

UMA FORMULAÇÃO PETROV-GALERKIN PARA ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS INTERNOS

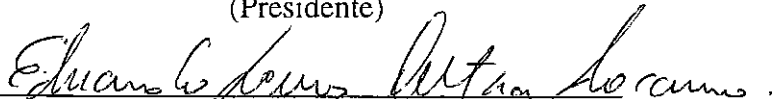
Luiz Cláudio Castanheira dos Santos

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

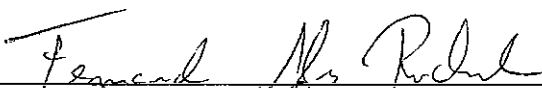
Aprovada por:



Átila P. Silva Freire, Ph. D.
(Presidente)



Eduardo G. D. do Carmo, D. Sc.



Prof. Fernando Rochinha, D. Sc.



Prof. Jesús Salvador Perez Guerrero, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
MAIO DE 1996

DOS SANTOS, LUIZ CLÁUDIO CASTANHEIRA

Uma formulação Petrov-Galerkin para

escoamentos incompressíveis internos. (Rio de Janeiro) 1996

vii, 88 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia Mecânica 1996)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Elementos Finitos Mistos 2. Escoamentos Incompressíveis

I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

“Os piores tempos, os melhores tempos”

AGRADECIMENTOS

Aos Professores Átila Freire e Eduardo do Carmo pela orientação e pelo entusiasmo que sempre transmitiram em suas aulas e ao longo do nosso convívio.

Aos amigos do GET pela convivência agradável e empática em especial a Flávio Traiano pelas longas e elucidativas discussões(nem sempre sobre formulações variacionais).

Aos ausentes que sempre estiveram próximos.

A Wesley Eugene Rodenberry e sua obra, pela inesgotável fonte de inspiração e solidariedade.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Ao Programa de Engenharia Mecânica da COPPE.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

UMA FORMULAÇÃO PETROV-GALERKIN PARA ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS INTERNOS

Luiz Cláudio Castanheira dos Santos

Maio de 1996

Orientadores: Átila Pantaleão Silva Freire e Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Programa: Engenharia Mecânica

Este trabalho tem como dois objetivos principais: i) apresentar a concepção de um sistema computacional para escoamentos reais em engenharia e ii) apresentar o estado atual de desenvolvimento deste sistema com uma formulação de Petrov-Galerkin em variáveis primitivas para escoamentos incompressíveis, adequando espaços de interpolação de mesma ordem para pressão e velocidade, com pressão descontínua e velocidade contínua. Permitindo além disto a eliminação total da pressão a nível de elemento com a penalização da média do divergente do campo de velocidade a nível de elemento. A formulação é aplicada na solução do clássico problema de Stokes.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

A PETROV-GALERKIN FORMULATION FOR INTERNAL INCOMPRESSIBLE FLOWS

Luiz Cláudio Castanheira dos Santos

May, 1996

Thesis Supervisors: Átila P. Silva Freire and Eduardo G. D. do Carmo.

Department: Mechanical Engineering

This work has two main objectives: i) to present the conception of a computational system for real flows occurring in Engineering and ii) to present the actual state of development of this system with a new primitive variable Petrov-Galerkin formulation for incompressible flows, accommodating an equal order of interpolation for the pressure and the velocity fields with discontinuous pressure and continuous velocity. The pressure is fully eliminated at element level with the penalization of the average divergence of velocity field at element level as well. The formulation is applied in the solution of the classical Stokes problem.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - Introdução.....	1
CAPÍTULO II - O Método dos Elementos Finitos e a linguagem de programação "C"	
II.1 - O Método dos Elementos Finitos.....	8
II.1.1 - Generalidades.....	8
II.1.2 - Histórico dos problemas com convecção dominante.....	11
II.1.3 - Histórico dos problemas com restrição de incompressibilidade	14
II.2 - A linguagem de programação "C"	17
CAPÍTULO III - A concepção de um sistema computacional para a solução de escoamentos reais.....	19
III.1 - Descrição do sistema	19
III.2 - Convenções de programação	23
III.3 - O módulos atualmente implementados	25
CAPÍTULO IV - Problema de Stokes.....	33
IV.1 - As equações de movimento de um fluido newtoniano.....	33
IV.2 - Formulação mista de Galerkin	39
IV.3 - Formulação mista de Petrov-Galerkin.....	44
CAPÍTULO V - Apresentação e análises dos resultados.....	63
CAPÍTULO VI - Conclusões e perspectivas futuras	79
Referências.....	82

Capítulo I

Introdução

Em anos recentes, com o grande aumento da capacidade dos computadores e a ainda mais dramática redução na sua relação custo/desempenho, tem-se modificado drasticamente o panorama dos projetos em engenharia. Grandes empresas de projeto e de manufatura de equipamentos tem reduzido seus gastos com a verificação experimental de teorias e procedimentos ao mínimo essencial. De fato, os altos custos associados à construção de protótipos e ao seu teste, podem em muitas das vezes inviabilizar financeiramente todo um projeto. Nas indústrias aeronáutica e de máquinas de fluxo isto é particularmente verdadeiro. Em outras atividades onde os equipamentos são construídos para condições específicas de operação, não sendo portanto um item de fabricação em série, o próprio protótipo passa a ser o produto final. Nestas condições, repetimos, a margem de erro deve ser reduzida a um mínimo e, se possível, suprimida completamente. Um exemplo típico são os compressores construídos para a indústria do petróleo. Unidades dedicadas a um tipo único de operação, eles podem custar de seis a vinte milhões de dólares, sendo apenas um exemplar construído para aquelas condições.

Desta forma, o desenvolvimento de sistemas computacionais adequados para a simulação de problemas envolvendo escoamentos reais em engenharia torna-se imperioso. Hoje, todos os fabricantes de máquinas de fluxo citam em seus catálogos os programas utilizados para o projeto de suas máquinas.

Tais programas (os quais podem ser adquiridos comercialmente, ou desenvolvidos pelos grupos de engenheiros interessados) devem possuir, no mínimo, as seguintes cinco características:

(i) Ter incorporado o conhecimento da física do fenômeno; em particular da turbulência (Hinze(1975)). Por serem os fluidos de maior importância industrial o ar e a água, cujas viscosidades são baixas, a maioria dos escoamentos que ocorrem na engenharia são turbulentos.

(ii) Em função do item (i) acima, ter incorporado o conhecimento de todos os modelos de turbulência desenvolvidos e que sejam capazes de lidar com características tais como curvatura, rotação, tri-dimensionalidade, gradientes de pressão, separação, transferência de massa e vários outros complicadores. Por ser impossível calcular todas as escalas dos escoamentos turbulentos que ocorrem na prática de engenharia, os modelos devem ser capazes de descrever bem o processo de dissipação de energia que ocorre nas menores escalas. Eles, portanto, devem incorporar a ordem de sofisticação de todos os modelos, do mais simples ao mais complexo. Dentre os modelos de maior uso na literatura, podemos citar:

- modelos de zero equação, ou modelos algébricos (Cebeci e Bradshaw (1977)),
- modelos de duas equações, ou modelos diferenciais (Patel(1984), Wilcox(1988) e Speziale(1992)),
- modelos algébricos das tensões de Reynolds(ARSM) (Matinuzzi(1989)),
- modelo de transporte das tensões de Reynolds(TRSM) (Hwang(1995)),
- simulação das grandes escalas(LES) (Silveira Neto e Pinho(1995)).

O sistema computacional deve também incluir respostas para pelo menos as seguintes perguntas:

Qual o modelo mais adequado para determinado problema?

Qual o modelo de melhor relação custo/precisão para um determinado problema?

(iii) Suportar em sua entrada de dados todos os sistemas de equações diferenciais parciais advindos destes modelos de turbulência e tratar adequadamente todas as patologias numéricas envolvidas na solução de tais sistemas de equações diferenciais parciais.

(iv) Ter incorporado o conhecimento matemático formal destes sistemas de equações diferenciais parciais e fornecer uma estimativa de erro na solução de tais sistemas de equações diferenciais parciais. Observe que não há o mínimo sentido em se obter uma solução numérica com a precisão da máquina que utilize um modelo de turbulência inadequado.

(v) Lidar com geometrias tridimensionais extremamente complexas, por ser este o tipo de domínio encontrado na prática da engenharia.

Como parte dos contínuos esforços de capacitação do Grupo de Estudos da Turbulência(GET/PEM/COPPE/UFRJ) na solução de problemas envolvendo escoamentos turbulentos complexos, foi iniciada a tarefa de produzir, a partir do zero, um sistema computacional com as exigências mínimas discutidas acima. A preferência ao desenvolvimento de um código próprio em detrimento da compra ou melhoria de um pacote comercial existente, foi dada por considerarmos ser esta uma escolha com mais atrativos a médio e longo prazo. Como ganho real para o grupo podemos citar:

- a formação plena de recursos humanos na área de métodos numéricos,
- o conhecimento completo do sistema sendo utilizado, e
- a capacidade de exportar conhecimento para outras áreas da ciência e da engenharia, uma vez que a resolução de modelos matemáticos independe da área de conhecimento sendo estudada.

Tal código incorporaria os estudos de turbulência ora em desenvolvimento no GET, sendo baseado no método dos elementos finitos (Strang e Fix(1973), Ciarlet(1978), Hughes(1987), Johnson(1987), Zienkiewicz(1989)), e escrito integralmente em linguagem de programação "ANSISO C" (Kernigham and Ritchie(1988) e Plauser(1992)). O código deveria ter também um desenvolvimento escalável, isto é, ele deveria ser capaz de apresentar resultados já numa fase inicial do seu longo desenvolvimento.

Esta tese tem dois objetivos principais:

- i) apresentar a concepção de um sistema computacional como descrito acima, e*
- ii) apresentar o estado atual de desenvolvimento de tal sistema com a aplicação de uma formulação de Petrov-Galerkin para escoamentos incompressíveis como descrito em (Do Carmo, Traiano e Dos Santos (1996)). Tal formulação é baseada em (Karam (1989)), entretanto, ao contrário desta, permite a eliminação total da pressão a nível de elemento com a penalização da média do divergente do campo de velocidade a nível de elemento. Tal formulação é aplicada na solução do clássico problema de Stokes (Batchelor(1990)).*

O método dos elementos finitos é um método numérico para a solução de sistemas de equações diferenciais parciais que ocorrem na ciência e na engenharia.

Em mecânica dos fluidos, as patologias numéricas advindas de problemas com convecção dominante (Cerqueira de Almeida(1993)) e restrição de incompressibilidade (Karam (1989)), são consideradas resolvidas desde o final dos anos oitenta. Atualmente, as propostas de novas formulações de elementos finitos estão direcionadas para o aumento da precisão da solução do escoamento no interior de regiões com singularidades com a utilização de soluções analíticas locais (Do Carmo(1993)). Desta forma, o método dos elementos finitos é considerado pelo menos tão preciso na solução de modelos matemáticos em mecânica dos fluidos quanto os métodos mais tradicionais utilizados como o método das diferenças finitas (Anderson(1984)) e o método dos volumes finitos (Patankar(1980)). Hoje o método dos elementos finitos passa por uma fase de consolidação e de otimização em sistemas computacionais em mecânica dos fluidos. De fato, redução de tempo de processamento e redução de requisitos de memória são as palavras de ordem.

As principais vantagens do método dos elementos finitos sobre outros métodos numéricos tradicionalmente utilizados em mecânica dos fluidos são as seguintes:

- a análise matemática do problema contínuo,
- a análise numérica do problema discreto,
- a existência de estimativas de erro,
- a fácil implementação de malhas adaptativas, com técnicas avançadas para geração automática de malhas não estruturadas,
- obtenção de solução no domínio físico (mudança de variável só para integrar),
- facilidade no tratamento de domínios irregulares,
- facilidade no tratamento de condições de contorno gerais,
- formulação independente da geometria do elemento e do polinômio interpolador,
- estrutura modular,
- consistência (a solução exata do problema satisfaz a formulação variacional),
- facilidade no tratamento de dados variáveis (tempo e espaço), não-lineares e anisotrópicos.

A linguagem de programação “C” é uma linguagem de alto nível e de uso geral desenvolvida por Dennis Ritchie no Bell Labs em 1972 para o sistema operacional UNIX. As qualidades que fizeram do “C” a linguagem de programação escolhida para implementação do sistema computacional discutido acima foram sua portabilidade com alta eficiência, sua clareza, sua notação compacta, os controles de fluxo e estruturas de dados modernos, um imbatível conjunto de operadores, nenhuma restrição (o programador tem sempre razão), eficiência potencial máxima entre as linguagens de uso geral, e uso disseminado.

A seguir faremos uma breve descrição do conteúdo deste trabalho.

No capítulo II apresentamos uma revisão do método dos elementos finitos aplicado a mecânica dos fluidos, bem como uma perspectiva histórica da linguagem de programação “C”.

No capítulo III, a concepção de um sistema computacional aberto, flexível, extensível, reutilizável, portátil e que atenda as exigências discutidas acima para a solução de escoamentos reais em engenharia é apresentada.

O capítulo IV apresenta um estudo sobre o problema de escoamento lento, o qual abrangerá sua forma contínua forte (diferencial ou pontual), sua forma contínua fraca (variacional), a forma fraca discreta - que é a formulação mista de Galerkin clássica - e os problemas numéricos que ela apresenta (tais como travamento do campo de velocidades e oscilações do campo de pressão) quando são utilizadas inadequadas combinações dos espaços de interpolação para os campos de pressão e velocidade. Finalmente, neste capítulo, apresentamos uma formulação de Petrov-Galerkin descrita em (Do Carmo, Traiano e Dos Santos (1996)) que permite a mesma ordem de interpolação para pressão e velocidade, interpolação descontínua para a pressão e interpolação contínua para a velocidade. A análise numérica do novo método contém prova de existência e unicidade para o problema discreto como também estimativa da taxa de convergência. É dada especial atenção à metodologia de eliminação total da pressão a nível de elemento (componentes constante por partes e de média nula) com a penalização da média do divergente do campo de velocidade a nível de elemento.

No capítulo V são apresentados os resultados para o problema de escoamento lento. Tres problemas são analisados: dois que possuem solução analítica e um outro que representa o problema clássico da cavidade.

No capítulo VI são apresentadas algumas conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo II

O método dos elementos finitos e a linguagem de programação “C”

II.1- O método dos elementos finitos

II.1.1- Generalidades

O método dos elementos finitos, como dito anteriormente, é um método numérico para a solução de sistemas de equações diferenciais parciais que ocorrem na ciência e na engenharia. As principais vantagens do método dos elementos finitos sobre outros métodos numéricos tradicionalmente utilizados em mecânica dos fluidos foram apontadas no capítulo anterior.

Nesta seção, apresentaremos uma visão moderna dos passos necessários na análise matemática e numérica de um problema pelo método dos elementos finitos, sua característica de geração automática de malhas e adaptatividade e suas facilidades computacionais. A seguir, apresentaremos uma breve revisão sobre a aplicação do método dos elementos finitos em problemas com convecção dominante e com restrição de incompressibilidade.

Análise Matemática do problema contínuo.

Durante a análise matemática do problema contínuo devemos escrever a formulação variacional do problema e responder em seguida as seguintes questões: Qual é a regularidade mínima de uma possível solução e de suas variações admissíveis para que a formulação variacional tenha sentido? Qual a regularidade mínima dos coeficientes dos operadores envolvidos e dos termos fonte para que a formulação

variacional tenha sentido? Quais os tipos de condição de contorno possíveis? Qual a regularidade mínima da condição inicial e das condições de contorno para que a formulação variacional tenha sentido? A solução existe e é única? Como é a dependência da solução em relação aos dados do problema? Como é a estabilidade da solução? A solução possui singularidades? Qual é o comportamento da solução dentro destas regiões de singularidade?

Análise numérica do problema discreto.

A análise numérica do problema discreto compreende a restrição do problema à dimensão finita dos espaços solução e de ponderação, os quais são sub-conjuntos dos espaços de dimensão finita originais. Esta restrição fornece o método de Galerkin em um ou mais campos de aproximação. Quando tais espaços são escolhidos de uma forma especial envolvendo a divisão do domínio em sub-domínios não sobrepostos (os elementos finitos), sendo gerados a partir de funções locais, geralmente polinômios, com suporte compacto nestes sub-domínios, é que obtemos o método dos elementos finitos. Posto isto, devemos refazer todo o estudo da análise matemática do problema em dimensão infinita agora em uma dimensão finita. Em especial, devemos descobrir se a existência, unicidade e estabilidade da solução estão ligadas à compatibilidade dos espaços de interpolação para os diversos campos envolvidos e/ou a restrições severas no tamanho da malha. Quando tal situação ocorrer, o método de Galerkin não obterá bom desempenho na prática. A forma que se tornou padrão para remediar tais patologias (Brooks, Hughes(1982)) é a seguinte: modificar a função de ponderação do método de Galerkin com a adição de um termo que dependa do operador envolvido no problema e que seja escolhido de forma a estabilizar a solução discreta, o que equivale a adequar a “física” do problema discreto à física do problema contínuo. Tais formulações são chamadas de formulações de Petrov-Galerkin e são consistentes no senso dos resíduos ponderados o que significa que a solução exata do problema sempre satisfaz esta formulação discreta. Desta forma, formulações de

Petrov-Galerkin aumentam a estabilidade e a precisão sem perda de consistência. As perturbações são introduzidas de forma descontínua e a nível do elemento, e são fáceis de programar em uma implementação já existente do método de Galerkin. Agora, com a nova condição de estabilidade proveniente da formulação de Petrov-Galerkin e da estimativa de erro do interpolante podemos obter uma estimativa de erro da solução discreta em relação à contínua.

Geração automática de malhas e adaptatividade

Devido às geometrias extremamente irregulares que ocorrem no campo da mecânica dos sólidos onde o método dos elementos finitos foi inicialmente utilizado nos anos sessenta, o método é o que hoje possui a maior maturidade na geração automática de malhas não estruturadas sobre domínios tridimensionais gerais. De posse de uma estimativa de erro para a solução do problema, o método oferece uma grande variedade de opções de modificação da malha de forma a reduzir o erro da solução numérica obtida.

Facilidades computacionais.

Após a escolha de qual formulação de (Petrov)-Galerkin a utilizar (a qual independe da geometria do elemento e do polinômio interpolador), a implementação do método dos elementos finitos é totalmente operacional e automatizada sem inconsistências ou ambiguidades. Isto facilita extremamente o tratamento de dados variáveis e condições de contorno gerais. Outra característica da implementação do método dos elementos finitos é a sua clara divisão em módulos computacionais que executam tarefas específicas e bem definidas.

II.1.2- Histórico dos problemas com convecção dominante.

As primeiras aplicações do método de Galerkin em equações de transporte com convecção dominante foram infrutíferas, uma vez que os resultados numéricos obtidos apresentavam grandes oscilações originadas na vizinhança de camadas internas e externas que se estendiam por todo o domínio do problema. Observando que o comportamento apresentado era o mesmo do esquema de diferenças centradas do método das diferenças finitas, começou-se a discutir uma forma de introduzir o conceito de diferenças avançadas no método dos elementos finitos. As primeiras tentativas com sucesso (ao menos no caso unidimensional) do método dos elementos finitos em equações de transporte com convecção dominante foram conseguidos com a modificação do espaço das funções de ponderação do método de Galerkin utilizando funções contínuas. Tais formulações apenas coincidiam no caso unidimensional quando produziam uma solução nodalmente exata para um problema convectivo-difusivo a coeficientes constantes sem termo fonte. A generalização desses métodos a várias dimensões produziam diferentes resultados entre si, apresentando porém em comum uma grande difusão transversal ao campo convectivo. Esta fase embrionária do método dos elementos finitos em mecânica dos fluidos pode ser vista em Christie, Griffiths, Mitchell e Zienkiewicz(1976), Heinrich, Huyakorn, Mitchell e Zienkiewicz(1977), Heinrich e Zienkiewicz(1977), Hughes(1978).

Em Brooks e Hughes(1982) foi apresentado, pela primeira vez, uma formulação de Petrov-Galerkin consistente no sentido dos resíduos ponderados e utilizando funções de ponderação descontínuas. Foi neste trabalho que se introduziu um controle sobre o gradiente da solução do problema na direção das linhas de corrente sem produzir a excessiva difusão transversal dos métodos anteriores. O procedimento era independente do número de dimensões, da geometria do elemento e do polinômio interpolador. Ele, entretanto, ainda estava restrito a problemas estacionários e apresentava oscilações localizadas na vizinhança de camadas internas e externas. O

método apresentado passou a ser conhecido como SUPG(Streamline Upwind Petrov-Galerkin).

Em Johnson, Navert e Pitkaranta(1984) foi introduzido o conceito de elemento finito no tempo, sendo o SUPG modificado de forma a adicionar um controle sobre o gradiente da solução do problema sobre as linhas características de forma contínua no espaço e descontínua no tempo.

Mizukami e Hughes(1985) introduziram a idéia de controlar o gradiente da solução do problema na direção de um campo convectivo auxiliar obtido como função do gradiente da solução aproximada. Desta forma, o método assim engendrado é não-linear mesmo que o problema original seja linear (o mesmo pode ser dito para qualquer método de captura de descontinuidade diferencial). Apesar dos excelentes resultados (grande precisão e completa eliminação das oscilações localizadas do SUPG), o método estava limitado a um problema estacionário sem termo de absorção e a elementos triangulares lineares.

Em 1986, Hughes, Malet e Mizukami introduzem um operador de captura de descontinuidade, o qual adicionado ao SUPG elimina suas oscilações localizadas quando somente termos convectivos e difusivos estão presentes na equação. O método assim formado é chamado de DC2 (Descontinuity Capture - 2).

Em Do Carmo e Galeão(1988), é apresentada uma melhor elaboração na linha da direção de "upwind" aproximada dando origem ao método denominado CAU(Consistent Approximate Upwind). Este método elimina totalmente as oscilações localizadas do SUPG mesmo com todos os termos da equação presentes. Entretanto, observa-se uma perda de precisão em relação ao SUPG em soluções regulares.

Em Hughes, Franca, e Hulbert(1989), apresenta-se o método GLS(Galerkin Least Squares), uma alternativa com soluções equivalentes ao SUPG porém com análise numérica muito mais simples.

Do Carmo e Galeão(1991), apresentam o método CCAU(Controlated Consistent Approximate Upwind) o qual possui a mesma solução do SUPG em soluções regulares e mesma solução do CAU em soluções singulares.

Uma abrangente revisão dos trabalhos desenvolvidos nos anos oitenta e que envolvem a forma simétrica das equações de Navier-Stokes para escoamentos compressíveis utilizando variáveis de entropia pode ser encontrada em Shakib e Hughes(1991). Em especial, nesta época, é introduzido um novo operador de captura de descontinuidade baseado em mínimos quadrados o DCQ(Discontinuity Capture Quadratic).

Em 1993, Do Carmo apresenta uma alternativa aos operadores de captura de descontinuidade diferenciais(DC2, CAU , DCQ, etc.). Utilizando-se o GLS, o que produz resultados estáveis e precisos a menos de vizinhanças de singularidades, e introduzindo-se graus de liberdade adicionais somente no interior das regiões com singularidade (é sugerido um método para identificar estas regiões.), pode-se utilizar funções de ponderação especiais obtidas a partir da solução analítica local do problema no interior da região com singularidade. Isto dá origem a um método linear com superior estabilidade e precisão dentro das regiões com singularidade em relação aos métodos de captura de descontinuidade diferenciais.

Pelos motivos acima, consideramos as metodologias alinhadas com Do Carmo(1993) como o caminho natural para o desenvolvimento de novas formulações na área do método dos elementos finitos.

II.1.3- Histórico de problemas com restrição de incompressibilidade

Para problemas com restrição interna de incompressibilidade, como o problema de escoamento lento, o problema de Stokes, a primeira dificuldade é a satisfação à priori da restrição quando o problema é formulado em variáveis primitivas, ou seja, em função da pressão e da velocidade.

A utilização de função de corrente de forma a satisfazer a restrição de incompressibilidade de forma exata possui alguns inconvenientes como ser restrita apenas ao espaço de duas dimensões e de obter as variáveis de interesse, a pressão e a velocidade, a partir de derivadas (com conseqüente perda de precisão).

Uma primeira tentativa de evitar a satisfação à priori da restrição de incompressibilidade foi obtida através do método de penalização de Zienkiewicz(1974) que introduz uma pequena “compressibilidade” no problema e procura a solução quando esta “compressibilidade” tende a zero. Desta forma, consegue-se satisfazer aproximadamente a restrição de incompressibilidade, mas não consegue-se convergir na forma discreta, exigindo-se a formulação uma forma discreta diferente da contínua com a utilização de técnicas de integração reduzida ou integração seletiva do termo penalizado.

Uma alternativa natural de satisfazer a restrição de incompressibilidade de forma aproximada, a princípio, é a técnica dos multiplicadores de Lagrange, a qual introduz a restrição de incompressibilidade na forma variacional do problema, gerando assim um modelo que quando aproximado (restrito a espaços de dimensão finita) é o clássico método misto de Galerkin. A partir daí, surge uma nova complicação pois sabe-se que muitos elementos (como os altamente atrativos do ponto de vista computacional que possuem a mesma ordem de interpolação para os campos de pressão e velocidade.) dão origem a fenômenos indesejáveis como o trancamento do campo de velocidade (o campo de velocidade pode se anular em todo domínio) e a oscilações espúrias do campo de pressão. Assim, a construção de aproximações de elementos finitos mistos está relacionada com o problema da escolha de combinações

entre as interpolações de pressão e de velocidade. A compatibilidade entre as aproximações para problemas elícticos lineares é ditada pelas versões discretas do lema de Babuska(1971), ou do teorema de Brezzi(1974), que fornecem condições de existência, unicidade e estabilidade para estes problemas. No caso de problemas com restrição interna, ao contrário daqueles que se ajustam aos modelos cinemáticos, as propriedades do problema contínuo não são automaticamente transferidas para o problema discreto. Consequentemente, as condições de compatibilidade devem ser verificadas para cada escolha particular dos espaços de aproximação. Quando posto a esta prova, o método misto de Galerkin fornece muito poucas combinações estáveis. Em Malkus e Hughes(1978), demonstrou-se a equivalência entre os métodos de penalização com integração reduzida ou seletiva e os métodos mistos através da equivalência entre as matrizes de rigidez de ambos os métodos.

Karam (1989), propõe uma formulação mista de Petrov-Galerkin que permite interpolações de mesma ordem para a pressão e a velocidade com a pressão interpolada de forma descontínua e a velocidade de forma contínua. Com esta formulação, elimina-se a componente com média nula da pressão a nível do elemento. Entretanto, a componente constante por partes da pressão tem que ser determinada de forma acoplada com o campo de velocidade para cada elemento, o que reduz o apelo desta metodologia em relação a de pressão total contínua.

Franca e Frey(1992) utilizam um formulação equivalente a de Karam (1989) porém com pressão contínua.

Na resolução das equações de Navier-Stokes incompressíveis feita em Sampaio et alli(1993), observa-se que a corrente em elementos finitos que procura transportar metodologias populares em diferenças finitas para elementos finitos continua em franca atividade até os dias de hoje. Naquele trabalho, uma abordagem totalmente distinta é utilizada. Inicialmente, faz-se uma discretização centrada no tempo das equações de Navier-Stokes incompressíveis, seguida pela minimização, no sentido dos mínimos quadrados dos quadrados das equações de quantidade de movimento, em relação ao campo de velocidade desconhecido de forma a obter uma nova formulação

de Petrov-Galerkin. Em seguida, obtém-se uma equação de Poisson para a pressão, combinando a equação de continuidade com a minimização, no sentido dos mínimos quadrados dos quadrados das equações de quantidade de movimento, em relação ao campo de pressão incógnito. O procedimento usa um algoritmo de resolução segregado semelhante ao algoritmo SIMPLER de Patankar(1980).

No presente trabalho apresentamos uma nova formulação de Petrov-Galerkin que acresce à metodologia de Karam (1989) a possibilidade de eliminação total da pressão a nível de elemento, o que efetivamente reduz um grau de liberdade das incógnitas do problema por ponto no sistema de equações a ser resolvido.

II.2- A linguagem de programação “C”

A linguagem de programação “C” é uma linguagem de alto nível e de uso geral desenvolvida por Dennis Ritchie no Bell Labs em 1972 para o sistema operacional UNIX. Ao longo dos anos, a linguagem apareceu em diferentes sistemas, satisfazendo a necessidade dos programadores que necessitavam desenvolver aplicações que independessem de plataforma. Uma vez que a linguagem de programação “C” nunca foi formalmente definida, cada implementação interpretou o comportamento da linguagem de formas diferentes em muitas circunstâncias, introduzindo também suas próprias extensões. Como resultado, o Santo Graal, o Cálice Sagrado, da portabilidade nunca foi atingido. Em 1982, o ANSI (American National Standards Committee) formou o comitê técnico X3J11 sobre a linguagem de programação “C” com o propósito de definir formalmente a linguagem de programação “C” de forma não ambígua e independente de máquina, incluindo um pré-processador e um conjunto de bibliotecas padrão, descrevendo sua interação com o ambiente de execução. O padrão americano ANSI para a linguagem de programação “C” foi completado em 1989 sendo formalmente conhecido como ANSI Standard X3.159-1989. O padrão a nível internacional ISO/C foi completado em 1990. Com exceção feita aos detalhes de formatação e numeração das seções, os dois padrões são idênticos. O ISO/C é formalmente conhecido como ISO/IEC Standard 9899:1990.

A linguagem “C” é algumas vezes referida como uma linguagem de “baixo nível” em referência ao fato de que os programadores “C” tendem a pensar em termos de bits, bytes, endereços e outros conceitos fundamentais de programadores Assembly. Entretanto, a linguagem “C” possui amplo espectro suportando também características típicas de linguagens de “alto nível”. Controles de fluxo, estruturas de dados, programação estruturada e modular, são adições recentes a muitas linguagens de alto nível, mas que tem estado com o “C” desde a sua concepção. A linguagem “C” oferece ao programador a capacidade de escrever aplicações em um nível logo acima do da linguagem Assembly da máquina.

Esta é uma estupenda característica, uma vez que os modernos compiladores “C” geram um melhor código do que todos os outros, menos o melhor programador existente em Assembly. “C” é uma linguagem de uso totalmente geral, amplamente disponível, amplamente utilizada, independente de computador e sistema operacional utilizado, e com eficiência em tempo de execução e espaço comparáveis ao Assembly do computador hospedeiro.

Em 1990 o ANSI formou um novo comitê técnico, o X3J16, para padronizar a linguagem de programação C++ (Stroustrup e Ellis(1990)), lançando em 1995 a primeira versão do padrão ANSI/C++. O padrão definitivo do ANSI/C++ deve ser liberado em breve. Na codificação de nosso sistema computacional utilizamos um subconjunto do padrão ANSI/ISO/C totalmente compatível com a versão do ANSI/C++ e forçosamente com sua versão final.

As qualidades que fizeram do “C” a linguagem de programação escolhida para implementação do presente sistema computacional foram, como dito anteriormente, portabilidade com alta eficiência, clareza, notação compacta, controles de fluxo e estruturas de dados modernas, um imbatível conjunto de operadores, nenhuma restrição, eficiência potencial máxima dentre as linguagens de uso geral, uso disseminado.

Capítulo III

A concepção de um sistema computacional para a solução de escoamentos reais

Neste capítulo, apresentamos a concepção de um sistema computacional aberto, flexível, extensível, reutilizável, portátil e que atenda as exigências discutidas para a solução de escoamentos reais em engenharia. São apresentados os conceitos gerais de tal sistema, as convenções de programação utilizadas e os módulos atualmente implementados.

III.1- Descrição do sistema

A idéia original na elaboração do presente sistema computacional foi perceber o caráter de modularidade computacional que o método dos elementos finitos possui e pensar em como levar esta modularidade as suas últimas consequências. O método dos elementos finitos possui em qualquer implementação módulos com funcionalidade bem definida: geometria do elemento finito utilizado (que chamaremos doravante de *elemento*), tratamento de transiente e(ou) não-linearidade(que chamaremos doravante de *estratégia*), cálculo da matriz elementar e do vetor de carga elementar(que chamaremos doravante de *esquema*) e cálculo da solução do sistema de equações lineares (que chamaremos doravante de *solver*). Em especial, para referência futura, consideraremos o gerador de malhas como parte da funcionalidade básica do sistema e não como um módulo no sentido discutido aqui.

Porém, apesar destes módulos terem a mesma funcionalidade básica em todas as implementações, eles não possuem uma interface comun devido às suas diferenças

intrínsecas, como as que existem entre um *solver* iterativo e um *solver* direto, por exemplo, o que obriga mudanças a serem realizadas no restante do programa quando um novo módulo é introduzido. Isto a princípio não faz sentido uma vez que a funcionalidade do módulo é a mesma. A forma escolhida para evitar essa inconsistência foi a seguinte:

- 1) definir o que é funcionalidade básica do sistema (que deve ser desenvolvida pelos responsáveis pelo sistema) e qual é o conjunto de interfaces para os módulos (*elemento*, *estratégia*, *esquema*, *solver*), os quais permitem a extensão do sistema por terceiros,
- 2) definir estas interfaces de forma abstrata e altamente estruturada de forma a ocultar do restante do programa o módulo realmente chamado (desta forma tornando desnecessária qualquer modificação do programa quando um novo módulo é adicionado ao sistema), e
- 3) documentar estas interfaces e garantir que um novo módulo de qualquer tipo que obedeça esta interface poderá inter-operar com qualquer outro módulo registrado no sistema.

Pensemos no seguinte exemplo prático: sejam 4 pessoas A, B, C, D que vão implementar novos módulos (um de cada tipo) para o sistema. A princípio as pessoas não se conhecem e vão ter que confiar na consistência de cada interface de módulo para que os novos módulos desenvolvidos por eles possam inter-operar entre si. A pessoa A desenvolveu um *elemento* bi-quadrático; a pessoa B desenvolveu uma *estratégia* não-linear globalmente convergente; a pessoa C desenvolveu um *esquema* novo com operador de captura de descontinuidade e a pessoa D desenvolveu um *solver* iterativo com pré-condicionador. Os módulos irão inter-operar através de uma consistente, abstrata e documentada interface de registro de módulos que garante a

inter-operabilidade entre os módulos que obedecem esta interface. Sobre o ponto de vista de um usuário final do sistema, que vai apenas usar o sistema para um cálculo, ele apenas consulta os módulos registrados em cada categoria e escolhe o que lhe for mais adequado.

Na Fig III.1 é apresentado um esquema geral do sistema ,como concebido, destacando seus pontos principais. O sistema adquiriu características bem definidas de sistema aberto, flexível, extensível, reutilizável e portátil como ditam as normas de programação de sistemas.

Sistema aberto.

De forma a inter-operar com padrões de fato e de direito do mercado, o sistema possui uma interface bem definida para a introdução de filtros de importação de geometria provenientes de programas de "CAD"(desenho assistido por computador) de terceiros, bem como de filtros de exportação para programas de visualização de terceiros. Entretanto, o programa sempre efetua o processamento em seu formato interno em função do desempenho.

A documentação para terceiros que queiram agregar funcionalidade ao sistema(registrando novos módulos) é clara, não ambígua e completa. Isto significa que não existem interfaces "não-documentadas" de uso exclusivo dos desenvolvedores do sistema básico. Isto significa que os desenvolvedores do sistema e as pessoas que vão extê-lo estarão em igualdade quanto ao nível de estruturação e disciplina de programação exigidos pelo projeto original do sistema.

Sistema flexível.

Em um sistema computacional altamente estruturado e organizado algumas vezes nos deparamos com o seguinte problema: é necessário implementar um novo módulo cuja implementação é incompatível com a funcionalidade básica contida na interface da pilha de módulos tratada. Por isto, o sistema possui uma interface de “porta dos fundos” documentada para estes casos quando o novo módulo requer para si a responsabilidade de toda a implementação. A exigência deste tipo de interface também é feita quando existe a necessidade de registrar um módulo com restrições de desempenho acima da média, de tal forma que a sua implementação não possa ter nenhum "overhead" associado com os níveis de abstração do sistema.

Sistema extensível.

O sistema possui uma documentação bem clara explicitando todos os passos necessários para a adição de um novo módulo, em especial diferenciando recomendações de implementação e de restrições de implementação.

Sistema reutilizável.

Como boa prática em programação de sistemas, o máximo de funcionalidade básica é implementada para cada pilha de módulos, reduzindo ao mínimo a quantidade de código a ser escrita e garantindo que a codificação necessária seja o mínimo necessário para diferenciar um módulo registrado de outro. Desta forma, todo o código comum possível é implementado apenas uma vez, reduzindo brutalmente o custo de desenvolvimento e depuração de um novo módulo.

Sistema portátil.

Compatível com qualquer Compilador\Sistema Operacional\Computador que suporte o padrão ANSIC. Compatível para inserção em qualquer programa devido a sua arquitetura de ponto único de entrada.

III.2- Convenções de programação

Uma norma básica em programação de sistemas é estabelecer regras bem claras sobre o código a ser escrito e respeitá-las sempre. Além do fato de adotarmos completamente o padrão ANSIC e a compatibilidade total com C++ (o que já envolve um grande detalhamento técnico e conhecimento destas linguagens), foram utilizadas convenções gerais de programação, as quais podem ser divididas nas seguintes categorias: documentação, checagem de erros, convenções de nomes, estilo de codificação e facilidade de manutenção.

Documentação.

Foi adotado um extenso e agressivo conjunto de convenções de documentação de código que envolvem a documentação geral dos arquivos do código fonte do programa, a disposição do código no interior dos arquivos, documentação de protótipos de funções indicando claramente o propósito de cada argumento, documentação de nomes em geral e do restante do código. Foi também dada especial atenção a forma de escrever o código, são convenções que não afetam o código de máquina gerado, entretanto facilitam imensamente a leitura e manutenção do código fonte. É dada especial atenção ao estilo de loops e controles de fluxo, indentação de blocos e legibilidade de código.

Checagem de erros.

Foi utilizado um sistema de tratamento de erros unificado e centralizado para todo o sistema computacional. Tal procedimento envolve a checagem de argumentos de funções e detecção de erros em sua execução. Quando uma função detecta um estado inconsistente como estes, ela imediatamente encerra sua execução e retorna um código indicativo do erro ocorrido que pode ser tratado de forma adequada pelo código chamador.

Os dados de entrada do programa também sofrem uma validação rigorosa e dados inconsistentes são rejeitados.

Convenções de nomes.

Os nomes de funções e tipos de dados são escolhidos de forma a associá-los com a área do programa em que são utilizados. Extremo cuidado é também tomado com a escolha dos nomes de variáveis de forma a identificar(apenas pelo nome) imediatamente seu tipo, classe de armazenamento, escopo, ligação e utilização.

Estilo de codificação.

Esta é uma parte crítica do projeto e que afeta diretamente o código de máquina gerado, em especial não é assumida nenhuma condição sobre o otimizador do compilador utilizado para gerar o código. Foram estudados entre outros tópicos: forma e situação para introdução de temporários, reordenação e aprofundamento de loops, equilíbrio entre chamadas de função e codificação em linha, considerações sobre aritmética em ponto flutuante(precisão finita) e análise numérica em geral e gerenciamento de memória racional de forma a evitar a fragmentação do "heap" e utilizar com eficiência os grandes espaços de endereçamento virtual oferecidos pelos modernos sistemas operacionais.

Facilidade de manutenção.

Uma grande dificuldade na manutenção de um sistema computacional é a mudança dos protótipos das funções quando novos recursos são adicionados (geralmente novos argumentos são introduzidos) à medida que o sistema evolui. De forma a manter os mesmos protótipos das funções à medida que o sistema se desenvolve, são utilizados intensivamente ponteiros para estruturas como argumentos das funções, o que permite que nova funcionalidade seja adicionada modificando os campos existentes de tais estruturas e acrescentando novos campos a estas estruturas, enquanto mantendo a mesma interface de funções. Indo além, utilizando intensivamente estruturas e disciplinando sua manipulação a um conjunto bem definido de funções, introduz-se um alto grau de organização e flexibilidade ao código. A utilização de ponteiros para estruturas como argumentos de função também tem o efeito benéfico de reduzir o número de argumentos por função, uma vez que os compiladores modernos geram os códigos de chamada à função, passando os argumentos em registradores. Reduzir o número médio de argumentos por função, e passar como argumentos apenas inteiros e ponteiros, é normalmente uma boa prática.

III.3- Os módulos atualmente implementados

Elemento.

Elemento quadrilátero bilinear com 2x2 pontos de integração numérica de Gauss.

Solver.

Foi implementado um método direto chamado método frontal. O gênese do método frontal é perceber que o processo de construção da matriz global do sistema pode se processar em paralelo com a eliminação Gaussiana. Desta forma, os graus de liberdade são adicionados à

matriz frontal e eliminados assim que todas as suas contribuições elementais forem totalmente somadas. A matriz frontal é uma matriz quadrada contendo somente os graus de liberdade ativos que ainda vão ser eliminados. Então, a matriz global do sistema nunca é construída, uma vez que todos os graus de liberdade inativos podem ser removidos da matriz frontal e guardados. A dimensão da matriz frontal é denominada largura da frente. As mudanças nesta largura da frente prosseguem uma vez que um grau de liberdade seja completamente somado; então, a equação apropriada é reduzida ao longo do seu pivô para uso no posterior processo de substituição ao contrário (back-substitution). Quando todos os elementos forem somados, e todas as equações forem reduzidas, o processo de substituição ao contrário (back-substitution) irá produzir os valores para todos os graus de liberdade. Uma vez que, grande parte das operações se processa ao nível da matriz frontal, a eficiência do método depende fundamentalmente da largura da frente. De forma a minimizar o tamanho da frente deve-se tomar cuidado com a numeração dos elementos da malha. Nossa implementação do método frontal baseia-se em Berry (1991) que fornece o código fonte em “C” de sua implementação. Apesar de oferecer claros avanços em relação a implementações anteriores do método frontal, esta implementação apresenta um estilo pobre e confuso, parecendo muitas vezes ter sido obtida a partir de um fonte em FORTRAN através de um programa tradutor automático. No presente trabalho, efetuamos os seguintes aperfeiçoamentos e modificações:

- adequamos o algoritmo a nossas convenções de documentação, estilo de programação, estilo de codificação e a interface de módulo de *solver* de sistema linear no nosso sistema computacional,
- restringimos o algoritmo a uma malha com os mesmos tipos de elemento e mesmo número de graus de liberdade por ponto,
- valendo-nos dos grandes espaços de endereçamento virtual dos modernos sistemas operacionais não utilizamos arquivos temporários,
- determinamos exatamente o valor da largura do frente à priori,

- permitimos a eliminação de todos os graus de liberdade somados em uma mesma iteração.

Na Fig III.2 é mostrado um diagrama do método frontal indicando a metodologia de montagem da matriz global sendo feita em paralelo com a eliminação de Gauss.

Esquema

Foi implementada uma formulação de Petrov-Galerkin proposta em Do Carmo, Traiano, Dos Santos (1996) a qual permite a mesma ordem de interpolação para a pressão e a velocidade, interpolação descontínua para a pressão e interpolação contínua para a velocidade, com a total eliminação da pressão a nível do elemento (componentes constante por partes e de média nula) através da penalização da média do divergente do campo de velocidade a nível de elemento.

Estratégia

Uma vez que o problema aqui discutido é estacionário e linear, não discutiremos esta classe de módulo.

Gerador de malhas

Como dito acima não consideramos o gerador de malhas como um módulo no sentido discutido neste trabalho, uma vez que estipulamos que ele fosse parte da funcionalidade básica do sistema e não uma interface para desenvolvimento de módulos por terceiros, como são as interfaces de módulos: *Elemento*, *Solver*, *Esquema* e *Estratégia*.

Entretanto foi desenvolvido um gerador de malhas bidimensional com reduzido custo de implementação e processamento para nossas necessidades imediatas. O esquema de

geração de malhas utilizado consiste na divisão do domínio em sub-domínios quadriláteros generalizados, os macro-elementos, cuja informação de conexão varia de acordo de acordo com o esquema de divisão do domínio em macro-elementos adotado, o que lhe confere a classe de gerador semi-automático. Cada macro-elemento é mapeado isoparametricamente através do elemento quadrilátero padrão no domínio computacional e através da informação de conexão dos macro-elementos citada acima a malha é gerada sobre todo o domínio físico do problema.

Nas figuras Fig III.3 e Fig III.4 são apresentados alguns esquemas de divisão em macro-elementos possíveis e exemplos de malhas geradas respectivamente.

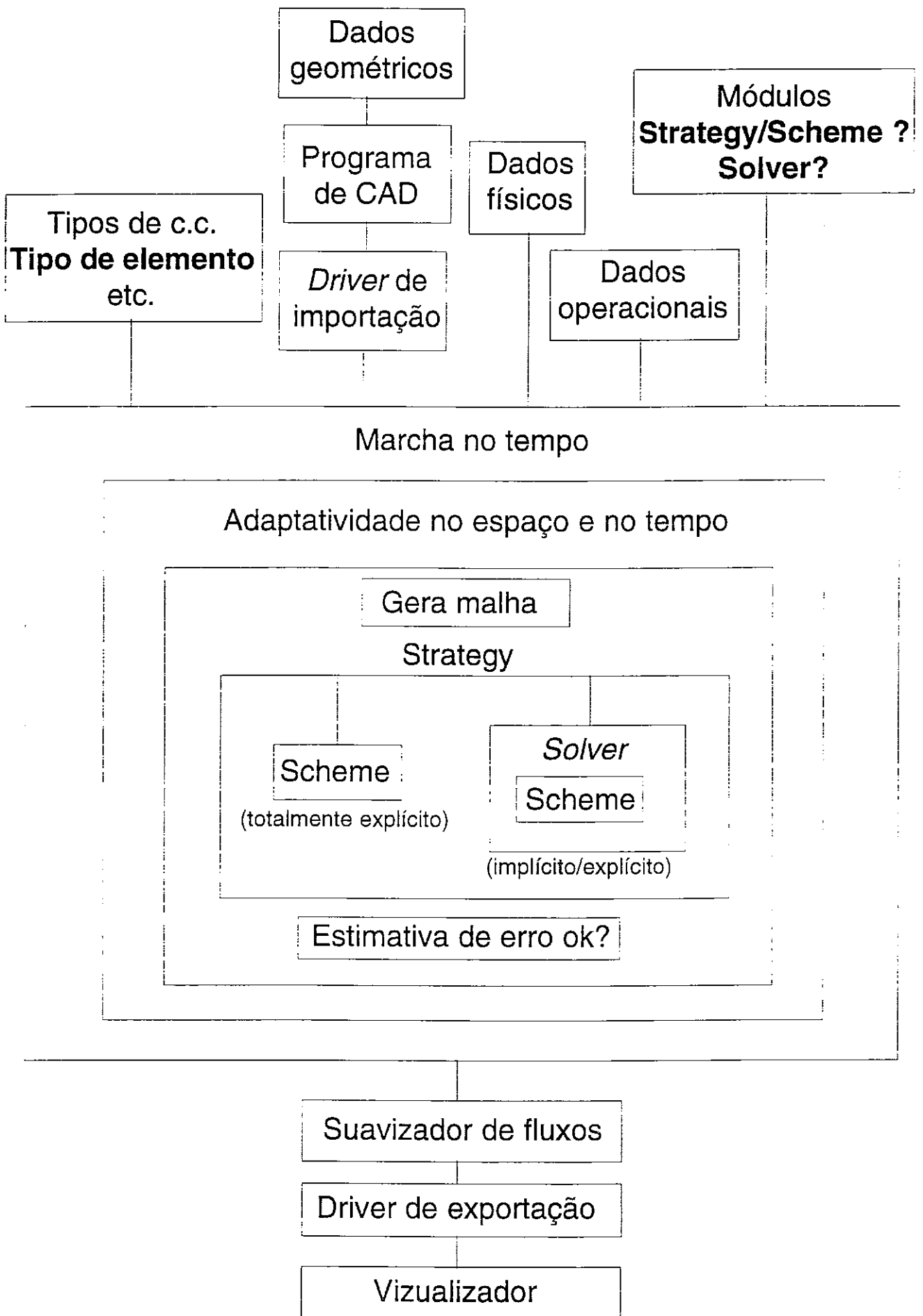


Fig. III.1

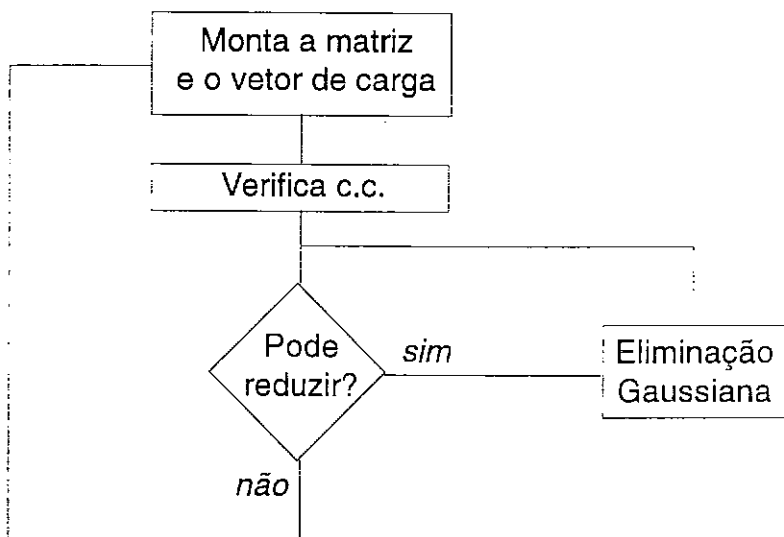
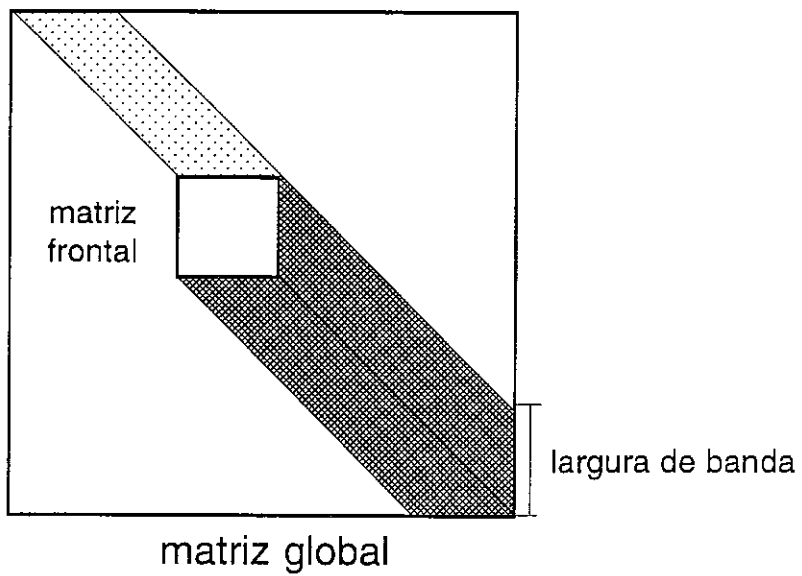


Fig. III.2- Esquema dos principais procedimentos do método frontal

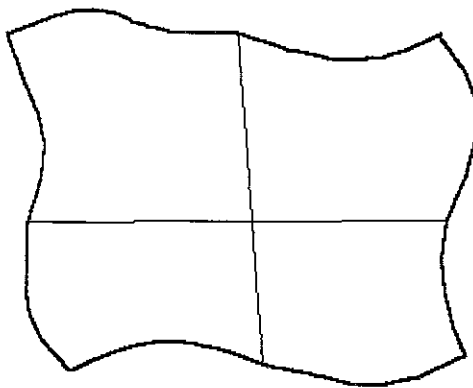
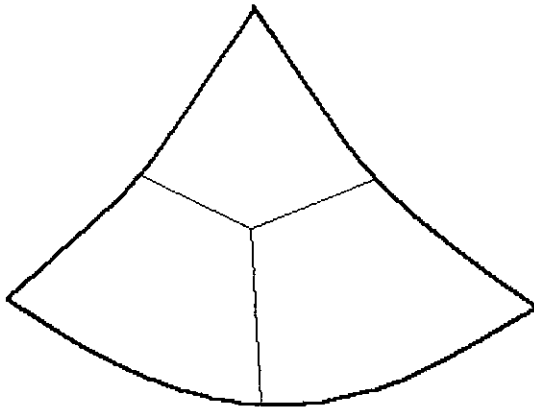
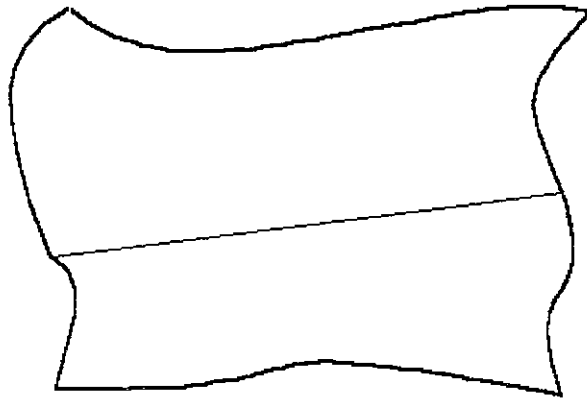


Fig. III.3 - Divisão do domínio macro-elementos

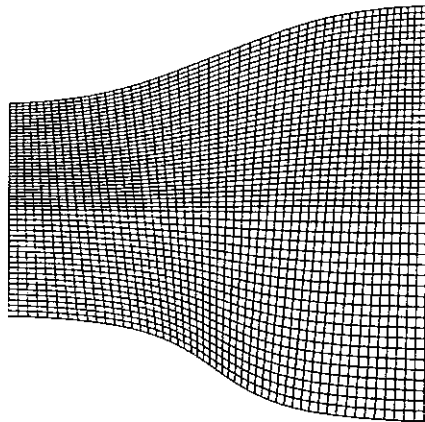
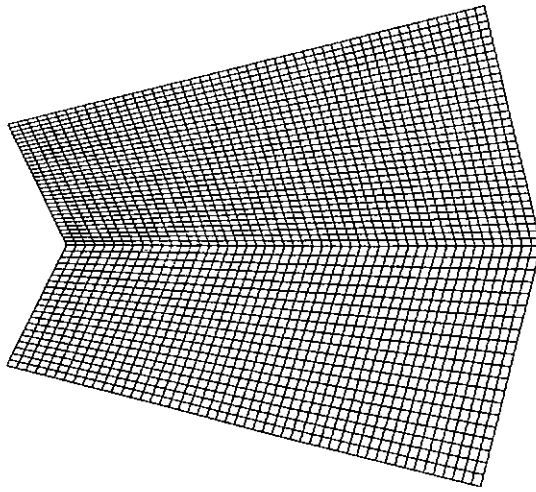
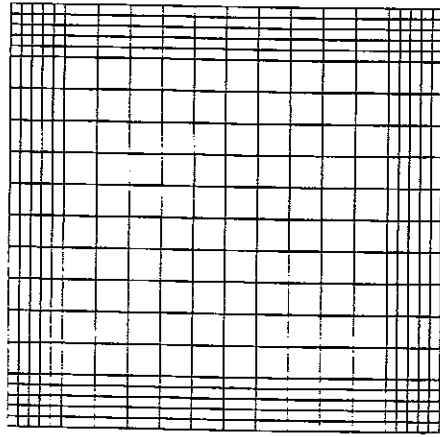


Fig. III.4 - Exemplos de malhas geradas

CAPÍTULO IV

Problema de Stokes

São apresentadas as equações que descrevem o escoamento de um fluido newtoniano e uma análise básica das escalas das variáveis do escoamento. Posteriormente é discutido o problema do tratamento da restrição de incompressibilidade em elementos finitos. É apresentada uma formulação de Petrov-Galerkin baseada em Karam(1989), que adiciona a esta metodologia a possibilidade da total eliminação da pressão a nível de elemento com a utilização de uma penalização que incide sobre a média do divergente do campo de velocidade a nível de elemento. São apresentadas provas de existência e unicidade para o problema discreto bem como a estimativa da taxa de convergência.

IV.1 - As equações de movimento de um fluido newtoniano

As equações que regem o movimento de um fluido newtoniano são derivadas de princípios de conservação (massa, quantidade de movimento e energia), sendo conhecidas como as equações de Navier-Stokes. Uma dedução completa destas equações pode ser encontrada em textos clássicos de mecânica dos fluidos, (Batchelor (1990)) , nesta seção serão apresentadas apenas as equações em sua forma final. É usada a convenção de soma de Einstein a menos que se diga explicitamente o contrário. E são adotadas as seguintes hipóteses:

- escoamento incompressível
- propriedades físicas constantes no domínio (Ω)
- o fluido é considerado newtoniano

- o escoamento é laminar

- o fluido escoo em regime permanente

Equação da continuidade

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.1a)$$

Equação de quantidade de movimento

$$\rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho f_i(x) \quad \text{em } \Omega \quad (4.1b)$$

onde,

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

U_i , campo de velocidades

p , campo de pressão

$f_i(x)$, termo fonte

ρ , massa específica

μ , viscosidade

δ_{ij} , delta de Kronecker

$i = 1,2,3$ e $j = 1,2,3$

Rudimentos de adimensionalização

A equação (4.1b) pode ser re-escrita desprezando o termo fonte, da seguinte forma:

$$\rho U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.2)$$

Analisar as equações em função de variáveis adimensionais é sempre útil, de forma a ampliar o entendimento do fenômeno como parametrizar o problema de forma a facilitar o seu estudo.

Considerando um escoamento com uma determinada velocidade característica U' (em todas as componentes do campo de velocidade) um comprimento característico L (em todas as coordenadas espaciais), pode-se fazer uma análise da ordem de grandeza dos termos da equação (4.2) da seguinte forma:

$$\text{termo de inércia : } O\left(\rho \frac{U'^2}{L}\right)$$

$$\text{termo de pressão : } O\left(\frac{p}{L}\right)$$

$$\text{termo viscoso : } O\left(\mu \frac{U'}{L^2}\right)$$

Se para um determinado escoamento tem-se velocidades muito altas (ou μ muito pequeno, ou ainda L muito grande), analisando (4.2) espera-se que haja um balanço entre o termo de pressão e o termo de inércia, ou seja espera-se que os efeitos viscosos sejam desprezíveis comparados aos de inércia e portanto o termo de pressão seja da ordem dos termos de inércia, tem-se portanto:

$$O\left(\rho \frac{U'^2}{L}\right) = O\left(\frac{p}{L}\right) \Rightarrow p = O(\rho U'^2)$$

Uma adimensionalização coerente pode ser dada por:

$$U_i^* = \frac{U_i}{U'}$$

$$x_i^* = \frac{x_i}{L}$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U'^2}$$

A equação (4.2) pode ser portanto reescrita da seguinte maneira:

$$U_j^* \frac{\partial U_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \quad (4.3)$$

Onde Re é o número de Reynolds que é dado pela seguinte expressão:

$$Re = \frac{\rho L U'}{\mu}$$

Portanto para escoamentos com altos números de Reynolds tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i^*}{\partial x_i^*} &= 0 \\ U_j^* \frac{\partial U_i^*}{\partial x_j^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} \end{aligned}$$

$$\text{quando} \quad Re \rightarrow \infty \quad (4.4a,b)$$

conhecida como equações de Euler.

A equação de Euler não pode ser usada numa região próxima à parede, já que a omissão dos termos viscosos nesta região não satisfaz a condição de não deslizamento.

Considerando agora a situação inversa, ou seja um escoamento onde U' ou L são muito pequenos, as forças de inércia são desprezíveis quando comparadas com os efeitos viscosos, espera-se portanto que o termo de pressão seja da ordem do termo viscoso:

$$O\left(\mu \frac{U'}{L^2}\right) = O\left(\frac{p}{L}\right) \Rightarrow p = O\left(\frac{\mu U'}{L}\right)$$

A velocidade e a variável espacial podem ser adimensionalizadas da mesma forma como foi feito acima, já uma adimensionalização coerente para a pressão é dada por:

$$p^* = \frac{p}{\mu U' / L}$$

Reescrevendo a equação (4.2) em termos dos parâmetros adimensionais tem-se:

$$\text{Re} \left(U_j^* \frac{\partial U_i^*}{\partial x_j^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial^2 U_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \quad (4.5)$$

Portanto para escoamentos com baixos números de Reynolds temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i^*}{\partial x_i^*} &= 0 \\ 0 &= -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial^2 U_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \end{aligned}$$

$$\text{quando} \quad \text{Re} \rightarrow 0 \quad (4.6a,b)$$

conhecida como equação de Stokes (Batchelor (1990)).

Os escoamentos governados pelas equações (4.6a,b), também conhecidos como escoamento lento, tem aplicações práticas limitadas, porém é ponto de partida para a análise de uma série de problemas mais gerais governados pelas equações de Navier-Stokes, este é um dos motivos pelos quais resolveu-se fazer a simulação numérica destes tipos de escoamentos neste trabalho.

O problema a ser resolvido nesta tese (o qual é uma pequena variação do problema de Stokes) pode então ser formulado na sua forma forte como:

Seja Ω uma região aberta limitada em \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, com contorno suave por partes Γ tal que $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ e com normal exterior a Γ \underline{n} . O problema forte consiste em:

Dados $D_i(\mathbf{x})$, $N_i(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ e $f_i(\mathbf{x})$ determinar $\{\mathbf{U}, p\}$, tal que:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = g(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \quad (4.7a)$$

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = f_i(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \quad (4.7b)$$

com as seguintes condições de contorno

$$U_i(\mathbf{x}) = D_i(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Gamma_D \quad (4.7c)$$

$$\sigma_{ij} n_j(\mathbf{x}) = N_i(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Gamma_N \quad (4.7d)$$

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \quad \text{e} \quad \Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$$

onde:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Obs.:

$$\text{Devido à incompressibilidade tem-se: } \Gamma_N = \emptyset \Rightarrow \int_{\Gamma} D_i n_i \, d\Gamma = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad (\text{existência})$$

Considerando que na equação da quantidade de movimento a pressão aparece apenas no

$$\text{termo do gradiente tem-se que: se } \Gamma_N = \emptyset \Rightarrow \int_{\Omega} p \, d\Omega = 0 \quad (\text{unicidade})$$

IV.2 - Formulação mista de Galerkin

Como discutido no capítulo II a forma mais natural de introduzir a restrição de incompressibilidade na forma variacional do problema é a utilização da técnica dos multiplicadores de Lagrange. Tal método quando restrito a espaços de dimensão finita é o método misto de Galerkin, cuja utilidade prática depende da compatibilidade dos espaços de interpolação para pressão e velocidade. São apresentadas diversas definições, e a formulação mista de Galerkin continua e discreta para o problema de Stokes.

Seja $D(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω , cujo dual, $D'(\Omega)$ é o espaço das distribuições e a dualidade entre $D(\Omega)$ e $D'(\Omega)$ definida por

$$(f, \phi) = \int_{\Omega} f\phi \, d\Omega, \quad \forall \phi \in D(\Omega), \quad \forall f \in D'(\Omega)$$

Para $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ definimos $\partial^\alpha f$, derivada de ordem α de f no sentido das distribuições, como

$$(\partial^\alpha f, \phi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \phi), \quad \forall \phi \in D(\Omega),$$

onde

$$\partial^\alpha(\cdot) = \frac{\partial^{|\alpha|}(\cdot)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

Sejam também

1) $L^2(\Omega)$: espaço das funções quadrado integráveis, definidas no domínio Ω , com produto interno

$$(p, q) = \int_{\Omega} pq \, d\Omega, \quad \forall p, q \in L^2(\Omega),$$

ou seja,

$$L^2(\Omega) = \{q: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: \int_{\Omega} q^2 d\Omega < \infty\},$$

com norma

$$\|q\| = \|q\|_0 = \left(\int_{\Omega} q^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} = (q, q)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall q \in L^2(\Omega).$$

2) $(L^2(\Omega))^{\text{NG}}$ o produto cartesiano de $L^2(\Omega)$ NG vezes, com produto interno

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q})_{0, \text{NG}} = \int_{\Omega} q_i p_i d\Omega \quad \forall \mathbf{p} e \mathbf{q} \in (L^2(\Omega))^{\text{NG}}$$

e norma

$$\|\mathbf{p}\|_{0, \text{NG}} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{p})_{0, \text{NG}}\}^{1/2}$$

3) $H^m(\Omega)$: subespaço de $L^2(\Omega)$, tal que para cada $m \geq 0$

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); \forall \alpha, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha f \in L^2(\Omega)\},$$

com produto interno

$$(f, g)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha f \partial^\alpha g d\Omega, \quad \forall f, g \in H^m(\Omega),$$

norma

$$\|f\|_m = (f, f)_m^{1/2}$$

e seminorma

$$|f|_m = (\partial^m f, \partial^m f)^{1/2}.$$

4) $(H^1(\Omega))^{\text{NG}}$ o produto cartesiano de $H^1(\Omega)$ NG vezes, com produto interno

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_{1, \text{NG}} = \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} f_i \partial^{\alpha} g_i \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in (H^1(\Omega))^{\text{NG}},$$

e norma

$$\|\mathbf{f}\|_{1, \text{NG}} = \{(\mathbf{f}, \mathbf{f})_{1, \text{NG}}\}^{1/2}$$

5) $H_0^1(\Omega)$: subespaço de $L^2(\Omega)$, tal que

$$H_0^1(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega), \partial q \in L^2(\Omega): q|_{\Gamma} = 0\},$$

com norma

$$\|q\|_1 = (\|q\|_0^2 + \|\partial q\|_0^2)^{1/2}, \quad \forall q \in H_0^1(\Omega)$$

e seminorma

$$|q|_1 = \|\partial q\|_0, \quad \forall q \in H_0^1(\Omega).$$

6) Q e Q^v : espaços dos campos de pressão e das variações para a pressão respectivamente

$$Q = Q^v = \left[\begin{array}{l} \{q \in L^2(\Omega); \Gamma_N \neq \emptyset\} \\ \{q \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } (q, 1) = 0; \Gamma_N = \emptyset\} \end{array} \right]$$

com norma

$$\|q\|_Q = \|q\|_0, \quad \forall q \in Q$$

7) V e V^v : conjunto dos campos de velocidades admissíveis e espaço das variações admissíveis para a velocidade, respectivamente

$$V^v = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1)^3 \mid v_i(\mathbf{x}) = 0 \, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \right\}$$

$$V = \left\{ \mathbf{U} \in (H^1)^3 \mid U_i(\mathbf{x}) = D_i \, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \right\}$$

com norma

$$\|\mathbf{v}\|_V = \|\mathbf{v}\|_1 = (\|\mathbf{v}\|_{0,3}^2 + \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,3}^2)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

8) Sejam $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in V'$, com V' sendo o dual de V e $g(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$

O problema dado pelas equações (4.7a-d) é definido na forma variacional clássica por:

Determinar $\{\mathbf{U}, p\} \in V \times Q$, tal que:

$$b(\mathbf{q}, \mathbf{U}) = \ell_{\text{div}}(\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in Q'$$

$$a(\mathbf{U}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V'$$

onde

$$a(\mathbf{U}, \mathbf{v}) = \mu \int_{\Omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega$$

$$b(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} \mathbf{q} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega$$

$$\ell(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_i v_i d\Omega$$

$$\ell_{\text{div}}(\mathbf{v}) = - \int_{\Omega} \mathbf{q} g(\mathbf{x}) d\Omega \quad (4.8a-e)$$

Para que seja apresentado a versão discreta do problema serão consideradas primeiramente algumas definições necessárias em aproximações de problemas de elementos finitos. O domínio Ω é discretizado em N_e elemento finitos, tal que:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \overline{\Omega}^e, \quad \Omega^e \cap \Omega^f = \emptyset, \quad e \neq f$$

sendo Ω^e e Γ^e respectivamente, o interior e a fronteira do elemento e , tem-se:

$$\overline{\Omega}^e = \Omega^e + \Gamma^e.$$

Considere $P^k(\Omega_e)$ dado por:

$$P^k(\Omega_e) = \{\psi: \Omega_e \mapsto \mathbb{R}, \psi \text{ é um polinômio de grau menor ou igual a } k, \text{ em cada variável espacial}\}$$

e os espaços de elementos finitos dados por:

$$H_h^k = \{\psi \in H^1, \psi_e \in P^k(\Omega_e)\}$$

$$H_h^{k,NG} = \left\{ (\psi_1, \dots, \psi_{NG}) \in (H^1)^{NG} \right\}$$

$$L_h^1 = \{\psi \in L^2(\Omega), \psi_e \in P^1(\Omega_e)\}$$

onde ψ_e denota a restrição de ψ em Ω_e

Definindo ainda,

$$(S_h^k(\Omega))^{NG} = \left\{ (U_h^1, \dots, U_h^{NG}) \in H_h^{k,NG}, U_h^i = D_i \text{ em } \Gamma_D \right\}$$

$$(V_h^k(\Omega))^{NG} = \left\{ (v_{h,1}, \dots, v_{h,NG}) \in H_h^{k,NG}, v_{h,i} = 0 \text{ em } \Gamma_D \right\}$$

$$W_h^1 = \left\{ P_h \in L_h^1, \int_{\Omega} P_h d\Omega = 0 \right\}$$

A formulação discreta para o problema de Stokes, pode agora ser definida por:

Determinar $\{U_h, p_h\} \in (S_h^k(\Omega))^{NG} \times W_h^1$, tal que

$$a(U_h, v_h) + b(p_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in (V_h^k(\Omega))^{NG},$$

$$b(q_h, U_h) = \ell_{\text{div}}(q_h) \quad \forall q_h \in W_h^1 \quad (4.9a,b)$$

onde $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$, $\ell_{\text{div}}(\cdot)$ e $\ell(\cdot)$ são definidos em (4.8c-f).

O problema apresentado acima é o clássico método misto de Galerkin. Para que seja assegurada existência e unicidade do problema discreto dado acima, é necessário que a condição de Ladyzenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) seja verificada para cada combinação dos espaços de aproximações $(V_h^k(\Omega))^{NG}$ e W_h^1 . A violação da LBB acarreta a não unicidade do campo de pressões e uma degradação do campo de velocidades, ou seja, o campo de pressão pode apresentar oscilações espúrias e pode ocorrer um trancamento do campo de velocidades (velocidades iguais a zero em todo o domínio).

Na próxima seção será apresentada uma formulação Petrov-Galerkin para o problema em questão afim de superar as limitações aqui apresentadas.

IV.3 - Formulação mista de Petrov-Galerkin

Em Karam (1989) é apresentada uma nova formulação de Petrov-Galerkin para o problema com restrição de incompressibilidade. Tal método permite interpolações de mesma ordem para pressão e velocidade e interpolações descontínuas para a pressão e contínuas para a velocidade. Todavia, tal formulação só permite a eliminação a nível de elemento da componente de média nula da pressão, ficando acoplada a resolução do campo de velocidades com a pressão média a nível de elemento. Para contornar este problema, uma nova formulação Petrov-Galerkin foi elaborada, Do Carmo, Traiano e Dos Santos (1996), de modo que a pressão é totalmente eliminada a nível de elemento, obtendo portanto um sistema algébrico resultante somente para as velocidades e mantendo todas as características do trabalho de Karam(1989). Os resultados de Do Carmo, Traiano e Dos Santos (1996) serão aqui reproduzidos.

Definindo, a nível de elemento:

as funções,

$$\bar{p}_h^e = \frac{\int_{\Omega_e} p_h^e d\Omega}{\int_{\Omega_e} d\Omega}$$

$$\tilde{p}_h^e = p_h^e - \bar{p}_h^e$$

os espaços

$$\tilde{W}_h^1 = \left\{ \tilde{Q}_h \in W_h^1, \int_{\Omega_e} \tilde{Q}_h d\Omega = 0 \right\}$$

$$\bar{W}_h = (W_h^1 - \tilde{W}) \cup \{0\}$$

as formas,

$$A_{\text{div}}^e(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}_h) = \delta_2(2\mu) \int_{\Omega_e} \frac{\partial U_{h,i}}{\partial x_i} \frac{\partial v_{h,j}}{\partial x_j} d\Omega$$

$$A_{\text{Lap}}^e((\mathbf{U}_h, \tilde{p}_h), (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h)) = \frac{\delta_1(h_e)^2}{2\mu} \int_{\Omega_e} (-2\mu \operatorname{div} \varepsilon(\mathbf{U}_h) + \nabla \tilde{p}_h) (-2\mu \operatorname{div} \varepsilon(\mathbf{v}_h) + \nabla \tilde{q}_h) d\Omega$$

$$A_{\text{pg}}^e((\mathbf{U}_h, \tilde{p}_h), (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h)) = A_{\text{div}}^e(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}_h) + A_{\text{Lap}}^e((\mathbf{U}_h, \tilde{p}_h), (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h))$$

onde

$$\varepsilon(\mathbf{T}_h) = \frac{(\nabla \mathbf{T}_h) + (\nabla \mathbf{T}_h)^T}{2},$$

o funcional linear

$$F_h^e(\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h) = \delta_2(2\mu) \int_{\Omega_e} g \frac{\partial v_{h,j}}{\partial x_j} d\Omega + \frac{\delta_1(h_e)^2}{2\mu} \int_{\Omega_e} \mathbf{f}(x) (-2\mu \operatorname{div} \varepsilon(\mathbf{v}_h) + \nabla \tilde{q}_h) d\Omega$$

e os parâmetros de estabilização $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 \geq 0$.

A formulação Petrov-Galerkin com penalização na média do divergente de \mathbf{U}_h a nível de elemento consiste em:

Dados $\alpha_e > 0$ fixados, encontrar $(\mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{\mathbf{p}}_h(\alpha), \bar{\mathbf{p}}_h(\alpha)) \in (S_h^k(\Omega))^{NG} \times \tilde{W}_h^1 \times \bar{W}_h$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{NE})$, satisfazendo a equação variacional:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{U}_h(\alpha), \mathbf{v}_h) + b(\tilde{\mathbf{p}}_h(\alpha), \mathbf{v}_h) + \sum_{\substack{e \\ e \neq 1}} \int_{\Omega_e} \left[\frac{\int_{\Omega_e} (\operatorname{div}(\mathbf{U}_h(\alpha)) - g) d\Omega}{\alpha_e \int_{\Omega_e} d\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_h \right] d\Omega + \\ + \int_{\Omega_1} \tilde{\mathbf{p}}_h^{1,J}(\alpha) \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\Omega - b(\tilde{\mathbf{q}}_h, \mathbf{U}_h(\alpha)) + \sum_e A_{pg}^e ((\mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{\mathbf{p}}_h(\alpha)), (\mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{q}}_h)) = \\ = \ell(\mathbf{v}_h) + \sum_e F_h^e(\mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{q}}_h) + \sum_e \int_{\Omega_e} g \tilde{\mathbf{q}}_h d\Omega \end{aligned} \quad (4.10a)$$

$$\forall (\mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{q}}_h) \in (V_h^k(\Omega))^{NG} \times \tilde{W}_h^1, \quad e = 1, 2, 3, \dots, NE$$

onde NE é o número total de elementos do domínio e $\bar{\mathbf{p}}_h^e(\alpha)$ dado por:

$$\bar{\mathbf{p}}_h^e(\alpha) = - \frac{\int_{\Omega_e} (\operatorname{div} \mathbf{U}_h(\alpha) - g) d\Omega}{\alpha_e \int_{\Omega_e} d\Omega} \quad \text{se } e \neq 1, \quad (4.10b)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_h^1(\alpha) = -\tilde{\mathbf{p}}_h^{1,J}(\alpha), \quad (4.10c)$$

sendo

"J" um ponto nodal fixado de Ω_1 ,

$\bar{\mathbf{p}}_h^1(\alpha)$ a restrição de $\bar{\mathbf{p}}_h(\alpha)$ em Ω_1 ,

$\tilde{\mathbf{p}}_h^{1,J}(\alpha)$ o valor de $\tilde{\mathbf{p}}_h^1(\alpha)$ no ponto nodal "J" e

$\tilde{\mathbf{p}}_h^1(\alpha)$ a restrição de $\tilde{\mathbf{p}}_h(\alpha)$ em Ω_1 .

Definindo as formas:

$$A^\alpha((\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{p}}), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{q}})) = a(\mathbf{U}, \mathbf{v}) + b(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{v}) - b(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{U}) + \sum_{\substack{e \\ e \neq 1}} \left\{ \int_{\Omega_e} \left[\frac{\int_{\Omega_e} \operatorname{div}(\mathbf{U}) \, d\Omega}{\alpha_e \int_{\Omega_e} d\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right] d\Omega \right\} + \int_{\Omega_1} \tilde{\mathbf{p}}_h^{1,l} \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, d\Omega + \sum_e A_{pg}^e((\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{p}}), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{q}})), \quad (4.11a)$$

$$\tilde{\ell}(\mathbf{v}, \mathbf{g}, \alpha) = \sum_{\substack{e \\ e \neq 1}} \left\{ \int_{\Omega_e} \left[\frac{\int_{\Omega_e} \mathbf{g} \, d\Omega}{\alpha_e \int_{\Omega_e} d\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right] d\Omega \right\} \quad (4.11b)$$

$$B^\alpha(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{q}}) = \ell(\mathbf{v}) + \tilde{\ell}(\mathbf{v}, \mathbf{g}, \alpha) + \sum_e F_e^h(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{q}}) + \sum_e \int_{\Omega_e} \mathbf{g} \tilde{\mathbf{q}} \, d\Omega \quad (4.11c)$$

o problema dado por (4.10a,b,c) pode ser dado, de forma equivalente, por:

$$A^\alpha((\mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{\mathbf{p}}_h(\alpha)), (\mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{q}}_h)) = B^\alpha(\mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{q}}_h) \quad (4.12a)$$

$$\forall (\mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{q}}_h) \in (\mathbf{V}_h^k(\Omega))^{NG} \times \tilde{\mathbf{W}}_h^l,$$

$$(\mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{\mathbf{p}}_h(\alpha)) \in (\mathbf{S}_h^k(\Omega))^{NG} \times \tilde{\mathbf{W}}_h^l,$$

$$e = 1, 2, 3, \dots, NE$$

onde NE é o número total de elementos do domínio e $\tilde{\mathbf{p}}_h^e(\alpha)$ dado por:

$$\tilde{\mathbf{p}}_h^e(\alpha) = - \frac{\int_{\Omega_e} (\operatorname{div} \mathbf{U}_h(\alpha) - \mathbf{g}) \, d\Omega}{\alpha_e \int_{\Omega_e} d\Omega} \quad \text{se } e \neq 1, \quad (4.12b)$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_h^1(\alpha) = -\tilde{\mathbf{p}}_h^{1,l}(\alpha), \quad (4.12c)$$

Para a obtenção da prova de existência e unicidade do problema dado por (4.12a,b,c) são necessárias algumas desigualdades, que são dadas a seguir:

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz tem-se:

$$|a(\mathbf{U}, \mathbf{v})| \leq \{a(\mathbf{U}, \mathbf{U})\}^{1/2} \times \{a(\mathbf{v}, \mathbf{v})\}^{1/2} \quad (4.13a)$$

$$\forall (\mathbf{U}, \mathbf{v}) \in (H^1(\Omega))^{\text{NG}} \times (H^1(\Omega))^{\text{NG}},$$

$$|b(\mathbf{p}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{p}\|_0 \times \|\text{div}(\mathbf{v})\|_0 \quad (4.13b)$$

$$\forall (\mathbf{p}, \mathbf{v}) \in L^2(\Omega) \times (H^1(\Omega))^{\text{NG}},$$

De **KARAM FILHO (1989)** obtem-se as seguintes desigualdades,

$$\|\text{div}(\mathbf{v})\|_0 \leq C_1 \{a(\mathbf{v}, \mathbf{v})\}^{1/2} \quad \forall \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^{\text{NG}} \quad (4.13c)$$

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq C_{el} (\|\mathbf{v}\|_{1,\text{NG}})^2 \quad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^{\text{NG}} \quad (4.13d)$$

$$a(\mathbf{U}, \mathbf{v}) \leq C_{\text{cont}} \|\mathbf{U}\|_{1,\text{NG}} \times \|\mathbf{v}\|_{1,\text{NG}} \quad (4.13e)$$

$$\forall (\mathbf{U}, \mathbf{v}) \in (H^1(\Omega))^{\text{NG}} \times (H^1(\Omega))^{\text{NG}} \quad (4.13f)$$

e os seguintes resultados,

(M1) Existe $\beta_0 > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in (V_h^k(\Omega))^{\text{NG}} \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \frac{\left| \sum_e \int_{\Omega_e} [\bar{\mathbf{p}}^e \text{div}(\mathbf{v}_h)] d\Omega \right|}{\{a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)\}^{1/2}} \geq \beta_0 \|\bar{\mathbf{p}}\|_0 \quad (4.14a)$$

$$\forall \bar{\mathbf{p}} \in \bar{W}_h$$

(M2) Existe $C_{Lap} \geq 0$ tal que:

$$C_{\text{Lap}} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \sum_e \left\{ (h^e)^2 \int_{\Omega_e} [-2\mu \operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{v}_h))] [-2\mu \operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{v}_h))] d\Omega \right\} \quad (4.14b)$$

$$\forall \mathbf{v} \in (H_h^k(\Omega))^{\text{NG}}$$

(M3) Assumindo que a malha é não degenerada, e sendo h_e o diâmetro de Ω_e ,

existem $\tilde{C}_p > 0$, $\tilde{C}_{p,0} > 0$ tal que:

$$\tilde{C}_p \int_{\Omega_e} (\tilde{p}_h^e)^2 d\Omega \leq (h^e)^2 \int_{\Omega_e} |\nabla \tilde{p}_h^e|^2 d\Omega \leq \tilde{C}_{p,0} \int_{\Omega_e} (\tilde{p}_h^e)^2 d\Omega$$

desde que:

$$\tilde{p}_h^e \in P^1(\Omega_e)$$

$$\int \tilde{p}_h^e d\Omega = 0.$$

Considere o seguinte resultado:

Lema (1) Existe $C_M > 0$ tal que:

$$\int_{\Omega_1} (\tilde{p}^{1,J})^2 d\Omega \leq C_M \int_{\Omega_1} (\tilde{p}^1)^2 d\Omega \quad (4.14c)$$

$$\tilde{p}^1 \in P^1(\Omega_1),$$

$$\int_{\Omega_1} \tilde{p}^1 d\Omega = 0.$$

Prova: Sejam n_{nel} o número de pontos nodais do elemento 1 e η_i^1 ($i = 1, n_{\text{nel}}$) as funções forma para o elemento 1.

Se $\tilde{p}^1 \in P^1(\Omega_1)$ e $\int_{\Omega_1} \tilde{p}^1 d\Omega = 0$ e $\tilde{p}^{1,i}$ denota os valores nodais de \tilde{p}^1 tem-se:

$$\tilde{p}^{1,J} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq J}}^{n_{\text{nel}}} \tilde{p}^{1,i} \frac{\int_{\Omega_1} \eta_i^e d\Omega}{\int_{\Omega_1} \eta_J^e d\Omega}$$

obtem-se portanto:

$$\tilde{p}^1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq J}}^{nnel} \tilde{p}^{1,i} \left[\eta_i^e - \frac{\int_{\Omega_1} \eta_i^e d\Omega}{\int_{\Omega_1} \eta_J^e d\Omega} \eta_J^e \right]$$

$$\int_{\Omega_1} (\tilde{p}^1)^2 d\Omega = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq J}}^{nnel} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq J}}^{nnel} [MG_{ij} \tilde{p}^{1,j} \tilde{p}^{1,i}] \geq C_{1M} \left[\int_{\Omega_1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq J}}^{nnel} (\tilde{p}^{1,i})^2 d\Omega \right]$$

$$MG_{ij} = \int_{\Omega_e} \left\{ \left[\eta_i^e - \frac{\int_{\Omega_1} \eta_i^e d\Omega}{\int_{\Omega_1} \eta_J^e d\Omega} \eta_J^e \right] \left[\eta_j^e - \frac{\int_{\Omega_1} \eta_j^e d\Omega}{\int_{\Omega_1} \eta_J^e d\Omega} \eta_J^e \right] \right\} d\Omega \quad (4.15a-b)$$

definindo,

$$Cf_{\max} = \mathbf{Max}_{\substack{1 \leq i \leq nnel \\ i \neq J}} \left\{ \frac{\int_{\Omega_1} \eta_i^e d\Omega}{\int_{\Omega_1} \eta_J^e d\Omega} \right\} \quad (4.16a)$$

obtem-se:

$$\int_{\Omega_1} (\tilde{p}^{1,j})^2 d\Omega \leq (Cf_{\max})^2 (nnel - 1) \int_{\Omega_1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq J}}^{nnel} (\tilde{p}^{1,i})^2 d\Omega \quad (4.16b)$$

Definindo,

$$C_M = \frac{(Cf_{\max})^2 (nnel - 1)}{C_{1M}} \quad (4.16c)$$

e pelas desigualdades (4.15b) e (4.16b) o resultado segue imediatamente.

Usando a clássica desigualdade

$$\pm xy < \frac{x^2}{2z} + \frac{z}{2} y^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ e } \forall z > 0 \quad (4.17)$$

e as desigualdades em **(M2)** e **(M3)** tem-se:

$$\sum_e A_{pg}^e ((\mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{q}}_h), (\mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{q}}_h)) \geq \delta_2 (2\mu) \left[\sum_e \int_{\Omega_e} (\operatorname{div}(\mathbf{v}_h))^2 d\Omega \right] + (1-z_1) \frac{\delta_1}{2\mu} \tilde{C}_p \left[\sum_e \int_{\Omega_e} (\tilde{\mathbf{q}}_h^e)^2 d\Omega \right] + \frac{\delta_1}{2\mu} \sum_e \left\{ (h^e)^2 \int_{\Omega_e} [-2\mu \operatorname{div}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h))] [-2\mu \operatorname{div}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h))] d\Omega \right\} - \frac{1}{z_1} \frac{\delta_1}{2\mu} C_{Lap} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h),$$

Introduzindo em $(\mathbf{V}_h^k(\Omega))^{NG} \times \tilde{\mathbf{W}}_h^1$ um produto interno e norma dados, respectivamente por:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h), (\mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{q}}_h))_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, \alpha} &= \sigma_1 a(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}_h) + \sigma_2 (2\mu) \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{U}_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\Omega + \\ &+ \frac{\sigma_3}{2\mu} \sum_e \left\{ (h^e)^2 \int_{\Omega_e} [-2\mu \operatorname{div}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h))] [-2\mu \operatorname{div}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h))] d\Omega \right\} \\ &+ \sigma_4 \frac{\tilde{C}_p}{2\mu} \sum_e \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{p}}_h^e \tilde{\mathbf{q}}_h^e d\Omega + \sum_{e \neq 1} \frac{\left(\int_{\Omega_e} \operatorname{div} \mathbf{U}_h d\Omega \right) \left(\int_{\Omega_e} \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\Omega \right)}{\alpha_e \int_{\Omega_e} d\Omega} \end{aligned}$$

$$\|(\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h)\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, \alpha} = \left\{ ((\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h), (\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h))_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, \alpha} \right\}^{1/2} \quad (4.18a,b)$$

e portanto $(\mathbf{V}_h^k(\Omega))^{NG} \times \tilde{\mathbf{W}}_h^1$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por (4.18a).

De Karam (1989) pode-se obter o seguinte resultado:

(M5) $\forall \bar{\mathbf{p}} \in \overline{\mathbf{W}}_h$, existe $\mathbf{v}_h(\bar{\mathbf{p}}) \in (\mathbf{V}_h^k(\Omega))^{NG}$, tal que:

$$\bar{\mathbf{p}}^e = \frac{\int_{\Omega_e} \operatorname{div}(\mathbf{v}_h(\bar{\mathbf{p}})) d\Omega}{\int_{\Omega_e} d\Omega}$$

Para que seja feita uma análise da existência e unicidade do problema dado por (4.12a,b,c) serão estabelecidos os seguintes resultados:

Teorema 1

Existem $C^{el} > 0$, σ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), δ_j ($j = 1, 2, 3$) tais que:

$$A^\alpha((\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h), (\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h)) \geq C^{el} (\|(\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h)\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, \alpha})$$

$$\forall (\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h) \in (\mathbf{V}_h^k(\Omega))^{NG} \times \tilde{\mathbf{W}}_h^l$$

Prova: Usando a desigualdade (4.17) na equação (4.11a) obtem-se:

$$\begin{aligned} A^\alpha((\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h), (\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h)) &\geq \delta_2 (2\mu) \int_{\Omega_c} (\operatorname{div}(\mathbf{v}_h))^2 d\Omega + (1 - z_1) \frac{\delta_1}{2\mu} \tilde{C}_p \left[\sum_e \int_{\Omega_e} (\tilde{\mathbf{p}}_h)^2 d\Omega \right] + \\ &+ \frac{\delta_1}{2\mu} \sum_e \left\{ (h^e)^2 \int_{\Omega_e} [2\mu \operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{U}_h))] [2\mu \operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{U}_h))] d\Omega \right\} - \frac{1}{z_1} \frac{\delta_1}{2\mu} C_{Lap} a(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) \\ &+ \sum_{\substack{e \\ e \neq 1}} \frac{\left(\int_{\Omega_e} \operatorname{div} \mathbf{U}_h d\Omega \right)^2}{\alpha_e \int_{\Omega_e} d\Omega} - \frac{\bar{z}}{2} \int_{\Omega_1} (\tilde{\mathbf{p}}_h^{1,j})^2 d\Omega - \frac{1}{2\bar{z}} \int_{\Omega_1} (\operatorname{div} \mathbf{U}_h)^2 d\Omega \end{aligned} \quad (4.19)$$

Escolhendo:

$$z_1 = 1/2,$$

$$\bar{z} = \frac{\delta_1 \tilde{C}_p}{4\mu C_M},$$

$$\frac{\delta_1}{\mu} C_{Lap} = 1/2,$$

$$\delta_2 = 1/\bar{z},$$

$$\sigma_1 = 1/2,$$

$$\sigma_2 = \delta_2,$$

$$\sigma_3 = \delta_1,$$

$$\sigma_4 = \delta_1/4, \quad (4.20a-h)$$

e usando o **Lema 1** na penúltima parcela do lado direito da desigualdade (4.19), tem-se:

$$A^\alpha((\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h), (\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h)) \geq \left(\|(\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h)\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, \alpha} \right)^2 \quad (4.21)$$

$$\forall (\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h) \in \mathbf{V}_h^k(\Omega) \times \tilde{\mathbf{W}}_h^1$$

e o resultado segue imediatamente.

Teorema 2

Para σ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), δ_j ($j = 1, 2, 3$) dados por (4.20a-h), existe $C^{\text{cont}} > 0$ tal que:

$$A^\alpha((\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h), (\mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{q}}_h)) \leq C^{\text{cont}} \left(\|(\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h)\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, \alpha} \right) \left(\|(\mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{q}}_h)\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, \alpha} \right)$$

$$\forall (\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h) \in (\mathbf{V}_h^k(\Omega))^{\text{NG}} \times \tilde{\mathbf{W}}_h^1 \text{ e } \forall (\mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{q}}_h) \in (\mathbf{V}_h^k(\Omega))^{\text{NG}} \times \tilde{\mathbf{W}}_h^1$$

Prova:

Usando a desigualdade triangular em (4.11c) tem-se:

$$\begin{aligned} |A^\alpha((\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{p}}_h), (\mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{q}}_h))| &\leq |a(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}_h)| + |b(\tilde{\mathbf{p}}_h, \mathbf{v}_h)| + |b(\tilde{\mathbf{q}}_h, \mathbf{U}_h)| + \delta_2(2\mu) \left| \int_{\Omega_c} (\text{div}(\mathbf{U}_h))(\text{div}(\mathbf{v}_h)) d\Omega \right| + \\ &+ \frac{\delta_1}{2\mu} \sum_c \left\{ (h^c)^2 \left| \int_{\Omega_c} [-2\mu \text{div}(\varepsilon(\mathbf{U}_h))] [-2\mu \text{div}(\varepsilon(\mathbf{v}_h))] d\Omega \right| + \left| \int_{\Omega_c} [-2\mu \text{div}(\varepsilon(\mathbf{U}_h))] \nabla \tilde{\mathbf{q}}_h d\Omega \right| + \right. \\ &\left. + \left| \int_{\Omega_c} [-2\mu \text{div}(\varepsilon(\mathbf{v}_h))] \nabla \tilde{\mathbf{q}}_h d\Omega \right| \right\} + \sum_{e \neq 1} \left(\frac{\left(\int_{\Omega_c} \text{div} \mathbf{U}_h d\Omega \right) \left(\int_{\Omega_c} \text{div} \mathbf{v}_h d\Omega \right)}{\alpha_e \int_{\Omega_c} d\Omega} \right) + \left| \int_{\Omega_1} (\tilde{\mathbf{p}}_h^{1,j})(\text{div} \mathbf{v}_h) d\Omega \right| \end{aligned} \quad (4.19)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz em cada parcela do lado direito da desigualdade acima, em seguida usando as desigualdades (4.13a,b), (M3) e o **Lema 1**, o resultado segue imediatamente.

Teorema 3

Se o problema dado por (4.12a) tem uma solução, então ela é única.

Prova:

Sejam $(\mathbf{U}_h^1, \tilde{p}_h^1)$ e $(\mathbf{U}_h^2, \tilde{p}_h^2)$ duas soluções da equação variacional (4.12a), pela linearidade de $A^\alpha(\cdot, \cdot)$ tem-se:

$$A^\alpha((\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h^2, \tilde{p}_h^1 - \tilde{p}_h^2), (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h)) = 0 \quad \forall (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h) \in V_h^k(\Omega) \times \tilde{W}_h^l$$

Notando que

$$(\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h^2, \tilde{p}_h^1 - \tilde{p}_h^2) \in V_h^k(\Omega) \times \tilde{W}_h^l$$

pelo **Teorema 1** o resultado segue imediatamente.

Para que se prove a existência de solução do problema dado pela equação variacional (4.12a), considere $\mathbf{Y}_h \in (S_h^k(\Omega))^{NG}$ e $(\mathbf{U}_h, \tilde{p}_h) \in (V_h^k(\Omega))^{NG} \times \tilde{W}_h^l$ sendo a solução da seguinte equação variacional:

$$A^\alpha((\mathbf{U}_h, \tilde{p}_h), (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h)) = B^\alpha(\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h) - A^\alpha((\mathbf{Y}_h, 0), (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h))$$

$$\forall (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h) \in (V_h^k(\Omega))^{NG} \times \tilde{W}_h^l$$

$$(\mathbf{U}_h, \tilde{p}_h) \in (V_h^k(\Omega))^{NG} \times \tilde{W}_h^l \quad (4.20)$$

Teorema 4

$$\sup_{\substack{(\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h) \in V_h^k(\Omega) \times \tilde{W}_h^l \\ (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h) \neq (0,0)}} \frac{|B^\alpha(\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h)| + |A^\alpha((\mathbf{Y}_h, 0), (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h))|}{\|(\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h)\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, \alpha}} < \infty$$

Prova:

Usando a desigualdade triangular na equação (4.11c), a desigualdade de Cauchy-Shwartz em cada parcela, fazendo uso das desigualdades (4.13d) e (M3), com o **Teorema 2** o resultado segue imediatamente.

Teorema 5

Existe uma e somente uma solução do problema dado por (4.20)

Prova

Usando o **Teorema 1**, o **Teorema 2** e o **Teorema 4**, pelo teorema de Lax-Milgran o resultado segue imediatamente.

Teorema 6

Existe uma e somente uma solução do problema variacional dado por (4.12a)

Prova

Seja $(\mathbf{U}_h, \tilde{p}_h)$ a solução do problema dado por (4.20), e $(\mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{p}_h(\alpha))$ dados por:

$$\mathbf{U}_h(\alpha) = \mathbf{U}_h + \mathbf{Y}_h,$$

$$\tilde{p}_h(\alpha) = \tilde{p}_h$$

Portanto tem-se:

$$A^\alpha((\mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{p}_h(\alpha)), (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h)) = B^\alpha(\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h)$$

$$\forall (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h) \in (\mathbf{V}_h^k(\Omega))^{NG} \times \tilde{W}_h^l$$

$$(\mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{p}_h(\alpha)) \in \mathbf{S}_h^k(\Omega) \times \tilde{W}_h^l$$

Usando o **Teorema 3** o resultado segue imediatamente.

Provada a existência e a unicidade do problema dado por (4.12a) para $\alpha_e > 0$ ($e = 1, \dots, NE$) fixados, resta estabelecer a ordem de convergência de aproximação da solução do problema dado por (4.12a-c).

Definindo

$$\bar{A}^\alpha((\mathbf{U}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}), (\mathbf{v}, \bar{\mathbf{q}})) = \bar{A}^0((\mathbf{U}, \bar{\mathbf{p}}), (\mathbf{v}, \bar{\mathbf{q}})) + b(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{v}),$$

$$\bar{A}^0((\mathbf{U}, \bar{\mathbf{p}}), (\mathbf{v}, \bar{\mathbf{q}})) = A^\alpha((\mathbf{U}, \bar{\mathbf{p}}), (\mathbf{v}, \bar{\mathbf{q}})) + \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{p}}^{l,j} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\Omega - \sum_{\substack{e \\ e \neq l}} \frac{\int_{\Omega_e} \operatorname{div} \mathbf{U} \, d\Omega \int_{\Omega_e} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\Omega}{\alpha_e \int_{\Omega_e} d\Omega},$$

$$\bar{B}^\alpha(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{q}}) = \bar{B}^\alpha(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{q}}) - \bar{B}^0(\mathbf{g}, \mathbf{v}),$$

$$\bar{B}^0(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{q}}) = \sum_{\substack{e \\ e \neq l}} \frac{\int_{\Omega_e} \mathbf{g} \, d\Omega \int_{\Omega_e} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\Omega}{\alpha_e \int_{\Omega_e} d\Omega} \quad (4.21a-d)$$

e se $(\mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{\mathbf{p}}_h(\alpha), \bar{\mathbf{p}}_h(\alpha))$ é a solução do problema dado por (4.12a,b,c), então tem-se:

$$\bar{A}^\alpha((\mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{\mathbf{p}}_h(\alpha), \bar{\mathbf{p}}_h(\alpha)), (\mathbf{v}_h, \bar{\mathbf{q}}_h)) = \bar{B}^\alpha(\mathbf{v}_h, \bar{\mathbf{q}}_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, \bar{\mathbf{q}}_h) \in V_h^k(\Omega) \times \tilde{W}_h^l \quad (4.21e)$$

Por outro lado, se $(\mathbf{U}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}})$ é solução do problema de Stokes,

$$\mathbf{U} \in (H^{k+1}(\Omega))^{NG} \quad (k \geq 1), \quad \mathbf{p} \in H^{l+1}(\Omega) \quad (l \geq 0),$$

$$\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{p}}$$

$$\bar{\mathbf{p}}^e = \frac{\int_{\Omega_e} \mathbf{p} \, d\Omega}{\int_{\Omega_e} d\Omega}$$

$$\bar{\mathbf{p}}^e = \mathbf{p}^e - \tilde{\mathbf{p}}^e$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{l,j} = -\tilde{\mathbf{p}}^{l,j}$$

$\bar{\mathbf{p}}^{l,j} \equiv$ valor nodal de $\bar{\mathbf{p}}^l$ no ponto nodal "J" do elemento l

$$\tilde{p}^{1,J} \equiv \text{valor nodal de } \tilde{p}^1 \text{ no ponto nodal } J \text{ do elemento } 1 \quad (4.22a-g)$$

tem-se:

$$\bar{A}^\alpha((\mathbf{U}, \tilde{p}, \bar{p}), (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h)) = \bar{B}^\alpha(\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h) \in V_h^k(\Omega) \times \tilde{W}_h^1$$

O Lema abaixo pode ser encontrado em Ciarlet (1978) e Karam (1989).

Lema 2 (Propriedade do interpolante)

Se $\mathbf{U} \in (H^{k+1}(\Omega))^{NG}$ ($k \geq 1$), $p \in H^{l+1}(\Omega)$ ($l \geq 0$),

$$p = \bar{p} + \bar{p}^e$$

$$\bar{p}^e = \frac{\int_{\Omega_e} p \, d\Omega}{\int_{\Omega_e} d\Omega}$$

$$\bar{p}^e = p^e - \tilde{p}^e$$

$$\bar{p}^{1,J} = -\tilde{p}^{1,J}$$

$\bar{p}^{1,J} \equiv$ valor nodal de \bar{p}^1 no ponto nodal "J" do elemento 1

$\tilde{p}^{1,J} \equiv$ valor nodal de \tilde{p}^1 no ponto nodal J do elemento 1

então, existe $\mathbf{U}_h^1 \in (H_h^k(\Omega))^{NG}$, $\tilde{p}_h^1 \in \tilde{W}_h^1$, $\bar{p}_h^1 \in \bar{W}_h$

$\mathbf{U}_h^1 \equiv$ interpolante de \mathbf{U} no contorno, tal que:

$$\left(\|(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h^1, \tilde{p} - \tilde{p}_h^1, \bar{p} - \bar{p}_h^1) \|_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_5}^{\sigma_3, \sigma_4, 0} \right)^2 \leq C_1^{er} h^{2k} (\|\mathbf{U}\|_{k+1, NG})^2 + C_2^{er} h^{2(l+1)} (\|\tilde{p} + \bar{p}\|_{l+1})^2$$

$$h = \text{Sup}\{h_e\},$$

$$\left\{ \|(\mathbf{v}, \tilde{q}, \bar{q}) \|_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_5}^{\sigma_3, \sigma_4, 0} \right\}^2 = \left\{ \|(\mathbf{v}, \tilde{q}) \|_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, 0} \right\}^2 + (\|\bar{q}\|_0^{\sigma_5})^2,$$

$$\left\{ \|(\mathbf{v}, \bar{q}, \bar{q})\|_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_5}^{\sigma_3, \sigma_4, 0} \right\}^2 = \left\{ \|(\mathbf{v}, \tilde{q})\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, 0} \right\}^2 - \sum_{\substack{e \\ e \neq 1}} \frac{\left(\int_{\Omega_e} \operatorname{div} \mathbf{v} \right)}{\alpha_e \int_{\Omega_e} d\Omega},$$

$$\left(\|\bar{q}\|_0^{\sigma_5} \right)^2 = \sigma_5 \sum_e \int_{\Omega_e} (\bar{q}^e)^2 d\Omega \quad (4.23a-e)$$

Tem-se os seguintes resultados:

Teorema 7

Se $(\mathbf{U}, \tilde{p}, \bar{p})$ é a solução do problema de Stokes satisfazendo (4.22a-g) e

$(\mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{p}_h(\alpha), \bar{p}_h(\alpha))$ é a solução do problema dado por (4.12a-c) então existe $C_{LBB} > 0$

tal que:

$$\begin{aligned} \left(\|\bar{p} - \bar{p}^{h,\alpha}\|_0 \right)^2 &\leq C_L^0 \left(\|(\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h, \tilde{p}_h^1 - p_h, \bar{p}_h^1 - p_h)\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, 0} \right)^2 + \\ &+ C_L^1 h^{2k} \left(\|\mathbf{U}\|_{k+1, NG} \right)^2 + C_L^2 h^{2(1+1)} \left(\|\tilde{p} + \bar{p}\|_{1+1} \right)^2 \end{aligned}$$

Prova

Usando as equações (4.21e) e (4.22a) com a linearidade de $\bar{A}^\alpha(\cdot, \cdot)$, tem-se:

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{A}^\alpha \left((\mathbf{U} - \mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{p} - p_h(\alpha), \bar{p} - \bar{p}_h(\alpha)), (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h) \right) = \\ &= \bar{A}^\alpha \left((\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{p}_h^1 - p_h(\alpha), \bar{p}_h^1 - \bar{p}_h(\alpha)), (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h) \right) + \\ &+ \bar{A}^\alpha \left((\mathbf{U} - \mathbf{U}_h^1, \tilde{p} - \tilde{p}_h^1, \bar{p} - \bar{p}_h^1), (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h) \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Pelas equações (4.21a) e (4.24) obtem-se:

$$\left| b(\bar{p} - \bar{p}_h, \mathbf{v}_h) \right| \leq \left| A^0 \left((\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{p}_h^1 - \tilde{p}_h(\alpha), (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h) \right) \right| + \left| A^0 \left((\mathbf{U} - \mathbf{U}_h^1, \tilde{p} - \tilde{p}_h^1, (\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h) \right) \right| \quad (4.25)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Shchwartz nas parcelas do lado direito da desigualdade (4.25), as desigualdades dadas por (M1), (M2), (M3), a equação (4.21b) com o **Lema 2**, após majorações adequadas nas constantes que multiplicam as parcelas, o resultado é obtido.

Teorema 8

Se $(\mathbf{U}, \bar{p}, \bar{p})$ é a solução do problema de Stokes satisfazendo (4.22a-g) e

$(\mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{p}_h(\alpha), \bar{p}_h(\alpha))$ é a solução do problema dado por (4.12a-c) então existe

$\alpha_{\max}^e > 0$ tal que, se $\alpha_e < \alpha_{\max}$, existem $C_N^1 > 0$ e $C_N^2 > 0$ tais que:

$$\begin{aligned} & \left(\|(\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{p}_h^1 - \tilde{p}_h(\alpha))\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, 0} \right)^2 \leq C_N^1 h^{2k} (\|\mathbf{U}\|_{k+1, NG})^2 + C_N^2 h^{2(l+1)} (\|\tilde{p} + \bar{p}\|_{l+1})^2 + \\ & + \sum_{\substack{e \\ e \neq l}} \alpha_e \int_{\Omega_e} (\bar{p})^2 d\Omega \end{aligned}$$

Prova:

Usando a equação (4.18a) e (4.21a) tem-se

$$A^0((\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{p}_h^1 - p_h(\alpha)), (\mathbf{v}_h, \bar{q}_h)) + b(\bar{p} - \bar{p}_h(\alpha), \mathbf{v}_h) = -A^0((\mathbf{U} - \mathbf{U}_h^1, \tilde{p} - p_h^1), (\mathbf{v}_h, \bar{q}_h))$$

Comparando (4.21a) com (4.11a), (4.18a,b) com (4.23d), inspecionando a desigualdade (4.21) e notando que: $(\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{p}_h^1 - p_h(\alpha)) \in (V_h^k(\Omega))^{NG} \times \bar{W}_h^1$, obtem-se:

$$\begin{aligned} & \left(\|(\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{p}_h^1 - \tilde{p}_h(\alpha))\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, 0} \right)^2 + b(\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{p} - \tilde{p}_h(\alpha)) \leq \\ & \leq \left| A^0((\mathbf{U} - \mathbf{U}_h^1, \tilde{p} - \tilde{p}_h^1), (\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{p}_h^1 - \tilde{p}_h(\alpha))) \right| \end{aligned} \quad (4.26)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Shchwartz em cada parcela do lado direito da desigualdade (4.26), em seguida usando a desigualdade (4.17) com valores adequados de "z" em cada parcela do lado direito da desigualdade (4.26), com o **Lema 2** obtem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\left\| (\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h(\alpha), \tilde{\mathbf{p}}_h^1 - \tilde{\mathbf{p}}_h(\alpha)) \right\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, 0} \right)^2 + b(\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h(\alpha), \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}_h(\alpha)) \leq \\ & \leq C_1^{\text{alk}} h^{2k} (\|\mathbf{U}\|_{k+1, \text{NG}})^2 + C_2^{\text{alk}} h^{2(1+1)} (\|\tilde{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{p}}\|_{l+1})^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Por outro lado tem-se:

$$\int_{\Omega_e} \text{div } \mathbf{U} \, d\Omega - \int_{\Omega_e} \mathbf{g} \, d\Omega = 0 \text{ se } e \neq 1,$$

$$\bar{\mathbf{p}}^1 = -\tilde{\mathbf{p}}^{1,j} \quad (4.28a,b)$$

Usando (4.12b) e (4.28), tem-se:

$$\int_{\Omega_e} \text{div}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h(\alpha))(\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_h(\alpha)) \, d\Omega = \alpha_e \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{p}}_h^e(\alpha)(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}_h(\alpha)) \, d\Omega \text{ se } e \neq 1 \quad (4.29)$$

Portanto para $e \neq 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_e} \text{div}(\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h(\alpha))(\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_h(\alpha)) \, d\Omega - \int_{\Omega_e} \text{div}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h^1)(\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_h(\alpha)) \, d\Omega - \\ & - \alpha_e \int_{\Omega_e} (\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}_h(\alpha))^2 \, d\Omega = -\alpha_e \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}_h(\alpha)) \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.30)$$

Usando (4.26) em (4.30) com o **Lema 2**, obtem-se:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_e} \text{div}(\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h(\alpha))(\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_h(\alpha)) \, d\Omega - \left(\frac{z_L}{2} + \frac{3\alpha_e}{2} \right) \int_{\Omega_e} (\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}_h(\alpha))^2 \, d\Omega \leq \\ & \leq \frac{C^* h^{2k}}{2z_L} (\|\mathbf{U}\|_{k+1, \text{NG}})^2 + \frac{\alpha_e}{2} \int_{\Omega_e} (\bar{\mathbf{p}})^2 \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.31)$$

Usando (4.26), (4.12c), (4.28b), o **Lema 1** e o **Lema 2**, obtem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \text{div}(\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h(\alpha))(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}_h(\alpha)) \, d\Omega \geq -\frac{z_L^1}{2} C_M \int_{\Omega_1} (\tilde{\mathbf{p}}_h^1 - \tilde{\mathbf{p}}_h(\alpha))^2 \, d\Omega - \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_L^1} + 1 \right) \int_{\Omega_1} \text{div}(\mathbf{U}_h^1 - \mathbf{U}_h(\alpha))^2 \, d\Omega - \frac{C^{*,1}}{2} (h)^{2(1+1)} (\|\bar{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{p}}\|_{l+1})^2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Somando para cada e ($e \neq 1$), (4.31) em (4.27) e também somando (4.31) em (4.27), com escolhas adequadas de z_L^1, z_L e δ_2 e para um adequado $\alpha_{\max}^e > 0$, o resultado segue imediatamente, desde que $\alpha_e < \alpha_{\max}^e$.

Teorema 9

Se $\alpha_e < \alpha_{\max}^e$ ($\alpha_{\max}^e > 0$) então,

$$\begin{aligned} & \left(\|\bar{p} - \bar{p}_h(\alpha)\|_0 \right)^2 + \left(\|(U - U_h(\alpha), \tilde{p} - \tilde{p}_h(\alpha))\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{\sigma_3, \sigma_4, 0} \right)^2 \leq C_j^1 h^{2k} (\|U\|_{k+1, \text{NG}})^2 + \\ & + C_j^2 h^{2(l+1)} (\|\tilde{p} + \bar{p}\|_{l+1})^2 + C_j^3 \sum_{e \neq 1} \alpha_e \int_{\Omega_e} (\bar{p})^2 d\Omega \end{aligned}$$

Prova

Pelo **Teorema 7**, **Teorema 8** e pela desigualdade triangular, o resultado segue imediatamente.

Portanto, afim de manter a ordem de aproximação, devemos escolher " α_e " ($e \neq 1$) satisfazendo:

$$\alpha_e = \text{Min}\{\bar{\alpha}_e h^r, (\alpha_{\max}^e) / 2\},$$

$$r = \text{Min}\{2k, 2(l+1)\},$$

$$0 < \bar{\alpha}_e < 1$$

VI.4.1 - Implementação computacional

A implementação computacional é feita em espaços de elementos finitos definidos através de funções forma nas variáveis locais.

Para o campo de velocidade U_h os espaços locais são os usuais. Resta então definir \tilde{W}_h^l e \bar{W}_h em termos das funções forma. Denotando por η_i^e as clássicas funções forma no elemento e , ($i = 1, \dots, \text{nnel}$), onde nnel denota o número de pontos nodais necessários para termos polinômios completos até o grau menor ou igual a l nas

variáveis locais. Sendo também \tilde{p}_h^e a componente de média nula da pressão no elemento e , tem-se:

$$\tilde{p}_h^e = \sum_{i=1}^{n_{el}-1} \tilde{p}_h^e(i) (\eta_i^e - \eta_{n_{el}}^e)$$

onde $\tilde{p}_h^e(i)$ denota o valor de \tilde{p}_h^e no nó i .

Portanto, o espaço \tilde{W}_h^1 é dado por:

$$\tilde{W}_h^1 = \left\{ \psi \in L^2(\Omega), \psi_e = \sum \psi_e(i) [\eta_i^e - \eta_{n_{el}}^e] \right\}$$

onde ψ_e denota a restrição de ψ em Ω_e , $\psi_e(i)$ denota o valor de ψ_e no nó i , e o espaço \bar{W}_h é dado por:

$$\bar{W}_h = \{ \psi \in L^2(\Omega), \psi_e = \text{constante em } \Omega_e \}.$$

Deste modo a pressão total é eliminada a nível de elemento da seguinte forma:

a) ($e \neq 1$): A equação em \bar{p}_h é dada pela equação envolvendo a penalização.

b) ($e = 1$): A equação em \bar{p}_h é dada por: $\bar{p}_h^1 = -\tilde{p}_h^{1,1}$

onde \bar{p}_h^1 é a pressão média no elemento 1 e $\tilde{p}_h^{1,1}$ é o valor da componente de média nula no ponto nodal 1 do elemento 1.

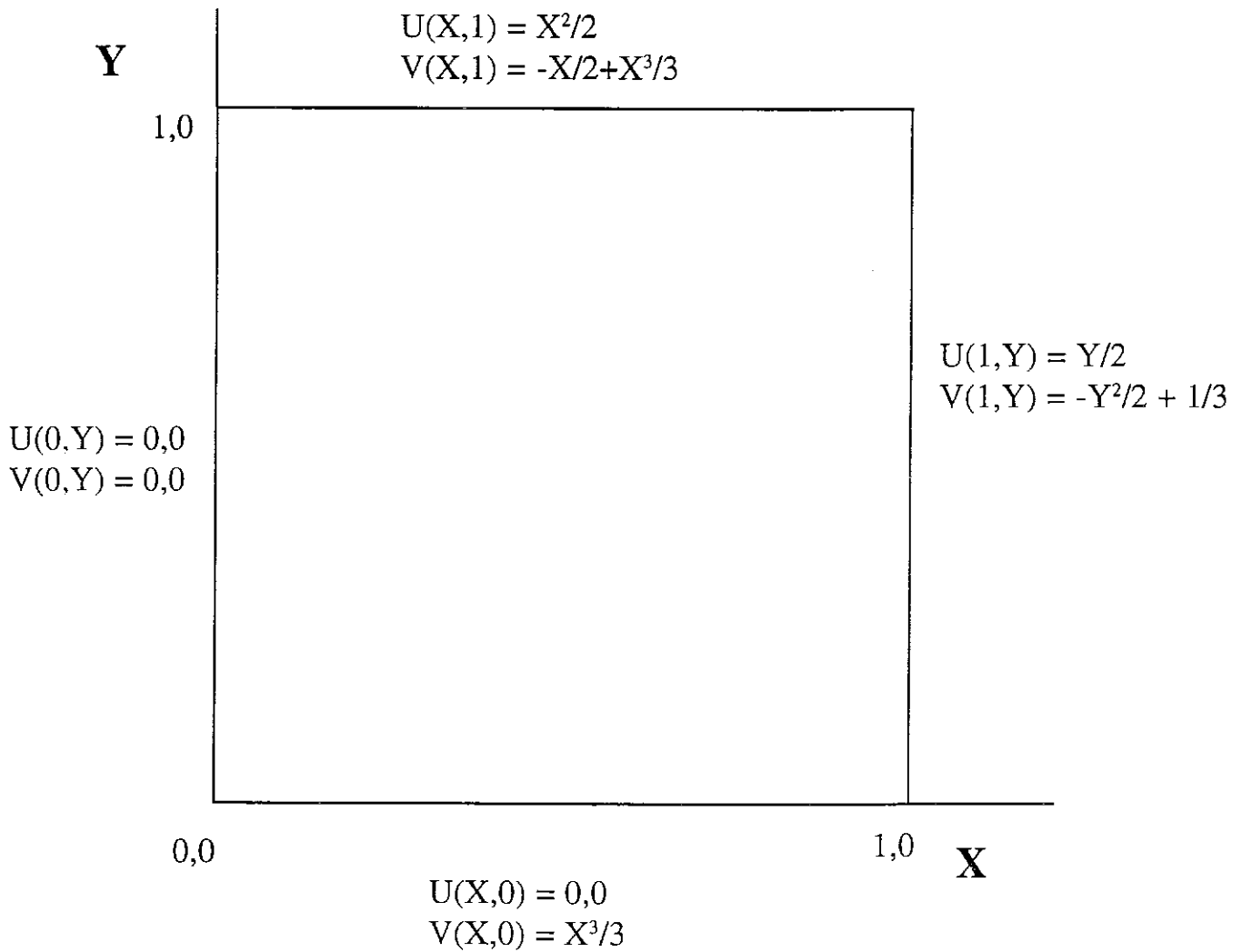
Capítulo V

Apresentação e análise dos resultados

Aqui são apresentados os resultados numéricos obtidos quando da aplicação da metodologia desenvolvida no capítulo anterior a três exemplos numéricos: dois problemas com solução analítica e ao clássico problema da cavidade. Todos os problemas apresentam viscosidade unitária e termos fontes nulos. Os exemplos foram executados em micro-computador i486DX2-66, sobre o sistema operacional OS/2, com a utilização do compilador WATCOM C\C++. Foram utilizadas malhas bidimensionais uniformes de elementos finitos com 16 elementos em cada direção. O tempo médio de execução de cada exemplo foi de dezoito segundos (incluindo todo o tempo de execução do programa e entrada e saída). Foram utilizados, a menos que se diga explicitamente o contrário os seguintes valores para os parâmetros de estabilização e penalização: $\delta_1 = 1.0$, $\delta_2 = 0.0$, $\bar{\alpha}_e = \bar{\alpha} = 1.0E-5$ e $g(x) = f_1(x) = 0$. Em virtude da limitação de tempo foi utilizada a técnica de pós-processamento mais rudimentar possível para a pressão, que é a média aritmética dos valores da pressão (interpolada de forma descontínua) incidentes em cada nó de forma a obter um campo de pressão contínuo como resultado final. Tal técnica é muito deficiente por não considerar os aspectos da discretização do problema. São apresentados os problemas com solução analítica conhecida nas figuras V.1 e V.5 respectivamente e os resultados na forma de elevações e curvas de nível nas figuras V.2 a V.4 e V.6 a V.8 respectivamente, tendo as funções exatas nos respectivos rodapés. Observa-se uma excelente concordância no campo de velocidade e uma boa concordância no campo de pressão a menos de pequenas imperfeições em regiões próximas aos vértices do domínio, tais imperfeições estão dentro da ordem de convergência esperada e são totalmente eliminadas com técnicas de pós-processamento mais sofisticadas, utilizando o método dos mínimos quadrados como em Karam (1989). Na figura V.9 é apresentado o clássico problema da cavidade.

Nas figuras V.10 a V.12 são apresentados as elevações e curvas de nível para as variáveis de interesse. Na figura V.13 é apresentado o gráfico vetorial do campo de velocidade calculado.

É feita uma simulação do método de Galerkin com a utilização de $\delta_1 = 1.0E-5$ e apresentados os resultados na figura V.14 onde se observa o trancamento do campo de velocidade e oscilações espúrias do campo de pressão. Os resultados e as patologias observados estão em excelente concordância com o trabalho de Karam (1989).

PROBLEMA A1

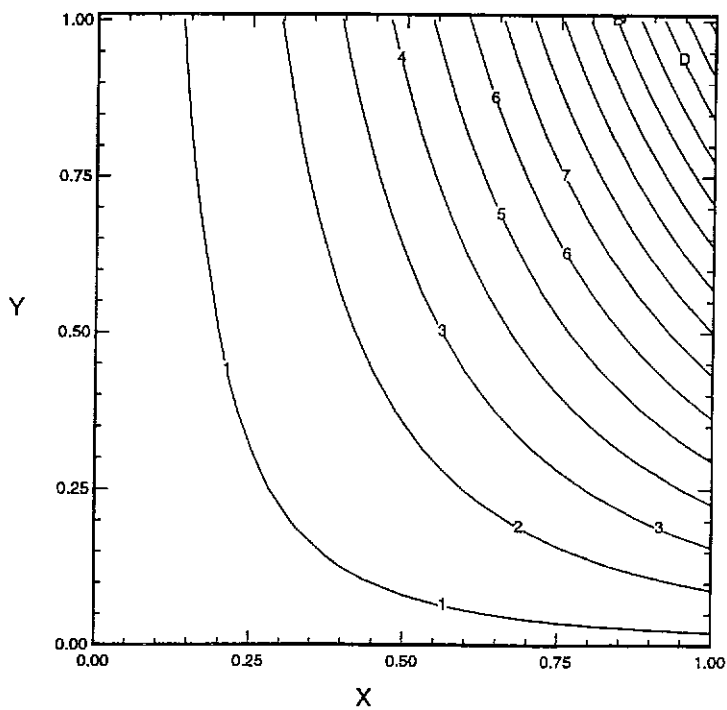
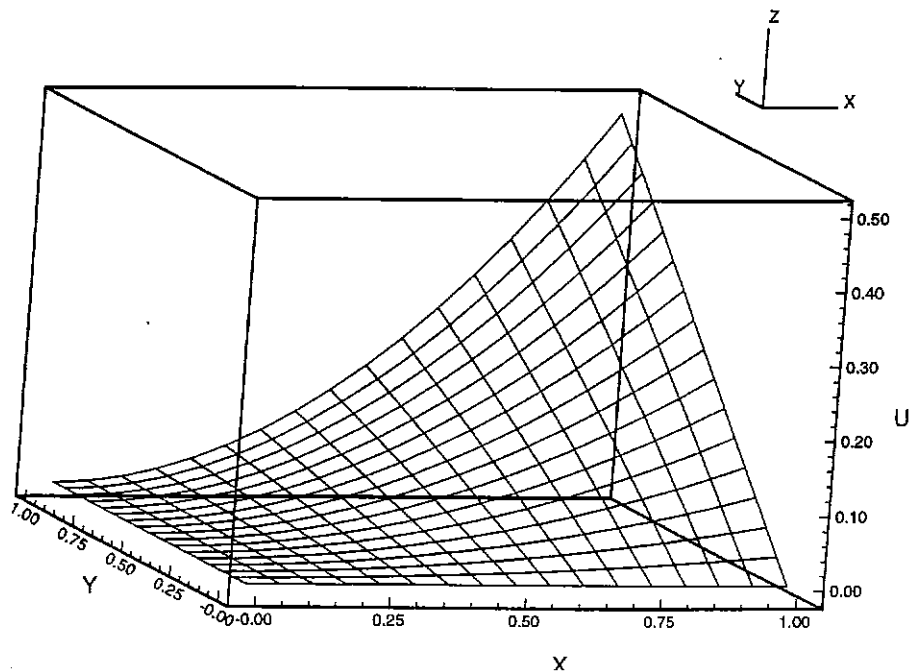
Tal problema possui solução analítica dada por:

$$p(X,Y) = XY$$

$$U(X,Y) = X^2Y/2$$

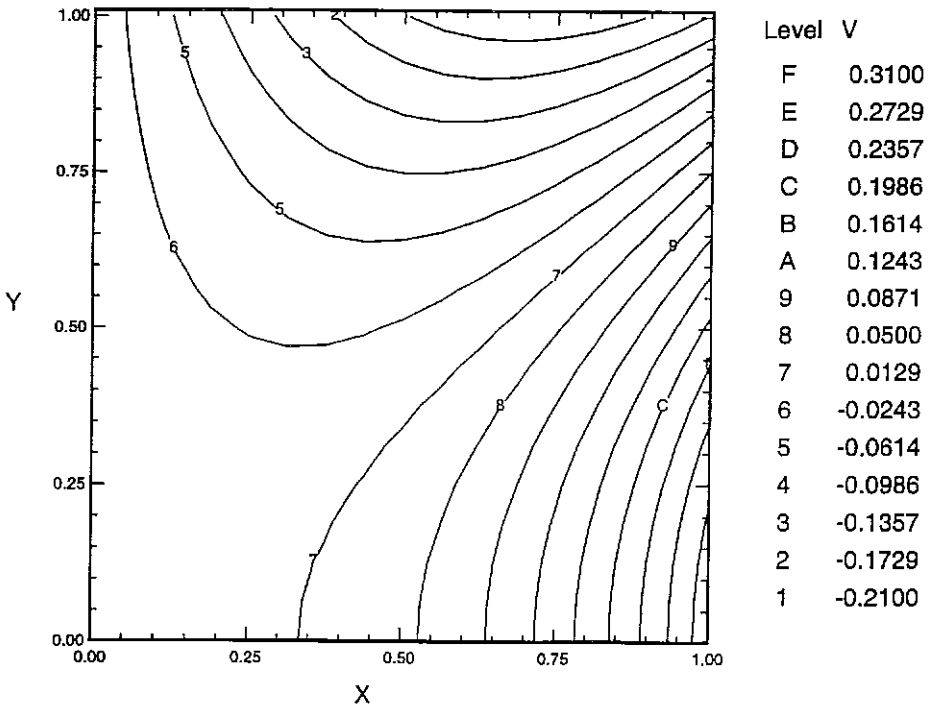
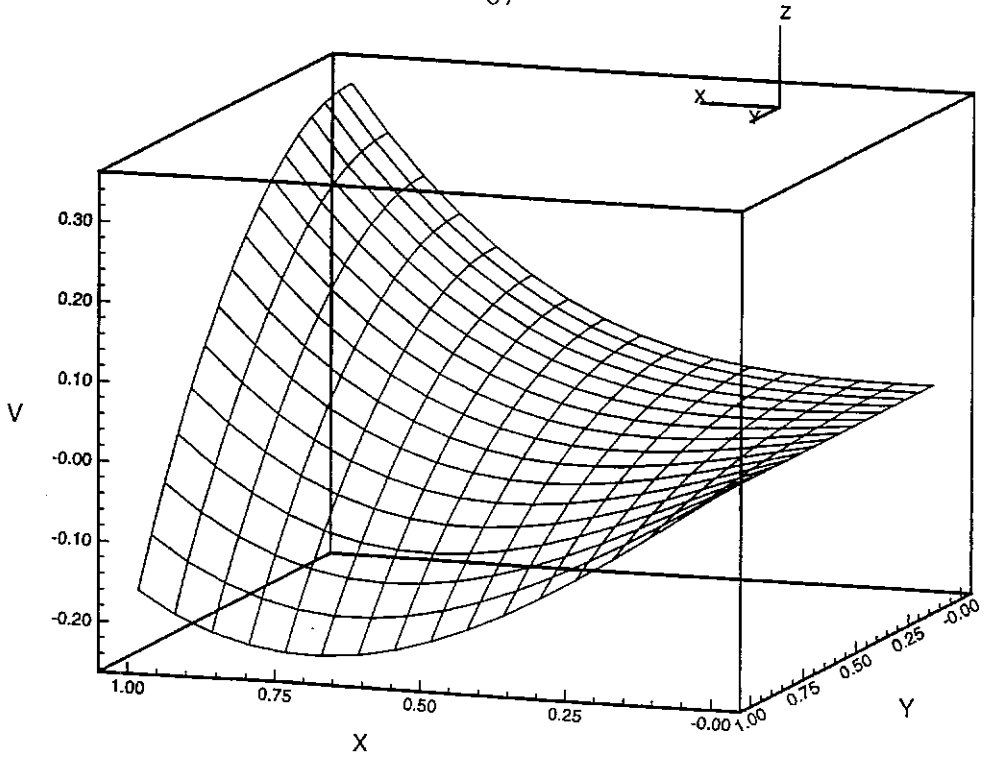
$$V(X,Y) = -XY^2/2 + X^3/3$$

Fig. V.1



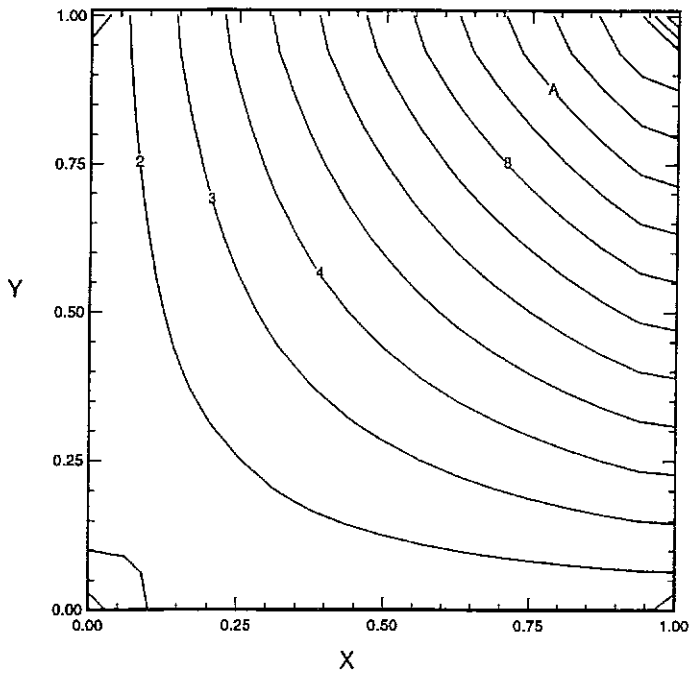
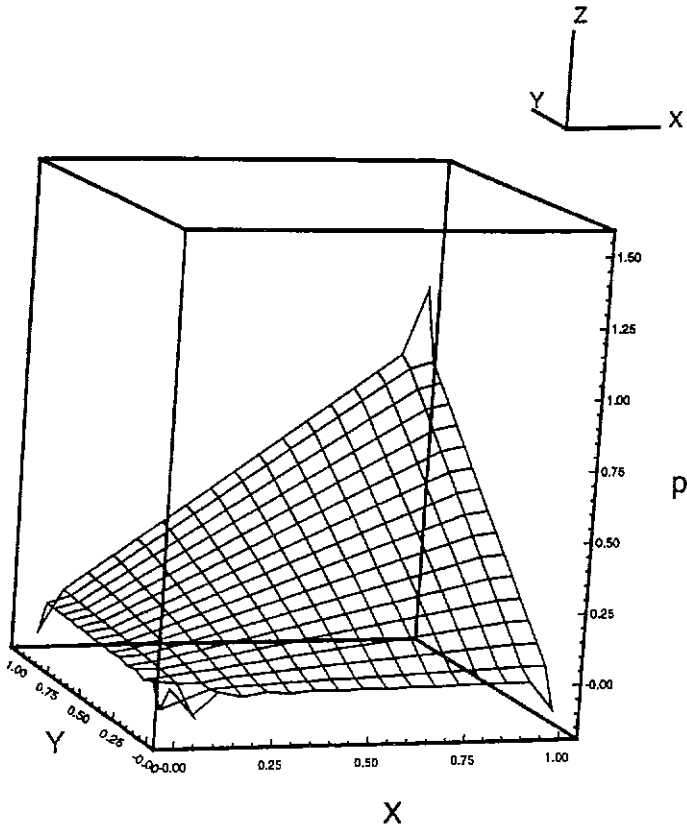
$$U(X,Y) = X^2Y/2$$

Fig V.2



$$V(X, Y) = -XY^2/2 + X^3/3$$

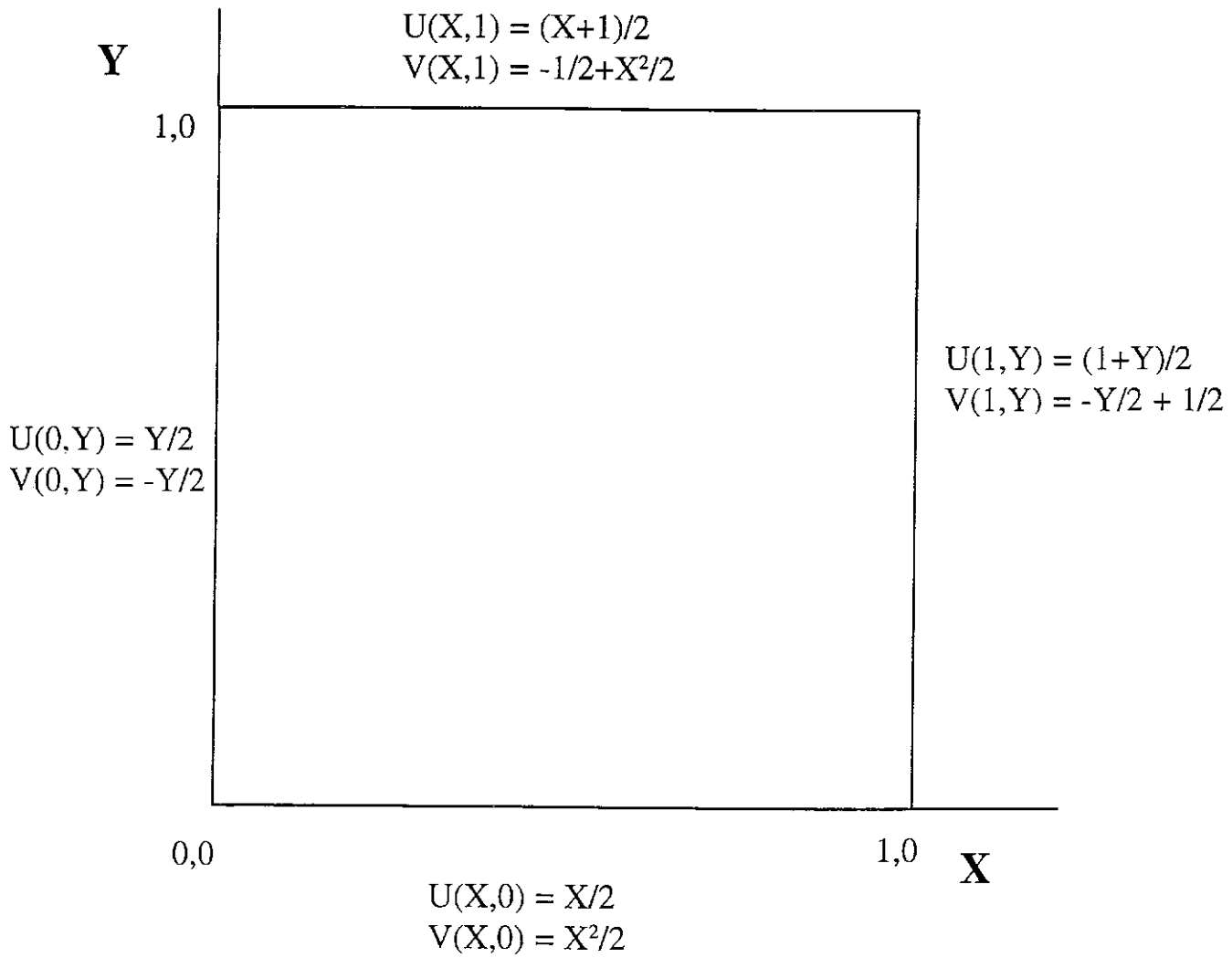
Fig V.3



Level	P
F	1.0517
E	0.9735
D	0.8953
C	0.8171
B	0.7389
A	0.6607
9	0.5825
8	0.5042
7	0.4260
6	0.3478
5	0.2696
4	0.1914
3	0.1132
2	0.0350
1	-0.0432

$$p(X,Y) = XY$$

Fig. V.4

PROBLEMA A2

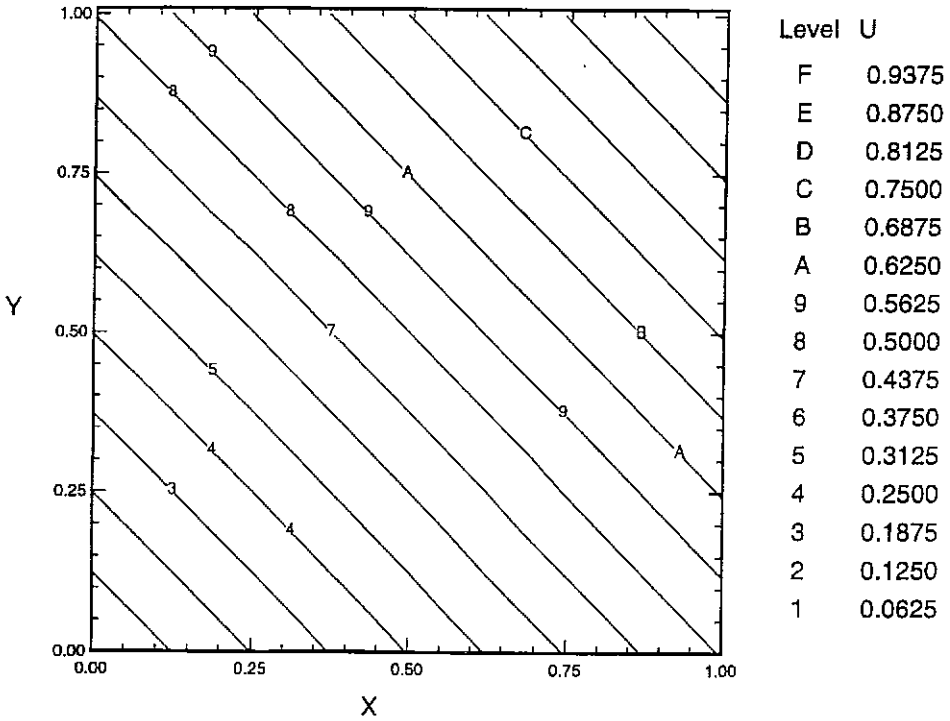
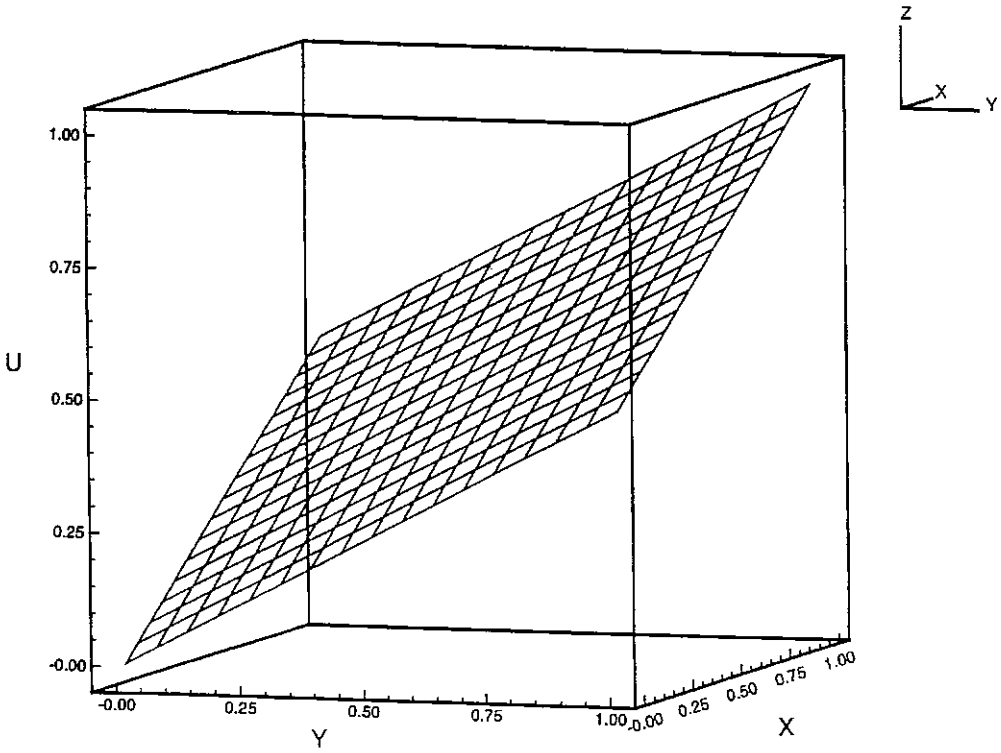
Tal problema possui solução analítica dada por:

$$p(X,Y) = Y$$

$$U(X,Y) = (X+Y)/2$$

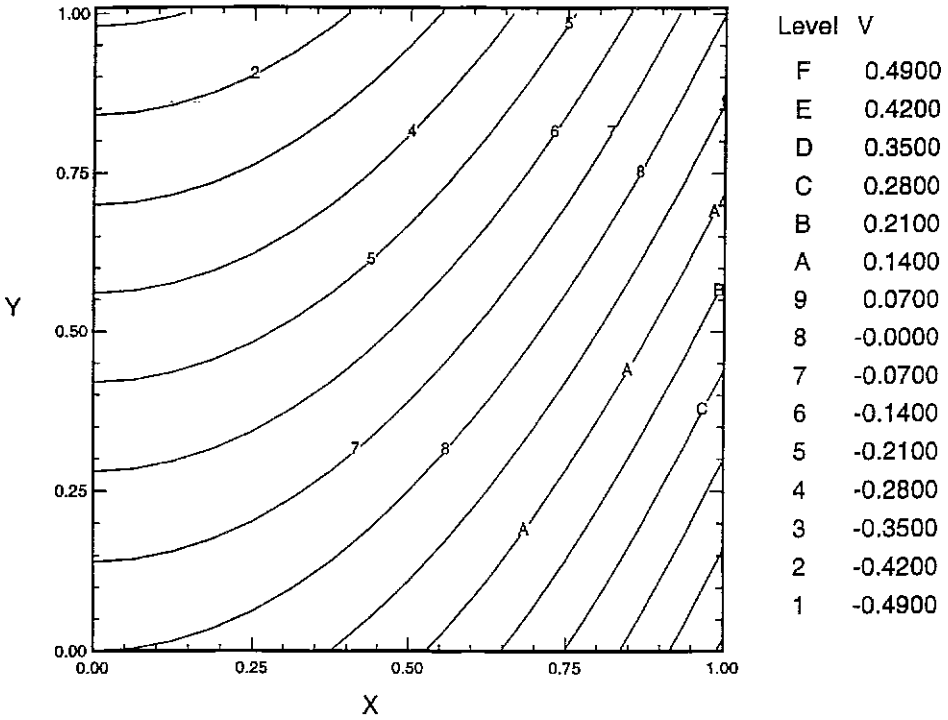
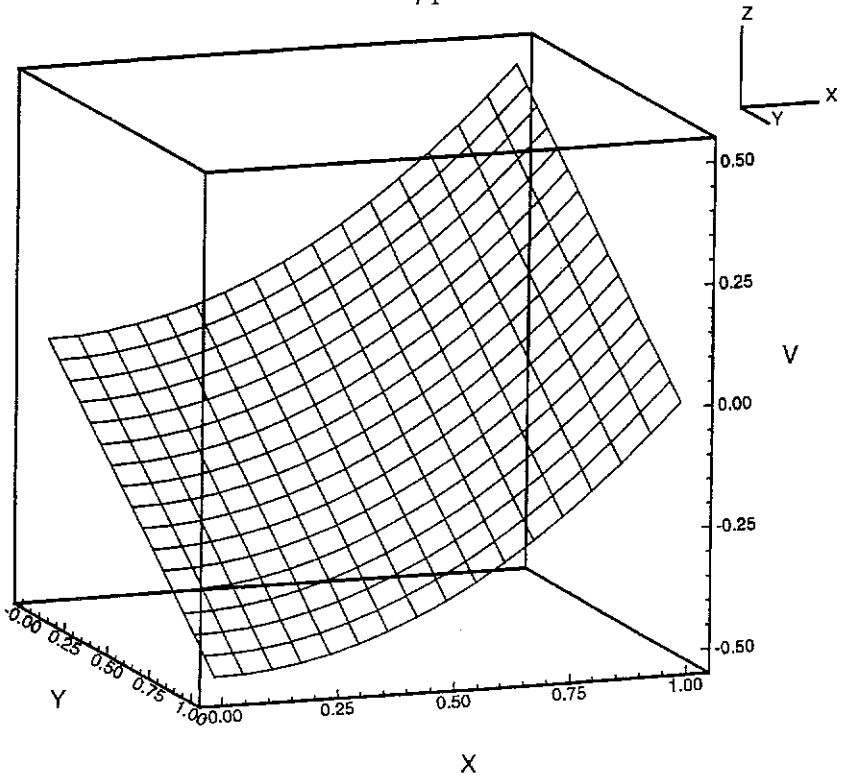
$$V(X,Y) = -Y/2 + X^2/2$$

Fig. V.5



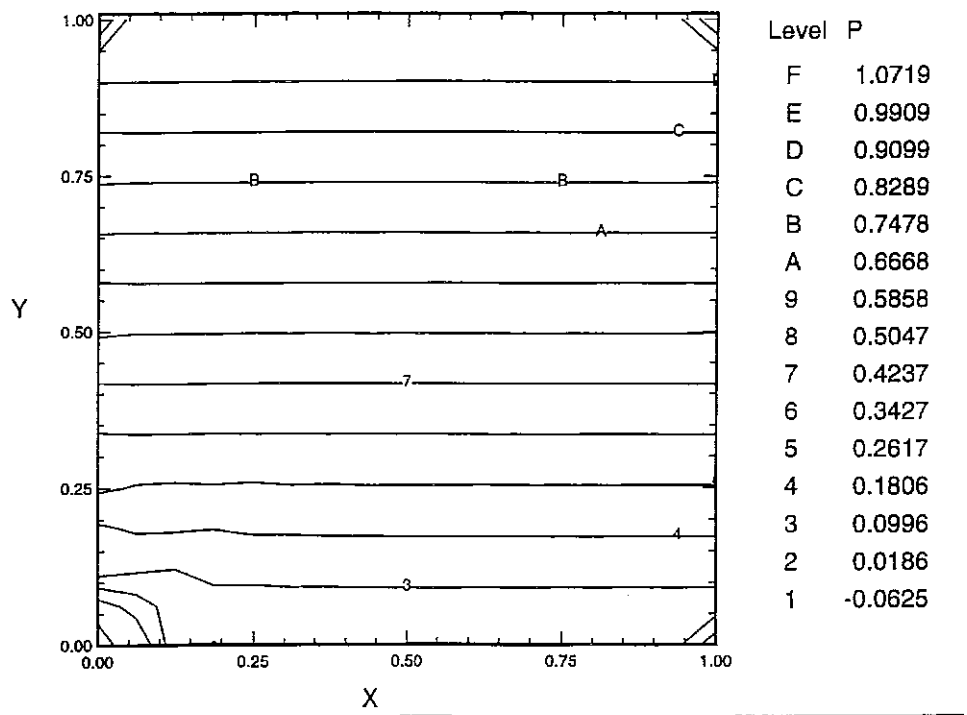
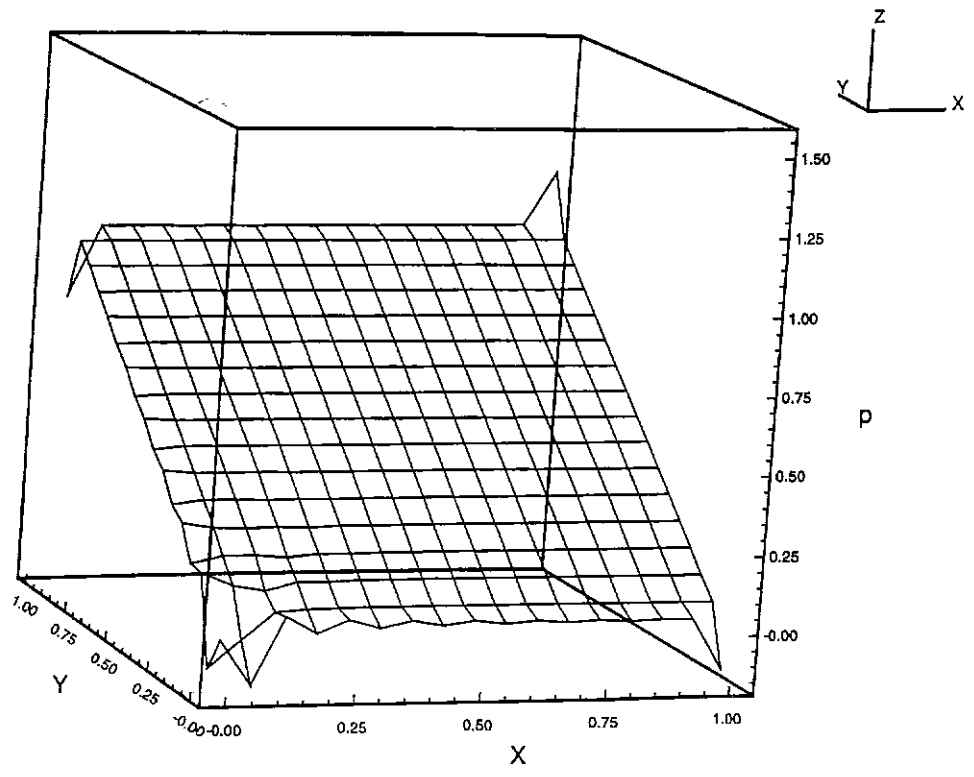
$$U(X,Y) = (X+Y)/2$$

Fig. V.6



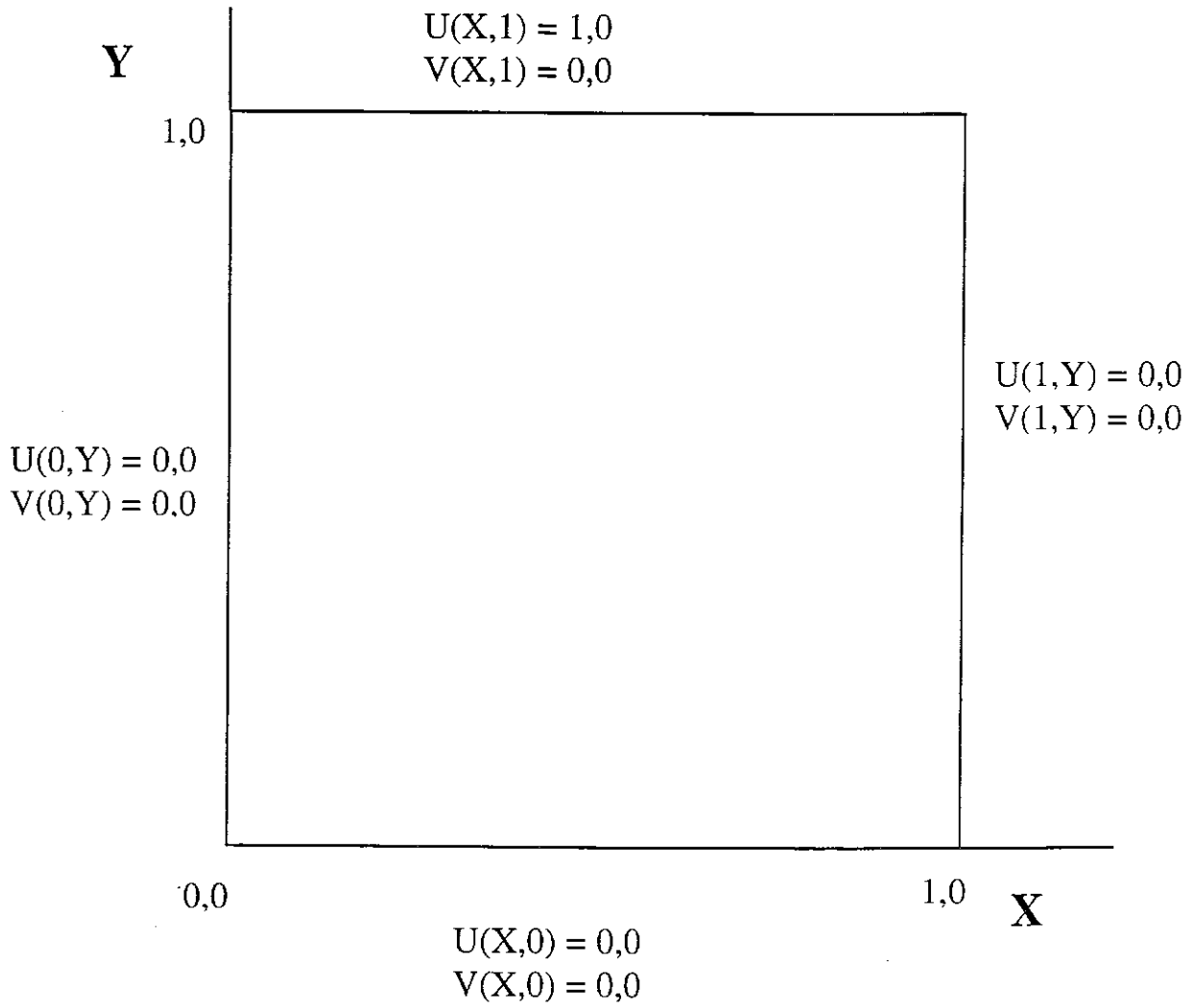
$$V(X,Y) = -Y/2 + X^2/2$$

Fig. V.7



$$p(X,Y) = Y$$

Fig. V.8

PROBLEMA CAV1**Fig. V.9**

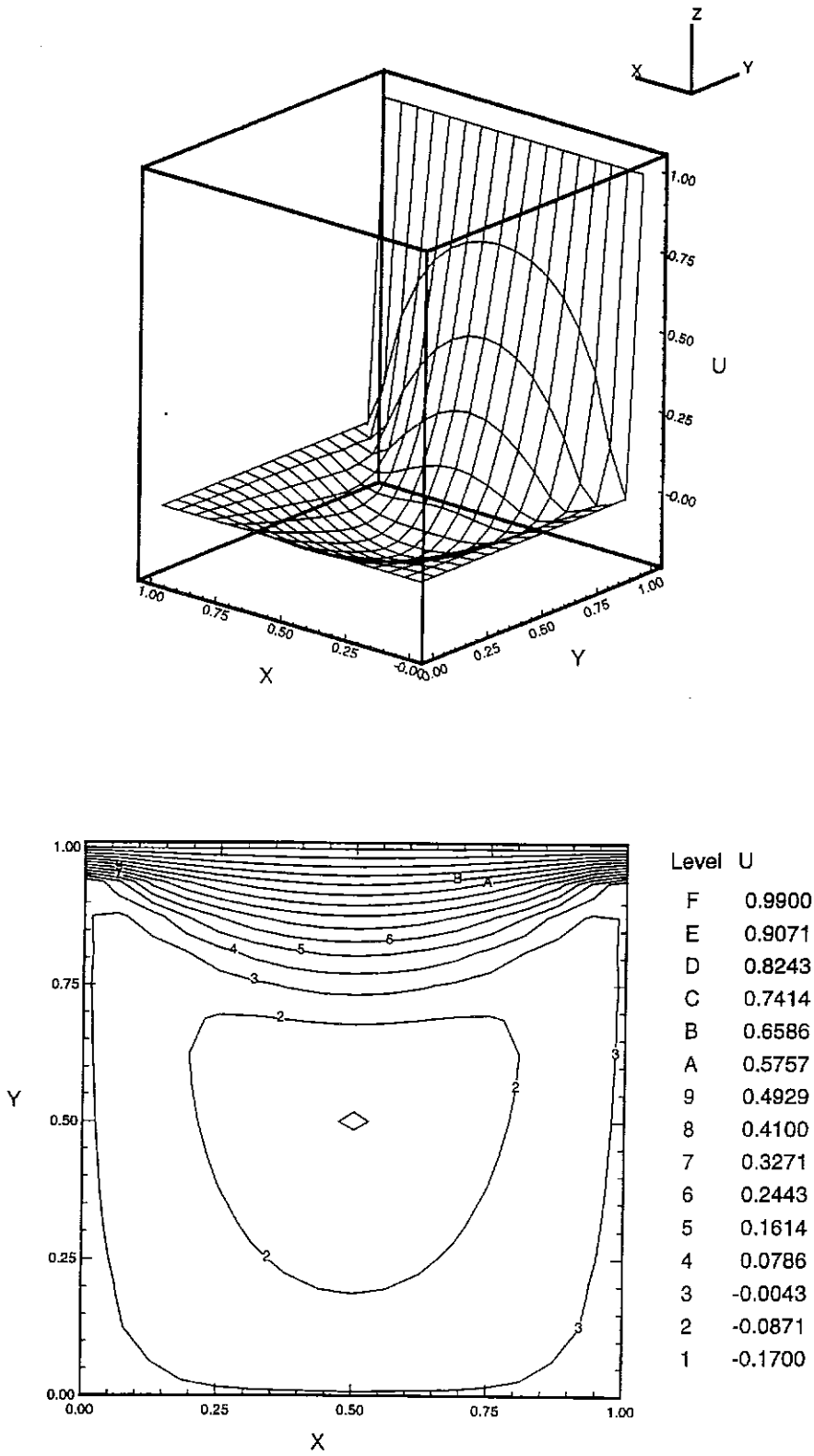


Fig. V.10

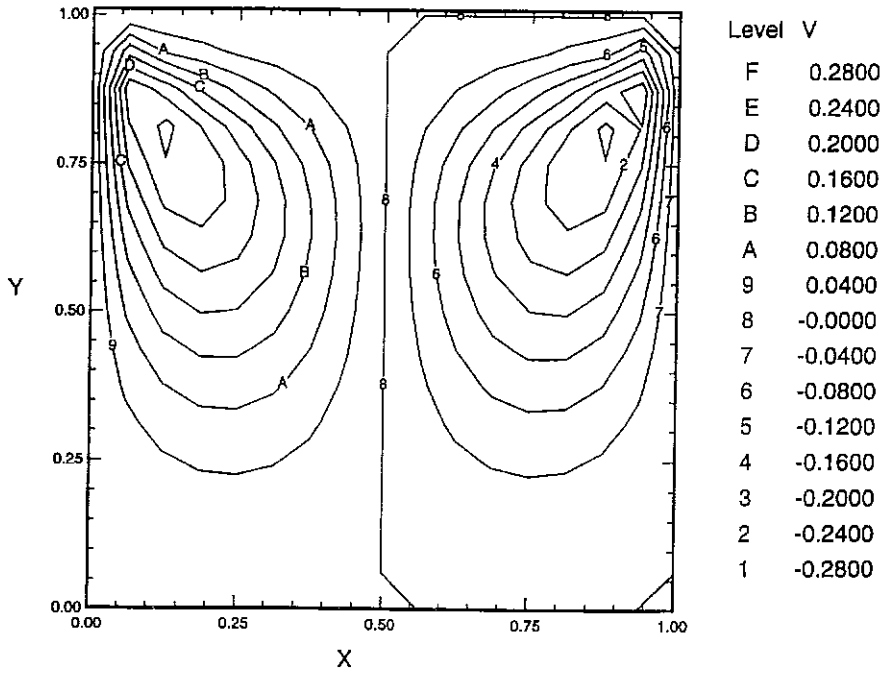
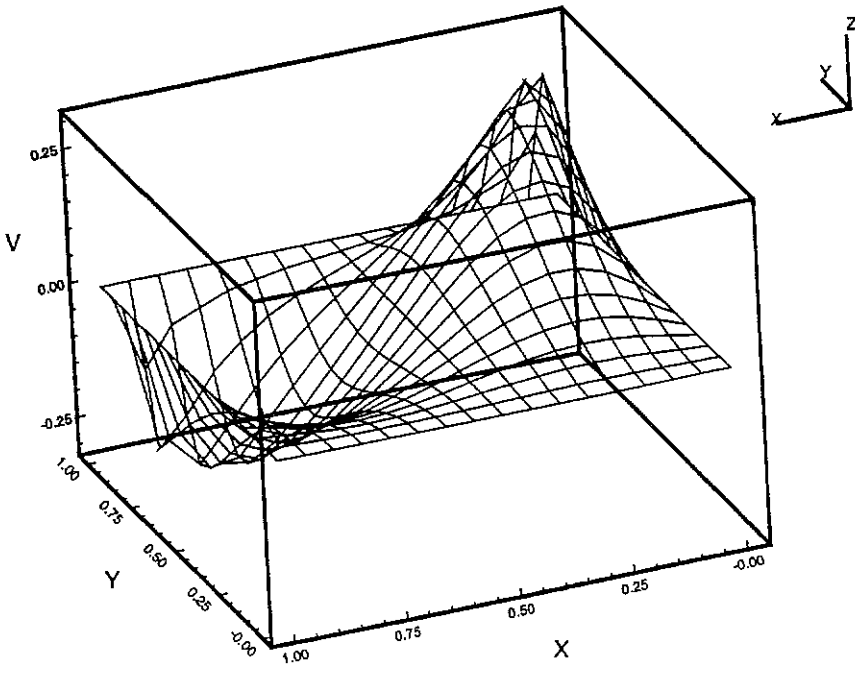


Fig. V.11

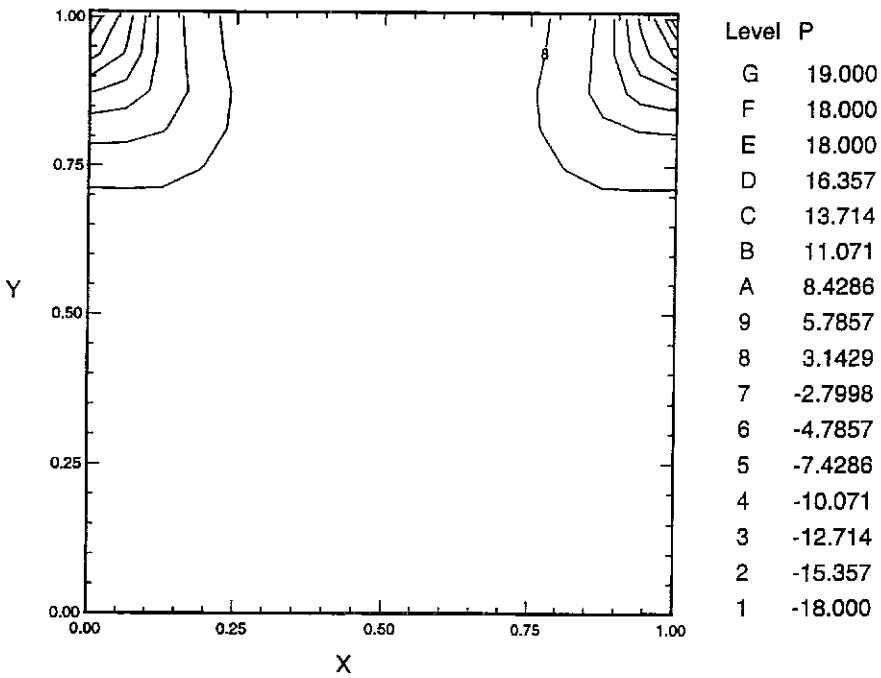
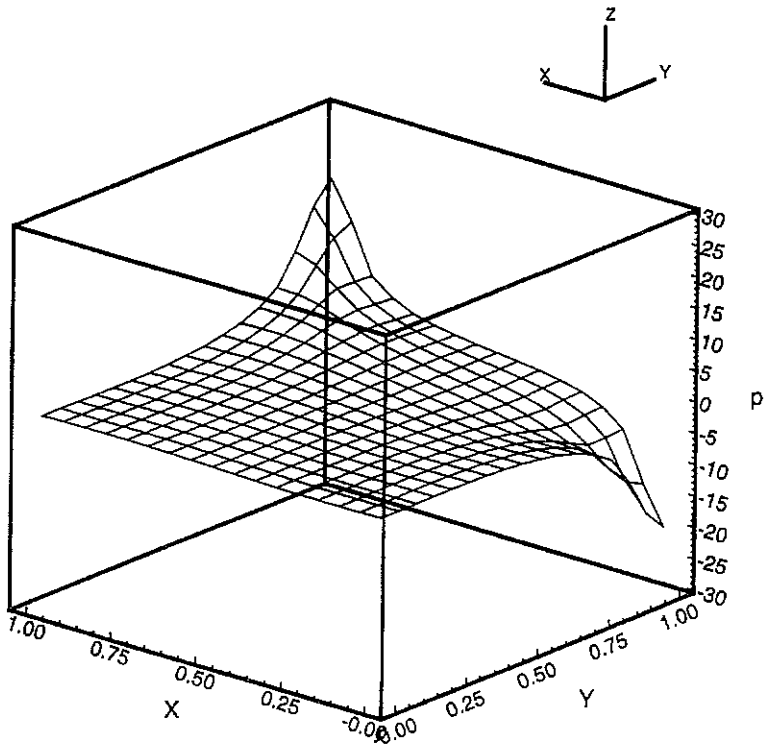
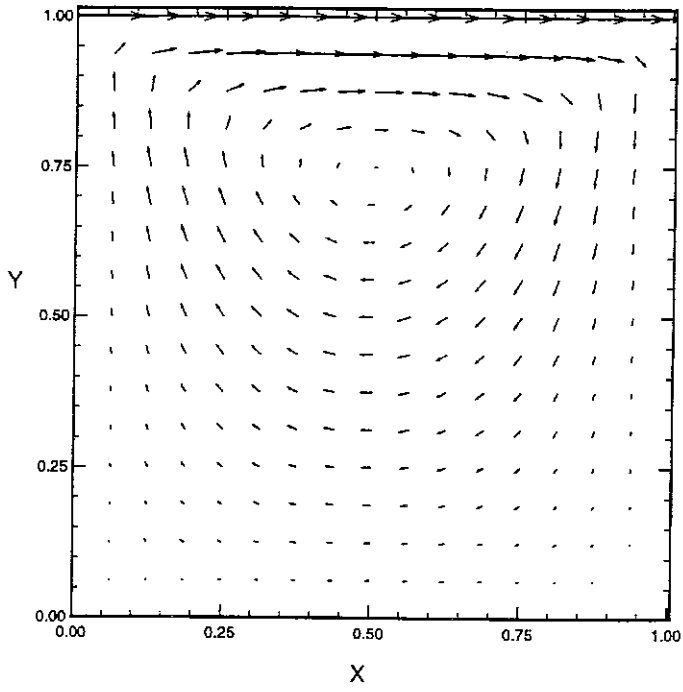
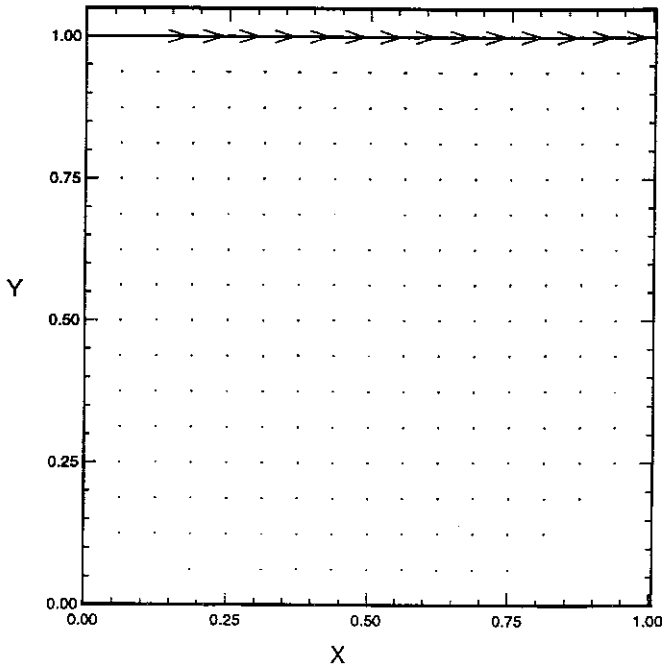


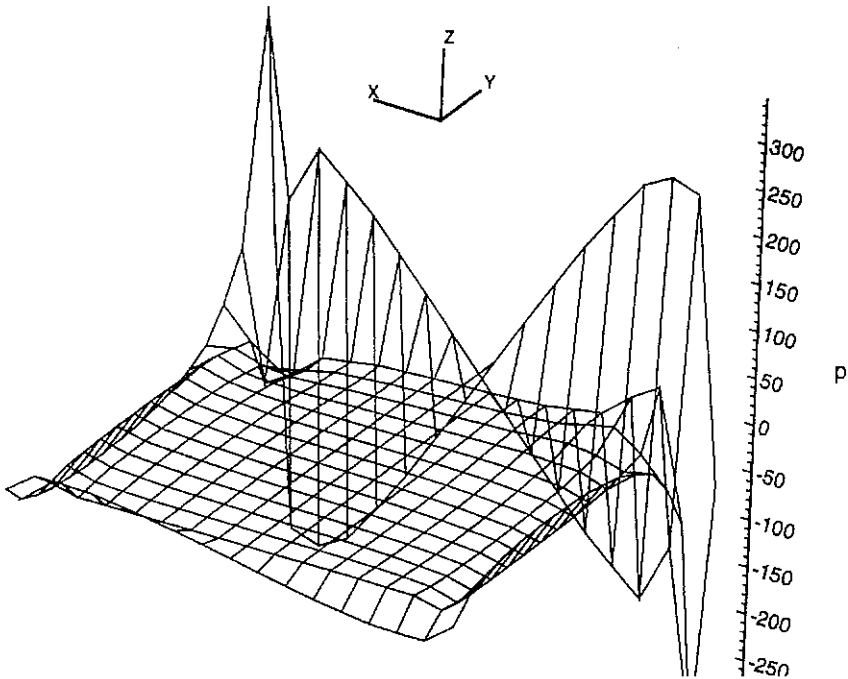
Fig. V.12



Campo de velocidades para o problema Cav1



Trancamento do campo de velocidades



Oscilações espúrias do campo de pressão

Fig. V.14

Capítulo VI

Conclusões e perspectivas futuras

A concepção de um sistema computacional baseado no método dos elementos finitos, escrito integralmente em linguagem de programação "C/C++" e adequado a simulação numérica de escoamentos reais em engenharia é apresentada. É feita a distinção clara entre a funcionalidade básica do sistema(cujo desenvolvimento está a cargo dos idealizadores originais do sistema) e da interface abstrata para a extensão do sistema com a inclusão de novos módulos(a qual fica a cargo de terceiros). Tal distinção e a forte hierarquização e disciplina de programação imposta fazem com que o código proposto assumam características de um sistema computacional: aberto, extensível, reutilizável, flexível e portátil. Foram inicialmente implementados os seguintes módulos: *elemento* quadrilátero bilinear, *solver* frontal e *esquema* de Petrov-Galerkin do tipo mínimos quadrados para tratamento adequado de problemas com restrição interna como o do escoamento incompressível (Do Carmo, Traiano e Dos Santos (1996)). Foi também implementado um gerador de malhas bi-dimensional semi-automático de baixo custo computacional e de desenvolvimento de forma a satisfazer as nossas necessidades imediatas.

Em Karam (1989) é apresentada uma formulação de Petrov-Galerkin que permite interpolações de igual ordem para os campos de pressão e velocidade, descontínua para a pressão e contínua para a velocidade. A componente da pressão com média nula é eliminada a nível de elemento, porém a componente constante por partes da pressão não. Desta forma é necessário resolver um sistema acoplado entre as componentes do campo de velocidade e as componentes médias a nível de elemento do campo de pressão, o que retira um pouco do atrativo desta formulação quando comparada a mesma formulação

utilizando a pressão total contínua. Neste trabalho tal deficiência é eliminada com a utilização da "penalização" da média do divergente do campo de velocidade a nível de elemento o que permite a eliminação completa da pressão a nível do elemento, resultando num sistema de equações exclusivamente para o campo de velocidades. O que além de reduzir o número de graus de liberdade por ponto da malha também reduz a largura de banda do sistema a ser resolvido, o que resulta em grande ganho computacional. São apresentados resultados de existência e unicidade para o problema discreto e taxas de convergência, indicando que quando o parâmetro de penalidade tende a zero, os resultados desta formulação tendem para os obtidos por Karam (1989). Em especial é formalizado o procedimento prático de prescrever um valor nulo da pressão em um ponto ao invés de forçar sua média nula de forma global. Os experimentos numéricos realizados que envolveram dois problemas com solução analítica conhecida e o problema clássico da cavidade confirmaram a performance esperada nas estimativas de erro.

São as seguintes as recomendações para trabalhos futuros:

i) Elementos finitos:

- introduzir um suavizador de tensões no sentido dos mínimos quadrados,
- extensão da metodologia apresentada ao problema não-linear de Navier-Stokes, esperando-se utilizar o algoritmo de Newton globalmente convergente para solução do sistema de equações não-lineares resultante,
- estudar a possibilidade de introduzir a metodologia de soluções analíticas locais em espaços de aproximação clássicos como em Do Carmo (1993) no problema de Navier-Stokes,
- não focar esforços a curto prazo no gerador de malhas e no *solver* frontal.

ii) Turbulência:

- estudar as condições de contorno de modelos de duas equações sobre o ponto de vista físico e matemático,
- estudar relações constitutivas mais sofisticadas para modelos de duas equações como nos modelos do tipo ARSM.

Referências

- ANDERSON, D. A. (1984)**, *Computacional Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill
- BABUSKA, I. (1971)**, *Error Bounds for the Finite Element Method*, Numerische Mathematik, Vol 16, pp 322-333.
- BATCHELLOR, G. K. (1990)**, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.
- BERRY, K. J. (1991)**, *An Efficient C-Based Wavefront Solver for PC Finite Element Applications*, Computer and Structures, Vol 39, No 3/4, pp 303-315.
- BREZZI, F. (1974)**, *On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-Point Problems Arising from Lagrange Multipliers*, Revue Française d'Automatique Informatique et Recherche Opérationnelle, Ser. Rouge Anal. Numér, Vol 8, R-2, pp 129-151.
- BROOKS, A. , HUGHES, T. J. R. (1982)**, *Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 32, pp 199-259
- CEBECI, T. AND BRADSHAW, P. (1977)**, *Momentum Transfer in Boundary Layers*, Hemisphere.

CERQUEIRA DE ALMEIDA, R. C. (1993), *Uma Formulação de Petrov-Galerkin para a Resolução das Equações de Euler e Navier-Stokes Compressível Usando Técnicas Adaptativas*, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.

CHRISTIE, I. , GRIFFITHS, D. F. , MITCHELL, A. R. and ZIENKIEWICZ, O. C. (1976), *Finite Element Methods for Second Order Differential Equations with Significant First Derivatives*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., Vol 10 pp 1389-1396

CIARLET, P. G. (1978), *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland.

DO CARMO, E.G.D. (1988), *Novos Métodos de Elementos Finitos para Problemas Difusivos-Convectivos*, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.

DO CARMO, E.G.D. and GALEÃO, A.C. (1988), *A Consistent Aproximate Upwind Petrov-Galerkin Method for Convection Dominated Problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 68, pp 83-95.

DO CARMO, E.G.D. and GALEÃO, A.C. (1991), *Feedback Petrov-Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 88, pp 1-16.

DO CARMO, E.G.D. (1993), *Finite Element Spaces with Discontinuity Capturing, Part I: Transport Problems with Boundary Layers*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 105, pp 299-314

DO CARMO, E.G.D. , TRAIANO, F. L. M., DOS SANTOS, L. C. C., (1996), *Uma Nova Formulação de Petrov-Galerkin para Escoamentos Incompressíveis*, A ser publicado.

FRANCA, L.P. and DO CARMO, E.G.D. (1989), *The Galerkin Gradient Least-Squares Method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 54, pp 41-54.

FRANCA, L.P. and FREY, S. L. (1992), *Stabilized Finite Element Methods: II. The Incompressible Navier-Stokes Equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 99, pp 209-233.

HEINRICH, J.C. , HUYAKORN, P.S. , MITCHELL, A. R. and ZIENKIEWICZ, O. C. (1977), *An Upwind Finite Element Scheme for Two-Dimensional Convective Transport Equation* , Internat. J. Numer. Methods Engrg., Vol 11, pp 134-143

HEINRICH, J.C. and ZIENKIEWICZ, O. C. (1977), *Quadratic Finite Element Schemes for Two-Dimensional Convective Transport Problems* , Internat. J. Numer. Methods Engrg., Vol 11, pp 1831-1844

HINZE, J. O. (1975), *Turbulence (second edition)*, McGraw-Hill

HUGHES, T.J.R. (1978), *A Simple Scheme for Developing "Upwind" finite Elements*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., Vol 12 , pp 1359-1365

- HUGHES, T.J.R. , MALET, M. and MIZUKAMI, A. (1986)**, *A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: II Beyond SUPG*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 54, pp 341-355.
- HUGHES, T.J.R (1987)**, *The Finite Element Method*, Prentice-Hall.
- HUGHES, T.J.R.; FRANCA, L.P. and HULBERT, G.M. (1989)**, *A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VIII. The Galerkin/Least-Squares Method for Advective-Diffusive Equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 73, pp 173-189.
- SHAKIB, F. and HUGHES, T.J.R.(1991)**, *A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: X. The Compressible Euler and Navier-Stokes Equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 89, pp 141-219.
- HWANG, R. R. (1995)**, *Computation of Backward-Facing Step Flows by a Second-Order Reynolds Stress Closure Model*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 21, pp 223-235.
- JOHNSON, C. , NAVERT, U. and PITKARANTA, J.(1984)**, *Finite element Methods for Linear Hyperbolic Problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 45, pp 285-312.
- JOHNSON, C. (1987)**, *Numerical Solution of Partial Diferential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press.
- KARAM FILHO, J. (1989)**, *Uma Nova Formulação de Elementos Finitos para Escoamentos Incompressíveis*, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ.

KELLY, D.W. , NAKAZAWA, S. , HEINRICH, J.C. and ZIENKIEWICZ, O. C. (1980), *A Note on Upwinding and Anisotropic Balancing Dissipation in Finite Element Aproximations to Convective Diffusion Problems*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., Vol 15, pp 1705-11711.

KERNIGHAM, B. W. and RITCHIE, D. M. (1988), *The C Programming Language (Second Edition)*, Prentice-Hall.

MALKUS, D.S. and HUGHES, T.J.R. (1978), *Mixed Finite Element Methods Reduced and Selective Integration: A Unification of Concepts*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 15, pp 63-81.

MATINUZZI, R. (1989), *Comparative Study of Turbulence Models in Predicting Turbulent Pipe Flow Part I: Algebraic Strees*, AIAA Journal, Vol 27, No 1, pp 29-36.

MIZUKAMI, A. and HUGHES, T.J.R. (1985), *A Petrov-Galerkin Finite Element Method for Convection-Dominated flows: An Accurate Upwind Technique for Satisfying the Maximum Principle*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 50, pp 181-193.

NETO, A.S. and PINHO, F.A.A. (1995), *Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos em Cavidades Retangulares Bidimensionais*, XIII Congresso Brasileiro e II Congresso Ibero Americano de engenharia mecânica.

PATANKAR, S. V. (1980), *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill

PATEL, V. C. (1984), *Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A review*, AIAA Journal, Vol 23, No 9, pp 1308-1319.

PLAUGER, P. J. (1992), *The Standard C Library*, Prentice-Hall.

SAMPAIO, P. A. B. et. al. (1993), *Petrov-Galerkin Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations in Primitive Variables with Adaptive Remeshing*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 106, pp 143-178.

SPALART, P.R. (1988), *Direct Simulation of a Turbulent Boundary Layer up to $Re=1410$* , J. Fluid Mech. Vol 87, pp 61-98.

SPEZIALE, C. G. (1992), *Critical Evaluation of two Equation Models for Near-Wall Turbulence*, Vol 30, No 2, pp 324-331.

STRANG, G. and FIX, G.J. (1973), *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall.

STROUSTRUP, B. and ELLIS, M. A. (1990), *The Annotated C++ Reference Manual*, Addison-Wesley

WILCOX, D. C. (1988), *Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models*, AIAA Journal, Vol 26, No 11, pp 1299-1310.

ZIENKIEWICZ, O.C. (1974), *Constrained Variational Principles and Penalty Function Methods in Finite Element Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag.

ZIENKIEWICZ , O.C. (1989), *The Finite Element Method*, 4th ed.