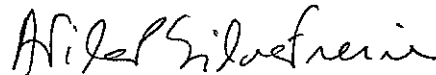


SOBRE A MODELAGEM DIFERENCIAL DE CAMADAS LIMITE TURBULENTAS COM TRANSPIRAÇÃO

Mila Rosendal Avelino

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

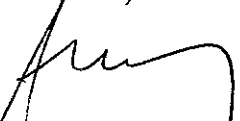
Aprovado por:



Prof. Atila P. Silva Freire, Ph.D.



Prof. Su Jian, D.Sc.



Prof. Sérgio Hamilton Sphaier, Dr.-Ing.



Prof. Ernesto Ribeiro Ronzani, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
Dezembro de 1996

AVELINO, MILA ROSENDAL

Sobre a Modelagem Diferencial de Camadas Limite Turbulentas com Transpiração.

(Rio de Janeiro) 1996

xiv, 66 p 29,7cm (COPPE/UFRJ M.Sc., Engenharia Mecânica, 1996)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Fenômenos de Transporte I. COPPE/UFRJ II. Título (Série)

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Atila P. Silva Freire, pela amizade e dedicada orientação. Devo-lhe parte fundamental da minha formação.

Ao Prof. Su Jian, pelos ensinamentos valiosos.

Aos amigos do Laboratório de Mecânica da Turbulência, pelo convívio agradável e sempre bem-humorado.

Ao Roberto, por sua presença marcante em todos os momentos decisivos de mais uma etapa cumprida.

Aos meus pais, Zeny e José Alberto, por tudo, muito obrigada!

À CAPES, com agradecimentos pelo apoio financeiro.

Resumo da tese apresentada à COPPE / UFRJ como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

SOBRE A MODELAGEM DIFERENCIAL DE CAMADAS
LIMITE TURBULENTAS COM TRANSPIRAÇÃO

Mila Rosendal Avelino

dezembro de 1996

Orientadores: Atila P. Silva Freire e Su Jian

Programa : Engenharia Mecânica

O presente trabalho utiliza técnicas assintóticas para encontrar soluções analíticas de ordem superior para o perfil de velocidades, a energia cinética turbulenta e sua taxa de dissipação por unidade de massa, que tenham validade na região completamente turbulenta do escoamento de uma camada limite sujeita à transpiração na parede. Estas soluções de ordem superior possuem dependência explícita na transpiração, podendo ser utilizadas como funções de parede na especificação das condições de contorno na região completamente turbulenta do escoamento. As soluções mostram que K e ϵ apresentam um comportamento logarítmico na região completamente turbulenta. Todos os resultados são validados utilizando-se os dados experimentais obtidos por Andersen et al (1972).

Ainda um novo modelo K - ϵ de baixos números de Reynolds para camadas limite com transpiração através de uma parede porosa é proposto. As equações de camada limite turbulenta são resolvidas utilizando-se uma rotina de diferenças finitas. O novo modelo introduzido aqui é comparado com o modelo K - ϵ de baixo número de Reynolds proposto por Chien (1982) e com quatro modelos algébricos de turbulência. Os resultados numéricos mostram que o modelo proposto fornece melhores previsões dos perfis de velocidade do que aqueles obtidos através do modelo de Chien e dos modelos algébricos. Isto sugere que as correções aqui propostas devem ser implementadas no modelo K - ϵ para se obter melhores previsões em casos de escoamentos de camada limite com transpiração.

Abstract of the thesis presented to COPPE / UFRJ as partial fulfilment of the requirements for the degree of Master in Science (M.Sc.).

ON THE DIFFERENTIAL MODELLING OF
TRANSPIRED TURBULENT BOUNDARY LAYERS

Mila Rosendal Avelino

Dezember, 1996

Supervisors: Atila P. Silva Freire and Su Jian

Department: Mechanical Engineering

The present work uses asymptotic techniques to find closed analytical solutions for the velocity field, the turbulent kinetic energy and the dissipation rate per unit of mass, valid in the fully turbulent region of transpired turbulent boundary layers. The higher order solutions have an explicit dependence on the transpiration rate, being appropriated to be used in numerical schemes that use the law of the wall formulation for the specification of the boundary condition at the wall. The solutions found for K and ϵ profiles show a logarithmic behaviour in the near-wall region. All results are validated by comparison with the data of Andersen et alli(1972).

A new low-Reynolds number K - ϵ model is here also proposed as an alternative approach to the asymptotic formulation. The boundary layer equations are solved through a finite difference scheme. The new model is compared with four different algebraic formulations and the differential model of Chien(1982). The numerical results show that predictions provided by the new model present a distinct improvement over other models. This is a firm suggestion that the model corrections here proposed are consistent and should, therefore, be implemented in transpired turbulent boundary layer prediction schemes.

ÍNDICE

FICHA CATALOGRÁFICA	ii
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
ABSTRACT	v
ÍNDICE	vi
1. INTRODUÇÃO	1
2. ESTADO DA ARTE	6
2.1 Uma breve revisão dos trabalhos experimentais em escoamentos com injeção ou sucção	7
2.2 A fundamentação teórica	9
2.3 A modelagem numérica	11
3. ANÁLISE ASSINTÓTICA DAS EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE	
3.1 Equações do movimento	13
3.2 Hipóteses assintóticas	17
3.3 Estrutura assintótica da camada limite turbulenta	18
3.4 A região turbulenta	26
3.5 Equações de ordem superior	28
3.6 Validação experimental e numérica	33
3.7 Palavras finais	36

4. A MODELAGEM NUMÉRICA	41
4.1 Os modelos de turbulência	42
4.1.1 Os modelos algébricos	42
4.1.2 Os modelos de duas equações	47
4.2 O modelo proposto	50
4.3 A solução por diferenças finitas	51
4.4 Resultados numéricos e discussão do modelo proposto	51
5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES	59
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	61

1. INTRODUÇÃO

Uma maneira clássica de controlar as propriedades de camadas limite turbulentas é através de transpiração na superfície sólida. Com este artifício, quantidade de movimento e de calor podem ser adicionados ao escoamento de tal forma que as propriedades desejadas possam ser obtidas. Esta é uma característica importante dos escoamentos com transpiração, pois a adição, ou a diminuição da massa através da parede modifica completamente o mecanismo do escoamento, proporcionando condições ideais para se testar a aplicabilidade de modelos de turbulência. Por exemplo, se desejarmos aumentar a espessura da camada limite, reduzir o coeficiente de atrito, inibir a troca térmica na parede ou evitar separação, pode-se injetar ou succionar fluido através da parede, e através do controle das taxas de transpiração, obter as propriedades desejadas. Por esta razão, o número de trabalhos dedicados à este assunto na literatura é apreciável. A geometria geral do problema é esquematizada considerando-se o caso de injeção em pontos discretos, através de uma parede porosa, conforme apresentado na Figura 1.1.

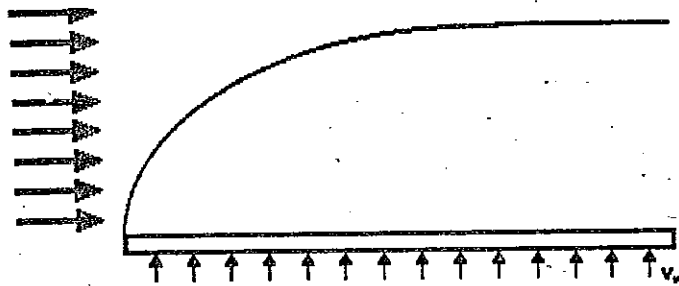


Figura 1.1 Geometria do problema.

Verificada a possibilidade de se controlar as propriedades de camadas limite como função das taxas de transpiração, uma grande quantidade de trabalhos teóricos e experimentais

foi realizada. Seria, portanto, de se esperar que o assunto a esta altura já tivesse sido esgotado. Infelizmente essa não é a realidade. Por exemplo, o tratamento analítico de problemas que combinam efeitos de compressibilidade, transferência de calor e transpiração é extremamente complexo, tendo sido somente recentemente executado (Silva Freire et alli (1995)). Entretanto, o progresso atingido na descrição de escoamentos turbulentos com transpiração nas últimas quatro décadas foi considerável. Muitos avanços têm sido atingidos, desde os primeiros estudos no assunto, por Mickley et alli(1954), passando pelo extensivo trabalho experimental e teórico em escoamentos incompressíveis, realizado pelo grupo de Transferência de Calor e Massa de Stanford. Este último grupo estudou uma apreciável quantidade de efeitos provocados por fluidos sendo injetados ou succionados em escoamentos, analisando sua influência nas propriedades dos escoamentos de camada limite. Isto forneceu a base teórica e experimental para a maioria dos trabalhos que sugeriram.

Trabalhos direcionados para o estudo de escoamentos compressíveis foram realizados pelo Grupo de Aerodinâmica da Universidade de Cambridge. De fato, os dados disponíveis na literatura tanto para o caso incompressível, quanto compressível, abordam efeitos tão diversos quanto os efeitos da transferência de calor, gradientes de pressão adversos e favoráveis, rugosidade, curvatura e tri-dimensionalidade. Eles tornaram, por exemplo, a existência de uma lei logarítmica numa região próxima à parede, em escoamentos com transpiração um fato inquestionável. Da mesma forma, alguns modelos algébricos turbulentos têm sido desenvolvidos, fornecendo boas previsões para alguns casos de escoamentos.

A maioria dos trabalhos publicados trata de perfis de velocidade e temperatura médios, e de parâmetros globais, como o coeficiente de atrito e o número de Stanton. Alguns trabalhos sobre modelos diferenciais de duas equações para escoamentos turbulentos podem ser encontrados na literatura (Rodi(1981)), (Wilcox(1988)). Os resultados, entretanto, não são promissores. Isto torna necessário o desenvolvimento de um modelo diferencial mais geral, que trate mais apropriadamente de escoamentos com transpiração.

Os objetivos do presente trabalho são, portanto, dois. Primeiro, buscar através de métodos assintóticos, soluções analíticas para a velocidade, u , energia cinética turbulenta, K e dissipação de energia por unidade de massa, ϵ , para escoamentos de camada limite incompressível com transpiração. A seguir, propor uma nova formulação K - ϵ para baixos números de Reynolds, com dependência na transpiração.

Discorra-se agora um pouco sobre a solução analítica. O modelo de K - ϵ clássico não se aplica a escoamentos ou regiões de escoamento onde o número de Reynolds local é pequeno; logo, K - ϵ não pode ser aplicado a escoamentos viscosos em regiões próximas à superfície sólida. Nesta região, devem ser utilizadas funções de parede universais. Aqui, encontramos soluções de ordem superior para u , K e ϵ , que tenham dependência explícita na transpiração e que possam ser usadas como funções de parede na especificação das condições de contorno na região completamente turbulenta. Estas novas soluções devem melhorar a performance do modelo K - ϵ para escoamentos com transpiração, em particular, para escoamentos com elevadas taxas de transpiração.

Métodos de perturbação, que incluem argumentos de escala e hipóteses adicionais sobre a natureza das expansões de K e de ϵ são utilizados para encontrar equações aproximadas, que são analiticamente resolvidas. Resultados importantes obtidos neste trabalho são as soluções de segunda ordem, que mostram que, se forem usados parâmetros de similaridade apropriados, a energia cinética turbulenta apresenta um comportamento logarítmico, enquanto a taxa de dissipação se comporta segundo $(\log y)/y$. Todos os resultados são comparados com dados experimentais obtidos por Andersen et al. (1972). A concordância dos resultados obtidos com os dados experimentais vem confirmar que a teoria apresentada é consistente.

Com relação à utilização de técnicas numéricas, e determinação de uma nova modelagem K - ϵ para baixos números de Reynolds, seis modelos matemáticos diferentes para previsão de camadas limite turbulentas sujeitas à gradiente de pressão nulo e sem troca térmica serão estudados. Quatro destes modelos são modelos algébricos que utilizam o conceito de

viscosidade turbulenta. Os dois modelos restantes são modelos $K-\epsilon$ diferenciais, incluindo o novo modelo proposto neste trabalho.

Conforme anteriormente lembrado, a modelagem $K-\epsilon$ foi inicialmente proposta para escoamentos com altos números de Reynolds, o que torna vulnerável sua aplicação para a solução de escoamentos em regiões próximas à parede, onde o número de Reynolds é baixo. Infelizmente o subterfúgio de se lançar mão de uma expressão para as chamadas funções de parede só pode ser aplicado quando estas funções existem. Quando não é este o caso, os modelos de turbulência precisam ser integrados desde a parede.

Para levar em conta os efeitos da região próxima à parede, onde o número de Reynolds é baixo, o procedimento normal é introduzir funções de amortecimento nas equações de transporte para K e para ϵ , de tal forma que haja um aumento na dissipação viscosa. Para condições simples de escoamentos, sem transpiração, o modelo de baixos números de Reynolds fornece bons resultados. Entretanto, para camadas limite com transpiração, os resultados não são tão bons. Em geral, valores obtidos para o coeficiente de atrito são superestimados e os perfis de velocidade não são suficientemente precisos.

Algumas alternativas para o modelo $K-\epsilon$ têm sido propostas na literatura na tentativa de se obter melhores resultados. O modelo $K-\omega$ de Wilcox(1988), por exemplo, fornece resultados melhores do que o modelo $K-\epsilon$. Este fato se dá, entretanto, mais por uma consequência das novas condições de contorno introduzidas do que por uma correção dada pelo modelo. O $K-\omega$ usa como condição de contorno para ω uma solução exata da equação da quantidade de movimento aproximada na região próxima à parede.

Neste trabalho, dois modelos $K-\epsilon$ serão considerados: o modelo de Chien (1982), e um novo modelo proposto, que é uma modificação do modelo de Chien, com diferentes funções de amortecimento. O modelo de Chien subestima os efeitos da dissipação viscosa devido à transpiração na parede. Fisicamente, o que ocorre é uma alteração da espessura da sub-camada viscosa devidos à transpiração, alterando conseqüentemente a taxa de dissipação

viscosa. A modificação no modelo de Chien proposta aqui, tenta capturar estes efeitos viscosos.

Os modelos são resolvidos numericamente utilizando uma rotina em diferenças finitas recentemente proposta. As equações de transporte são resolvidas de forma acoplada, de forma a dar mais robustez ao código. É utilizada uma rotina para geração de malha adaptativa, introduzida por Su et ali(1993) para levar em conta a variação dos comprimentos de escala da camada limite turbulenta. Para mais detalhes sobre o método numérico, ver Su et ali(1993) e Su(1995).

2. ESTADO DA ARTE

A motivação para o estudo de camadas limite com transpiração ficou clara no capítulo anterior. De fato, o extenso número de aplicações práticas para este problema levou à uma série de estudos no assunto em vários centros de excelência em mecânica dos fluidos. Dentre estes, destacam-se o grupo de Mickley no MIT, o grupo de Kays e Moffat em Stanford e o grupo de Squire em Cambridge. Enquanto os dois primeiros trataram exclusivamente de escoamentos incompressíveis, o último estudou em detalhes escoamentos compressíveis.

A presente revisão deter-se-á bastante nos trabalhos destes três grupos, não esquecendo porém, de inúmeras outras contribuições importantes realizadas em outras instituições.

A camada limite laminar com transpiração resulta em um grande número de soluções matemáticas exatas para casos onde os perfis de similaridade para os campos de velocidade e de temperatura existem. Mesmo para casos laminares complexos, simulações numéricas simples podem ser construídas para descrever bem os campos de velocidade e de temperatura. Por esse motivo, o interesse para o caso laminar logo se esvaneceu.

A camada limite turbulenta é uma entidade complexa, com variedade de escalas e cujo entendimento, mesmo para o caso mais simples de placa plana, desafia o mais arguto dos pesquisadores. Até os anos sessenta nenhum experimento sobre a camada limite turbulenta com transpiração podia ser encontrado na literatura. Nesta década, os primeiros trabalhos abordando as grandezas médias, relativas aos perfis de velocidade e de concentração foram realizados. Em trabalhos seminiais, Mickley et al(1954, 1957) desenvolveu correlações teóricas simples que se tornaram, juntamente com os trabalhos de Stevenson(1963), no início dos anos sessenta, a base para muito do que se seguiu nos próximos vinte anos.

No final dos anos setenta, mais de duzentos trabalhos experimentais em escoamentos com transpiração tinham sido realizados. Esses trabalhos abordaram desde os casos mais simples de transpiração, passando por situações muito complexas, que envolviam injeção

variável, até aqueles com variação externa de pressão, troca de calor, injeção de um gás alienígena, rugosidade, curvatura, tri-dimensionalidade e compressibilidade.

Reitera-se que grande parte do esforço realizado para o entendimento do fenômeno aconteceu nas Universidades de Stanford e de Cambridge. Por essa razão ficaria enfadonho citar nominalmente a extensa lista de trabalhos devidos a eles. Aqui, portanto, será concentrada atenção nos trabalhos de maior importância para o estudo de escoamentos com transpiração.

Essa grande massa de conhecimento adquirido foi pouco adicionada recentemente. Isto deve-se em parte ao fato da maioria dos resultados fundamentais experimentais já ter sido obtida anteriormente, como vimos. Também uma mudança de interesse para geometrias com injeção em pontos discretos, ao contrário de injeção contínua, aliado, à recente tendência de se fazer as previsões das propriedades do escoamento por simulação numérica, tem contribuído para uma pequena expansão do conhecimento no assunto.

A seguir serão apresentadas três seções onde serão discutidos respectivamente os aspectos experimentais, teóricos e numéricos do problema.

2.1 Uma breve revisão dos trabalhos experimentais em escoamentos com injeção ou sucção

Neste ponto é importante observar que o fato de vários trabalhos cobrirem as mesmas condições experimentais não significa que eles sejam diretamente comparados. Variações nas seções de teste e nas características intrínsecas do escoamento podem provocar características indesejáveis nos escoamentos, o que os torna bastante distintos. Existe, entretanto, uma série de trabalhos que são comparáveis. Entre estes, os trabalhos de Andersen et ali(1972), Favre et ali(1966) e Thomas(1974) são sem dúvida os de maior qualidade.

O escoamento medido por Andersen é aproximadamente bi-dimensional e suas taxas de

injeção são suficientemente altas para se promover um bom entendimento do fenômeno. Em adição, ele foi o único autor que realizou medidas redundantes de seus valores do fator de atrito na parede. Utilizando medidas de perfil médio de velocidade e a equação da quantidade de movimento na forma integral ele obteve dois valores de tensão na parede que puderam ser comparados. Ao contrário de seus precursores, foi o primeiro a obter medidas de perfis turbulentos.

Os dados de Favre foram obtidos para escoamentos com sucção. Medidas de perfil de velocidade médio, e parâmetros turbulentos obtidos com a utilização de anemometria de fio quente são apresentados.

Apenas a título de ilustração, mencionaremos que para o caso térmico, o trabalho mais importante foi o de Whitten et alli(1967). Para casos com variação de pressão, citamos os trabalhos de Blackwell et alli(1972) e Orlando et alli(1974).

Com relação a estudos para escoamentos compressíveis, importantes trabalhos realizados por Squire(1969), Dunbar e Squire(1971), Thomas(1974) e Marriott(1974) se seguiram. Abordando injeção variável, a existência de gradiente de pressão externo e a injeção de um gás alienígena, estes trabalhos permanecem como sendo a referência até hoje.

Em tempos recentes estudos sobre o processo de geração turbulenta, por Antonia et alli(1990), da relaminarização da camada limite, por Fulachier et alli(1991) e por Antonia e Fulachier(1989), sobre escoamentos emergindo de uma parede porosa, por Ramachandran et alli(1994), e sobre os efeitos de injeção em vórtices longitudinais em camadas limite côncavas, por Umur et alli(1995), foram realizados.

2.2 A fundamentação teórica

A camada limite turbulenta passou a ser melhor estudada e compreendida apenas a partir de meados dos anos sessenta. Em uma explosão de trabalhos criativos, o processo de geração turbulenta juntamente com a estrutura da camada limite turbulenta foram desvendados.

Foi apenas em 1969 que o primeiro modelo assintótico da camada limite turbulenta surgiu. Dois anos antes, o processo de geração turbulenta já havia sido discutido por Klein et alii(1967). Era nesta época que os modelos $K-\epsilon$ também se encontravam em sua infância.

Esses fatos claramente expõe a fragilidade da teoria de camada limite turbulenta naquele período. De fato, pouco poderia se fazer a não ser lançar mão dos conceitos simplórios de comprimento de mistura. Foi nossa sorte que esta teoria mostrou-se apropriada o suficiente para descrever a camada limite turbulenta com transpiração. Os avanços iniciais obtidos por Mickley, Stevenson, o grupo de Stanford e mesmo o grupo de Cambridge baseavam-se neste conceito. Com ele, obtiveram-se expressões para a lei da parede e as primeiras simulações numéricas do fenômeno.

Tratamentos mais refinados do problema, sob o ponto de vista da modelagem turbulenta, foram realizados por Rodi e Schreurer(1982), Launder(1988), Wilcox(1988) e Shima(1993), utilizando modelagens diferenciais de duas equações ou mesmo a modelagem direta do tensor de Reynolds, o último. A modelagem clássica $K-\epsilon$ foi o veículo utilizado por Rodi e Schreurer(1982) e por Launder(1988) para a descrição do problema. Wilcox(1988) usou o modelo alternativo $K-\omega$.

Apesar do maior aparente grau de sofisticação, os modelos diferenciais não se comportam sempre melhor do que os algébricos.

A maioria dos trabalhos sobre a estrutura assintótica da camada limite turbulenta usa primariamente o método das expansões assintóticas combinadas. Dividindo o escoamento

em duas regiões distintas, Yajnik(1970) e Mellor(1972) obtiveram soluções locais para as chamadas camada viscosa e camada externa. Esta estrutura de dois pisos tornou-se clássica mostrando-se apropriada à maioria das situações de interesse. Para escoamentos com separação ou interação viscosa/não-viscosa, esta estrutura falha, levando à necessidade do desenvolvimento de um novo modelo. Na realidade, mostra-se (Silva Freire e Hirata(1990), Cruz e Silva Freire(1995)) que uma estrutura de três pisos é mais adequada para a descrição da camada limite turbulenta. Uma nova camada associada com a região turbulenta do escoamento pôde ser deduzida através da aplicação do conceito de limite simples de Kaplun(1967). Esta camada responde bem a variações externas de pressão, resultando numa estrutura mais completa e capaz de lidar com os conceitos acima mencionados.

Análises do caso com transpiração foram realizadas por Afzal(1973) e mais recentemente por Silva Freire(1988a, 1988b, 1992 e 1995). O trabalho de Afzal, clamava que a camada limite compressível turbulenta mesmo para o caso sem transpiração possui dificuldades na combinação dos perfis internos e externos da massa específica. Em trabalhos subsequentes, Silva Freire(1989) mostrou que isto pode ser contornado, quando formas adequadas para expressar a massa específica são escolhidas. Estes trabalhos tinham o mérito de abordar tanto escoamentos incompressíveis como compressíveis, propondo para eles expressões confiáveis para a previsão do atrito na parede. O trabalho mais recente de Silva Freire, em particular, apresenta também expressões para previsão do número de Stanton.

Notem que todos os trabalhos acima lidam apenas com as grandezas médias do escoamento. As grandezas turbulentas têm suas ordens representadas por meros argumentos assintóticos, os quais, juntamente com modelagens algébricas simples, fornecem soluções apenas para os perfis médios. Estas soluções identificam nitidamente expressões locais para as clássicas leis da parede e da esteira.

2.3 A modelagem numérica

Numa busca de formulações mais gerais para as propriedades dos escoamentos turbulentos nas regiões próximas à parede, alguns autores apareceram com formulações novas para a teoria da viscosidade turbulenta. Nestes modelos, fatores de amortecimento eram incorporados às teorias inicialmente propostas para a modelagem $K-\epsilon$. Três funções de amortecimento eram adicionadas às equações de ν_t , K e ϵ , resultando num amortecimento precoce do termo turbulento na região viscosa.

Os primeiros modelos para baixos números de Reynolds surgiram nos anos 70. Entre eles podemos citar os modelos de Jones e Launder(1972), Launder e Sharma(1974), Lam e Bremhorst(1978), Chien(1982), e o modelo de Yang e Shih(1993). Em sua concepção, a maioria dos modelos é equivalente. As funções de amortecimento possuem pouca discordância entre si, variando mais nos valores de suas constantes, do que em sua forma. Por esse motivo, não é surpresa que os resultados gerados por eles sejam semelhantes.

É importante lembrar que nenhuma das formulações mencionadas anteriormente apresenta dependência explícita em parâmetros de injeção ou sucção, quando consideramos escoamentos com transpiração.

Na realidade, a utilização de funções de amortecimento não é um conceito original. Desde os anos cinquenta, os modelos algébricos já utilizavam este recurso. Modificações dos modelos algébricos para levar em conta a transpiração, foram propostas entre outros, por Cebeci(1970), Kays(1972), Baker e Launder(1974) e Pletcher(1974). Todos os modelos algébricos, ao contrário dos modelos diferenciais, possuem uma dependência explícita na velocidade de transpiração, através de modificações no fator de amortecimento de van Driest.

Simulações numéricas de escoamentos com transpiração revelam que as previsões fornecidas pelos modelos algébricos normalmente são superiores às previsões fornecidas

pelos modelos diferenciais, Avelino et alli(1995).

Do ponto de vista de implementação numérica, propostas originais de geração de uma malha adaptativa e de um novo esquema de diferenças finitas por Su et alli(1993) e por Su(1995), resultaram em uma apreciável melhora sobre o desempenho de códigos que utilizem os esquemas padrão.

3. ANÁLISE ASSINTÓTICA DAS EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE

Neste capítulo, encontraremos expressões de ordem superior para a velocidade do escoamento, energia cinética turbulenta e taxa de dissipação desta energia. Estas expressões deverão apresentar dependência explícita na taxa de transpiração, e serão utilizadas como condições de contorno para a formulação K - ϵ . O método adotado para a obtenção destas expressões será a análise assintótica. Para o completo entendimento do método, torna-se portanto, necessário estudar o comportamento assintótico da camada limite turbulenta.

As equações que regem o movimento, bem como as hipóteses feitas para a determinação das expressões de ordem superior estão expostas aqui. Uma seção será dedicada unicamente à região completamente turbulenta.

Conhecidas as expressões para u , K e ϵ , finalizaremos o capítulo utilizando estas funções de parede na especificação das condições de contorno, e validando numérica e experimentalmente as soluções encontradas.

3.1 Equações do movimento

Esta seção será dedicada à apresentação das equações padrão da modelagem K - ϵ para escoamentos de camada limite.

Adotando-se o procedimento convencional, denominamos as quantidades médias de velocidade e pressão por u_i e p respectivamente. As flutuações das quantidades turbulentas são representadas por u'_i .

Todos os comprimentos e velocidades encontrados nas equações foram adimensionalizados utilizando quantidades características do escoamento externo.

As equações do movimento para escoamento de fluido incompressível assumem, então, a forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right), \quad (3.2)$$

onde R é o número de Reynolds.

O tensor de Reynolds, τ_{ij} , pode ser escrito como

$$\tau_{ij} = -\overline{u'_i u'_j}, \quad (3.3)$$

onde a barra denota uma média no tempo. No modelo K - ϵ as componentes do tensor de Reynolds são proporcionais às grandezas médias do escoamento, através da viscosidade turbulenta. Desta forma,

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3} K \delta_{ij} + \nu_t d_{ij}, \quad (3.4)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e K , a energia cinética turbulenta, expressa por

$$K = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{2}. \quad (3.5)$$

Na Equação (3.4), ν_t é a viscosidade turbulenta e d_{ij} é o tensor deformação, onde

$$d_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (3.6)$$

A taxa de dissipação de energia cinética turbulenta, ϵ , é expressa por

$$\epsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}, \quad (3.7)$$

onde ν é a viscosidade cinemática do fluido.

No modelo K - ϵ , utilizando argumentos dimensionais, obtemos, para a viscosidade turbulenta, a expressão

$$\nu_t = c_\mu \frac{K^2}{\epsilon}, \quad (3.8)$$

onde c_μ é uma constante do modelo.

Os parâmetros de turbulência, K e ϵ , são determinados através das seguintes equações de transporte:

$$\frac{DK}{Dt} = P - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_i} \right], \quad (3.9)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} P - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K}, \quad (3.10)$$

onde

$$P = \nu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.11)$$

e os c 's e os σ 's são constantes do modelo. Valores típicos encontrados empiricamente para estas constantes estão apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1. Constantes do Modelo

c_μ	$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2}$	σ_K	σ_ϵ
0,09	1,44	1,92	1,0	1,30

O sistema constituído pelas equações (3.1) a (3.11) é claramente um sistema fechado. A determinação completa do problema matemático depende, agora, somente da especificação apropriada das condições de contorno. Na região próxima à parede, normalmente são utilizadas funções de parede. No caso de escoamentos onde ocorre injeção ou sucção, as funções de parede utilizadas como condição de contorno do problema deverão levar em conta os efeitos desta transpiração.

Para a componente da velocidade na direção do escoamento, u , para K e para ϵ normalmente adotamos

$$\frac{u_1}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln(E y_1^+), \quad (3.12)$$

onde

$$y_1^+ = \frac{y_1 u_\tau}{\nu},$$

$$K = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}}, \quad \epsilon = \frac{u_\tau^3}{k y_1}.$$

As grandezas u_1 e y_1 devem estar na região completamente turbulenta do escoamento. A constante de von Kármán, k , possui o valor 0,41. O coeficiente linear da Lei da Parede, E , vale normalmente 9,0 e u_τ é a velocidade de atrito.

As equações acima são deduzidas adotando a hipótese de que há equilíbrio local, ou seja, que a taxa de produção de energia cinética turbulenta é igual à taxa de dissipação. Estas equações tem validade em escoamentos sobre superfície sólida.

Uma vez apresentadas as equações do movimento, iniciaremos a obtenção das condições de contorno. Isto será feito com auxílio de técnicas assintóticas. Assim, torna-se necessário conhecer a estrutura assintótica da camada limite.

3.2 Hipóteses assintóticas

Para demonstrar a estrutura da camada limite turbulenta é necessário estimar a ordem de grandeza dos termos envolvidos no escoamento. Nesta seção, introduziremos a ordem de grandeza da velocidade característica na região interna da camada limite.

As maiores escalas que ocorrem num escoamento são determinadas pelas próprias dimensões do corpo, como uma velocidade característica, U_∞ , para o escoamento e o comprimento, L , do corpo. Já a velocidade característica de escoamento na direção transversal, v , pode ser deduzida fazendo uma análise da ordem de grandeza dos termos envolvidos na equação da continuidade. Como resultado, conclui-se que a velocidade v deve ser da mesma ordem de grandeza da espessura da camada limite, δ .

Medidas das grandezas médias do escoamento não fornecem informações suficientes para a solução de problemas mais complexos que envolvam turbulência, dados de flutuações das quantidades turbulentas tornam-se, portanto, necessários. Os resultados experimentais obtidos por Andersen(1972) e por Orlando(1974) analisando a turbulência fornecem valores, não só das grandezas médias do escoamento, mas também das flutuações turbulentas. Será com base nestes dados experimentais, que faremos a análise da ordem das flutuações.

Na região próxima à parede, sabemos que a tensão turbulenta assume valores equivalentes aos da tensão local. Desta forma, torna-se razoável assumir que $O(u') = O(v') = O(u_\tau)$, onde

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}. \quad (3.13)$$

Logo, a velocidade característica na região interna do escoamento é feita da ordem da velocidade de atrito, u_τ .

A dedução da ordem dos termos de flutuação turbulenta consiste de um fato

experimental. Posteriormente, utilizaremos este resultado para estimar as ordens de grandeza da energia cinética turbulenta, K , e da sua taxa de dissipação, ϵ .

A próxima seção descreve as sub-camadas que estruturam a camada limite turbulenta e suas respectivas grandezas características.

3.3 Estrutura assintótica da camada limite turbulenta

Esta seção apresenta uma nova estrutura assintótica da camada limite turbulenta, apresentando o conceito de camada limite composta por três regiões distintas. Esta descrição foi introduzida por Silva Freire e Hirata(1990), incluindo na camada limite uma terceira região, onde dominam os efeitos da turbulência. As três sub-camadas serão comentadas nesta seção, com relação à velocidade e ao comprimento característicos.

A camada limite turbulenta vinha sendo apresentada numa estrutura onde apenas duas regiões, uma interna e outra externa, eram identificadas. Na região interna, os efeitos viscosos dominavam, enquanto na região externa prevaleciam os efeitos de inércia. Desta forma, a camada limite podia ser analisada utilizando-se apenas duas escalas características: uma para a região viscosa e outra para a região externa. A representação esquemática desta estrutura está na Figura 3a.

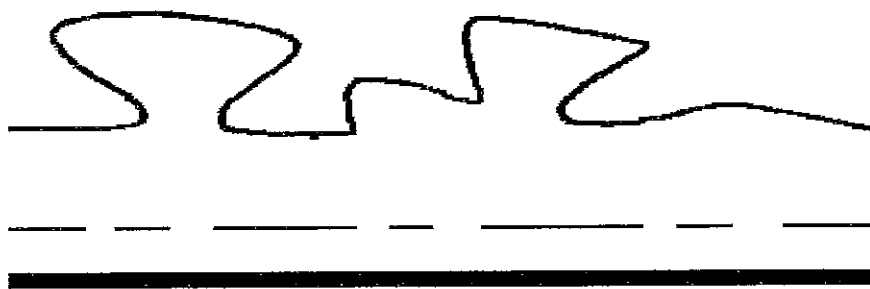


Figura 3a Estrutura da camada limite turbulenta com duas camadas

Ao adotar esta divisão em duas camadas, supõe-se que a uma dada distância da parede, onde os efeitos viscosos já não exercem influência sobre o escoamento, quem domina são as forças de inércia. Em outras palavras, a região onde os efeitos de turbulência são importantes tende a desaparecer.

Uma análise cuidadosa da estrutura da camada limite turbulenta leva à conclusão de que há uma terceira região distinta das demais, ocupando uma posição intermediária entre a camada viscosa e a região externa da camada limite. Nesta região, os efeitos da turbulência exercem considerável influência sobre o escoamento. Esta nova estrutura, representada na Figura 3b, divide, então, a camada limite turbulenta em três sub-camadas distintas, a saber: bem próxima à parede, uma região denominada sub-camada viscosa, onde prevalecem os efeitos viscosos; a seguir, a viscosidade deixa de exercer sua influência, e toma lugar a turbulência, seus efeitos passam a influenciar o escoamento graduaemente, até que exercem domínio total, dando lugar à região completamente turbulenta do escoamento; finalmente, na porção externa da camada limite, tem lugar uma outra camada denominada região da esteira. Nesta região, são os efeitos de inércia que vão governar.

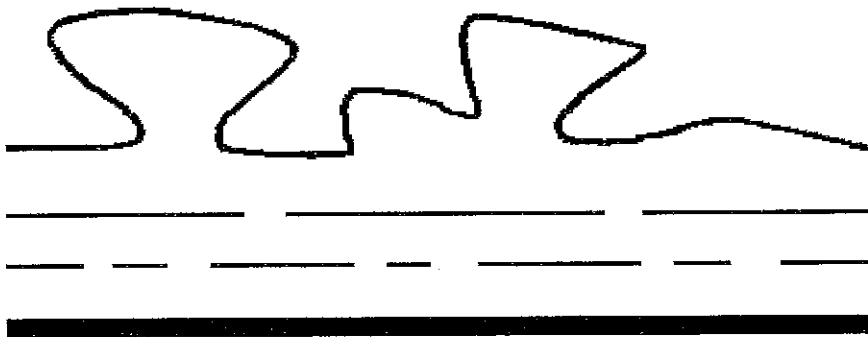


Figura 3b Estrutura da camada limite turbulenta com três camadas

Analisando a ordem relativa dos termos da equação da quantidade de movimento na direção longitudinal, encontramos, para cada uma das três camadas distintas, as respectivas escalas características.

Na região próxima à parede, também chamada região interna, encontramos a sub-camada viscosa e a região completamente turbulenta. Estas duas camadas colapsam num dado ponto, onde os efeitos das tensões laminares e turbulentas possuem o mesmo grau de importância. De fato, na transição da sub-camada viscosa para a região completamente turbulenta, há um instante onde as forças viscosas se equivalem aos efeitos da turbulência. Para este instante, fazemos

$$O(\text{termos viscosos}) = O(\text{termos turbulentos}),$$

ou ainda, da equação da quantidade de movimento na direção longitudinal, considerando os termos de mesma ordem, escrevemos

$$O\left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = O(\overline{u'v'}). \quad (3.14)$$

Na região interna, a velocidade característica é da ordem da velocidade de atrito, u_τ , e o comprimento característico na direção transversal apresenta a mesma ordem de grandeza da espessura da sub-camada viscosa, $\hat{\delta}$. Utilizando estas informações, o resultado da análise assintótica da equação (3.14) fornece a espessura procurada, $\hat{\delta}$. Assim,

$$\hat{\delta} = O\left(\frac{\nu}{u_\tau}\right). \quad (3.15)$$

É importante notar que o perfil de velocidades nesta região do escoamento apresenta comportamento linear, ou seja,

$$u^+ = y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}, \quad (3.16)$$

onde

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}.$$

A uma distância $\hat{\delta}$ da parede, os efeitos da viscosidade vão se tornando cada vez menos influentes, enquanto os efeitos das tensões turbulentas tornam-se importantes e passam a dominar completamente o escoamento. O perfil de velocidades encontrado nesta região, não será mais linear.

Ainda na região interna do escoamento, os efeitos da inércia começam a surgir, porém só exercerão influência considerável na porção externa do escoamento de camada limite. O limite da região turbulenta será naquele instante de equilíbrio onde os termos de inércia e as tensões turbulentas apresentem mesma importância. Partindo desta condição de equilíbrio, será possível estabelecer a espessura da região completamente turbulenta. Desta forma, o limite superior da região turbulenta será aquele onde

$$O(\text{termos de inércia}) = O(\text{termos turbulentos}).$$

Agrupando os termos de mesma ordem de grandeza da equação da quantidade de movimento, teremos

$$O\left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = O\left(\frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})\right). \quad (3.17)$$

O comprimento característico considerado aqui, para a solução assintótica, será a espessura da camada turbulenta, objeto de nosso estudo. Assim, fazendo a análise assintótica e resolvendo para $\tilde{\delta}$, obtemos

$$\tilde{\delta} = O\left(\frac{u_\tau^2}{U_\infty^2} L\right), \quad (3.18)$$

onde $\tilde{\delta}$ é a espessura da região completamente turbulenta.

Com este resultado, introduzimos uma terceira escala característica no escoamento de camada limite turbulenta. Esta escala será representativa de uma região intermediária às

duas outras sub-camadas, determinando a região do escoamento onde os efeitos da turbulência dominam o escoamento.

O perfil de velocidades nesta região apresenta um comportamento expresso por

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right) + A_0, \quad (3.19)$$

onde $A_0 = 5,0$ para casos onde não há transpiração.

A expressão (3.19) é a Lei da Parede, e pode ser obtida algebricamente partindo-se do princípio de que as tensões turbulentas são dominantes nesta região e adotando as hipóteses de viscosidade turbulenta,

$$\mu_t = \rho l_c u_c,$$

e de comprimento de mistura, l_c ,

$$u_c = l_c \frac{du}{dy}.$$

É importante notar que a Lei da Parede é uma função logarítmica, e que o perfil de velocidades tem, portanto, um comportamento logarítmico. Por esta razão, a região completamente turbulenta, onde tem validade a Lei da Parede, é também chamada de região logarítmica.

A última região, denominada região da esteira, constitui a maior porção do escoamento de camada limite. Aqui, os efeitos de inércia prevalecem sobre os turbulentos e dominam o escoamento. Esta camada é delimitada pela espessura da camada limite, δ . O perfil de velocidades foi obtido por Coles(1956), que propôs uma solução universal com base em mais de seiscentos experimentos. Como o comportamento das velocidades se aproxima do comportamento de uma cosenóide, pode-se propor, um perfil de velocidades da forma

$$W = \frac{P}{k} \left[1 - \cos\left(\frac{y\pi}{\delta}\right) \right], \quad (3.20)$$

onde $P = 0,55$.

Esta expressão é conhecida como a Lei da Esteira. O comprimento característico adotado é a espessura da camada limite, δ , enquanto a velocidade característica será a velocidade do escoamento fora da camada limite, U_∞ .

A estrutura assintótica da camada limite turbulenta está ilustrada nas Figuras (3.1) e (3.2). Perfis de velocidade obtidos experimentalmente para alguns casos de escoamentos sem transpiração estão apresentados na Figura (3.1). Um esquema desta estrutura, ilustrando os comprimentos característicos e perfis de velocidade pode ser observado na Figura (3.2).

Observando a Figura (3.2) notamos que, para obter o valor da velocidade em determinado ponto da região da esteira, é necessário somar o valor da velocidade obtido pela Lei da Parede ao valor encontrado utilizando-se a Lei da Esteira naquele ponto. Desta forma,

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln y^+ + \frac{P}{k} \left[1 - \cos\left(\frac{y\pi}{\delta}\right) \right] + A_0. \quad (3.21)$$

Se aplicada à uma distância δ da parede, fazendo $y = \delta$, onde δ denota a espessura da camada limite e a velocidade assume o valor da velocidade do escoamento principal, $u = U_\infty$, a Lei da Esteira assume seu valor máximo, e a equação acima fornece

$$\frac{U_\infty}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln \frac{\delta u_\tau}{\nu} + \frac{2P}{k} + A_0. \quad (3.22)$$

Esta equação é chamada de Equação do Atrito. De fato, a Equação (3.22) pode ser resolvida para u_τ , fornecendo os valores da velocidade de atrito e da tensão na parede.

A estrutura assintótica da camada limite turbulenta composta por estas três regiões distintas foi primeiramente introduzida na literatura por Silva Freire e Hirata(1990).

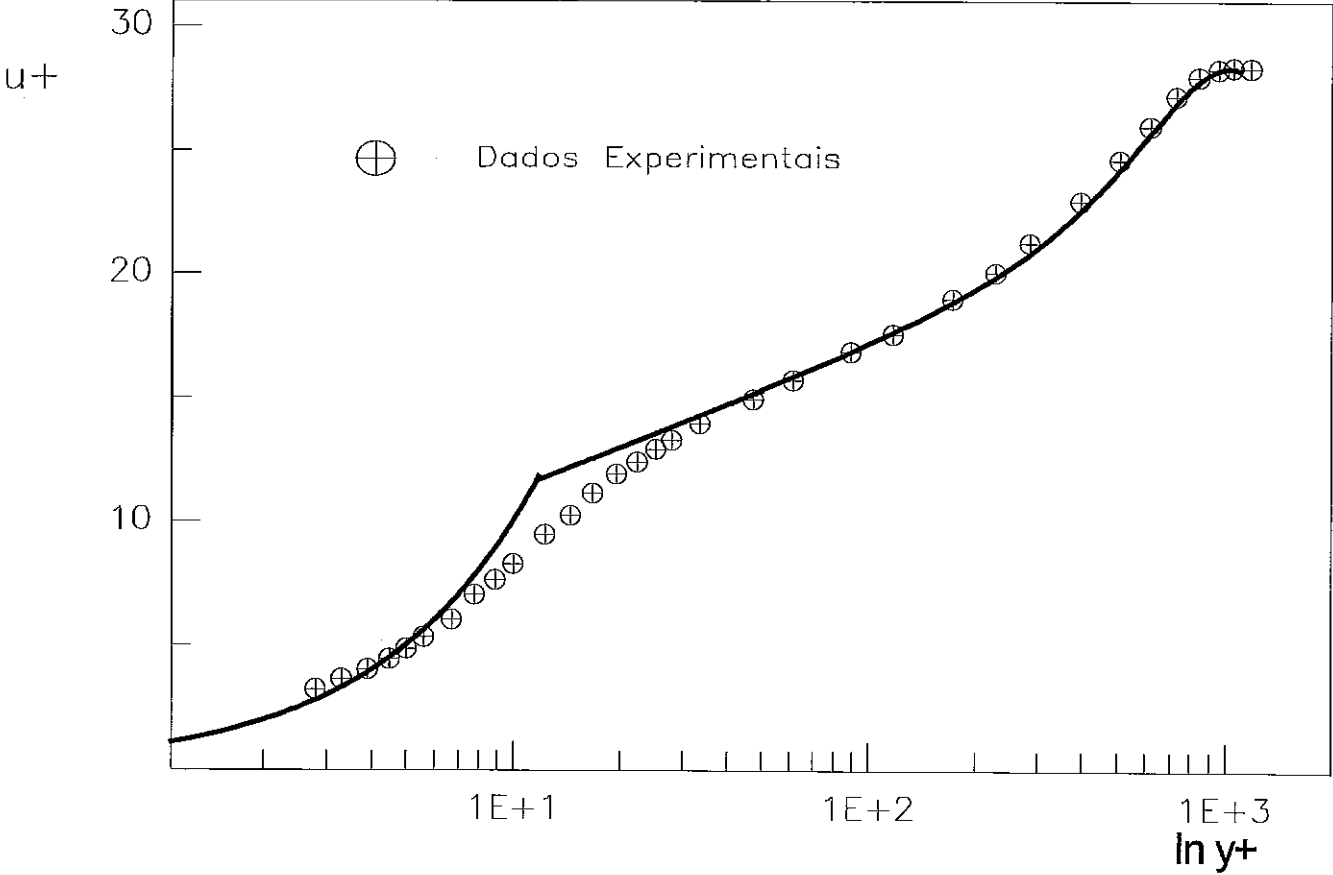


Figura 3.1 Perfil Experimental de Velocidades

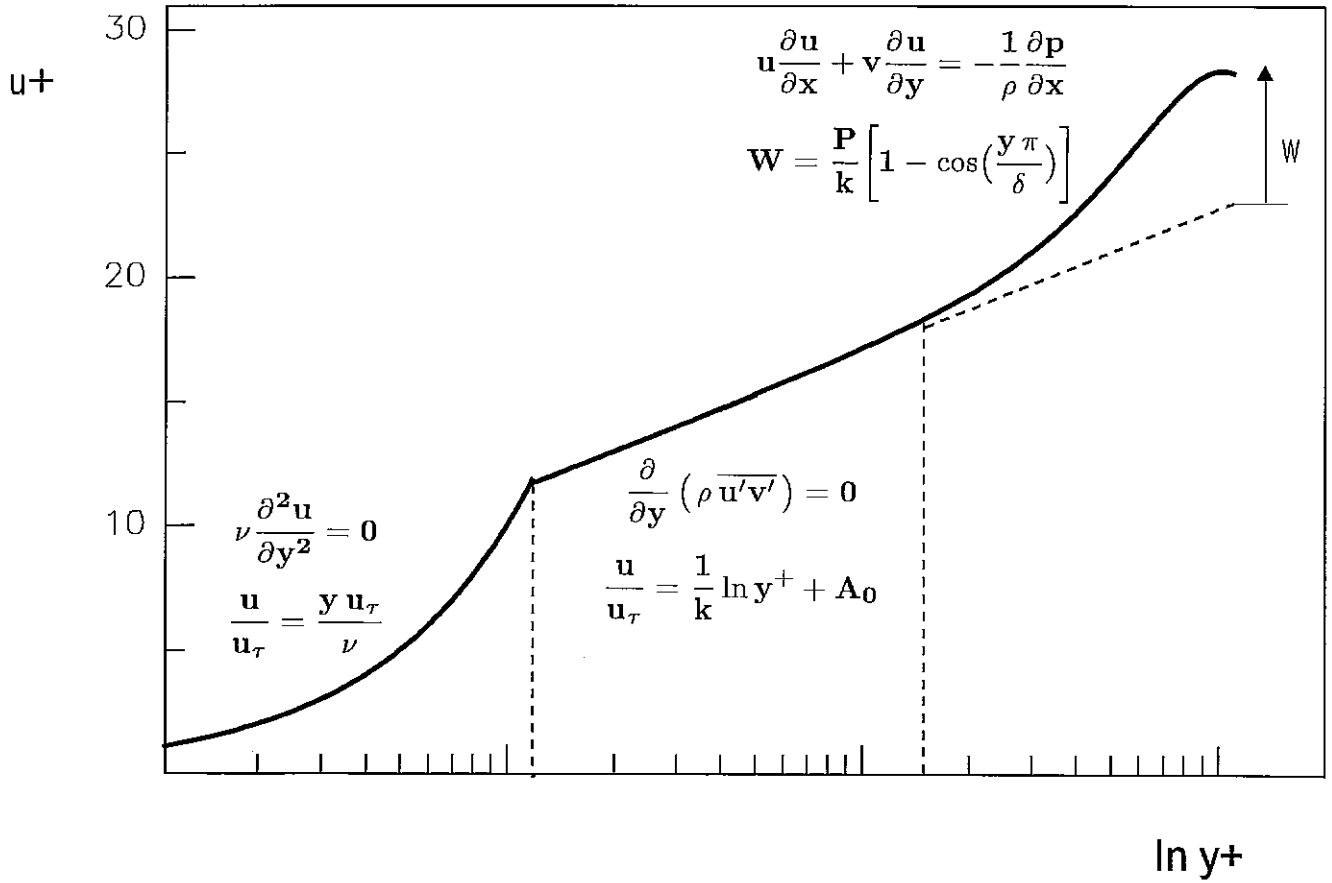


Figura 3.2 Estrutura da Camada Limite Turbulenta

3.4 A região turbulenta

Uma vez apresentadas as equações do movimento, as hipóteses assintóticas e a estrutura da camada limite turbulenta, a modelagem assintótica completa do problema depende agora, somente, da especificação do domínio de validade das equações apresentadas e da determinação de equações intermediárias para a velocidade, energia cinética turbulenta e sua taxa de dissipação. Estas equações intermediárias, serão a base da análise assintótica para determinação das funções de parede que serão utilizadas como condição de contorno do problema. Estes são os dois objetivos desta seção.

Desde que a formulação de função de parede é aplicada à região do escoamento completamente turbulenta, vamos resolver as equações que regem o movimento, Equação (3.1) à Equação (3.11), nesta sub-camada específica da camada limite. A região onde os efeitos turbulentos governam é definida pelo domínio

$$D = \{\eta \mid \text{ord}(1/u_\tau R) < \text{ord}(\eta) < \text{ord}(u_\tau^2)\}, \quad (3.23)$$

onde η representa a região de validade das equações aproximadas e R é o número de Reynolds. Mais detalhes a respeito da natureza da função η são encontrados em Kaplun(1967).

O resultado acima pode ser facilmente obtido através da aplicação do método de Kaplun às equações do movimento, Equações (3.1) e (3.2). De fato, Silva Freire e Hirata(1990) e Silva Freire et alli(1995) mostraram que a região interna da camada limite tem uma estrutura assintótica de duas camadas definidas, com duas equações principais. Uma região definida no domínio onde

$$\text{ord}(\eta) = \text{ord}(u_\tau^2),$$

e a segunda região definida por

$$\text{ord}(\eta) = \text{ord}\left(\frac{1}{u_\tau R}\right),$$

dentro do domínio do escoamento.

A região completamente turbulenta, determinada pela Equação (3.23), é a porção do domínio onde valem as duas principais equações ("overlap"). Para mais detalhes no método de Kaplun e sobre a estrutura assintótica da camada limite turbulenta, o leitor pode consultar as duas referências citadas anteriormente.

Um resultado importante obtido aqui, é o fato da presença da transpiração não alterar o domínio definido na Equação (3.23). Isto significa que podemos trabalhar com equações aproximadas que tenham validade neste domínio. Assim, passando o limite de η com $\text{ord}(\eta) = \text{ord}(u_\tau^2)$ nas Equações (3.2), (3.9) e (3.10), obtemos

$$v_w \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(c_\mu \frac{K^2}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (3.24)$$

$$v_w \frac{\partial K}{\partial y} = \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \epsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial y} \right), \quad (3.25)$$

$$v_w \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right), \quad (3.26)$$

onde v_w representa a taxa de transpiração.

Estas são, segundo o conceito de Kaplun, as equações intermediárias com validade na região completamente turbulenta. As funções de parede para u , K e ϵ serão determinadas com base nestas equações.

3.5 Equações de ordem superior

Nesta seção, vamos completar a modelagem assintótica, apresentando soluções analíticas de ordem superior para o comportamento de u , K e ϵ que serão utilizadas como condições de contorno para a formulação. Estas funções de parede apresentam dependência explícita na transpiração.

As expansões assintóticas para a velocidade, energia cinética turbulenta e sua taxa de dissipação, são

$$u = u_\tau u_1 + v_w u_2, \quad (3.27)$$

$$K = u_\tau^2 K_1 + u_\tau v_w K_2 + v_w^2 K_3, \quad (3.28)$$

$$\epsilon = u_\tau^3 \epsilon_1 + u_\tau^2 v_w \epsilon_2 + u_\tau v_w^2 \epsilon_3. \quad (3.29)$$

Para encontrar as equações aproximadas de primeira e de segunda ordem para u , K e ϵ , substituiremos as expansões assintóticas (3.27), (3.28) e (3.29) nas equações intermediárias (3.24), (3.25) e (3.26). Agrupando os termos resultantes desta substituição que apresentam mesma ordem de grandeza, obtemos

a) Equações de primeira ordem:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[c_\mu \frac{K_1^2}{\epsilon_1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right], \quad (3.30)$$

$$0 = c_\mu \frac{K_1^2}{\epsilon_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 - \epsilon_1 + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{c_\mu}{\sigma_K} \frac{K_1^2}{\epsilon_1} \frac{\partial K_1}{\partial y} \right], \quad (3.31)$$

$$0 = c_{\epsilon 1} c_\mu K_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon_1^2}{K_1} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{c_\mu}{\sigma_\epsilon} \frac{K_1^2}{\epsilon_1} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial y} \right]. \quad (3.32)$$

b) Equações de segunda ordem:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(c_\mu \frac{K_1^2}{\epsilon_1} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{\epsilon_1} (2K_1K_2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} K_1^2) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right], \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial y} = 2c_\mu \frac{K_1^2}{\epsilon_1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{c_\mu}{\epsilon_1} (2K_1K_2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} K_1^2) \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 - \epsilon_2 +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{c_\mu}{\sigma_K} \frac{K_1^2}{\epsilon_1} \frac{\partial K_2}{\partial y} + \frac{1}{\epsilon_1} (2K_1K_2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} K_1^2) \frac{\partial K_1}{\partial y} \right) \right], \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial y} = c_\mu c_{\epsilon 1} \left(2K_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} + (2K_2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} K_1) \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 \right) - c_{\epsilon 2} \frac{1}{K_1} (2\epsilon_1 \epsilon_2 - \frac{K_2}{K_1} \epsilon_1^2) +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{c_\mu}{\sigma_\epsilon} \frac{K_1^2}{\epsilon_1} \frac{\partial \epsilon_2}{\partial y} + \frac{1}{\epsilon_1} (2K_1K_2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} K_1^2) \frac{\partial \epsilon_1}{\partial y} \right) \right]. \quad (3.35)$$

As soluções analíticas das equações de primeira ordem são

$$u_1 = \frac{1}{k} \ln y^+ + A_0, \quad (3.36)$$

$$K_1 = A, \quad (3.37)$$

$$\epsilon_1 = \frac{B}{ky}. \quad (3.38)$$

De acordo com os resultados apresentados, a energia cinética turbulenta assume um valor constante, dependente das condições do escoamento, enquanto sua taxa de dissipação varia linearmente com a distância à parede.

A solução analítica encontrada para o sistema de equações de segunda ordem é

$$u_2 = \frac{1}{4k^2} (\ln y^+ + A_0)^2, \quad (3.39)$$

$$K_2 = C \ln y^+ + D, \quad (3.40)$$

$$\epsilon_2 = E \frac{\ln y^+}{y} + \frac{F}{y}. \quad (3.41)$$

As soluções acima mostram que a energia cinética turbulenta apresenta um comportamento logarítmico, e a sua taxa de dissipação comporta-se segundo uma função logarítmica do tipo $(\ln y)/y$.

A velocidade, tanto na solução de primeira ordem, quanto na solução de segunda ordem, apresenta um perfil logarítmico. De fato, a região em estudo é a região completamente turbulenta do escoamento, e se caracteriza por seu perfil logarítmico de velocidades.

As soluções de primeira e de segunda ordem para u , K e ϵ encontradas podem ser substituídas nas expansões (3.27), (3.28) e (3.29), resultando nas funções de parede procuradas:

$$u = u_\tau \left[\frac{1}{k} \ln y^+ + A_0 \right] + \frac{v_w}{4k^2} \left[\ln y^+ + A_0 \right]^2, \quad (3.42)$$

$$K = u_\tau^2 A + u_\tau v_w \left[C \ln y^+ + D \right], \quad (3.43)$$

$$\epsilon = u_\tau^3 \frac{B}{ky} + u_\tau^2 v_w \left[E \frac{\ln y^+}{y} + \frac{F}{y} \right]. \quad (3.44)$$

De fato, as funções de parede possuem dependência explícita na taxa de transpiração, melhorando, portanto, a eficácia da modelagem.

Os resultados obtidos com a nova formulação serão apresentados na seção de validação, onde perfis de velocidade obtidos utilizando estas funções de parede são comparados com perfis onde as condições de contorno não levam em conta a transpiração, ressaltando o bom desempenho do modelo.

Estes resultados, apresentados em variáveis de similaridade e comparados com dados experimentais, possibilitam a determinação dos valores das constantes A , B , C , D , E e F experimentalmente. A priori, podemos, entretanto, estimar analiticamente os valores assumidos por estas constantes utilizando os valores clássicos das constantes do modelo K - ϵ . Deste modo,

$$A = \frac{1}{\sqrt{c_\mu}} \equiv 3,3; \quad (3.45)$$

$$B \equiv 1,0; \quad (3.46)$$

$$C = \frac{1}{k\sqrt{c_\mu}} \equiv 8,1; \quad (3.47)$$

$$D = \frac{1}{k\sqrt{c_\mu}} \left(\frac{17}{2} - \sigma_\epsilon \right) \equiv 58,3; \quad (3.48)$$

$$E = \frac{3}{k^2} \equiv 17,9; \quad (3.49)$$

$$F = \frac{49 - 2\sigma_\epsilon}{4k^2} \equiv 69,6. \quad (3.50)$$

Os valores das constantes A , B , C , D , E e F apresentados foram obtidos analiticamente, em função das constantes clássicas do modelo $K-\epsilon$. É importante notar que os valores destas constantes não são universais, podendo sofrer variações para diferentes condições de escoamento, como por exemplo para o caso com transpiração. Torna-se, portanto, necessário obter novos valores para as constantes A , B , C , D , E e F , porém, de uma maneira mais consistente. O procedimento adotado neste trabalho, para determinar valores mais apropriados para estas constantes será a comparação com os perfis experimentais de energia cinética turbulenta e sua taxa de dissipação, ajustados por variáveis de similaridade.

A validação experimental das Equações (3.40) e (3.41), será executada na seção seguinte. Esta validação será feita de duas formas. Em primeiro lugar, vamos verificar a concordância dos dados de K e de ϵ experimentais com os valores de K e de ϵ determinados com auxílio das expressões logarítmicas Equações (3.43) e (3.44).

É importante notar que a expressão para a velocidade, Equação (3.42), resultante da análise assintótica, coincide com a expressão obtida algebricamente por Stevenson(1963). Esta expressão foi exaustivamente testada nos anos sessenta, e resulta, portanto, numa expressão de validade inquestionável. A grande contribuição desta dedução está no fato do perfil logarítmico de velocidades para escoamentos com transpiração para os modelos de duas equações ser uma dedução via modelos diferenciais, e não mais via modelos algébricos. Previsões do perfil de velocidades serão apresentados na próxima seção.

Finalmente, previsões para o coeficiente de atrito, serão obtidas através de implementação numérica dessas novas expressões logarítmicas. Os valores dos coeficientes de atrito serão comparados com resultados obtidos utilizando modelos algébricos.

3.6 Validação experimental e numérica

Agora, a modelagem assintótica está completa. As equações para u , K e ϵ com dependência na transpiração foram obtidas analiticamente, e deverão ser validadas.

Para a comparação com os dados experimentais de camada limite com transpiração, adotamos a análise realizada por Squire(1980), e utilizaremos os resultados co- lhidos por Andersen et alli(1972). Estes dados são os únicos disponíveis onde pode-se encontrar medições de coeficiente de atrito. As condições que especificam os escoamentos utilizados para validar as funções de parede, são mostradas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2. Especificação dos Escoamentos

<i>Experimento</i>	$U [ft/s]$	v_w/U_∞	m
102171-1	21,33	0,004	-0,15
101371-2	21,32	0,002	-0,15
121671-3	21,29	-0,002	-0,15

onde m é o expoente no termo de gradiente de pressão adverso ($U \propto x^m$).

Para verificar o comportamento logarítmico de K , rescrevemos a Equação (3.43) na forma

$$\Gamma = C \ln y^+ + D, \quad (3.51)$$

onde

$$\Gamma = \frac{K - u_\tau^2 A}{u_\tau v_w}. \quad (3.52)$$

Os resultados experimentais são apresentados nas variáveis Γ e y^+ , conforme mostrado na Figura (3.3). A presença de uma região logarítmica é ilustrada pela linha tracejada. Os valores das constantes C e D foram estimados analiticamente na seção 3.5 com base nos valores padrão das constantes do modelo K - ϵ . Cabe, entretanto,

ressaltar que estas constantes não foram obtidas para escoamentos com transpiração, fazendo-se, portanto, necessário determinar os valores de C e de D de uma forma mais consistente. O procedimento adotado neste trabalho, para determinar valores mais apropriados para C e para D , foi a obtenção dos valores destas constantes diretamente dos dados experimentais. Neste caso, a equação para a energia cinética turbulenta, deve ser, então, reescrita na forma

$$K = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} + u_\tau v_w (C_{exp} \ln y^+ + D_{exp}), \quad (3.53)$$

onde as constantes assumem, agora, os valores obtidos diretamente do perfil experimental de K , logo $C_{exp} = 20$ e $D_{exp} = 64$.

Estes valores foram extraídos da Figura 3.3. A equação para a energia cinética turbulenta foi ajustada para representar o perfil logaritmo de K , fornecendo valores mais apropriados para os coeficientes em questão.

Os dados experimentais da energia cinética turbulenta puderam ser encontrados na literatura, todavia, a obtenção de valores experimentais para a sua taxa de dissipação não é trivial. A taxa da dissipação de energia cinética turbulenta por unidade de massa não é uma quantidade diretamente medida. Dada a dificuldade de se obter seu valor experimental, o conceito de comprimento característico deverá ser utilizado como artifício para a determinação de ϵ . Desta forma, a taxa de dissipação de energia cinética pode ser estimada reescrevendo a equação do comprimento característico, e resolvendo para ϵ . Ou seja,

$$\epsilon = C_D \frac{K^{3/2}}{l_c}, \quad (3.54)$$

onde C_D é uma constante do modelo. Este é um procedimento incerto, torna-se, portanto, difícil chegar a qualquer conclusão segura com relação aos valores

experimentais das constantes E e de F . Todavia, será possível verificar que ϵ apresenta um comportamento logarítmico na região completamente turbulenta do escoamento. Este comportamento foi previsto na seção anterior. O perfil de ϵ está apresentado nas variáveis de similaridade Ξ e y^+ na Figura 3.4. Onde Ξ e y^+ são definidos por

$$\Xi = k[E \ln y^+ + F], \quad (3.55)$$

onde

$$\Xi = \frac{\epsilon (k y) - u_\tau^3 B}{u_\tau^2 v_w}, \quad (3.56)$$

e

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}.$$

A implementação numérica da formulação apresentada será feita com auxílio do código computacional CAST (*Computer Aided Simulation of Turbulence*). Este programa tem sua estrutura similar a outros esquemas de previsão de escoamentos tais como TEACH e TEAM. Trata-se de uma forma conservativa em variáveis primitivas, que utiliza o método de volumes finitos. As diferenças entre estes métodos estão na localização das variáveis, esquema de discretização, algoritmos para solução do sistema de equações lineares resultantes da discretização e no armazenamento adotado para o acoplamento da pressão. Este código desenvolvido por Peric e Schreuerer(1989), utiliza funções de parede. Portanto, a implementação das soluções de segunda ordem foi executada alterando-se as funções de parede utilizadas como condições de contorno para esta região.

As Figuras 3.5 e 3.6 mostram previsões dos perfis de velocidade e dos coeficientes de atrito obtidos através do modelo $K-\epsilon$ utilizando as soluções de segunda ordem para transpiração, e previsões do modelo padrão comparadas com os dados experimentais obtidos por Andersen et alli(1972).

Como pode ser observado, a performance da solução assintótica para o modelo $K-\epsilon$ apresentada fornece boas previsões do perfil de velocidades.

3.7 Palavras finais

Uma vez que a solução de ordem superior foi implementada, pode-se verificar que as novas funções de parede melhoram a eficácia do modelo, tornando a formulação consideravelmente mais sensível aos efeitos da transpiração. Só nos cabe, agora, chamar a atenção do leitor para alguns pontos de relevância.

Em primeiro lugar, devemos ressaltar que a expressão obtida para o perfil de velocidades coincide com o perfil obtido por Stevenson(1963). Em seu trabalho, Stevenson utilizou modelos algébricos para a determinação desta expressão, que foi posteriormente validada experimentalmente por Andersen et alli(1972) e McQuaid(1966).

A contribuição científica desta dedução, via modelagem diferencial, é a do comportamento do perfil de velocidades, em escoamentos com transpiração, para os modelos de duas equações, deixa de ser uma hipótese, e passa a ser uma dedução experimental.

Um outro fato importante é o reconhecimento de uma região onde os efeitos da turbulência dominam. Esta região logarítmica, modifica a estrutura de camada limite turbulenta. De fato, o aparecimento de uma nova escala característica é de grande relevância para aqueles que se propõe a estudar a camada limite turbulenta.

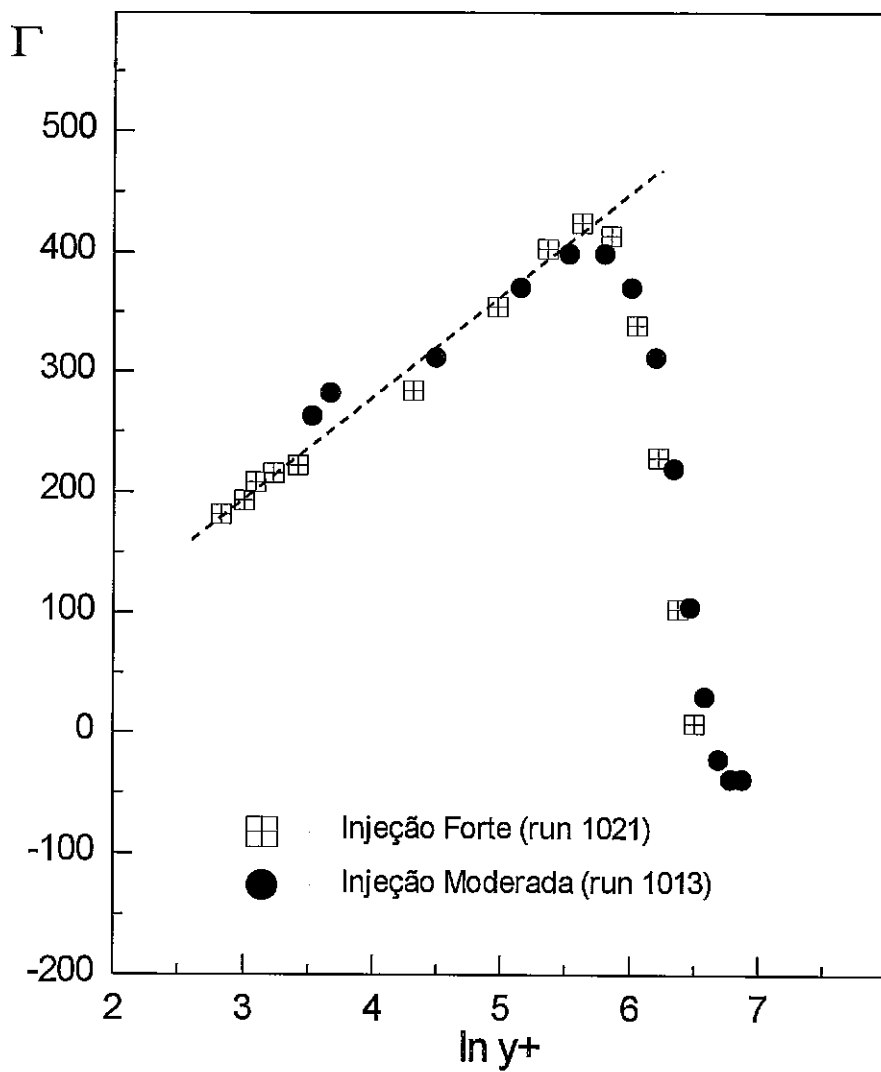


Figura 3.3. Perfis de Similaridade para Energia Cinética Turbulenta

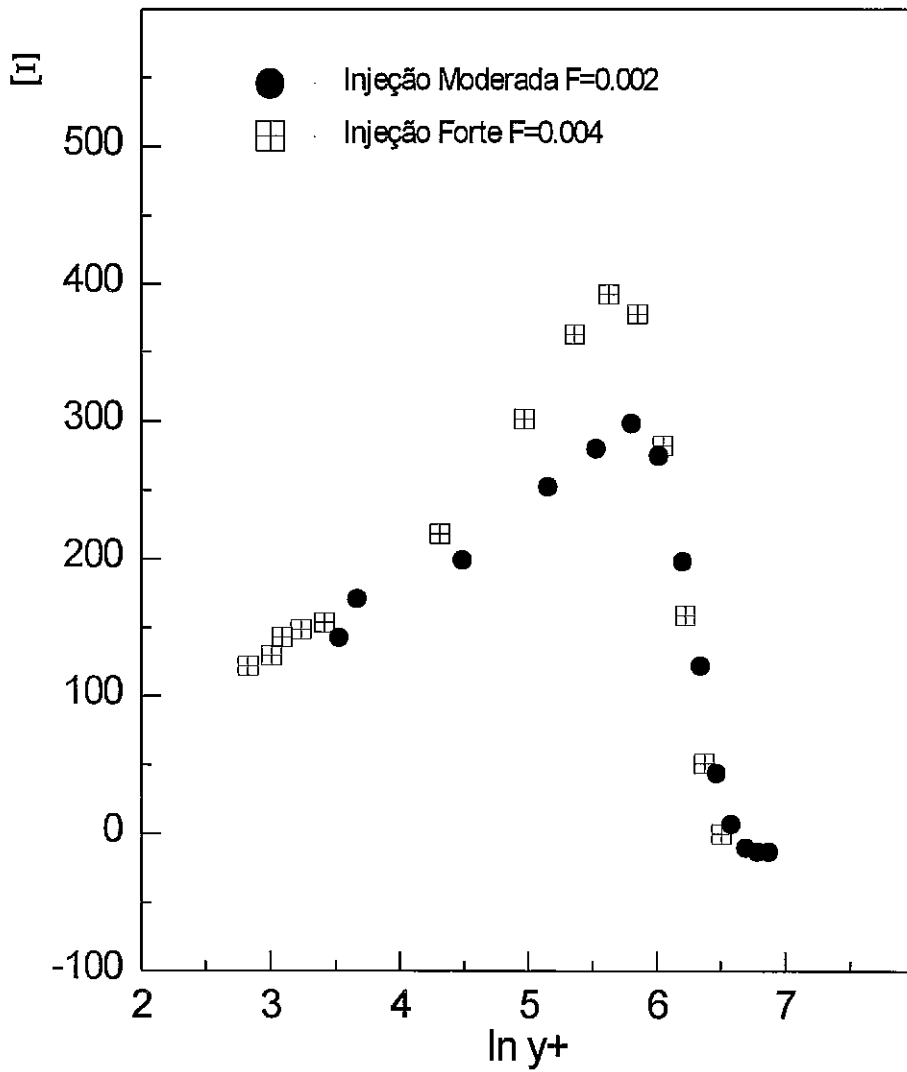


Figura 3.4. Perfis de Similaridade para Taxa de Dissipação de Energia Cinética Turbulenta

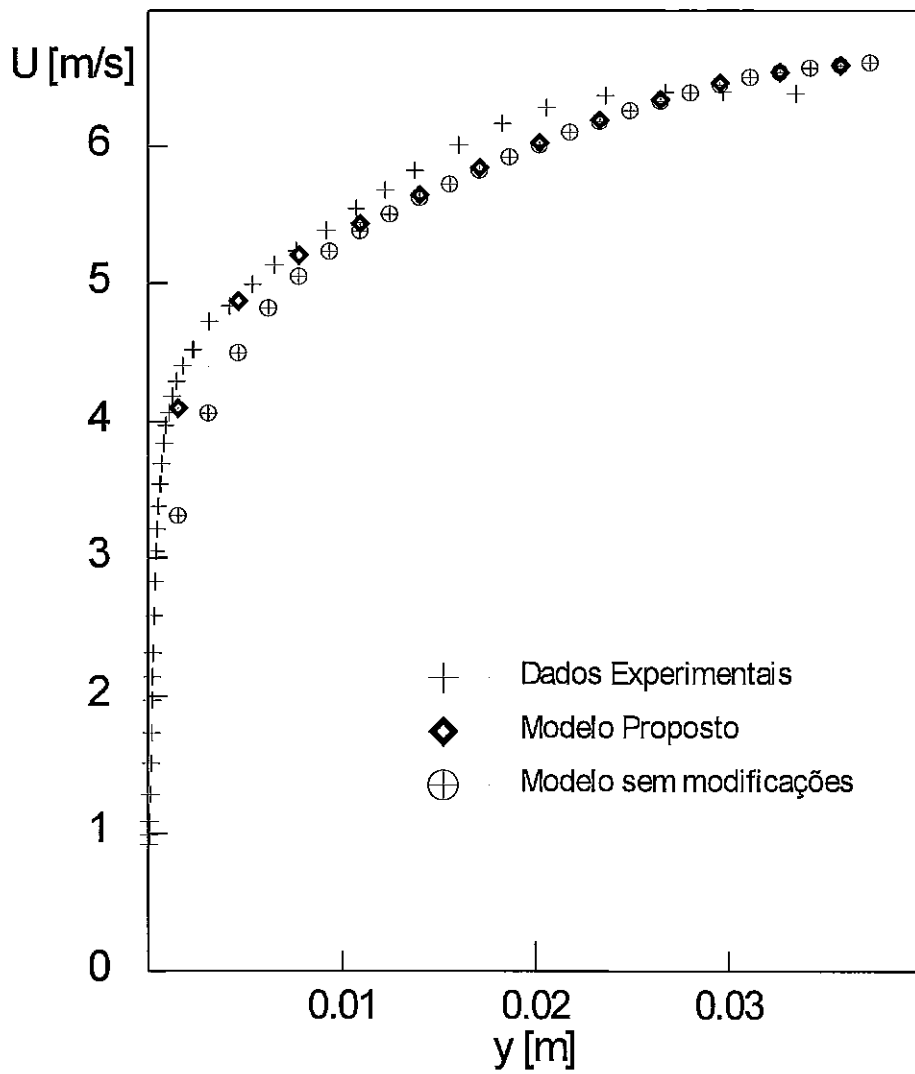


Figura 3.5. Previsões dos Perfis de Velocidade

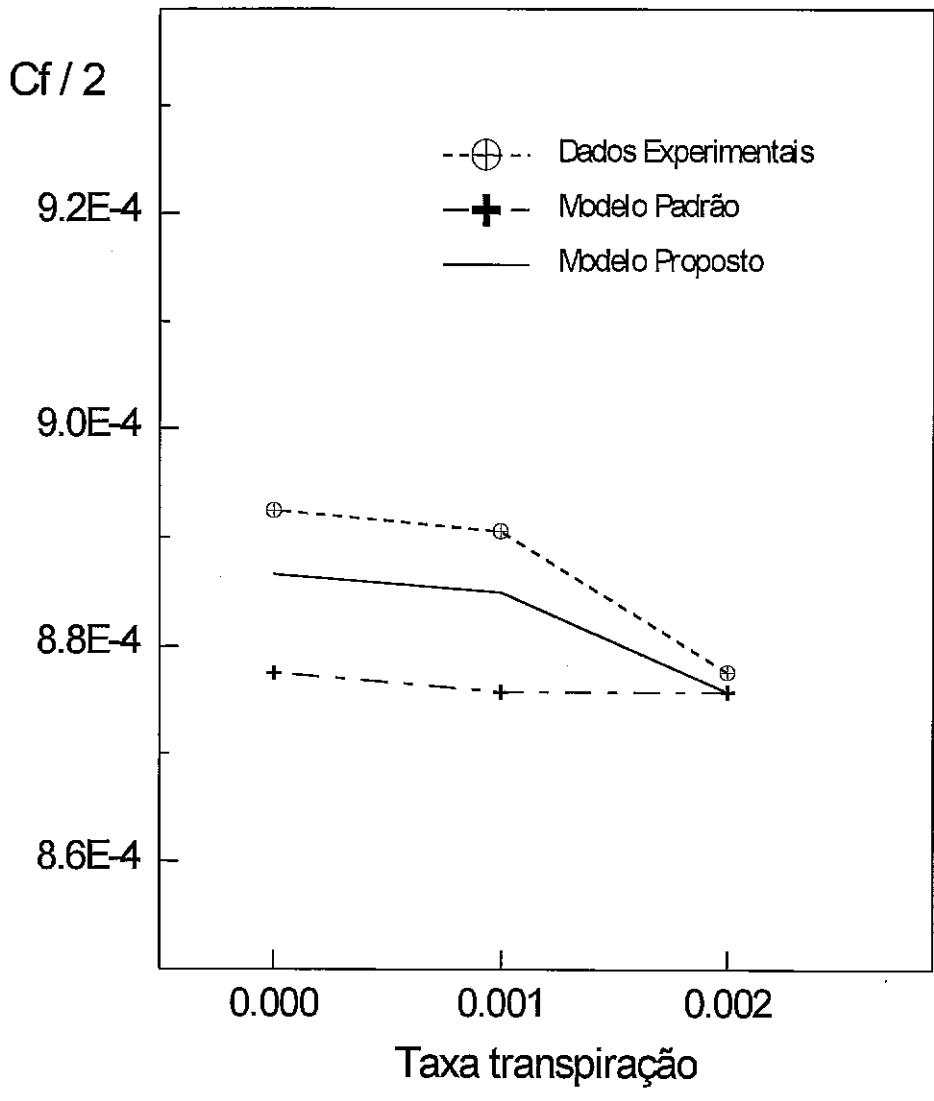


Figura 3.6. Previsões do Coeficiente de Atrito

4. A MODELAGEM NUMÉRICA

Vimos no capítulo anterior como soluções analíticas podem ser obtidas para o modelo $K-\epsilon$ para escoamentos com transpiração. Vimos também que estas soluções são válidas em uma região bem definida do escoamento, não podendo, portanto, ser extrapoladas para a sub-camada viscosa.

O propósito deste capítulo é desenvolver uma metodologia alternativa de cálculo onde as funções de parede desenvolvidas no capítulo anterior sejam substituídas por uma nova formulação do modelo $K-\epsilon$, provocando uma diminuição na relevância dos termos de difusão turbulenta na região viscosa, conforme deve ser observado. Os defensores desta formulação buscam obter uma maior generalidade na formulação $K-\epsilon$ através da especificação de funções de amortecimento universais. Durante algum tempo viu-se esta nova metodologia como substitutiva daquela abordada no capítulo anterior; hoje, reconhece-se que as dificuldades encontradas pelo método de funções de parede permanecem no método de funções de amortecimento.

Normalmente as dificuldades encontradas pelos modelos $K-\epsilon$ situam-se na região externa do escoamento, de modo que quaisquer modificações do modelo na região da parede não resolverão estas dificuldades.

Aqui mostraremos como as funções de amortecimento devem possuir uma dependência explícita na taxa de transpiração local do escoamento, de tal forma que os efeitos da dissipação viscosa devidos à transpiração sejam levados em conta. De fato, esta dependência já aparece nos modelos algébricos correntes; nos modelos diferenciais, entretanto, ela não ocorre.

O novo modelo a ser introduzido aqui será comparado com o modelo $K-\epsilon$ de baixo número de Reynolds proposto por Chien(1982) e com quatro modelos algébricos de turbulência.

4.1 Os modelos de turbulência

Todos os modelos apresentados aqui utilizam o conceito de viscosidade turbulenta, onde

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.1)$$

Esta é a hipótese mais antiga para os elementos do tensor de Reynolds. Neste conceito, a estrutura das equações não se altera, permanecendo na forma original das equações de Navier-Stokes.

O processo de modelagem reduz-se à estabelecer relações funcionais entre ν_t e as grandezas médias do escoamento. Isto pode ser feito através de equações algébricas ou diferenciais.

A seguir faremos uma breve apresentação dos modelos algébricos e diferenciais que serão utilizados nesta fase do estudo.

4.1.1 Os modelos algébricos

Os modelos algébricos não apresentam equações diferenciais de transporte e empregam uma forma algébrica para a viscosidade turbulenta, sendo por isso, chamados de modelos de zero equações. Estes modelos são largamente utilizados em aplicações de engenharia que envolvam escoamentos cisalhantes simples, torna-se contudo, particularmente difícil especificar o comprimento de mistura em escoamentos complexos, tais como escoamentos com separação ou recirculação.

A partir do conceito de viscosidade turbulenta vários autores propuseram que ν_t fosse definido como o produto de uma velocidade característica e de um comprimento característico, e em um dos primeiros modelos de turbulência proposto, o

do comprimento de mistura de Prandtl, o comprimento de escala característico adotado foi o comprimento de mistura. Assim,

$$\nu_t = u_c l_c. \quad (4.2)$$

A distribuição do comprimento de mistura é descrita com base em dados experimentais, variando com o tipo de escoamento. Há uma considerável quantidade de dados experimentais para escoamentos simples disponível na literatura, entretanto, o mesmo não ocorre para casos de escoamentos com algum grau de complexidade.

Em uma região próxima à parede, van Driest propôs o seguinte comportamento

$$l_c = ky \left[1 - \exp\left(\frac{-yu_\tau}{A\nu}\right) \right]. \quad (4.3)$$

De acordo com a Equação (4.3), a turbulência junto à parede é suprimida rapidamente, e a velocidade recupera o seu perfil linear original.

Os modelos algébricos adotam a hipótese de que o escoamento é isotrópico, por isso apresentam resultados melhores em escoamentos bi-dimensionais sujeitos a fracos gradientes de pressão, do que nos casos com curvatura, rotação, separação ou em situações onde os efeitos de transporte turbulento são importantes.

Vários modelos algébricos podem ser encontrados na literatura. Dentre estes, quatro serão utilizados neste trabalho. Os autores apresentam diferentes modelagens para o comprimento característico, na tentativa de prever melhor os efeitos da viscosidade provocados pela transpiração. Os modelos que trataremos aqui são o de Cebeci(1970), de Kays(1972), de Pletcher(1974) e de Baker e Launder(1974).

O modelo de Cebeci(1970)

Este é um modelo bastante simples, onde o conceito de comprimento de mistura de Prandtl é usado juntamente com a função de amortecimento de van Driest. Desta forma, para a região próxima à parede, temos

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (4.4)$$

onde

$$l = ky \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right], \quad (4.5)$$

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu},$$

e

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}},$$

onde ν é a viscosidade cinemática e k a constante de von Kármán, ($k=0,41$).

Os efeitos da transpiração na parede e do gradiente de pressões são levados em conta, no modelo de Cebeci, através da expressão para A^+ , que estabelece

$$A^+ = 26 \left[-\frac{p^+}{v_w^+} [\exp(11,8 v_w^+) - 1] + \exp(11,8 v_w^+) \right]^{-1/2}, \quad (4.6)$$

onde

$$p^+ = \frac{\nu}{\rho u_\tau^3} \frac{dp}{dx},$$

e

$$v_w^+ = \frac{v_w}{u_\tau}.$$

A região da esteira é descrita por uma viscosidade turbulenta do tipo

$$\mu_t = C_1 U_\infty \delta_1 \gamma, \quad (4.7)$$

onde δ_1 é a espessura de deslocamento, C_1 é uma constante do modelo, que assume o valor 0,0168 e γ é o fator de intermitência de Klebanoff, expresso na forma

$$\gamma = \frac{1}{1 + 5,5 \left(y/\delta\right)^6}. \quad (4.8)$$

O modelo de Baker e Launder(1974)

O modelo de Baker e Launder, assim como o modelo de Cebeci, utiliza a função de amortecimento de van Driest associada ao comprimento de mistura de Prandtl. A diferença entre estes dois modelos está apenas na expressão para A^+ . No modelo de Baker e Launder, temos A^+ expresso da forma

$$A^+ = \frac{26}{\tau^+}, \quad (4.9)$$

onde

$$\tau^+ = \frac{\tau}{\tau_w}.$$

onde τ é a tensão viscosa local e τ_w é a tensão viscosa na parede.

O modelo do Pletcher(1974)

A diferença básica entre o modelo de Pletcher e os anteriormente citados está na expressão para A^+ , que leva em conta os efeitos viscosos no início da região completamente turbulenta. A^+ pode, então, ser escrito na forma

$$A^+ = \frac{26}{\sqrt{\tau^+ \tau_{FT}^+}}, \quad (4.10)$$

onde τ^+ é a tensão viscosa local, adimensionalizada com τ_w , e τ_{FT}^+ é a tensão viscosa característica na região próxima àquela onde se inicia a camada turbulenta. Em escoamentos sem gradiente de pressão, τ_{FT}^+ pode ser obtida por intermédio da Lei da Parede para escoamentos com transpiração. Neste caso, fazendo $y^+ = 26$, obtemos

$$\tau_{FT}^+ = 1 + 1,092 v_w^{+2} + 2,09 v_w^+ \sqrt{(1 + 11 v_w^+)} + 11 v_w^+. \quad (4.11)$$

Para escoamentos com gradiente de pressão, τ_{FT}^+ é calculada aplicando-se a equação da quantidade de movimento simplificada em $y^+ = 26$. Desta forma,

$$\frac{\tau}{\tau_w} = 1 + u^+ v_w^+ + p^+ y^+. \quad (4.12)$$

Na parte externa da camada limite foi adotada a formulação de viscosidade turbulenta; então o comprimento característico será

$$l = 0,089 \delta.$$

O modelo de Kays(1972)

Novamente, a distinção deste modelo para os demais está na expressão para o parâmetro A^+ . Para a região próxima à parede, o modelo de Kays estabelece que

$$A^+ = \frac{26}{\sqrt{\tau^+}}. \quad (4.13)$$

com

$$\tau^+ = \frac{\tau}{\tau_w}.$$

4.1.2 Os modelos de duas equações

Nos modelos de duas equações, a velocidade característica é tomada como sendo $K^{1/2}$, onde K é a energia cinética turbulenta. O comprimento característico é determinado por uma relação entre u_c e l_c . Neste trabalho, vamos tratar de modelos K - ϵ . Portanto, ϵ , que significa a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta e que em modelos de uma equação, é representada por expressões algébricas simples, como aquela mostrada abaixo

$$\epsilon = C_D \frac{K^{3/2}}{l_c}, \quad (4.14)$$

aqui, será representado por uma equação genérica de transporte.

No modelo K - ϵ , a viscosidade turbulenta é representada por

$$\mu_t = c_\mu \rho \frac{K^2}{\epsilon}, \quad (4.15)$$

onde $c_\mu = 0,09$ para escoamentos isotrópicos.

O modelo K - ϵ não se aplica a escoamentos onde o número de Reynolds local seja baixo, logo o modelo não se aplica à região viscosa próxima à parede. Para driblar esta limitação, vários autores propuseram modificações na formulação. Estas mudanças consistem em incluir termos de amortecimento nas equações da viscosidade turbulenta, e nos termos turbulentos das equações de transporte. Com estas modificações, o modelo diferencial pode ser aplicado à regiões próximas às superfícies sólidas. Este modelo é chamado de modelo K - ϵ para baixos números de Reynolds.

Este trabalho propõe um novo modelo K - ϵ para escoamentos com transpiração. Este modelo consiste em uma nova versão do modelo de Chien, porém, com a inclusão de um termo representativo da taxa de transpiração nas funções de amortecimento. O modelo padrão de Chien será apresentado a seguir, enquanto a Seção 4.2 será dedicada unicamente ao modelo K - ϵ proposto.

O modelo de baixo número de Reynolds de Chien(1982)

No modelo K - ϵ de baixo número de Reynolds de Chien, a viscosidade turbulenta é expressa por

$$\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{K^2}{\epsilon}. \quad (4.16a)$$

E as equações de transporte de energia cinética turbulenta e de dissipação de energia por unidade de massa são escritas na forma

$$u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial y} \right] - \overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y} - \epsilon, \quad (4.16b)$$

$$u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] + c_{\epsilon 1} \nu_t \frac{\epsilon}{K} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_{\epsilon 2} f_2 \frac{\epsilon^2}{K} - 2\nu \frac{\epsilon}{y^2} \exp^{-y^2/2}, \quad (4.16c)$$

Na tentativa de minimizar os efeitos indesejados do modelo K - ϵ , Chien propõe a inclusão das seguintes funções de amortecimento:

$$f_\mu = 1 - \exp(-0,0115y^+), \quad (4.17)$$

$$f_2 = 1 - 0,22 \exp \left[- \left(\frac{R_T}{6} \right)^2 \right], \quad (4.18)$$

onde

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}.$$

O número de Reynolds turbulento, R_T , é definido por

$$R_T = \frac{K^2}{\epsilon \nu}. \quad (4.19)$$

Para uma completa determinação matemática do modelo, só resta agora a apropriada especificação das condições de contorno. Na parede, fazemos

$$K = 0, \quad \epsilon = 0 \quad \text{em} \quad y = 0, \quad (4.20)$$

O comportamento dos valores de K e de ϵ no escoamento em corrente livre é descrito pelas seguintes equações diferenciais

$$U_\infty \frac{dK_e}{dx} = -\epsilon_e, \quad (4.21)$$

$$U_\infty \frac{d\epsilon_e}{dx} = -C_2 \frac{\epsilon_e^2}{K_e}. \quad (4.22)$$

Os valores iniciais de K_e e de ϵ_e são dados pelas relações

$$K_e = 1,5(T_{ue}U_\infty)^2, \quad (4.23)$$

$$l_c = \frac{2}{3} \frac{u_e'^{3/2}}{\epsilon_e}. \quad (4.24)$$

onde T_{ue} é a intensidade relativa da turbulência e L_e é um comprimento característico.

A influência da transpiração no modelo de Chien é levada em conta implicitamente, por meio de variações nas características dos escoamentos. O resultado, é que os valores de C_f são superestimados. Um novo modelo será, então, proposto para tentar minimizar estes efeitos indesejados, fazendo com que os efeitos da transpiração na dissipação viscosa sejam devidamente levados em conta. Isto será feito através das funções de amortecimento. Um novo termo, que representa a taxa de transpiração será inserido nas funções de amortecimento.

4.2 O modelo proposto

Vimos nas seções anteriores que todos os modelos algébricos apresentados possuem uma dependência explícita da transpiração em sua formulação. O modelo de Chien, por sua vez, leva em conta os efeitos da transpiração apenas no termo convectivo da equação para K , Equação (3.9). Lembrando, do Capítulo 3, que a influência deste termo convectivo junto à parede é baixa, fica difícil acreditar que apenas esta correção fosse capaz de descrever toda a influência da transpiração na sub-camada viscosa. Por este motivo, e inspirados nas formulações algébricas, proporemos aqui um novo modelo cujas funções de amortecimento dependam explicitamente da transpiração.

No novo modelo proposto, as funções de amortecimento são dadas por

$$f_{\mu} = 1 - \exp(-0,0115 y^+ v^+), \quad (4.25)$$

$$f_2 = 1 - 0,22 \exp \left[- \left(\frac{R_T v^+}{6} \right)^2 \right], \quad (4.26)$$

onde

$$v^+ = 1 + a \left[v_w^+ + \frac{b p^+}{1 + c v_w^+} \right], \quad (4.27)$$

$$p^+ = \left(\frac{\nu}{\rho u_{\tau}^3} \right) \frac{dp}{dx}.$$

$$v_w^+ = \frac{v_w}{u_{\tau}} \quad \text{e} \quad u_{\tau} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}},$$

As constantes a , b e c devem ser determinadas através da análise de casos experimentais.

4.3 A solução por diferenças finitas

A solução numérica das equações de camada limite turbulenta foi obtida utilizando o código ITBL2D, recentemente proposto por Su (1995), que utiliza um método de diferenças finitas. O sistema de equações diferenciais parciais é discretizado por um esquema de diferenças finitas implícito, com uma malha não uniforme. O sistema de equações algébricas não-lineares resultante é linearizado utilizando-se o método de Newton. A matriz linearizada resultante é uma matriz tri-diagonal, a qual é resolvida pelo algoritmo de Thomas. As equações são resolvidas de modo acoplado.

No esquema de solução, os pontos da malha são redistribuídos à cada nova estação do escoamento através de um gerador de malha algébrico, que utiliza os resultados de uma estação previamente obtida. Basicamente, uma progressão geométrica é implementada nos pontos pré-especificados do domínio. Neste estudo, o ponto mais próximo da parede é $y^+ = 0,1$; o último ponto do domínio é posicionado a uma distância igual a três vezes a espessura da camada limite. A razão entre os espaçamentos adjacentes da malha é 1,10. O passo na direção do escoamento, é uma vez a espessura de quantidade de movimento da camada limite.

4.4 Resultados numéricos e discussão do modelo proposto

Com base na análise feita por Squire(1980) de mais 200 medições de escoamentos de camada limite com transpiração, adotamos neste trabalho, os dados obtidos por Andersen et alli(1972), para escoamentos com gradiente de pressão nulo e injeção de fluido à taxas constantes. A especificação dos escoamentos utilizados neste trabalho, para comparação com as previsões do método numérico proposto estão apresentadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1. Condições Experimentais

<i>Experimento</i>	dp/dx	v_w/U_∞
100571-1	0	0,001
090171-1	0	0,002

Para uma adequada comparação dos dados numéricos com os dados obtidos experimentalmente, foram adotados parâmetros de similaridade para os perfis de velocidade e para a distância à parede. Para a adimensionalização das variáveis, foram utilizadas: a viscosidade cinemática do fluido, a velocidade de atrito e uma taxa de transpiração.

Desta forma

$$\phi = \frac{2}{v_w^+} \left[(1 + v_w^+ u^+)^{\frac{1}{2}} - 1 \right], \quad (4.28)$$

onde

$$v_w^+ = \frac{v_w}{u_\tau}, \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad e \quad y^+ = \frac{y}{\nu} \frac{u_\tau}{\nu}.$$

Os perfis de velocidade obtidos pelo modelo numérico estão mostrados nas Figuras (4.1) e (4.2). é importante notar como o modelo proposto, que utiliza as funções de amortecimento modificadas para casos de escoamentos com transpiração apresenta mais coerência com os dados experimentais, principalmente na região próxima à parede porosa.

A Figura (4.3) apresenta o comportamento do comprimento característico obtido pelos dois modelos $K-\epsilon$. Pode-se notar a diferença entre o modelo de Chien, que não prevê a dissipação viscosa decorrente da transpiração e o modelo proposto, onde o incremento dos efeitos dissipativos provocados pela injeção ou sucção são levados em conta. O comportamento do comprimento característico apresenta uma nítida diferença entre os dois modelos apresentados, na região próxima à parede, o que vem comprovar que a inclusão do termo de transpiração nas funções de amortecimento no modelo proposto influencia os resultados obtidos com os modelos $K-\epsilon$ de baixos números de Reynolds, mesmo nos casos de escoamento em que a transpiração é fraca, ou seja, quando são utilizadas funções de amortecimento com dependência na transpiração,

pode-se observar um aumento na dissipação viscosa. Este aumento pode ser atribuído à dissipação viscosa provocada pela transpiração.

As previsões para o coeficiente de atrito estão mostradas na Figura 4.4. Esta figura mostra que para estações ao longo de x , onde os valores de Re_θ são menores que 1500, nenhum dos modelos considerados aqui, algébricos ou diferenciais, apresenta bons resultados. Pode-se observar, entretanto, que os valores de C_f obtidos utilizando-se o modelo proposto apresentam um comportamento próximo daquele apresentado pelo perfil experimental. Ou seja, tanto as previsões do modelo diferencial, quanto os dados experimentais apresentam a mesma variação de C_f a medida que se caminha ao longo das estações em x . O mesmo não pode ser dito a respeito do comportamento de C_f obtido pelo modelo de Chien, onde as previsões fornecidas não acompanham os perfis experimentais, tendendo a se afastar a medida que se caminha na direção longitudinal.

É importante ainda ressaltar que previsões de coeficiente de atrito para escoamentos com taxas de injeção de 0,004 são difíceis de se obter. Por este motivo, teorias, inclusive a atual, continuam a ser aperfeiçoadas. De fato, qualquer cálculo de C_f para valores de taxas de injeção superiores a 0,003 são muito difíceis de se obter. Na situação de $F=0,004$ a camada limite já se encontra próxima de um estado de "blowout", ficando por esta razão a estrutura turbulenta extremamente complexa. Nestas condições, a modelagem dos termos turbulentos torna-se um verdadeiro desafio.

Os valores de C_f para várias estações em x estão apresentados nas Figuras 4.4 e 4.5 para dois casos diferentes de injeção.

A diferença entre as previsões dos dois modelos $K-\epsilon$ são significantes. Isto mostra que a alteração de detalhes das funções de amortecimento exerce considerável influência na previsão da dissipação viscosa na região próxima à parede em escoamentos de camadas limite com transpiração.

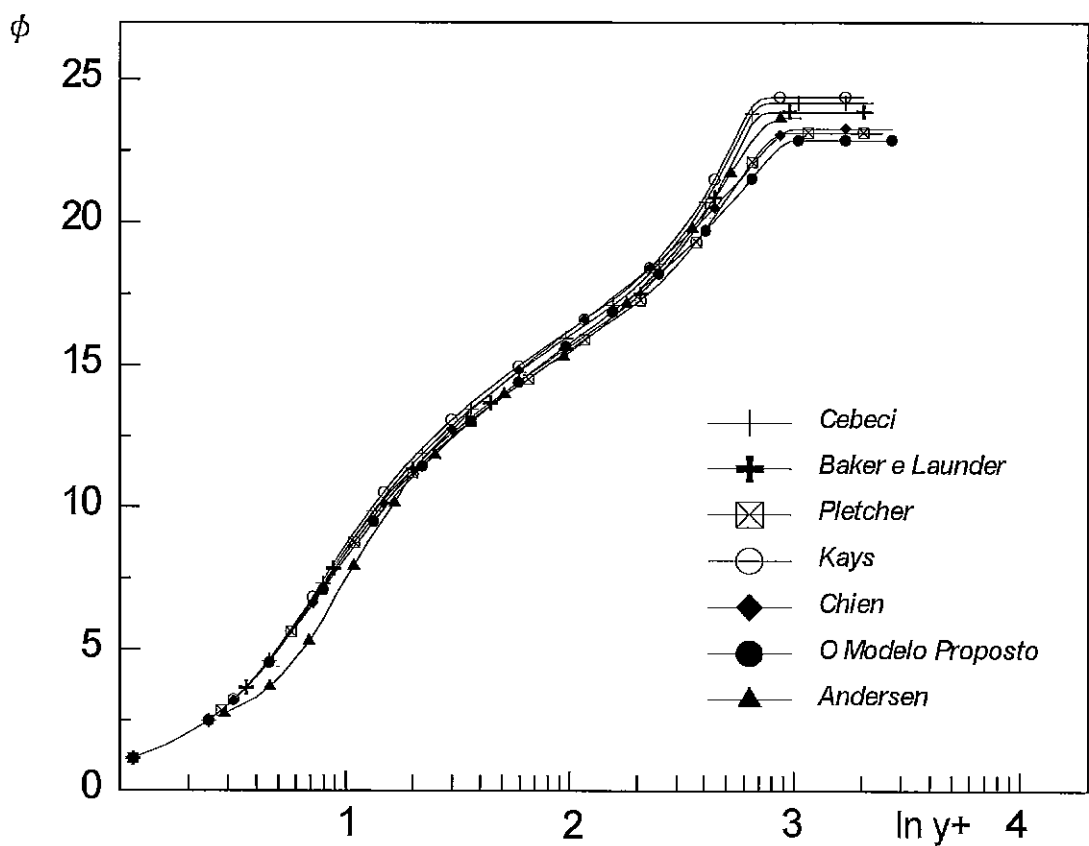


Figura 4.1 Perfis de Velocidade para Taxa de Injeção = 0,001.

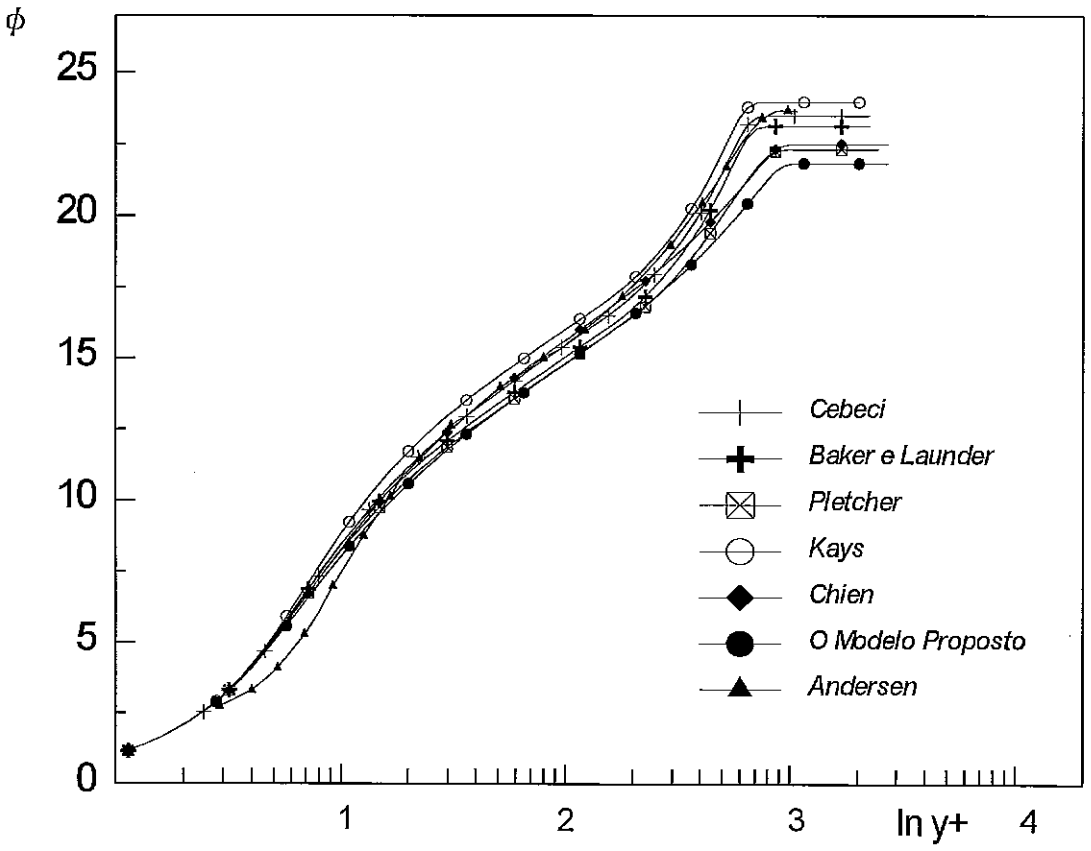


Figura 4.2 Perfis de Velocidade para Taxa de Injeção = 0,002.

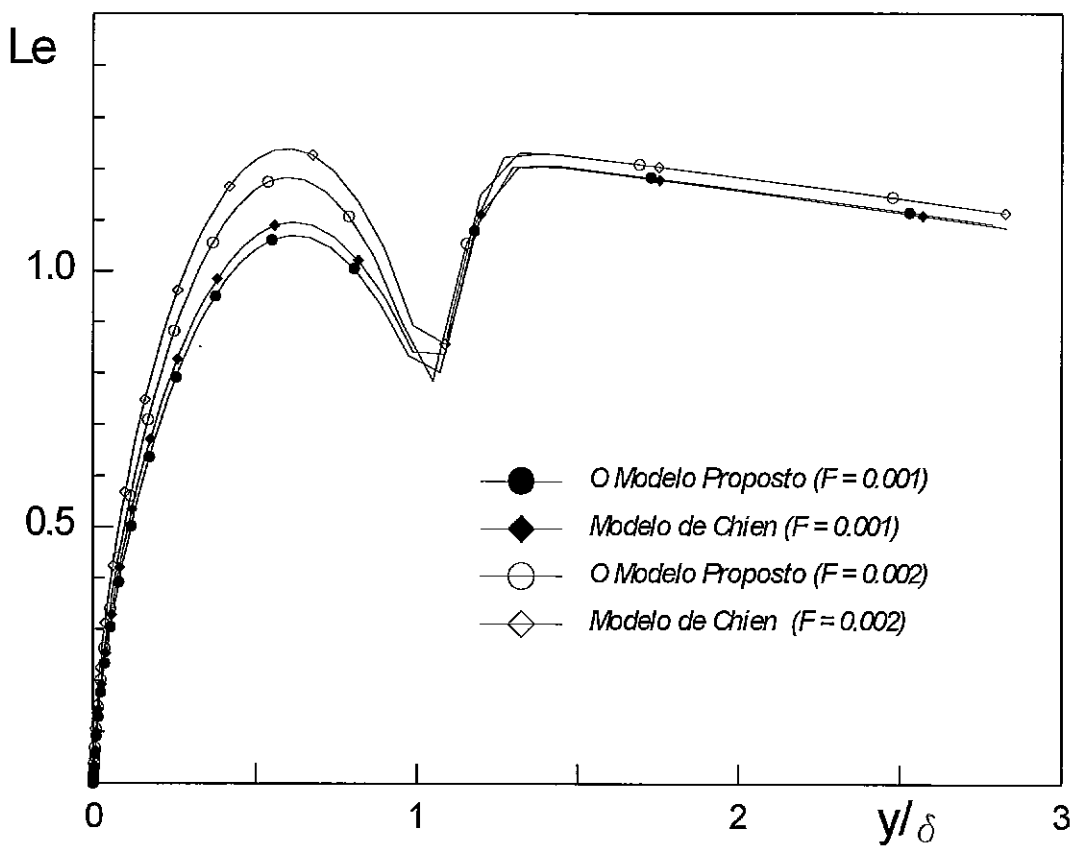


Figura 4.3 Comportamento do Comprimento de Escala

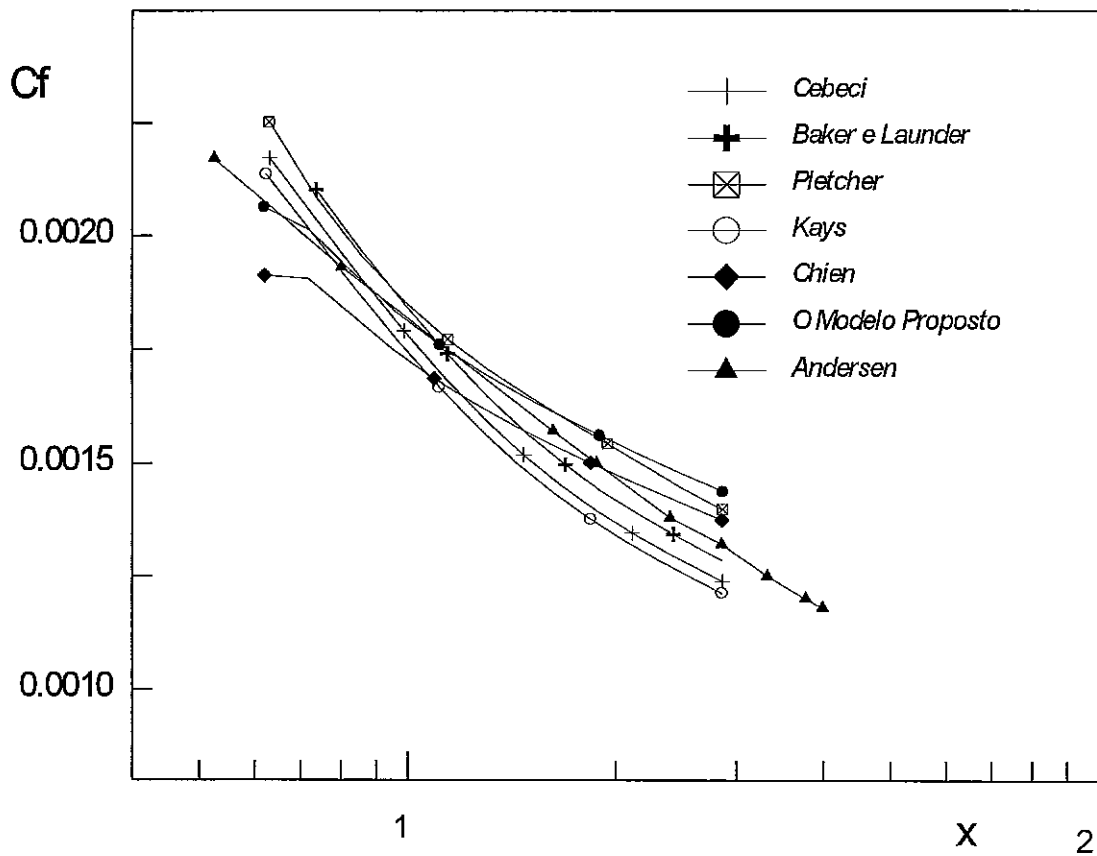


Figura 4.4 Coeficiente de Atrito para Taxa de Injeção = 0,001.

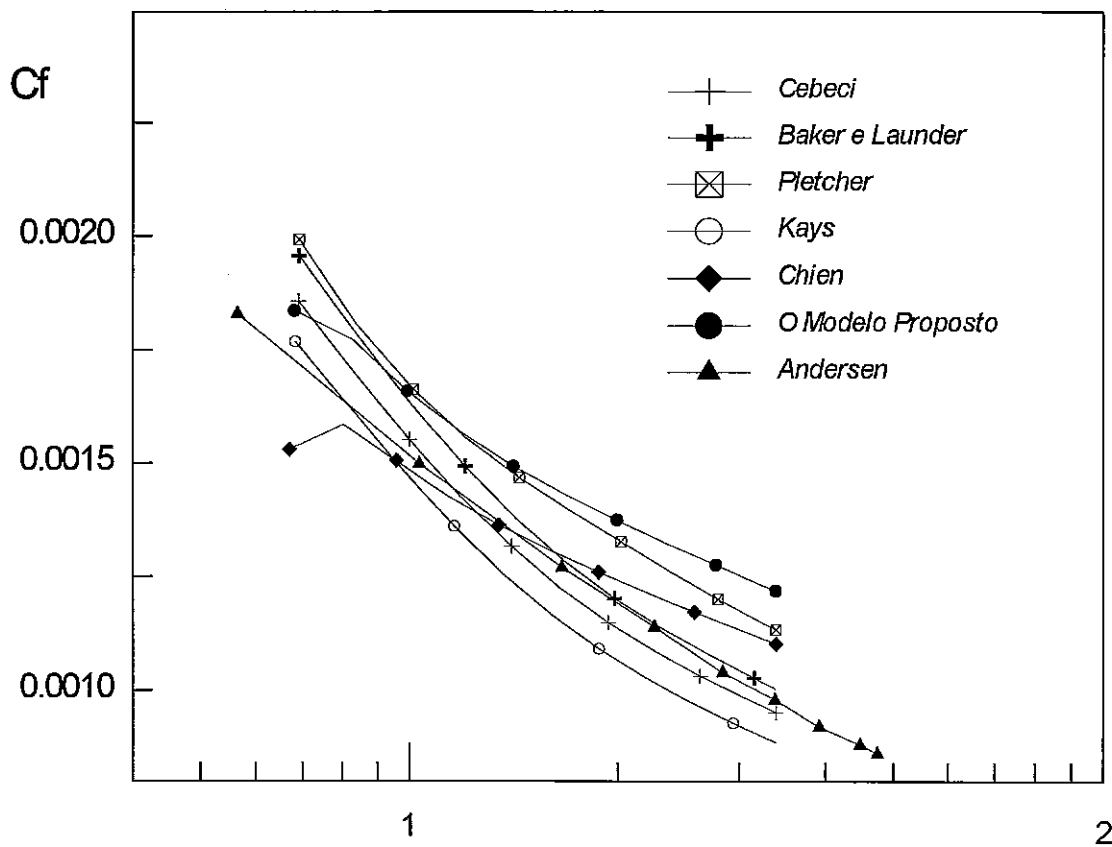


Figura 4.5 Coeficiente de Atrito para Taxa de Injeção = 0,002.

5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Uma solução assintótica para o modelo $K-\epsilon$ para escoamentos incompressíveis em camadas limite com transpiração foi apresentada neste trabalho. A solução mostra que ambas, energia cinética turbulenta, e taxa de dissipação possuem comportamento logarítmico na região completamente turbulenta.

A implementação numérica desta nova formulação mostra que as novas expressões melhoram as previsões do perfil de velocidades e do coeficiente de atrito, quando apresentadas em comparação com os dados experimentais.

A solução, como apresentada, é válida apenas para escoamentos simples; isto é, escoamentos sem gradiente de pressão superposto, troca térmica, rugosidade ou qualquer outro fator complicador. Uma futura extensão desta formulação para estes casos mais complicados deveria, teoricamente, passar por uma nova solução das equações de $K-\epsilon$ através de métodos assintóticos. A esperança desta autora, entretanto, é que a presente formulação possa ser estendida em sua validade, se modificações adequadas nas constantes forem adotadas.

Os resultados apresentados pelo modelo $K-\epsilon$ para baixo número de Reynolds proposto neste trabalho foram analisados também para casos de escoamentos simples. Como no caso acima, espera-se que a nova formulação forneça bons resultados também para os casos que apresentem elementos complicadores, bastando para isso, apenas que as constantes nas funções de amortecimento sejam adequadamente especificadas. No caso do escoamento com troca térmica, os efeitos devem ser levados em conta utilizando-se o conceito de número de Prandtl turbulento. Caso contrário, uma equação de transporte deverá ser obtida também para $\overline{u't'}$.

Como perspectiva de trabalhos futuros, podemos citar a aplicação de ambas as metodologias apresentadas para situações mais complexas, que envolvam por exemplo gradiente de pressão e/ou rugosidade. De qualquer forma, observe que qualquer extensão

da presente formulação não é trivial. Os conceitos matemáticos dependem fortemente da física do problema, tornando a aplicação de limite de Kaplun ou a especificação de expansões assintóticas apropriadas uma tarefa difícil. Só a título de ilustração, deve-se observar que, para escoamentos rugosos, a tradução do conceito de origem deslocada para os métodos assintóticos sempre será difícil de resolver.

Apesar de abundantes, os dados encontrados para camada limite com transpiração paradoxalmente não apresentam perfis de K para o caso mais simples de escoamentos desprovidos de gradiente de pressão. Aqui, para validar a teoria tivemos que utilizar os dados de Andersen et alii(1972), cujos escoamentos estão sujeitos a um gradiente de pressão adverso. Fica aqui, então, a sugestão da realização de experimentos para a aquisição destes dados.

6. REFERÊNCIAS

Afzal, N., 1973. "A Higher Order Theory for Compressible Turbulent Boundary Layers at Moderately Large Reynolds Number", *J. Fluid Mech.*, Vol. 57, pp. 1-23.

Andersen, P.S., Kays, W.M. e Moffat, R.J., 1972. "Turbulent Boundary Layer on a Porous Plate: An Experimental Study of the Fluid Mechanics for Adverse Free-Stream Pressure Gradients", Report No. HMT-15, Thermosciences Division, Depto. of Mech. Engrg., Stanford University.

Antonia, R. A., Bisset, D. K., Fulachier, L. e Anselmet, F., 1990. "Effect of Wall Suction on Bursting in a Turbulent Boundary Layer", *Phys. Fluids A*, Vol. 2, pp 1241-1247.

Antonia, R. A. e Fulachier, L., 1989. "Topology of a Turbulent Boundary Layers with and without Wall Suction", *J. Fluid Mech.*, Vol. 198, pp 429-451.

Avelino, M. R., Su, J. e Silva Freire, A. P., 1995, "A Modified Near Wall $K - \epsilon$ Model for Transpired Turbulent Boundary Layers", XIII COBEM, Belo Horizonte.

Baker, R. J. e Launder, B. E., 1974. "The Turbulent Boundary Layer with Foreign Gas Injection. Part II: Predictions and Measurements in Severe Streamwise Pressure Gradients", *Int. J. Mass Heat Transfer*, Vol. 17, 293-306.

Blackwell, B.F., Kays, W.M. e Moffatt, R.J., 1972. "The Turbulent Boundary Layer on a Porous Plate: an Experimental Study of the Heat Transfer With Adverse Pressure Gradient", Report of Thermosciences Division no. 16, Dept. of Mechanical Engineering, Stanford University.

Cebeci, T. 1970. "Behavior of Turbulent Flow over a Porous Wall with Pressure Gradient". *AIAA J.*, Vol. 8, 2152-2156.

- Chien, K.Y., 1982. "Predictions of Channel and Boundary Layer Flows with a Low-Reynolds Number Turbulence Model", AIAA Journal, Vol. 20, 33-38.
- Coles, D., 1956. "The Law of the Wake in the turbulent Boundary Layer", J Fluid Mechanics, Vol. 1, 191-226.
- Coles, D., 1972. "A Survey of Data for Turbulent Boundary Layers with Mass Transfer", AGARD CP-93, paper No. 25.
- Cruz, D.O.A. e Silva Freire A.P., 1995. "The Asymptotic Structure of the Thermal Turbulent Boundary Layer Near a Separation Point", Begell House Inc. Publishers.
- Dunbar, D.I.A. e Squire, L.C., 1971. "Experiments on Turbulent Boundary Layers with Foreign Gas Injection", ARC R & M 3696.
- Favre, A., Dumas, R., Verollet, E. e Coantic, M., 1966. "Couche Limite Turbulent sur Paroi Poreuse avec Transpiration", Journal de Mechanique, Vol 5, pp 3-28.
- Fulachier, L., Anselmet, F., Benabid, T. e Antonia, R. A., 1991. "Normalization for a Turbulent Boundary Layer with Wall Suction", Phys. Fluids A, Vol 3, pp 233-235.
- Jones, W.P. e Launder, B.E., 1972. "The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence", Int. J. Heat Mass Transf., Vol. 15, pp. 301-314.
- Kaplun, S., 1967. "Fluid Mechanics and Singular Perturbation", Academic Press, New York.
- Kays, W.M. 1972. "Heat Transfer to the Transpired Turbulent Boundary Layers". J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp 1923-1044.
- Klein, S.J., Reynolds, W.C., Schraub, F.A. e Runstadler, P.W., 1967. "The Structure of Turbulent Boundary Layers", J. Fluid Mechanics, Vol 30, pp 741-773.

- Lam, C.K.G. e Bremhorst, K.A., 1978. "Modified Form of the $K-\epsilon$ Model for Predicting Wall Turbulence", J. Fluids Engn., Vol. 103, pp. 456-460.
- Launder, B.E., 1988. "On the Computation of Convective Heat Transfer in Complex Turbulent Flows", J. Heat Transf., Vol. 110, pp. 1112-1127.
- Launder, B.E. e Sharma, B.I., 1974. "Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disk", Letters in Heat and Mass Transfer, Vol. 1, pp. 131-138.
- McQuaid, J., 1966. "Incompressible Turbulent Boundary Layers with Distributed Injection", Ph.D. Dissertation, Cantab.
- Marriott, P.G., 1974. "Compressible Turbulent Boundary Layers with Discontinuous Air Injection", ARC R e M 3780.
- Mellor, G., 1972. "The Large Reynolds Number Asymptotic Theory of Turbulent Boundary Layers", Int. J. Engn. Sci., Vol 10, pp 851-873.
- Mickley, H.S., Ross, R.C., Squyers, A.L. e Stewart, W.E., 1954. "Heat, Mass and Momentum Transfer for Flow over a Flat Plate with Blowing or Suction", NACA TN 3208.
- Mickley, H.S. e Davis, R.S., 1957. "Momentum Transfer for Flow over a Flat Plate with Blowing", NACA TN 4017.
- Orlando, A.F., Kays, W.M. e Moffatt, R.J., 1974. "Turbulent Transport of Heat and Momentum in a Turbulent Boundary Layer Subject to Deceleration, Suction and Variable Wall Temperature", Thermosciences Division Report No. 17, Dept. of Mechanical Engineering, Stanford University.
- Peric, M. e Schreurer, G., 1989. "CAST - A Finite Volume Method for

Predicting Two-Dimensional Flow and Heat Transfer Phenomena”, GRS-Technische Notiz Srr-89-01.

Pletcher, R.H., 1974. “Prediction of Transpired Turbulent Boundary Layers”. ASME J. Heat Transfer, 96, 89-94.

Ramachandran, N., Heaman, J. e Smith, A., 1994. “An Experimental Study of the Flow Emerging from Porous Walls”, Experiments in Fluids, Vol 18, pp 119-128.

Rodi, W., 1981. “Examples of Turbulence Models for Incompressible Flows”, AIAA Journal, Vol. 20, pp. 872-879.

Rodi, W. e Schreuerer, G., 1982. “Calculation of Heat Transfer in Turbulent Transpired Boundary Layers”, Proc. 7th Int. Heat Transfer Conference, Munich.

Shima, N., 1993. “Predictions of Turbulent Boundary Layers With a Second-Moment Closure: Part I - Effects of Periodic Pressure Gradient, Wall Transpiration, and Free-Stream Turbulence”, Journal of Fluids Engineering, Vol 115, pp 56-63.

Silva Freire, A.P., 1988a. “An Asymptotic Solution for Transpired Incompressible Turbulent Boundary Layers”, Inter. J. Heat Mass Transfer, Vol 31, pp 1011-1021.

Silva Freire, A.P., 1988b. “An Extension of the Transpired Skin-Friction Equation to Compressible Turbulent Boundary Layers”, Inter. J. Heat Mass Transfer, Vol 31, pp 2395-2398.

Silva Freire, A.P., 1989. “On the Matching Conditions for a Two-Deck Compressible Turbulent Boundary Layer Model”, ZAMM Vol. 69, pp. 100-104.

Silva Freire, A.P. e Hirata, M.H., 1990. “Aproximate Solution to Singular Perturbation Problems: The Intermediate Variable Technique”, J. of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 145, pp 241-253.

- Silva Freire, A.P., 1992. "Asymptotic Structure and Characteristics of Turbulent Boundary Layers: Short Review and Recent Developments". *Research Trends in Heat and Mass Transfer*, pp 203-218.
- Silva Freire, A.P., Cruz, D.O.A. e Pellegrine, C.C., 1995. "Velocity and Temperature Distribution in Compressible Turbulent Boundary Layers with Heat and Mass Transfer", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 37, pp 2507-2515.
- Squire, L.C., 1969. "A Law of the Wall for Compressible Turbulent Boundary Layers with Air Injection", *J. Fluid Mech.*, No. 37, pp. 449-456.
- Squire, L. C., 1980. "Turbulent Boundary Layers with Suction and Injection". *Conference on Data and Computation for Complex Turbulent Flows*, Report of Evaluator, Stanford.
- Stevenson, T. N., 1963. "A Modified Defect Law for Turbulent Boundary Layers with Suction or Injection", *Cranfield College of Aero*, Aero Rep. No 177.
- Stevenson, T. N., 1964. "Experiments on Injection into an Incompressible Turbulent Boundary Layer", *Cranfield College of Aero*, Aero Rep. No 177.
- Su, J., Sandim, C.L. e Silva Freire, A.P., 1993. "A Comparative Study of Four Algebraic Turbulence Models for Transpired Turbulent Boundary Layers with an Adaptive Finite Difference Solution Procedure". *Anais do XII COBEM*, Brasília.
- Su, J., 1995. "An Adaptive Nonlinear Coupled Solution Procedure for Turbulent Boundary Layer Equations with Low-Reynolds Number Two-Equation Models", Report IME Lab Aero 95-01, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro.
- Thomas, G.D., 1974. "Compressible Turbulent Boundary Layers with Combined Air Injection and Pressure Gradient", *ARC R & M* 3779.

Umur, H., Crane, R.I. e Whitelaw, J.H., 1995. "Acceleration and Injection Effects on Longitudinal Vortices in Concave Wall Boundary Layers", Proc Instn Mech Engrs, Vol 209, pp 1-10.

Yajnik, K.S., 1970. "Asymptotic Theory of Turbulent Shear Flow", J.Fluid Mech., Vol. 42, pp 411-427.

Yang, Z. e Shih, T.H.,1993. "A New Time Scale Based $K-\epsilon$ Model for Near Wall Turbulence", AIAA Journal, Vol. 31, No. 7, pp. 1191-1198.

Whitten, D.G. e Kays, W.M., 1967. "The Turbulent Boundary Layer on a Porous Plate: Experimental Heat Transfer With Variable Suction, Blowing and Surface Temperature", Report of Thermosciences Division no. 3, Dept. of Mechanical Engeneering, Stanford University.

Wilcox, D.C., 1988. "Reassessment of the Scale Determining Equation for Advanced Turbulence Models", AIAA Journal, Vol. 26, No. 11, Nov., pp. 1299-1310.