp. 151-175.
- [35] Johnson, D.A.(1987). Transonic separated flow predictions with an eddy-viscosity/Reynolds-stress clousure model, AIAA J., vol 25 no.2, pp. 252-259.
- [36] Johnson, D.A. e Coakley, T.J.(1990). Improvements to a Nonequilibrium Algebraic Turbulence Model, AIAA Journal, vol 28-11, pp. 2000-2003.
- [37] Rumsey, C.L. e Varsa, V.N. (1993). A comparison of the predictive capabilities of several turbulence models using upwind and central-difference computer codes. AIAA 93-0192.
- [38] Carter, J.E. (1972). Numerical solutions of the Navier-Stokes equations for the supersonic laminar flow over a two-dimensional compression corner, NASA TR R-385.
- [39] Fernholz, H.H. e Finley, P.J.(1977). A critical compilation of compressible turbulent boundary layer data, AGARD No. 223
- [41] Schlichting, H.(1979). Boundary-layer theory, 7th ed. McGraw Hill.
- [42] White, F.M.(1974). Viscous Fluid Flow, Mc Graw Hill.

APÊNDICE I

No desenvolvimento de um código numérico, é importante concentrar a atenção na implementação de rotinas que permitam fazer um pré e pós processamento das informações de forma flexível. Este objetivo foi plenamente alcançado aqui ao se desenvolver o código. De fato, ele pode ser visto neste apêndice onde o arquivo principal de configuração do segundo programa é detalhado. Este arquivo contém informações que caracterizam o escoamento e também determina quais dados serão gerados na forma de arquivo para analisar os resultados numéricos.

1 Arquivo Principal (config.cfg)

```
[1] c -----  
[2]           Arquivo de configuração  
[3] c -----  
[4] file name - relatório      : 14a-r01.txt  
[5] file name - stop prog.    : stop.cfg  
[6] Integra V no tempo       : 0           [1 - SIM, 0 - NÃO]  
[7] [Pré][Pós]processamento : 1           [1 - Pré, 2 - Pós (processamento) ]  
[8] [1].Malha - num. col.    : 93          [33 - LC, 33 - TC, 93 - TCC ]  
[9] [2].Malha - num. lin.    : 55          [33 - LC, 56 - TC, 55 - TCC ]  
[10] Admensiona              : 0           [1 - SIM, 0 - NÃO]  
[11] Viscosidade Artificial   : 1           [1 - SIM, 0 - NÃO]  
[12] Intensidade AD - lambda : 1.0D0  
[13] Estimativa de erro      : 100        [a cada 100 interações]  
[14] Saída na tela          : 10         [a cada 10 interações]  
[15] Salva no "output file"  : 600        [a cada 600 interações]  
[16] [a] Salva prop. ( $\rho$ )  : 0           [1 - SIM, 0 - NÃO]  
[17] [a] Salva prop. T       : 0           [1 - SIM, 0 - NÃO]  
[18] Num. max. interações    : 1.D5  
[19] c -----  
[20] Tipo escoamento        : 5           [2 - LC, 4 - TC, 5 - TCC ]
```

[21] c -----

[22] Modelo de Turbulência : 01 [00-NAO, 01-CS, 1a.1b.2a.2b - JK]

[23] [a] Crit. Converg. : 1.D-6 [Usado para JK - max delta uv rel.]

[24] [b] JKMax g(i)/g(i-1) : 1.400D0 [Max. Δg entre os pontos da malha]

[25] c -----

[26] Path [input files] : c:/input

[27] c -----

[28] Turbulento compressível com choque [5]

[29] c -----

[30] Ponto exp. rel. inicial : 40 [East loglaw relation]

[31] Tipo - condição inicial : 2 [1 - exp., 2 - exp. cont., 3 - outros]

[32] fat. multiplicação [1] : 1.D0 [Ymax = fm1.y_out(Num_point_out)]

[33] fat. multiplicação [2] : 1.D0 [Δy(1) = fm2.(y_out(2)-y_out(1))]

[34] fator de recuperação : 1.D0 [0.896D0 - 1.000D0(entalpia cte.)]

[35] nome do "input file" [1] : boundary.14a

[36] nome do "input file" [2] : 14a-0710.IN [perfil y,u em Xmin]

[37] nome do "input file" [3] : 14a+2752.OUT [perfil y,u em Xmax]

[38] nome do "input file" [4] : S.L.exp.14a [Sawyer and Long - dados exp.]

[39] nome do "input file" [5] : 14a-Xmin.fe [fat. exp. malha (x < 0)]

[40] nome do "input file" [6] : 14a-Xmax.fe [fat. exp. malha (x > 0)]

[41] c -----

[42] Turbulento compressível [4]

[43] c -----

[44] Tipo - condição inicial : 0 [0 - (V=0), 1 - (V por continuidade)]

[45] fat. multiplicação [1] : 1.D0 [Ymax =fm1.y_out(Num_point_out)]

[46] fat. multiplicação [2] : 1.D0 [Δy(1)=fm2.(y_out(2)-y_out(1))]

[47] fator de recuperação : 1.D0

[48] nome do "input file" [1] : 740218.tc

[49] nome do "input file" [2] : 740218.IN [perfil y,u em Xmin]

[50] nome do "input file" [3] : 740218.OUT [perfil y,u em Xmax]

[51] [a0] Salva arquivos : 0 [0-NÃO, 1-Todos]

[52] [a1] "output file" [1] : loglaw02.dat [$y^+ \times u^*$ (Xmax)]

[53] [a2] "output file" [1] : outer_02.dat [$\log(y/\Delta^*) \times \Delta U^*$ (Xmax)]


```

[54] [b0] Salva arquivos      : 0                [0-NÃO, 1-Todos]
[55] [b1] "output file"[1]   : loglaw01.dat  [  $y^+ \times u^*$  (Xmin)]
[56] [b2] "output file"[1]   : outer_01.dat  [  $\log(y/\Delta^*) \times \Delta U^*$  (Xmin)]
[57] c -----
[58] Laminar compressível [2]
[59] c -----
[60] Tipo - cond. ini. [1]    : 1                [0 - NÃO, 1 - Solucao exata para U]
[61] Tipo - cond. ini. [2]    : 1                [0 - NS, 1 - V exato por cont.]
[62] fat. multiplicacao      : 5.D0            [Ymax =fm.DEL995]
[64] Temp. no infinito       : 3.D2
[65] Mach no infinito        : 5.D0
[66] X_min                    : 1.D0
[67] X_max                    : 2.D0
[68] c -----
[69] Pós processamento
[70] c -----
[71] nome do "input file"[1]  : 14a.009.OUT
[72] c -----
[73] APV : Arquivos gerados para visualizar propriedades e ... [1 - SIM, 0 - NÃO]
[74] c -----
[75] c -----
[76] APV.Gera malha           : 0
[77] a.Gera malha [fg]        : 1                [1-Ymax, 2-(1.D0), 3-Umax, 4-Tauw ]
[78] nome do gridfile[1]     : grid_0i.dat
[79] nome do gridfile[2]     : grid_xi.dat
[80] nome do gridfile[3]     : grid_yi.dat
[81] c -----
[82] APV.blthick, disp.thick  : 0
[83] a.nome do blt.file[1]    : blt___1.dat
[84] c -----
[85] APV.Uexp.(nc x ny_cont): 0
[86] [a0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[87] [a1] "output file" [1]   : Uexp_li.dat     [Ueg14a11.dat, U_____11.dat]

```

[88]	[a2]	"output file"	[2]	:	Uexp__ci.dat	[Ueg14ac1.dat, U_____c1.dat]
[89]	[b0]	Salva arquivos		:	0	[0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
[90]	[b1]	"output file"	[1]	:	Ueumx_li.dat	[Au_14al1.dat, U_umx_l1.dat]
[91]	[b2]	"output file"	[2]	:	Ueumx_ci.dat	[Au_14ac1.dat, U_umx_c1.dat]
[92]	c	-----				
[93]		APV.Propriedade		:	1	
[94]	[a0]	Salva arquivos		:	0	[0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
[95]	[a1]	"output file"	[1]	:	rho__li.dat	[reg14al1.dat, rho__l1.dat]
[96]	[a2]	"output file"	[2]	:	rho__ci.dat	[reg14ac1.dat, rho__c1.dat]
[97]	[b0]	Salva arquivos		:	0	[0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
[98]	[b1]	"output file"	[1]	:	Temp__li.dat	[Teg14al1.dat, Temp__l1.dat]
[99]	[b2]	"output file"	[2]	:	Temp__ci.dat	[Teg14ac1.dat, Temp__c1.dat]
[100]	[c0]	Salva arquivos		:	0	[0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
[101]	[c1]	"output file"	[1]	:	Pres__li.dat	[Peg14al1.dat, Pres__l1.dat]
[102]	[c2]	"output file"	[2]	:	Pres__ci.dat	[Peg14ac1.dat, Pres__c1.dat]
[103]	[d0]	Salva arquivos		:	0	[0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
[104]	[d1]	"output file"	[1]	:	U_____li.dat	[Ueg14al1.dat, U_____l1.dat]
[105]	[d2]	"output file"	[2]	:	U_____ci.dat	[Ueg14ac1.dat, U_____c1.dat]
[106]	[e0]	Salva arquivos		:	0	[0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
[107]	[e1]	"output file"	[1]	:	V_____li.dat	[Veg14al1.dat, V_____l1.dat]
[108]	[e2]	"output file"	[2]	:	V_____ci.dat	[Veg14ac1.dat, V_____c1.dat]
[109]	[f0]	Salva arquivos		:	0	[0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
[110]	[f1]	"output file"	[1]	:	U_umx_li.dat	[Au_14al1.dat, U_umx_l1.dat]]
[111]	[f2]	"output file"	[2]	:	U_umx_ci.dat	[Au_14ac1.dat, U_umx_c1.dat]
[112]	[g0]	Salva arquivos		:	0	[0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
[113]	[g1]	"output file"	[1]	:	U_u1j_li.dat	[Au_14al1.dat, U_umx_l1.dat]
[114]	[g2]	"output file"	[2]	:	U_u1j_ci.dat	[Au_14ac1.dat, U_umx_c1.dat]
[115]	[h0]	Salva arquivos		:	0	[0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
[116]	[h1]	"output file"	[1]	:	dUdy__li.dat	
[117]	[h2]	"output file"	[2]	:	dUdy__ci.dat	
[118]	[i0]	Salva arquivos		:	0	[0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
[119]	[i1]	"output file"	[1]	:	AdUdy_li.dat	
[120]	[i2]	"output file"	[2]	:	AdUdy_ci.dat	

[121] [j0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]

[122] [j1] "output file" [1] : d2Udy2li.dat

[123] [j2] "output file" [2] : d2Udy2ci.dat

[124] [k0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]

[125] [k1] "output file" [1] : DU_U__li.dat

[126] [k2] "output file" [2] : DU_U__ci.dat

[127] [l0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]

[128] [l1] "output file" [1] : dVdx__li.dat

[129] [l2] "output file" [2] : dVdx__ci.dat

[130] [m0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]

[131] [m1] "output file" [1] : Mach__li.dat

[132] [m2] "output file" [2] : Mach__ci.dat

[133] c - - - - -

[134] APV.Similaridade [L.C] : 0

[135] [a0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All]

[136] [a1] "output file" [1] : nxf_n_c1.dat [eta x f' numerico p/ todas col.]

[137] [a2] "output file" [2] : nx_dfdn_.dat [eta x f' teorico]

[138] [b0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All]

[139] [b1] "output file" [1] : u_teo_l1.dat

[140] [b2] "output file" [2] : u_teo_c1.dat

[141] c - - - - -

[142] APV.Similaridade [T.C] : 0

[143] [a0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All]

[144] [a1] "output file" [1] : ll_yu_c1.dat [Log. Law.(yadm x u/u*) por coluna]

[145] [a2] "output file" [2] : ll_yu_te.dat [Log. Law.(yadm x u/u*) teorica]

[146] [b0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All]

[147] [b1] "output file" [1] : or_yducl.dat [out. reg.(yadm x DeltaU)p/ coluna]

[148] [b2] "output file" [2] : or_ydute.dat [out. reg.(yadm x DeltaU) teorica]

[149] c - - - - -

[150] APV.Similaridade [T.CC] 0

[151] [a1] "output file" [1] : llc_yuci.dat [Log. Law.(yadm x u/utau) por columna]

[152] c - - - - -

[153] APV.Cf Utau [T.CC] : 1 [0-Not, 1-Numer. Data, 2-exp.data]

```

[154] [a1] "output file" [1] : Cf_num_9.dat [Cf_num_1.dat, Cf_exp_1.dat]
[155] c - - - - -
[156] APV.Tensoes [laminar] : 0
[157] [a0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[158] [a1] "output file" [1] : Syy__li.dat
[159] [a2] "output file" [2] : Syy__ci.dat
[160] [b0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[161] [b1] "output file" [1] : Syy1__li.dat
[162] [b2] "output file" [2] : Syy1__ci.dat
[163] [c0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[164] [c1] "output file" [1] : Syy2__li.dat
[165] [c2] "output file" [2] : Syy2__ci.dat
[166] [d0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[167] [d1] "output file" [1] : Sxx__li.dat
[168] [d2] "output file" [2] : Sxx__ci.dat
[169] [e0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[170] [e1] "output file" [1] : Sxx1__li.dat
[171] [e2] "output file" [2] : Sxx1__ci.dat
[172] [f0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[173] [f1] "output file" [1] : Sxx2__li.dat
[174] [f2] "output file" [2] : Sxx2__ci.dat
[175] [g0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[176] [g1] "output file" [1] : Txy__li.dat
[177] [g2] "output file" [2] : Txy__ci.dat
[178] [h0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[179] [h1] "output file" [1] : Txy1__li.dat
[180] [h2] "output file" [2] : Txy1__ci.dat
[181] [i0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[182] [i1] "output file" [1] : Txy2__li.dat
[183] [i2] "output file" [2] : Txy2__ci.dat
[184] c - - - - -
[185] APV.Cebeci [calculo] : 0
[186] c - - - - -

```

```

[187] APV.Viscosidade[Cebeci] 0
[188] [a0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[189] [a1] "output file" [1]   : mi____li.dat
[190] [a2] "output file" [2]   : mi____ci.dat
[191] [b0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[192] [b1] "output file" [1]   : meff_cli.dat
[193] [b2] "output file" [2]   : meff_cci.dat
[194] [c0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[195] [c1] "output file" [1]   : eti_cli.dat
[196] [c2] "output file" [2]   : eti_cci.dat
[197] [d0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[198] [d1] "output file" [1]   : eto_cli.dat
[199] [d2] "output file" [2]   : eto_cci.dat
[200] [e0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[201] [e1] "output file" [1]   : et__cli.dat
[202] [e2] "output file" [2]   : et__cci.dat
[203] [f0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[204] [f1] "output file" [1]   : etr_cli.dat
[205] [f2] "output file" [2]   : etr_cci.dat
[206] c - - - - -
[207] APV.Johnson_King [calc] 0
[208] [a0] Salva arquivos      : 0                [0-NAO, 1-SIM]
[209] [a1] "output file" [1]   : g_uv_jy2.dat
[210] c - - - - -
[211] APV.Viscosidade[J_K] : 0
[212] [a0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[213] [a1] "output file" [1]   : mi____li.dat
[214] [a2] "output file" [2]   : mi____ci.dat
[215] [b0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[216] [b1] "output file" [1]   : meffjkli.dat
[217] [b2] "output file" [2]   : meffjkci.dat
[218] [c0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[219] [c1] "output file" [1]   : eti_jkli.dat

```

[220] [c2] "output file" [2] : eti_jkci.dat
 [221] [d0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [222] [d1] "output file" [1] : eto_jkli.dat
 [223] [d2] "output file" [2] : eto_jkci.dat
 [224] [e0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [225] [e1] "output file" [1] : et_jkli.dat
 [226] [e2] "output file" [2] : et_jkci.dat
 [227] [f0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [228] [f1] "output file" [1] : etr_jkli.dat
 [229] [f2] "output file" [2] : etr_jkci.dat
 [230] c - - - - -
 [231] APV.Tensoes [T CS_JK]: 0
 [232] [a0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [233] [a1] "output file" [1] : Syy___li.dat
 [234] [a2] "output file" [2] : Syy___ci.dat
 [235] [b0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [236] [b1] "output file" [1] : Syy1__li.dat
 [237] [b2] "output file" [2] : Syy1__ci.dat
 [238] [c0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [239] [c1] "output file" [1] : Syy2__li.dat
 [240] [c2] "output file" [2] : Syy2__ci.dat
 [241] [d0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [242] [d1] "output file" [1] : Sxx___li.dat
 [243] [d2] "output file" [2] : Sxx___ci.dat
 [244] [e0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [245] [e1] "output file" [1] : Sxx1__li.dat
 [246] [e2] "output file" [2] : Sxx1__ci.dat
 [247] [f0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [248] [f1] "output file" [1] : Sxx2__li.dat
 [249] [f2] "output file" [2] : Sxx2__ci.dat
 [250] [g0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [251] [g1] "output file" [1] : Txy___li.dat
 [252] [g2] "output file" [2] : Txy___ci.dat

[253] [h0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]

[254] [h1] "output file" [1] : Txy1__li.dat

[255] [h2] "output file" [2] : Txy1__ci.dat

[256] [i0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]

[257] [i1] "output file" [1] : Txy2__li.dat

[258] [i2] "output file" [2] : Txy2__ci.dat

[259] c - - - - -

[260] APV.DerivTensoes [Turb] 0

[261] [a0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]

[262] [a1] "output file" [1] : dSxdxtli.dat

[263] [a2] "output file" [2] : dSxdxtci.dat

[264] [b0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]

[265] [b1] "output file" [1] : dTdy__cli.dat

[266] [b2] "output file" [2] : dTdy__cci.dat

[267] [c0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]

[268] [c1] "output file" [1] : dT1dytli.dat

[269] [c2] "output file" [2] : dT1dytci.dat

[270] [d0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]

[271] [d1] "output file" [1] : dSydytli.dat

[272] [d2] "output file" [2] : dSydytci.dat

[273] c - - - - -

[274] APV.Eq. Continuidade : 0

[275] [a0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]

[276] [a1] "output file" [1] : rU__li.dat

[277] [a2] "output file" [2] : rU__ci.dat

[278] [b0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]

[279] [b1] "output file" [1] : _drUdxli.dat [obs. : -drhoU_dx * dt]

[280] [b2] "output file" [2] : _drUdxc_i.dat

[281] [c0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]

[282] [c1] "output file" [1] : rV__li.dat

[283] [c2] "output file" [2] : rV__ci.dat

[284] [d0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]

[285] [d1] "output file" [1] : _drVdyli.dat [obs. : -drhoV_dy * dt]

[286] [d2] "output file" [2] : _drVdyci.dat
 [287] [e0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [288] [e1] "output file" [1] : dr____li.dat [obs. : -drho_dt * dt]
 [289] [e2] "output file" [2] : dr____ci.dat
 [290] [f0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [291] [f1] "output file" [1] : newr__li.dat
 [292] [f2] "output file" [2] : newr__ci.dat
 [293] c - - - - -
 [294] APV.Quant.Mov.dir.x [a] 0
 [295] [a0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [296] [a1] "output file" [1] : rUU__li.dat
 [297] [a2] "output file" [2] : rUU__ci.dat
 [298] [b0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [299] [b1] "output file" [1] : dxrUUl2.dat [obs. : drhoUU_dx]
 [300] [b2] "output file" [2] : dxrUUc2.dat
 [301] [c0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [302] [c1] "output file" [1] : _dxrUUl2.dat [obs. :-drhoUU_dx * dt/rho]
 [303] [c2] "output file" [2] : _dxrUUc2.dat
 [304] [d0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [305] [d1] "output file" [1] : rUV__li.dat
 [306] [d2] "output file" [2] : rUV__ci.dat
 [307] [e0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [308] [e1] "output file" [1] : dyrUVli.dat [obs. :drhoUV_dy]
 [309] [e2] "output file" [2] : dyrUVci.dat
 [310] [f0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [311] [f1] "output file" [1] : _dyrUVli.dat [obs. :-drhoUV_dy * dt/rho]
 [312] [f2] "output file" [2] : _dyrUVci.dat
 [313] [g0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [314] [g1] "output file" [1] : _dPdx_li.dat [obs. : -dPdx * dt/rho]
 [315] [g2] "output file" [2] : _dPdx_ci.dat
 [316] [h0] Salva arquivos : 0 [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second]
 [317] [h1] "output file" [1] : dxSxx_li.dat [obs. : dSxxdx * dt/rho]
 [318] [h2] "output file" [2] : dxSxx_ci.dat


```

[319] [i0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[320] [i1] "output file" [1]   : dyTxy_li.dat    [obs. : dTxydy * dt/rho]
[321] [i2] "output file" [2]   : dyTxy_ci.dat
[322] [j0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[323] [j1] "output file" [1]   : drU___li.dat    [obs. : drhoU_dt * dt/rho]
[324] [j2] "output file" [2]   : drU___ci.dat
[325] [j0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[326] [j1] "output file" [1]   : newU__li.dat
[327] [j2] "output file" [2]   : newU__ci.dat
[328] c -----
[329] APV.Viscos. Artificial    : 0
[330] [a0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[331] [a1] "output file" [1]   : adr___li.dat
[332] [a2] "output file" [2]   : adr___ci.dat
[333] [b0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[334] [b1] "output file" [1]   : adrU__li.dat
[335] [b2] "output file" [2]   : adrU__ci.dat
[336] [c0] Salva arquivos      : 0                [0-Not, 1-All, 2-first, 3-second ]
[337] [c1] "output file" [1]   : adrV__li.dat
[338] [c2] "output file" [2]   : adrV__ci.dat
[339] c -----
[340] APV.Stop program         : 0
[341] c -----

```