

**ESTUDO NUMÉRICO DE ESCOAMENTOS**  
**EM IMPELIDORES CENTRÍFUGOS**

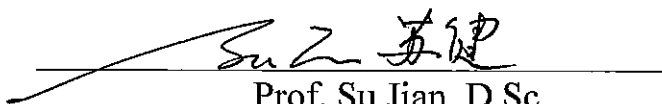
Paulo Roberto Barreiros Neves

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

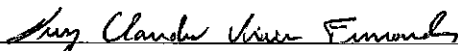
Aprovada por:



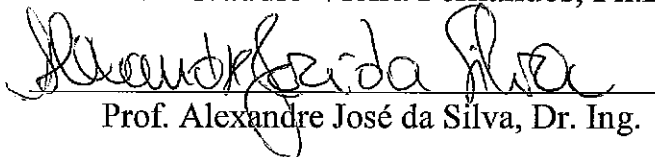
Prof. Átila Pantaleão Silva Freire, Ph.D.



Prof. Su Jian, D.Sc.



Prof. Luiz Cláudio Vieira Fernandes, Ph.D.



Prof. Alexandre José da Silva, Dr. Ing.

**RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL**  
**MARÇO DE 1995**

NEVES, PAULO ROBERTO BARREIROS

Estudo Numérico de Escoamentos em Impelidores Centrífgos [ Rio de IO DE JANEIRO ] 1995.

VI, 55 p. 29.7 cm ( COPPE/UFRJ, M. SC. , Engenharia Mecânica, 1995 ).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Aerodinâmica de Compressores Centrífgos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

À minha esposa, Noeli.

Aos meus filhos, Paulinho e Felipe.

componentes do estágio de compressão. Os códigos para análise tridimensional do escoamento têm se apresentado como uma ferramenta poderosa no sentido de fornecer informações sobre o escoamento não possíveis de se obter com códigos de duas dimensões, como, por exemplo, separação do escoamento, não axissimetria de escoamentos secundários, etc.

O presente trabalho apresenta um algoritmo para solução das equações de Navier-Stokes (NS) na superfície de escoamento que liga o cubo ("hub") à tampa ("shroud") do impelidor centrífugo ( superfície  $S_2$  ). É utilizado o esquema numérico desenvolvido por Hopscotch aplicado às equações de NS escritas para um sistema de coordenadas não ortogonal curvilíneo girando com a mesma rotação do impelidor. Esse algoritmo é utilizado para resolver o escoamento ao longo de um impelidor de geometria e desempenho conhecidos ( impelidor de Eckardt ). A comparação dos resultados computacionais e experimentais é feita ao final do trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências ( M. Sc. ).

## ESTUDO NUMÉRICO DE ESCOAMENTOS EM IMPELIDORES CENTRÍFUGOS

Paulo Roberto Barreiros Neves  
Março, 1995

Orientadores : Su Jian e Átila Pantaleão da Silva Freire

Programa : Engenharia Mecânica

Projetistas e usuários de compressores centrífugos estão continuamente buscando compreender o comportamento do escoamento ao longo dos vários componentes do estágio de compressão, isto é, difusor, impelidor, canal de retorno, etc.

Nos últimos 10 a 15 anos tem evoluído muito a disciplina de técnicas computacionais aplicadas à dinâmica dos fluidos ( Computational Fluid Dynamics - CFD ), possibilitando encarar a solução das equações diferenciais de Euler e Navier-Stokes que governam o escoamento ao longo do turbocompressor.

Os códigos computacionais desenvolvidos nesse período calculam o escoamento em duas dimensões ( técnica da superfície de escoamento - "throughflow" ) ou em três dimensões ( Navier-Stokes completo 3D ). A técnica de cálculo em superfícies de escoamento é a mais difundida e utilizada nos dias de hoje, produzindo bons resultados para análise e projeto dos

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao prof. Su Jian pela excelente orientação, sem a qual este trabalho não seria possível e ao prof. Átila Freire por seu estímulo e colaboração.

À Petrobrás que me forneceu as condições necessárias à realização do mestrado.

Aos amigos do Setor de Máquinas do Centro de Pesquisas da Petrobrás pela compreensão da absorção de tempo dos últimos meses.

Aos amigos André Fadel e Maria Adelaide pelo grande apoio.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science ( M. Sc. ).

NUMERICAL STUDY OF  
CENTRIFUGAL IMPELLERS FLOW

Paulo Roberto Barreiros Neves  
March, 1995

Thesis Supervisors : Su Jian e Átila Pantaleão da Silva Freire

Department : Mechanical Engineering

Centrifugal compressors designers and users are continuously trying to understand the behavior of flow as it passes through the various compressor stage components, ie, difuser, impeller, return channel, etc.

In the last 10 to 15 years has been evolutting a discipline called Computational Fluid Dynamics, providing an efficient method to face the solution of Euler and Navier-Stokes differentials equations that govern the flow through turbocompressors.

The computational codes developed during this period solve the flow in two dimensions ( throughflow solvers ) or in three dimensions ( Full NS 3D solvers ). Throughflow method is widely used nowadays, providing good results for design and analysis of compressor stage components. The codes for 3D flow analysis provides a powerful tool in order to furnish flow

informations that were impossible to obtain using 2D code, as, for instance, flow separations, nonaxisymmetric nature of secondary flows, etc.

The present work presents an algorithm to solve NS differential equations at a stream-surface-fitted co-ordinate (  $S_2$  surface that links hub to shroud ). It is used a numerical scheme developed by Hopscotch applied to NS equations written to a non-orthogonal curvilinear co-ordinate system rotating with impeller. The algorithm is used to solve the flow through a centrifugal impeller of known geometry and performance ( Eckardt impeller ). Finally, computational and experimental results are compared.



## ÍNDICE

|  |           |
|--|-----------|
| <b>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO</b>                             | <b>1</b>  |
| I.1 - O escoamento em turbocompressores                    | 1         |
| I.2 - O impelidor centrífugo                               | 2         |
| I.3 - Revisão da Literatura                                | 3         |
| I.4 - Resumo do trabalho                                   | 6         |
| <br>   |           |
| <b>CAPÍTULO II - EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O ESCOAMENTO</b>    | <b>8</b>  |
| II.1 - Forma vetorial das equações de Navier-Stokes        | 8         |
| II.2 - Sistema de coordenadas                              | 9         |
| II.3 - Navier-Stokes no sistema Curvilíneo                 | 13        |
| <br>   |           |
| <b>CAPÍTULO III - EQUAÇÕES NA SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO</b> | <b>18</b> |
| III.1 - Teoria de superfícies                              | 18        |
| III.2 - Equações para a superfície de escoamento $S_2$     | 19        |
| III.3 - Modelo de turbulência                              | 24        |
| III.4 - Condições de contorno                              | 25        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>CAPÍTULO IV - SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS</b> | <b>28</b> |
| IV.1 - Malha computacional e tensores métricos                  | 28        |
| IV.3 - Esquema de diferenças finitas de Hopscotch               | 32        |
| <br>  |           |
| <b>CAPÍTULO V - APLICAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO</b>                | <b>35</b> |
| V.1 - O impelidor de Eckhardt                                   | 35        |
| V.2 - Comparação dos resultados computacionais e experimentais  | 39        |
| <br>  |           |
| <b>CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b>                     | <b>48</b> |
| VI.1 - Conclusões   | 48        |
| VI.2 - Sugestões  | 48        |
| <br>  |           |
| <b>BIBLIOGRAFIA</b>   | <b>49</b> |

## CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

### I.1 - O ESCOAMENTO EM TURBOCOMPRESSORES

Os turbocompressores, principalmente os compressores centrífugos, têm ampla utilização para compressão de gases de processo na indústria química e petroquímica. Os escoamentos nessas máquinas estão entre os mais complexos encontrados na prática em dinâmica dos fluidos. Em muitos casos eles são tridimensionais, turbulentos, com separação, compressíveis, sub ou supersônicos, etc. As regiões de escoamento viscoso e turbulento possuem campos de tensão e deformação complexos devido à tridimensionalidade, gradientes de pressão em todas as direções, rotação, curvatura, transferência de calor e interação entre camadas limite.

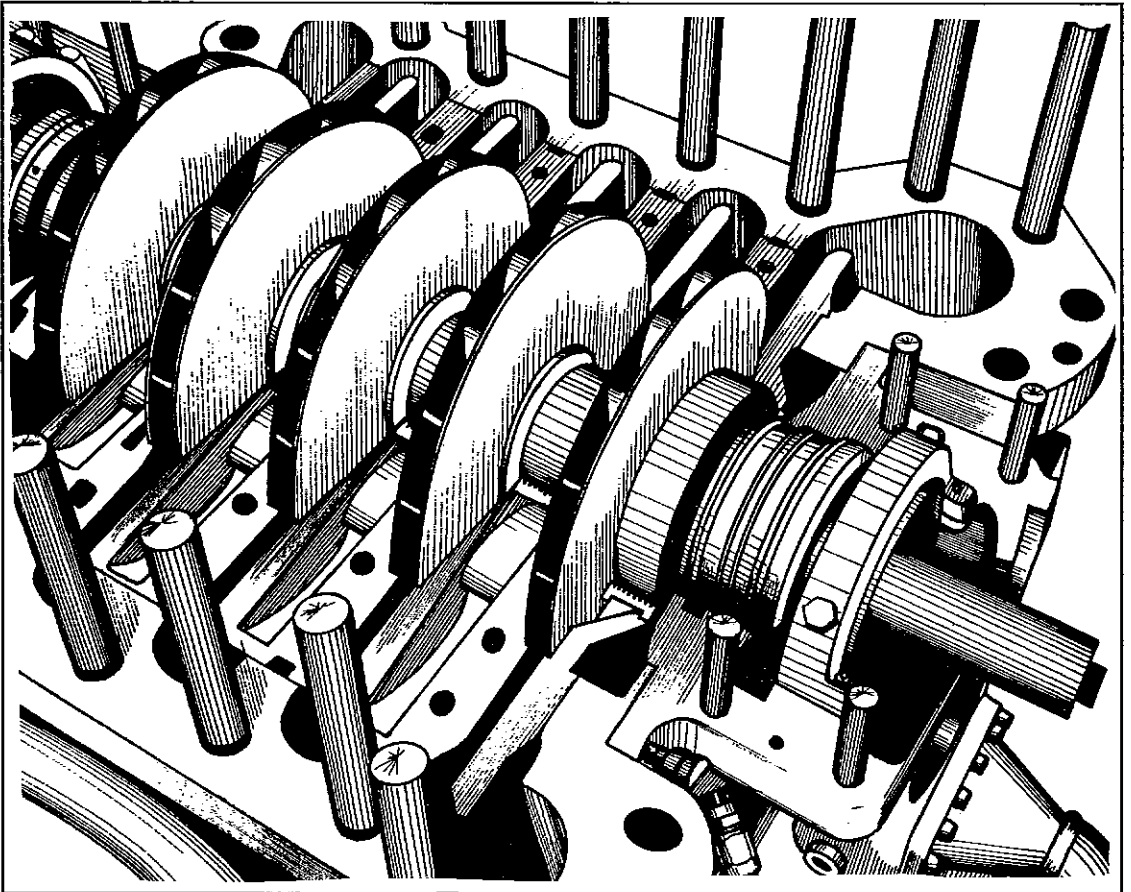


Figura I.1 - Compressor centrífugo de múltiplos estágios com a carcaça superior removida.

A compreensão e quantificação do comportamento do fluido no escoamento ao longo do compressor funcionam como ferramentas imprescindíveis para extrair desse equipamento o máximo de eficiência com conseqüente redução no consumo de energia.

Face à complexidade do escoamento e à demanda por compressores mais eficientes, têm se desenvolvido sofisticados códigos computacionais aplicados ao projeto e análise dos componentes do estágio de compressão.

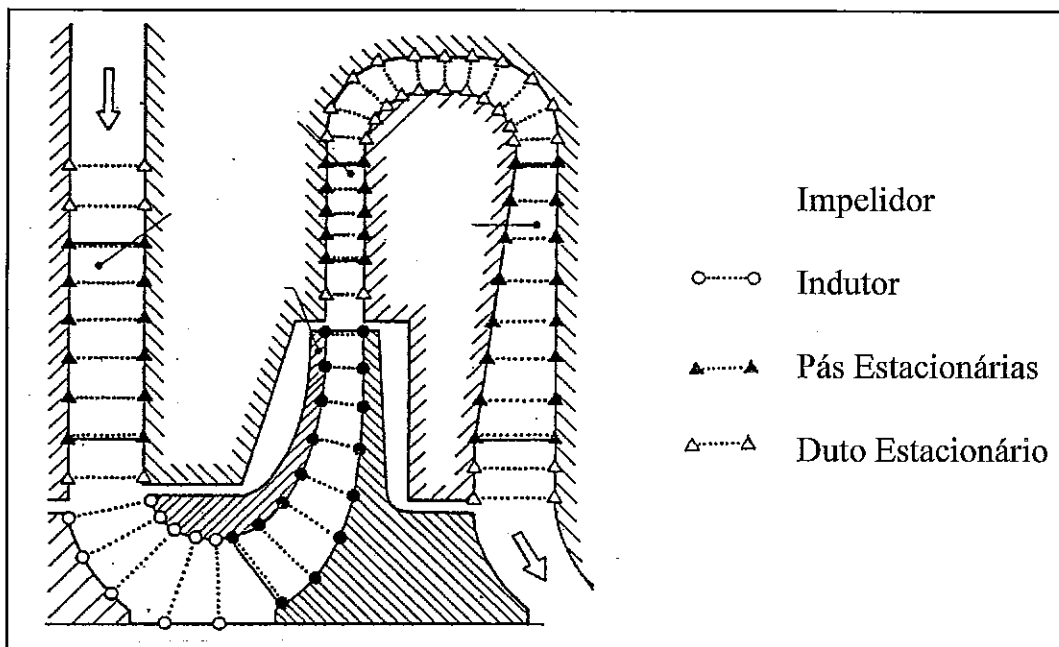


Figura I.2 - Componentes de um estágio de compressão

## I.2 - O IMPELIDOR CENTRÍFUGO

O principal componente do estágio de compressão é o impelidor centrífugo, responsável por fornecer a energia necessária ao aumento de pressão do gás. Como se pode observar na figura I.3, os impelidores de alta eficiência são fabricados com pás ("blades") com curvatura nas três direções.

Nesse trabalho estaremos ocupados em resolver o escoamento ao longo do impelidor centrífugo. A solução do escoamento nos demais componentes do estágio de compressão é mais simples, pois esses componentes são estacionários.

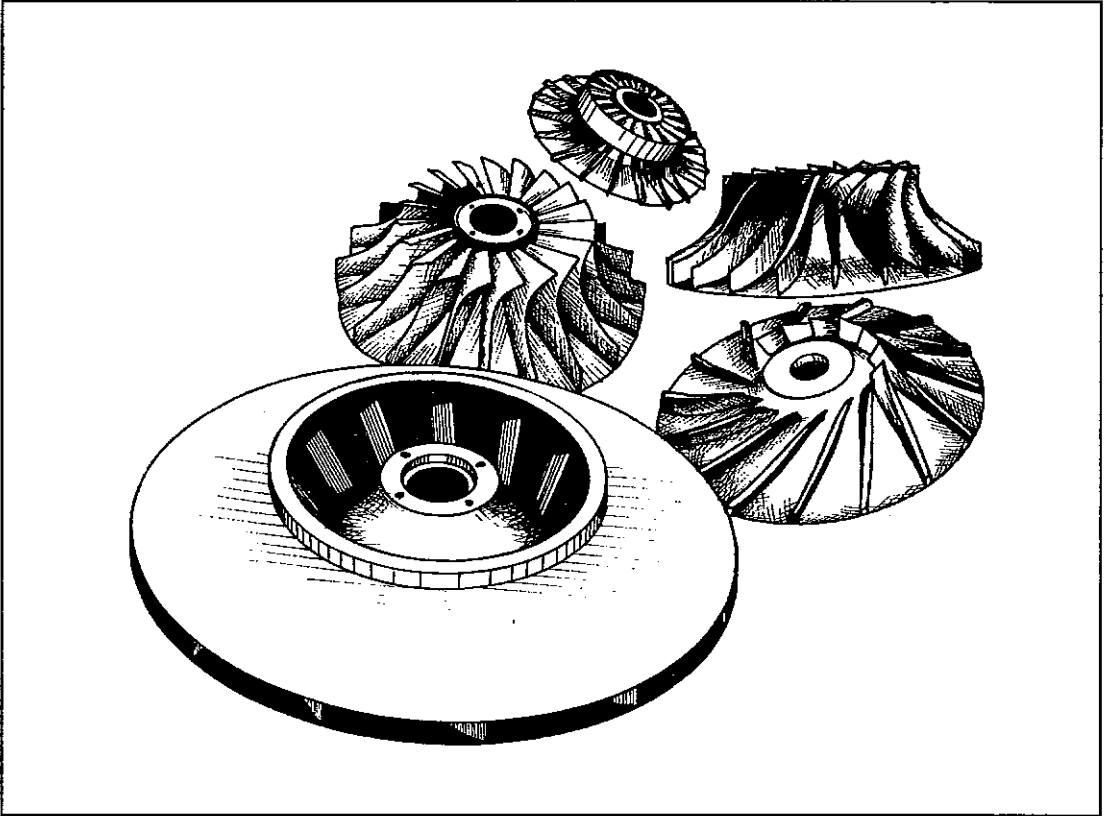


Figura I.3 - Tipos de impelidores para compressores centrífugos ( aberto ou fechado, de pá reta ou pá para trás, com ou sem indutor )

### I.3 - REVISÃO DA LITERATURA

Fowler, 1968 [1]; Moore, 1973 [2]; Dean, 1981 [3] descrevem e documentam bem a complexidade do escoamento num impelidor de compressor centrífugo. Nesses artigos, é apresentada a influência da tridimensionalidade, viscosidade, compressibilidade, etc do escoamento nas passagens dos impelidores.

Hartmann, 1980 [4], analisando o escoamento tridimensional no impelidor, afirma que os métodos tridimensionais não serão usados no futuro próximo para substituir o desenvolvimento experimental. A análise do escoamento turbulento/viscoso tridimensional tenderá a minimizar a necessidade de reprojeto. Além disso, a medida que os códigos 3D forem

validados, poderão ser usados para avaliar compressores existentes, e, até mesmo, sinalizar alguma modificação no projeto de modo a melhorar o desempenho do impelidor.

Lakshminarayana, 1991 [5], faz uma extensa revisão do desenvolvimento das técnicas computacionais no tratamento das equações do escoamento durante os anos 80 e apresenta uma visão do que deverá ocorrer nessa área ao longo da década de 90.

As equações que governam o escoamento são as mesmas para todas as turbomáquinas. São as equações de NS, que podem ser ou não simplificadas. Segundo Lakshminarayana, os ingredientes para uma solução adequada do campo de escoamento são os seguintes:

1. Equações governantes, validade das aproximações feitas.
2. Condições de contorno apropriadas.
3. Malha computacional adequada.
4. Modelo de Turbulência.
5. Técnica numérica, discretização, convergência, efeito de dissipação.
6. Algoritmo eficiente.
7. Arquitetura computacional.
8. Pós processamento para calibração e validação do modelo.

Dados todos esses ingredientes, é fácil verificar a dificuldade para se gerar um código que resolva o escoamento em impelidores centrífugos: 3D, Viscoso, Navier-Stokes completo.

Casey, 1984 [6], aplica um dos métodos mais simples e amplamente utilizados para o cálculo do escoamento em estágios de compressão centrífugos que é o método de escoamento meridional. Nesse método, o escoamento real no compressor é representado por um escoamento permanente, axissimétrico, numa superfície de escoamento média que liga o cubo ("hub") a tampa ("shroud") do impelidor (superfície  $S_2$  ( ver figura I.2). As equações de Navier-Stokes para o escoamento nessa superfície, foram derivadas por Wu, 1952 [7].

Esse método oferece um procedimento numérico extremamente rápido e econômico para a análise e projeto dos estágios do compressor centrífugo.

Porém, em função das muitas simplificações realizadas, é preciso corrigir os resultados com coeficientes de perda empíricos.

Chen, 1987 [8], resolve o escoamento na superfície de escoamento  $S_2$  para um impelidor de compressor axial, mantendo todos os termos de viscosidade e transferência de calor nas equações de Navier-Stokes. Aqui é utilizado o mesmo esquema numérico usado por Delaney, 1983 [9], para resolver as equações de Euler escritas para um sistema de coordenadas curvilíneo arbitrário. Os resultados obtidos por Chen concordam bem com os dados experimentais, conseguindo reproduzir os efeitos da viscosidade principalmente próximo ao cubo ("hub") do impelidor.

Dawes, 1988 [10], apresenta o desenvolvimento de um código ( futuro BTOB3D ) cujo objetivo é resolver as equações de Navier-Stokes 3D para qualquer geometria de turbomáquina. Ele usa um método de volumes finitos com avanço no tempo ("time marching"). A aplicação do código a vários casos de teste ( 3 impelidores axiais e 2 centrífugos ) mostrou boa concordância com os dados experimentais, apresentando detalhes do escoamento que não são capturados pelos métodos quase-3D. Dawes descreve, entretanto, a necessidade de alguns ajustes no programa.

Denton, 1992 [11], descreve alguns cuidados na aplicação de um método de cálculo tridimensional bem estabelecido por ele próprio ( Denton, 1985 [12] ). Os pontos a serem cuidados são principalmente: 1. As condições de contorno, calculadas por um método tridimensional invicito ( Denton e Singh, 1979 [13] ); 2. Os termos de força viscosa, cujos efeitos são desprezados na equação de energia ao considerar o escoamento adiabático ( Denton, 1986 [14] ); 3. A vazão mássica que especificada como condição de contorno juntamente com a relação de compressão, deve ser compatível com a quantidade de perda gerada pela viscosidade.

Casey, 1992 [15], compara os resultados da aplicação dos códigos de solução do escoamento em turbomáquinas de Denton e de Dawes com os dados experimentais de um impelidor centrífugo de pás para trás sem indutor ( o impelidor "B" de Eckardt ). O escoamento e a performance do impelidor concordam bem com os resultados experimentais em vários pontos de operação. Ambos os códigos permitem ainda recuperar detalhes do escoamento impossíveis de se verificar com códigos quase 3D, como por

exemplo: ponto de separação do escoamento e região de escoamento reverso. Ao final, os resultados dos cálculos tridimensionais são usados para modificar o método de escoamento em superfície de corrente ( "throughflow method" ) de Casey e Roth, 1984 [16], de modo a levar em consideração efeitos como distribuição de perdas viscosas, separação e não axissimetria.

Sorokes, 1993 [16], apresenta a aplicação do código especialista desenvolvido pelo Dr. William Dawes, o código BTOB3D, e ao mesmo tempo discute o uso dessa ferramenta na análise e projeto dos componentes do estágio de compressão. A conclusão é que dia a dia vai se verificando a praticidade de usar códigos 3D para solução desses escoamentos complexos. Nos próximos anos porém, essa ferramenta ainda será utilizada para comparação com códigos já extensamente testados e para visualização do escoamento.

Cumpsty, 1989 [17], após extensa abordagem das ferramentas de projeto e análise da aerodinâmica de compressores, conclui que, nos dias de hoje, os procedimentos de projeto ainda são dominados por pensamentos e métodos bidimensionais. Os métodos tridimensionais ainda são caros e consomem muito tempo, embora não pareça ser esse o real motivo para o pouco uso desses métodos. A principal razão parece ser a dificuldade que projetistas e usuários têm de pensar em três dimensões e, conseqüentemente, tomar decisões de projeto.

#### I.4 - RESUMO DO TRABALHO

O objetivo desse trabalho é desenvolver um código computacional para resolver o escoamento ao longo do impelidor centrífugo, podendo facilmente se estender aos demais componentes do estágio de compressão. Resolve-se o escoamento viscoso permanente na superfície chamada de  $S_2$ , que possui a mesma rotação do impelidor centrífugo. Como a superfície  $S_2$  será definida no espaço e não no plano, a solução do escoamento se enquadrará na classe dos métodos ditos quase tridimensionais, embora o escoamento seja calculado em duas dimensões definidas sobre a superfície.



O desenvolvimento a seguir pode ser resumido em três partes fundamentais, a saber:

1. Sistema de equações diferenciais que governam o escoamento.
2. Algoritmo para solução numérica das equações diferenciais.
3. Aplicação do algoritmo a um impelidor de desempenho conhecido.

## CAPÍTULO II - EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O ESCOAMENTO

### II.1 - FORMA VETORIAL DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

As equações que governam o escoamento são as mesmas para todas as turbomáquinas. Como discretizaremos pelo método de diferenças finitas, apresentaremos as equações na forma diferencial. O sistema de equações diferenciais de Navier-Stokes em sua forma vetorial é o seguinte:

Conservação de Massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{W}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Conservação da Quantidade de Movimento:

$$\frac{d \vec{W}}{dt} - \omega^2 \vec{r} + 2 \vec{\omega} \times \vec{W} = (-1/\rho) \nabla p + (1/\rho) \nabla \vec{\Pi} \quad (\text{II.2})$$

Conservação de Energia:

$$\frac{dI}{dt} = (1/\rho) \frac{dp}{dt} + \dot{q} + (1/\rho) \nabla \cdot (\vec{\Pi} \vec{W}) \quad (\text{II.3})$$

Tensor Tensão

$$\vec{\Pi} = 2\mu \vec{\varepsilon} - (2/3)\mu (\nabla \vec{W}) \vec{E} \quad (\text{II.4})$$

Rotalpia

$$I = c_p T + (1/2) W^2 - (1/2) \omega^2 r^2 \quad (\text{II.5})$$

Pressão

$$p = \rho R T \quad (\text{II.6})$$

Componentes do Tensor Deformação

$$\epsilon_{ij} = (1/2) \left( \frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i} \right) \quad (\text{II.7})$$

Fluxo de Calor

$$\dot{q} = (1/\rho) \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (\text{II.8})$$

onde,

$\rho$  - massa específica,  $\vec{v}$  - vetor velocidade relativa,  $\omega$  - rotação,  $p$  - pressão estática,  $\vec{\Pi}$  - tensor tensão,  $I$  - rotação,  $\vec{\epsilon}$  - tensor deformação,  $\mu$  - viscosidade,  $c_p$  - calor específico,  $R$  - constante universal dos gases.

## II.2 - SISTEMA DE COORDENADAS

Em função da complexa geometria do impelidor, é conveniente expressar as equações de Navier-Stokes num sistema de coordenadas não ortogonal curvilíneo. Como em geral tem-se a geometria e mesmo as equações diferenciais baseadas num sistema de coordenadas ortogonal ( p.ex., cartesiano, cilíndrico ), necessita-se de relações de transformação desse sistema ortogonal para um sistema curvilíneo.

Apresentaremos a seguir os principais conceitos para geração de um sistema de coordenadas curvilíneo. Warsi, 1981 [ 18] e Eiseman, 1980 [19] expõem em detalhes os conceitos relativos a análise tensorial aplicado à geração de um sistema curvilíneo.

As linhas coordenadas curvilíneas de um sistema tri-dimensional são curvas no espaço formadas pela interseção de superfícies nas quais uma coordenada é constante. Assim, uma coordenada varia ao longo de uma linha coordenada, enquanto as outras duas coordenadas permanecem constantes. As tangentes às linhas coordenadas e as normais às superfícies coordenadas formam os vetores base do sistema de coordenadas.

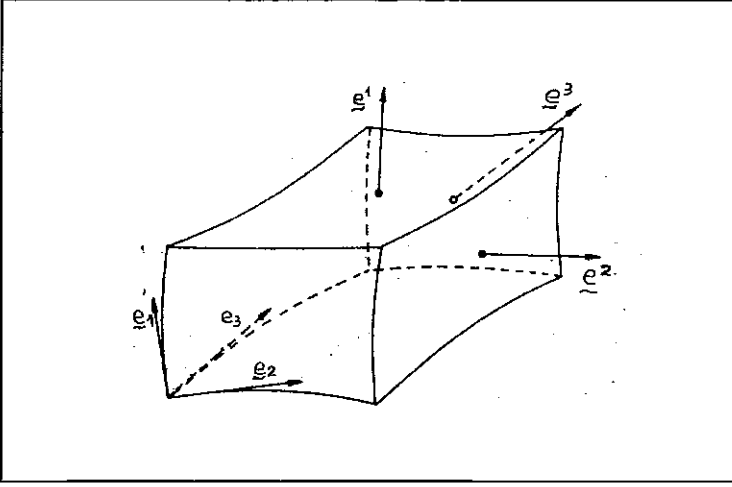


Figura II.1 - Vetores Base do Sistema Curvilíneo

### II.2.1 - Vetores Base Covariantes

Consideremos uma linha coordenada ao longo da qual varia a coordenada  $y^1$ . O vetor tangente à linha coordenada é dado por

$$\vec{e}_1 = \lim_{dy^1 \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(y^1 + dy^1) - \vec{r}(y^1)}{dy^1} \quad (\text{II.9})$$

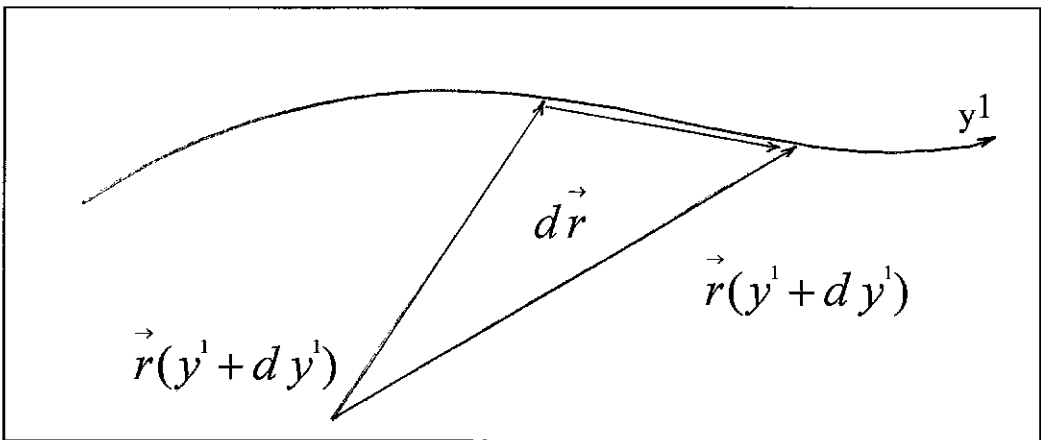


Figura II.2 - Linha coordenada  $y^1$ .

Os vetores tangentes às três linhas coordenadas são os três vetores base covariantes  $\vec{e}_i$  ( $i=1,2,3$ ) do sistema de coordenadas curvilíneo.

## II.2.2 - Tensor Métrico Covariante

Os incrementos diferenciais de comprimento, área e volume, que são necessários na formulação das integrais de linha, superfície e volume que geram as equações diferenciais, podem ser obtidos diretamente dos vetores base covariantes.

O incremento diferencial geral ( não necessariamente ao longo de uma linha coordenada ) de um vetor posição é dado por

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i dy^i \quad (\text{II.10})$$

O comprimento do arco referente a esse incremento diferencial é dado por

$$(ds)^2 = \left| \vec{r} \right|^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j dy^i dy^j \quad (\text{II.11})$$

Deste modo, o comprimento de arco do incremento depende de nove produtos escalares  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ , ( $i,j=1,2,3$ ), que formam um tensor simétrico. Esses produtos escalares são os componentes do tensor métrico covariante:

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (\text{II.12})$$

Logo, o comprimento de arco geral do incremento pode ser escrito como

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} dy^i dy^j \quad (\text{II.13})$$

O comprimento do arco na linha coordenada  $y^i$  é dado por

$$ds^i = \sqrt{g_{ii}} dy^i \quad (\text{II.14})$$

Do mesmo modo podemos deduzir as expressões para o incremento de área numa superfície coordenada e para o incremento de volume, que são as seguintes:

$$dS^i = \sqrt{g_{jj} g_{kk} - g_{jk}^2} dy^j dy^k, \quad (i=1,2,3) \quad (i,j,k) \text{ cíclico.} \quad (\text{II.15})$$

$$dV = \sqrt{g} dy^1 dy^2 dy^3 \quad (\text{II.16})$$

onde  $\sqrt{g}$ , chamado de Jacobiano da transformação, pode ser avaliado pela seguinte expressão:

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det |g_{ij}|} = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \quad (\text{II.17})$$

### II.2.3 - Vetores Base Contravariantes

Os vetores normais às três superfícies coordenadas nas quais as coordenadas  $y^i$  são constantes são os três vetores base contravariantes  $\vec{e}^i$  do sistema de coordenadas curvilíneo. Os vetores base contravariantes são dados por

$$\vec{e}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \vec{e}_j \times \vec{e}_k, \quad (i=1,2,3) \quad (i,j,k) \text{ cíclico.} \quad (\text{II.18})$$

onde  $\sqrt{g}$  está definido no ítem II.2.2.

#### II.2.4 - Tensor Métrico Contravariante

Os componentes do tensor métrico contravariante são dados pelos produtos escalares dos vetores base contravariantes:

$$g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j \quad (\text{II.19})$$

Essas correlações dos vetores base e tensores métricos co/contravariantes são extensamente usadas quando da obtenção das equações diferenciais de NS no sistema de coordenadas curvilíneo.

### II.3 - NAVIER-STOKES NO SISTEMA CURVILÍNEO

Com as correlações do sistema de coordenadas curvilíneo aplicadas às equações de Navier-Stokes na forma vetorial e considerando a média no tempo ("time-averaged") das equações de NS para incorporar a característica de turbulência do escoamento, obtém-se as equações de NS tridimensionais para escoamento turbulento ( Equações médias de Reynolds - "Reynolds averaged Navier-Stokes equations") do sistema curvilíneo. Essas equações são as seguintes:

Conservação de Massa:

$$\frac{\partial(\rho\sqrt{g})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w^1)}{\partial y^1} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w^3)}{\partial y^3} = 0 \quad (\text{II.20})$$

Conservação de Quantidade de Movimento:

Direção  $e^1$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_1w^1)}{\partial y^1} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_1w^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_1w^3)}{\partial y^3} = \\ & \rho\sqrt{g}\left\{w^1\frac{\partial w_1}{\partial y^1} + w^2\frac{\partial w_2}{\partial y^1} + w^3\frac{\partial w_3}{\partial y^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^1}[|W|^2 - \Omega^2r^2] - \right. \\ & \left. 2\sqrt{g}(\omega^2w^3 - \omega^3w^2)\right\} - \sqrt{g}\frac{\partial p}{\partial y^1} + \sqrt{g}(\nabla\vec{\Pi})_1 - \sqrt{g}(\nabla\vec{\Pi})_{urb1} \end{aligned}$$

(II.21)

Direção  $e^2$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_2w^1)}{\partial y^1} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_2w^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_2w^3)}{\partial y^3} = \\ & \rho\sqrt{g}\left\{w^1\frac{\partial w_1}{\partial y^2} + w^2\frac{\partial w_2}{\partial y^2} + w^3\frac{\partial w_3}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^2}[|W|^2 - \Omega^2r^2] - \right. \\ & \left. 2\sqrt{g}(\omega^3w^1 - \omega^1w^3)\right\} - \sqrt{g}\frac{\partial p}{\partial y^2} + \sqrt{g}(\nabla\vec{\Pi})_2 - \sqrt{g}(\nabla\vec{\Pi})_{urb2} \end{aligned}$$

(II.22)



Direção  $e^3$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_3)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_3w^1)}{\partial y^1} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_3w^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_3w^3)}{\partial y^3} = \\ & \rho\sqrt{g}\left\{w^1\frac{\partial w_1}{\partial y^3} + w^2\frac{\partial w_2}{\partial y^3} + w^3\frac{\partial w_3}{\partial y^3} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^3}[|W|^2 - \Omega^2r^2] - \right. \\ & \left. 2\sqrt{g}(\omega^1w^2 - \omega^2w^1)\right\} - \sqrt{g}\frac{\partial p}{\partial y^3} + \sqrt{g}(\nabla\vec{\Pi})_3 - \sqrt{g}(\nabla\vec{\Pi})_{turb3} \end{aligned}$$

(II.23)

Conservação de Energia:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho\sqrt{g}I - \sqrt{g}p)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}Iw^1)}{\partial y^1} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}Iw^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}Iw^3)}{\partial y^3} = \\ & \rho\sqrt{g}\left(\dot{q} - \dot{q}_{turb} + \frac{\vec{W}\cdot\nabla\vec{\Pi}}{\rho} + \frac{\phi}{\rho}\right) \end{aligned}$$

(II.24)

onde:

$$\dot{q} = \frac{1}{\rho}(\lambda g^{im}T|_m)_i \quad (II.25)$$

$$\dot{q}_{turb} = c_p \overline{w^j T}_i, \text{ ver ítem III.3.} \quad (\text{II.26})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \vec{\Pi})_j &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} [\mu \sqrt{g} g^{mi} (\frac{\partial w_j}{\partial y^m} + \frac{\partial w_m}{\partial y^j} - 2 w_k \Gamma_{mj}^k - \frac{2}{3} g_{mj} \nabla \cdot \vec{w})] - \\ &\frac{1}{2} \mu g^{mn} g^{il} \frac{\partial g_{mi}}{\partial y^j} (\frac{\partial w_l}{\partial y^n} + \frac{\partial w_n}{\partial y^l} - 2 w_k \Gamma_{nl}^k - \frac{2}{3} g_{nl} \nabla \cdot \vec{w}) \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

$$(\nabla \vec{\Pi})_{turb - i} = (\frac{\partial(\overline{\rho w_i w^1})}{\partial y^1} + \frac{\partial(\overline{\rho w_i w^2})}{\partial y^2} + \frac{\partial(\overline{\rho w_i w^3})}{\partial y^3}), \text{ ver ítem III.3.} \quad (\text{II.28})$$

$$\vec{w} \cdot \vec{\Pi} = w^i (\nabla \Pi)_i \quad (\text{II.29})$$

$$\phi = 2\mu [g^{im} g^{jl} \varepsilon_{mj} \varepsilon_{il} - \frac{1}{3} (\varepsilon_m^m)^2] \quad (\text{II.30})$$

$$I = c_p T + \frac{1}{2} \left[ \left| \vec{w} \right|^2 - (\Omega r)^2 \right] \quad (\text{II.31})$$

$$p = \rho R T \quad (\text{II.32})$$

onde,  $w_i, w^i$  - componentes covariantes e contravariantes da velocidade relativa.

As equações apresentadas são válidas para um escoamento tridimensional, turbulento e viscoso num sistema de coordenadas curvilíneo. No próximo capítulo obter-se-ão as equações acima em um sistema de coordenadas compatível com a geometria do impelidor centrífugo.

## CAPÍTULO III - EQUAÇÕES NA SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO

### III.1 - TEORIA DE SUPERFÍCIES

Historicamente, os problemas de cálculo do escoamento têm sido formulados e resolvidos nas chamadas superfícies de escoamento. Os métodos de superfície de escoamento são muito utilizados ainda hoje, em função de produzirem resultados rápidos, compatíveis com as necessidades de engenharia e portanto de baixo custo.

Dentro da passagem do escoamento entre as pás do impelidor centrífugo, dois tipos de superfícies de escoamento são usualmente adotadas ( ver Wu, 1952 [7] ). A primeira delas é a superfície que vai do cubo ("hub") à tampa ("shroud"); essa superfície foi designada por Wu de  $S_2$ . A forma dessa superfície é definida pela média de duas superfícies de pás adjacentes. A segunda é a superfície de revolução axissimétrica que vai de uma pá ("blade") à outra pá; essa superfície foi designada por Wu de  $S_1$ .

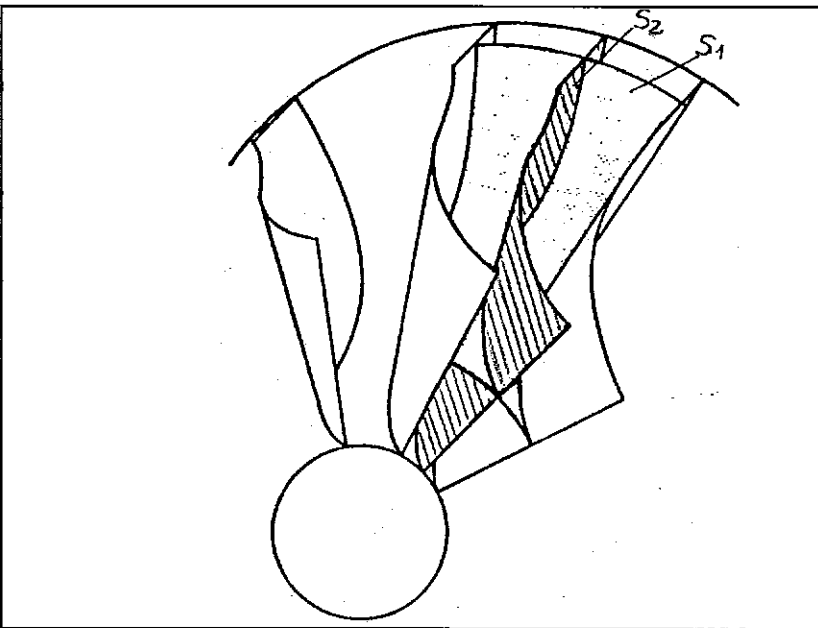


Figura III.1 - Superfícies  $S_1$  e  $S_2$  num impelidor centrífugo.

O cálculo do escoamento em superfície de corrente ("throughflow calculation") em  $S_2$  é de grande significância, pois leva em conta a forte curvatura nas paredes do cubo ("hub") e da tampa ("shroud"). A curvatura da tampa é a mais importante porque, sendo ela convexa ao escoamento, produz altas velocidades meridionais, nas regiões onde o raio de curvatura no plano meridional é menor. Como o escoamento meridional é forçado em direção à saída do impelidor, ele deverá ser desacelerado possibilitando a separação nessa região.

A solução do escoamento sobre a superfície  $S_2$  possibilita a adoção de algumas aproximações nas equações para escoamento tridimensional apresentadas no item II.3. Considerando as coordenadas  $y^1$  e  $y^3$  sobre a superfície de escoamento  $S_2$ , teremos:

1. Existindo o escoamento somente em  $S_2$ , a velocidade sobre a coordenada  $y^2$  é igual a zero, ou seja,  $w^2 = 0$ .

2. Considerando a superfície  $S_2$  equidistante das pás e suficientemente distante das mesmas, no cálculo "throughflow" desprezamos as variações ao longo da coordenada  $y^2$  que está fora da superfície de corrente, ou seja,  $\partial()/\partial y^2 = 0$ .

As aproximações expostas acima geram as equações de NS para a superfície de escoamento  $S_2$  apresentadas no item a seguir.

### III.2 - EQUAÇÕES PARA SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO $S_2$

Aplicando as aproximações apresentadas no item anterior às equações do item II.3, temos as equações que governam o escoamento escritas para a superfície  $S_2$  no sistema de coordenada curvilíneo girando com o impelidor, a saber:

Conservação de Massa:

$$\frac{\partial(\rho\sqrt{g})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w^1)}{\partial y^1} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w^3)}{\partial y^3} = 0 \quad (\text{III.1})$$

Conservação de Quantidade de Movimento:

Direção  $e^1$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_1w^1)}{\partial y^1} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_1w^3)}{\partial y^3} = \\ & \rho\sqrt{g}\left\{w^1\frac{\partial w_1}{\partial y^1} + w^3\frac{\partial w_3}{\partial y^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^1}[|W|^2 - \Omega^2r^2] - \right. \\ & \left. 2\sqrt{g}(\omega^2w^3)\right\} - \sqrt{g}\frac{\partial p}{\partial y^1} + \sqrt{g}(\nabla\vec{\Pi})_1 - \sqrt{g}(\nabla\vec{\Pi})_{turb1} \end{aligned}$$

(III.2)

Direção  $e^2$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_2w^1)}{\partial y^1} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_2w^3)}{\partial y^3} = \\ & -2\sqrt{g}(\omega^3w^1 - \omega^1w^3)\} + \sqrt{g}(\nabla\vec{\Pi})_2 - \sqrt{g}(\nabla\vec{\Pi})_{turb2} \end{aligned} \quad (III.3)$$

Direção  $e^3$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_3)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_3w^1)}{\partial y^1} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}w_3w^3)}{\partial y^3} = \\ & \rho\sqrt{g}\left\{w^1\frac{\partial w_1}{\partial y^3} + w^3\frac{\partial w_3}{\partial y^3} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^3}[|W|^2 - \Omega^2 r^2] - \right. \\ & \left. 2\sqrt{g}(-\omega^2 w^1)\right\} - \sqrt{g}\frac{\partial p}{\partial y^3} + \sqrt{g}(\nabla\vec{\Pi})_3 - \sqrt{g}(\nabla\vec{\Pi})_{turb3} \end{aligned}$$

(III.4)

Conservação de Energia:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho\sqrt{g}I - \sqrt{g}p)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}Iw^1)}{\partial y^1} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}Iw^3)}{\partial y^3} = \\ & \rho\sqrt{g}\left(\dot{q} - \dot{q}_{turb} + \frac{\vec{W}\cdot\nabla\vec{\Pi}}{\rho} + \frac{\phi}{\rho}\right) \end{aligned}$$

(III.5)

onde:

$$\begin{aligned} \dot{q} = & \left(\frac{1}{\rho\sqrt{g}}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}\left[\lambda\sqrt{g}(g^{11}\frac{\partial T}{\partial y^1} + g^{13}\frac{\partial T}{\partial y^3})\right] + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial y^3}\left[\lambda\sqrt{g}(g^{31}\frac{\partial T}{\partial y^1} + g^{33}\frac{\partial T}{\partial y^3})\right]\right\} \end{aligned}$$

(III.6)

$$\dot{q}_{turb} = \frac{\partial c_p \overline{w^1 T}}{\partial y^1} + \frac{\partial c_p \overline{w^3 T}}{\partial y^3}, \text{ ver ítem III.3.} \quad (\text{III.7})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \vec{\Pi})_1 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^1} \left\{ \mu \sqrt{g} \left[ 2 g^{11} \frac{\partial w_1}{\partial y^1} + g^{12} \frac{\partial w_2}{\partial y^1} + g^{13} \left( \frac{\partial w_3}{\partial y^1} + \frac{\partial w_1}{\partial y^3} \right) \right] \right\} + \\ &\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^3} \left\{ \mu \sqrt{g} \left[ 2 g^{31} \frac{\partial w_1}{\partial y^1} + g^{32} \frac{\partial w_2}{\partial y^1} + g^{33} \left( \frac{\partial w_3}{\partial y^1} + \frac{\partial w_1}{\partial y^3} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \vec{\Pi})_2 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^1} \left[ \mu \sqrt{g} \left( g^{11} \frac{\partial w_2}{\partial y^1} + g^{13} \frac{\partial w_2}{\partial y^3} \right) \right] + \\ &\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^3} \left[ \mu \sqrt{g} \left( g^{31} \frac{\partial w_2}{\partial y^1} + g^{33} \frac{\partial w_2}{\partial y^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \vec{\Pi})_3 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^1} \left\{ \mu \sqrt{g} \left[ g^{11} \left( \frac{\partial w_3}{\partial y^1} + \frac{\partial w_1}{\partial y^3} \right) + g^{12} \frac{\partial w_2}{\partial y^3} + 2 g^{13} \frac{\partial w_3}{\partial y^3} \right] \right\} + \\ &\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^3} \left\{ \mu \sqrt{g} \left[ g^{31} \left( \frac{\partial w_3}{\partial y^1} + \frac{\partial w_1}{\partial y^3} \right) + g^{32} \frac{\partial w_2}{\partial y^3} + 2 g^{33} \frac{\partial w_3}{\partial y^3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

$$(\nabla \vec{\Pi})_{turb-i} = \left( \frac{\partial(\overline{\rho w_i w^1})}{\partial y^1} + \frac{\partial(\overline{\rho w_i w^3})}{\partial y^3} \right), \text{ ver ítem III.3.} \quad (\text{III.11})$$

$$\vec{w} \cdot \vec{\Pi} = w^1 (\nabla \Pi)_1 + w^3 (\nabla \Pi)_3 \quad (\text{III.12})$$



$$\begin{aligned}
\phi = 2\mu \{ & [g^{11} \frac{\partial w_1}{\partial y^1} + \frac{g^{12}}{2} \frac{\partial w_2}{\partial y^1} + g^{13} \frac{\partial w_3}{\partial y^1}]^2 \\
& + (\frac{g^{21}}{2} \frac{\partial w_2}{\partial y^1} + \frac{g^{23}}{2} \frac{\partial w_2}{\partial y^3})^2 \\
& + [\frac{g^{31}}{2} (\frac{\partial w_3}{\partial y^1} + \frac{\partial w_1}{\partial y^3}) + \frac{g^{32}}{2} \frac{\partial w_2}{\partial y^3} + g^{33} \frac{\partial w_3}{\partial y^3}]^2 \\
& + 2(\frac{g^{11}}{2} \frac{\partial w_2}{\partial y^1} + \frac{g^{13}}{2} \frac{\partial w_2}{\partial y^3}) \cdot (g^{21} \frac{\partial w_1}{\partial y^1} + \frac{g^{22}}{2} \frac{\partial w_2}{\partial y^1} + g^{23} \frac{\partial w_3}{\partial y^1}) \\
& + 2[\frac{g^{21}}{2} (\frac{\partial w_3}{\partial y^1} + \frac{\partial w_1}{\partial y^3}) + \frac{g^{22}}{2} \frac{\partial w_2}{\partial y^3} + g^{23} \frac{\partial w_3}{\partial y^3}] \cdot (\frac{g^{31}}{2} \frac{\partial w_2}{\partial y^1} + \frac{g^{33}}{2} \frac{\partial w_2}{\partial y^3}) \\
& + g^{31} \frac{\partial w_1}{\partial y^1} + \frac{g^{32}}{2} \frac{\partial w_2}{\partial y^1} + g^{33} \frac{\partial w_3}{\partial y^1} \cdot [\frac{g^{11}}{2} (\frac{\partial w_3}{\partial y^1} + \frac{\partial w_1}{\partial y^3}) + g^{12} \frac{\partial w_2}{\partial y^3} + g^{13} \frac{\partial w_3}{\partial y^3}]
\end{aligned} \tag{III.13}$$

$$I = c_p T + \frac{1}{2} \left[ \left| \vec{w} \right|^2 - (\Omega r)^2 \right] \tag{III.14}$$

$$p = \rho RT \tag{III.15}$$

As variáveis independentes nas equações acima são  $\rho, w_1, w_2, w_3, T$ . Para que o sistema de equações diferenciais acima tenha solução faltam definir o modelo de turbulência e as condições de contorno do impelidor.

### III.3 - MODELO DE TURBULÊNCIA

Para podermos resolver as equações diferenciais para escoamento turbulento ( Reynolds Equations ) é necessário fazermos algumas hipóteses em relação à tensão turbulenta aparente e o termo de fluxo de calor de Reynolds.

Todos os modelos de turbulência existentes têm limitações, em especial aqueles dedicados aos escoamentos em turbomáquinas, já que dificilmente conseguem capturar o efeito da curvatura, força de Coriolis, rotação, etc.

Neste trabalho usaremos, a princípio, uma modelagem simples para a turbulência. Adotaremos a hipótese de Boussinesq na qual o tensor de turbulência aparente é relacionado à taxa de deformação através de um escalar de turbulência aparente ou viscosidade turbulenta. Nesse caso a expressão do tensor de turbulência é exatamente a mesma do tensor para escoamento laminar onde no lugar da viscosidade molecular temos a viscosidade turbulenta, ou seja,

$$\Pi_{turb_{ij}} = -\overline{\rho w_i w_j} = 2\mu_t \varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}\mu_t g_{ij} \varepsilon_m^m \quad (\text{III.16})$$

Por analogia com a teoria cinética na qual a viscosidade molecular para gases pode ser avaliada com razoável acurácia, podemos esperar que a viscosidade turbulenta possa ser modelada como

$$\mu_t = \rho \nu_t l \quad (\text{III.17})$$

onde  $\nu_t$  e  $l$  são, respectivamente, a velocidade e o comprimento característicos da turbulência. O problema desta forma se resume a descobrir um meio de avaliar  $\nu_t$  e  $l$

Para o escoamento no impelidor usaremos uma formulação algébrica para a turbulência. O modelo algébrico sugerido por Prandtl na década de 20 é o seguinte:

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial w}{\partial n} \right| \quad (\text{III.18})$$

onde  $l$ , um comprimento de mistura, pode ser pensado como uma distância transversal na qual as partículas mantêm seu momento original, algo como o

caminho livre médio para a colisão ou mistura de glóbulos de fluido. O produto  $l \left| \frac{\partial w}{\partial n} \right|$ , pode ser interpretado como a velocidade característica da turbulência,  $v_t$ .

No escoamento ao longo de uma superfície sólida, o comprimento de mistura é bem avaliado pela seguinte expressão:

$$l_i = \kappa \cdot n(1 - e^{-n/A^+}) \quad (\text{III.19})$$

onde  $\kappa$  é a constante de von Kármán usualmente igualada a 0.41, e  $A^+$  é a constante de amortecimento do comprimento dada por:

$$A^+ = 26 \left( \frac{\mu_w}{\rho_w} \right)^{1/2} / \left( \left| \frac{\partial w}{\partial n} \right| \right)^{1/2} \quad (\text{III.20})$$

A expressão do comprimento de mistura vale para a região interna (inner region) próxima à parede até o limite em que  $l_i$  excede  $l_o$  dado por

$$l_o = C_1 \cdot \delta \quad (\text{III.21})$$

onde o valor de  $C_1$  é normalmente 0.089, e  $\delta$  é a espessura da camada limite.

Desta forma será sempre considerado o menor valor de comprimento de mistura, ou seja,

$$l = \min(l_i, l_o). \quad (\text{III.22})$$

O termo de fluxo de calor turbulento é geralmente tratado nos modelos algébricos através da analogia de Reynolds que se baseia na similaridade entre o transporte de calor e momento. Assim como o tensor turbulento, a expressão para o fluxo de calor turbulento é exatamente a mesma do fluxo de calor laminar onde no lugar da condutividade térmica temos a condutividade turbulenta, ou seja,

$$\dot{q}_{turb} = c_p \overline{w^j T}_i = -\frac{1}{\rho} (\lambda_t g^{im} T|_m)|_i \quad (\text{III.23})$$

onde  $\lambda_t$  é a condutividade turbulenta.

Experimentos confirmam que a relação das difusividades para o transporte turbulento de calor e momento, chamada de número de Prandtl turbulento,  $Pr_t = \mu_t c_p / \lambda_t$ , é uma função bem comportada ao longo do escoamento. Muitos modelos de turbulência algébricos operam bem com um número de Prandtl turbulento constante próximo de um.; mais comumente  $Pr_t = 0.9$ .

Concluindo, a adoção desse modelo de turbulência, nos permite utilizar uma viscosidade efetiva e uma condutividade térmica efetiva dadas por:

$$\mu_e = \mu + \mu_t \quad (III.24) \quad \lambda_e = \lambda + \lambda_t = c_p \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \quad (III.25)$$

Os resultados apresentados por Dawes, 1987 [20], foram obtidos usando um modelo de comprimento de mistura muito simples para a tensão turbulenta. A ótima concordância com os dados experimentais do impelidor de Eckardt levam à conclusão que, apesar da complexidade do escoamento no impelidor, o modelo do comprimento de mistura é uma boa aproximação.

#### III.4 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno são impostas ao impelidor na entrada e na saída, no cubo (hub) e na tampa (shroud).

Na entrada são especificados  $\dot{m}, p_0, T_0$  - vazão mássica, pressão total, temperatura total, respectivamente. Existe somente velocidade absoluta na direção axial. As componentes de velocidade relativa (covariantes e contravariantes), a pressão e temperatura estáticas, e a densidade podem ser calculadas a partir desses dados e da geometria de entrada do impelidor.

Na saída é especificado  $p_d$  - pressão estática, e todas as outras variáveis são obtidas inicialmente por uma simples interpolação linear ao longo da direção  $y^3$

No cubo e na carcaça (impelidor aberto - unshrouded) temos a condição de não escorregamento  $v = 0$  (no cubo) e  $\vec{v} = \vec{0}$  (na carcaça), e de parede adiabática  $\partial T / \partial n = 0$ .

As equações diferenciais que governam o escoamento apresentadas em III.2 juntamente com o modelo de turbulência e as condições de contorno formam um problema de escoamento fechado para resolução numérica. No capítulo seguinte apresentaremos justamente um método de diferenças finitas de avanço no tempo ("time-marching") para solução das equações diferenciais.

## CAPÍTULO IV - SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

### IV.1 - MALHA COMPUTACIONAL E TENSORES MÉTRICOS

A solução numérica de equações diferenciais parciais requer a discretização do campo do escoamento numa coleção de pontos (células). As equações diferenciais são aproximadas por um conjunto de equações algébricas válidas em cada ponto discretizado, e esse sistema de equações algébricas é então resolvido de modo a produzir um conjunto de valores discretos que se aproximam da solução exata do sistema de equações diferenciais sobre todo o campo de escoamento.

A discretização do campo do escoamento requer alguma organização para que a solução seja eficiente, ou seja, deve ser possível identificar prontamente os pontos do contorno do campo computacional. Além disso, a discretização deve estar de acordo com o contorno da região de tal modo que as condições de contorno possam ser bem representadas. Essa organização é fornecida através da escolha de um sistema de coordenadas curvilíneo; esse sistema cobre o campo de escoamento e possui linhas e superfícies coordenadas coincidente com o contorno. A distribuição das linhas coordenadas deve ser suave, com concentração nas regiões de forte gradiente da solução.

A malha computacional ("computational grid") é formada pelo conjunto de pontos gerados pelas interseções das linhas do sistema de coordenadas curvilíneo. A utilização das interseções das linhas coordenadas para definir os pontos da malha, fornece uma estrutura organizacional que permite toda computação ser feita numa malha retangular fixa, desde que as equações diferenciais tenham sido transformadas, de modo que as coordenadas curvilíneas substituam as coordenadas cartesianas.

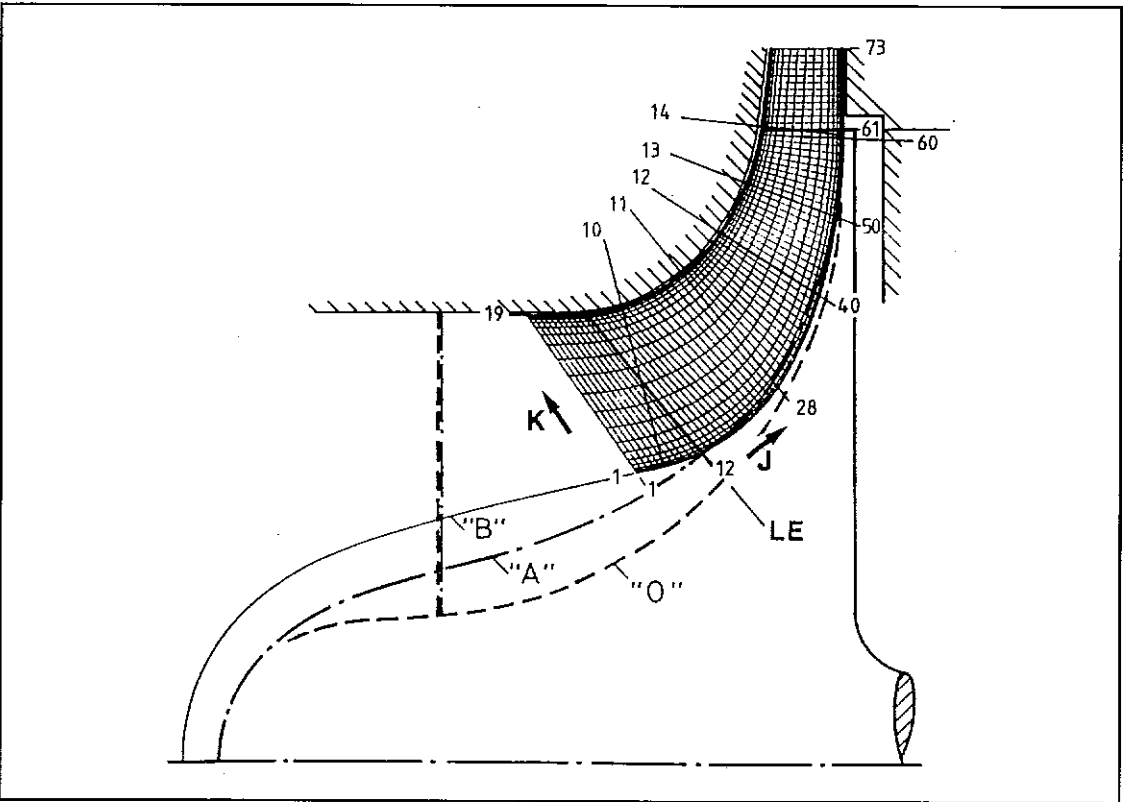
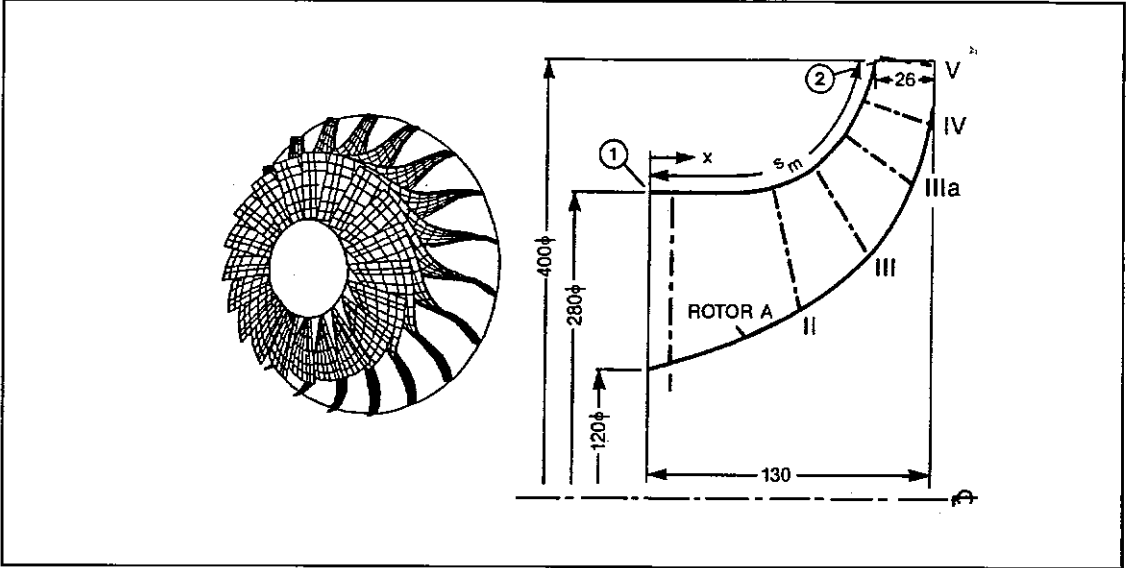


Figura IV.1 - Malha computacional 73x19 do impelidor de Eckardt.

Na resolução de nosso problema usaremos um sistema de coordenadas ajustado à superfície de corrente  $S_2$  (Stream-Surface-Fitted Co-ordinates) como mostrado na figura IV.2. Esse sistema é curvilinear não ortogonal ajustado a  $S_2$  e gira com a rotação  $\Omega$  do impelidor.

A geometria da superfície  $S_2$  será dada pela própria geometria da pá ("blade") do impelidor. Os pontos na superfície  $S_2$  são dados no sistema de coordenadas cilíndrico, ou seja, cada ponto é definido pelas coordenadas  $(R, \varphi, Z)$ .

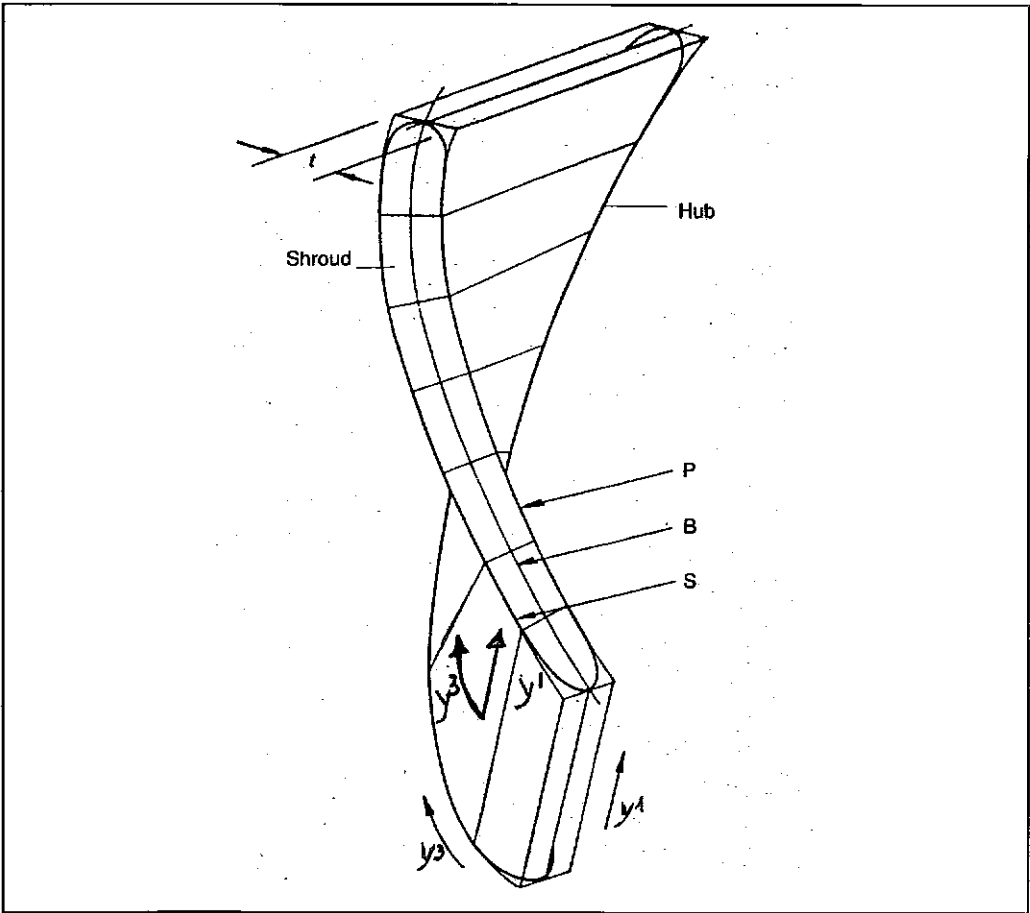


Figura IV.2 - Linhas coordenadas  $y^1$  e  $y^3$  na superfície  $S_2$  do impelidor.

Para cada ponto da superfície serão calculados os vetores base covariantes e contravariantes, e os tensores métricos covariantes e



contravariantes que permitem discretizar a superfície no espaço 3D para o plano computacional  $y^1, y^3$ .

Vetores Base Covariantes:

$$\vec{e}_1 = \left( \frac{\partial R}{\partial y^1}, R \frac{\partial \phi}{\partial y^1}, \frac{\partial Z}{\partial y^1} \right)$$

$$\vec{e}_2 = \left( \frac{\partial R}{\partial y^2}, R \frac{\partial \phi}{\partial y^2}, \frac{\partial Z}{\partial y^2} \right)$$

$$\vec{e}_3 = \left( \frac{\partial R}{\partial y^3}, R \frac{\partial \phi}{\partial y^3}, \frac{\partial Z}{\partial y^3} \right)$$

(IV.1)

Vetores Base Contravariantes:

$$\vec{e}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \vec{e}_j \times \vec{e}_k, \quad (i=1,2,3) \quad (i,j,k) \text{ ciclico.} \quad (\text{IV.2})$$

Tensor Métrico Covariante:

$$\vec{g}_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (\text{IV.3})$$

Tensor Métrico Contravariante:

$$\vec{g}^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j \quad (\text{IV.4})$$

Jacobiano da Transformação:

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det[\vec{g}_{ij}]} = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \quad (\text{IV.5})$$

### IV.3 - ESQUEMA DE DIFERENÇAS FINITAS DE HOPSCOTCH

As equações apresentadas no capítulo anterior são as equações de NS para escoamento compressível, turbulento e não permanente, e formam um conjunto de equações ao mesmo tempo hiperbólicas e parabólicas. Embora queiramos a solução do regime permanente, não eliminaremos os termos não permanentes que geram um conjunto de equações difíceis de resolver numericamente. Quase todas as soluções numéricas com sucesso das equações de NS compressível empregam a forma não permanente, obtendo a solução permanente através do avanço da solução no tempo ("marching time solution") até obter a convergência especificada.

Para resolver as equações podemos utilizar esquemas de diferenças finitas explícitos ou implícitos, sendo que em geral os métodos possuem precisão de segunda ordem no espaço e de primeira ou segunda ordem no tempo. Como estamos buscando a solução permanente do escoamento, usaremos um esquema com precisão de primeira ordem no tempo que nos permite obter a solução com poucos passos.

Nesse trabalho usaremos o esquema de solução numérica de HOPSCOTCH ( ver Delaney, 1983 [9] e Pletcher, 1984 [25] ). Esse esquema combina as características positivas dos métodos explícitos e implícitos no tempo, já que resolve as equações em dois passos, sendo o primeiro explícito e o segundo implícito.

O esquema de hopscotch é um esquema de dois passos empregando diferenças centradas para as derivadas espaciais e diferenças para frente para as derivadas temporais.

As equações (III.1) a (III.5) podem ser expressas na seguinte forma vetorial:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y^1} + \frac{\partial G}{\partial y^3} = S \quad (\text{IV.6})$$

onde  $E, F, G, S$  são os seguintes vetores:

$$E = \{\rho\sqrt{g}, \rho\sqrt{gw_1}, \rho\sqrt{gw_2}, \rho\sqrt{gw_3}, \rho\sqrt{gI} - \sqrt{gp}\} \quad (IV.7)$$

$$F = \{\rho\sqrt{gw^1}, \rho\sqrt{gw_1w^1}, \rho\sqrt{gw_2w^1}, \rho\sqrt{gw_3w^1}, \rho\sqrt{gIw^1}\} \quad (IV.8)$$

$$G = \{\rho\sqrt{gw^3}, \rho\sqrt{gw_1w^3}, \rho\sqrt{gw_2w^3}, \rho\sqrt{gw_3w^3}, \rho\sqrt{gIw^3}\} \quad (IV.9)$$

S = {termos do lado direito da equação  
III.1, III.2, III.3, III.4, III.5}

Aplicando o esquema de HOPSCOTCH à equação diferencial vetorial (IV.6), temos as seguintes expressões de DIFERENÇAS FINITAS para os dois passos consecutivos:

Primeiro Passo,  $j + k + \nu = \text{par}$

$$E_{j,k}^{\nu+1} = E_{j,k}^{\nu} - \frac{\Delta t}{2\Delta y^1}(F_{j+1,k}^{\nu} - F_{j-1,k}^{\nu}) - \frac{\Delta t}{2\Delta y^3}(G_{j,k+1}^{\nu} - G_{j,k-1}^{\nu}) + \frac{1}{2}\Delta t S_{j,k}^{\nu} + AM^{\nu} \quad (IV.10)$$

Segundo Passo,  $j + k + \nu = \text{impar}$

$$E_{j,k}^{\nu+1} = E_{j,k}^{\nu} - \frac{\Delta t}{2\Delta y^1}(F_{j+1,k}^{\nu+1} - F_{j-1,k}^{\nu+1}) - \frac{\Delta t}{2\Delta y^3}(G_{j,k+1}^{\nu+1} - G_{j,k-1}^{\nu+1}) + \frac{1}{2}\Delta t S_{j,k}^{\nu} + AM^{\nu+1} \quad (IV.11)$$

onde  $j, k$  definem um ponto no espaço e  $\nu$  define o tempo.  $AM^{\nu}, AM^{\nu+1}$  são termos de amortecimento de segunda-ordem (amortecimento viscoso artificial), necessários para estabilizar a solução em regiões de elevados gradientes; são dados por:

$$AM^{\nu} = a_{y^1}(E_{j+1,k}^{\nu} - 2E_{j,k}^{\nu} + E_{j-1,k}^{\nu}) + a_{y^3}(E_{j,k+1}^{\nu} - 2E_{j,k}^{\nu} + E_{j,k-1}^{\nu}) \quad (IV.12)$$

$$AM^{v+1} = a_{y^1} (E_{j+1,k}^{v+1} - 2E_{j,k}^{v+1} + E_{j-1,k}^{v+1}) + a_{y^3} (E_{j,k+1}^{v+1} - 2E_{j,k}^{v+1} + E_{j,k-1}^{v+1}) \quad (\text{IV.13})$$

$a_{y^1}, a_{y^3}$  são coeficientes de amortecimento que garantem a convergência desde que atendam às seguintes relações:

$$0 \leq a_{y^1} \leq \frac{1}{N_{y^1}} + 0.5 \frac{|p_{j+1,k}^{v+1} - 2p_{j,k}^v + p_{j-1,k}^{v+1}|}{p_{j,k}^v} \quad (\text{IV.14})$$

$$0 \leq a_{y^3} \leq \frac{1}{N_{y^3}} + 0.5 \frac{|p_{j,k+1}^{v+1} - 2p_{j,k}^v + p_{j,k-1}^{v+1}|}{p_{j,k}^v} \quad (\text{IV.15})$$

onde  $N_{y^1}$  e  $N_{y^3}$  são o número de divisões máximas do grid nas direções  $y^1$  e  $y^3$  respectivamente.

A análise de estabilidade linear do algoritmo de hopscotch realizada por Gourlay e Morris, 1972 [26], mostra que o algoritmo é estável para todos os valores dos coeficientes de amortecimento  $a_{y^1}, a_{y^3}$ , desde que o intervalo de tempo  $\Delta t$  satisfaça o critério de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) que conduz a:

$$\Delta t \leq 1 / \left\{ \frac{1}{\Delta y^1} \left[ \left( \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right) |w^1| + \sqrt{\left( \left( \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right) |w^1| \right)^2 + \left( (y_R^1)^2 + (y_\phi^1)^2 + (y_z^1)^2 \right)} \right] \frac{\rho}{\rho} \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta y^3} \left[ \left( \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right) |w^3| + \sqrt{\left( \left( \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right) |w^3| \right)^2 + \left( (y_R^3)^2 + (y_\phi^3)^2 + (y_z^3)^2 \right)} \right] \frac{\rho}{\rho} \right\}$$

## CAPÍTULO V - APLICAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO

### V.1 - O IMPELIDOR DE ECKARDT

Poucas geometrias testadas estão disponíveis onde medidas detalhadas do campo do escoamento de impelidores centrífugos tenham sido feitas. Os casos mais amplamente conhecidos são os impelidores "0" e "A" de Eckardt, que foram medidos no final da década de 70 num programa de pesquisa da organização alemã FVV( Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen ) no DLR ( Deutsche Luft- und Raumfahrt ), formalmente denominado DFVLR ( Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt fuer Luft- und Raumfahrt ). Os impelidores "0" e "A" têm sido usados extensivamente para validação de códigos computacionais devido aos detalhes das medidas publicados na literatura.

No artigo de Eckardt, 1980 [21], são apresentados os detalhes relativos à geometria e às medidas de desempenho dos dois impelidores. O impelidor "0" possui descarga radial ( pás retas ) e o impelidor "A" possui pás para trás com ângulo de saída de  $60^\circ$ , conforme apresentado na figura V.1.

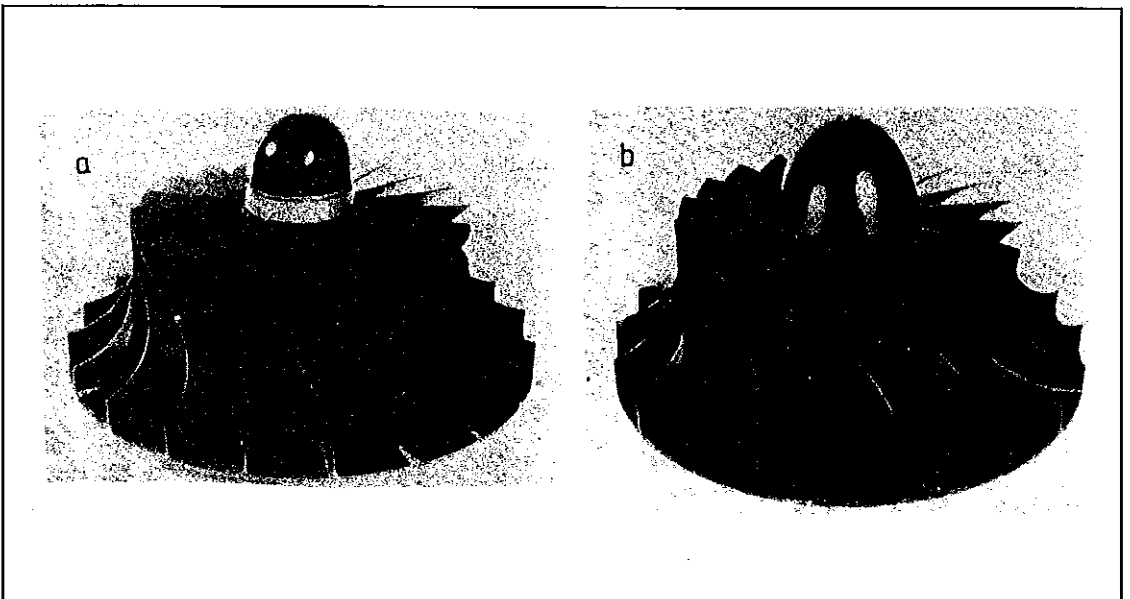


Figura V.1 - Impelidores de Eckardt: a) rotor "0" ( pás retas ), b) rotor "A" ( pás para trás ).

A análise do escoamento foi realizada com três níveis de instrumentação, a saber:

1. Convencional: medidores de pressão e temperatura de estagnação para determinar as características globais do impelidor.
2. Instantânea: registradores de pressão de resposta rápida para analisar a distribuição de pressão na parede da tampa ("shroud") do impelidor.
3. Instantânea: medidores de velocidade local com o velocímetro a laser de 2 focos (L2F) para revelar o perfil do escoamento dentro do impelidor.

A geometria detalhada dos impelidores de Eckardt é a seguinte ( ver o apêndice do artigo de Schuster, P. e Schmidt-Eisenlohr, U., 1980 [22] ):

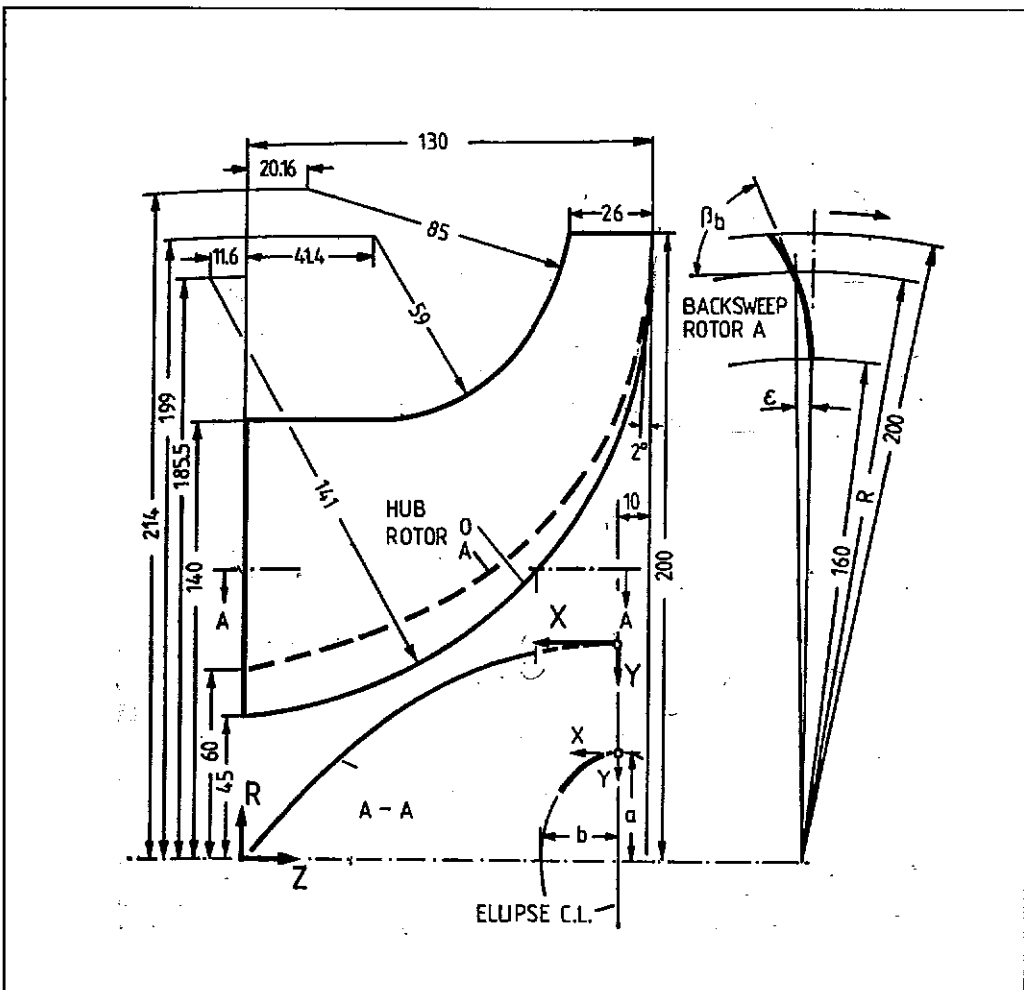


Figura V.2 - Geometria dos impelidores de Eckardt, dimensões em mm.

As pás dos impelidores possuem forma elipsoidal em seções cilíndricas dada pela seguinte expressão:

$$\frac{(Y-a)^2}{a^2} + \frac{X^2}{b^2} =$$

onde os semi-eixos da elipse são dados por:

$$a = 4.7693 \cdot R(mm)$$

$$= const. = 220.579(mm)$$

O perfil do cubo do impelidor "A" é dado na tabela V.1 e o ângulo da pá para trás para  $R > 160$  mm é dado na tabela V.2.

Tabela V.1 - Perfil do cubo de "A"

| Z (mm) | R (mm)  |
|--------|---------|
| 0      | 60.000  |
| 20     | 64.818  |
| 40     | 71.153  |
| 60     | 79.962  |
| 80     | 92.484  |
| 95     | 105.681 |
| 105    | 117.500 |
| 115    | 133.782 |
| 120    | 145.005 |
| 125    | 160.750 |
| 130    | 200.000 |

Tabela V.2 - Ângulo da pá para trás de "A"

| R (mm) | $\epsilon$ (°) | $\beta$ (°) |
|--------|----------------|-------------|
| 160    | 0.000          | 90.000      |
| 170    | 0.204          | 82.239      |
| 180    | 0.908          | 73.213      |
| 190    | 2.092          | 64.805      |
| 200    | 3.663          | 60.000      |

O escoamento no impelidor é analisado em seis planos de medida de I a V como mostrado na figura V.3. A posição relativa dos planos ao longo da extremidade ("shroud") do impelidor é apresentada na tabela V.3.

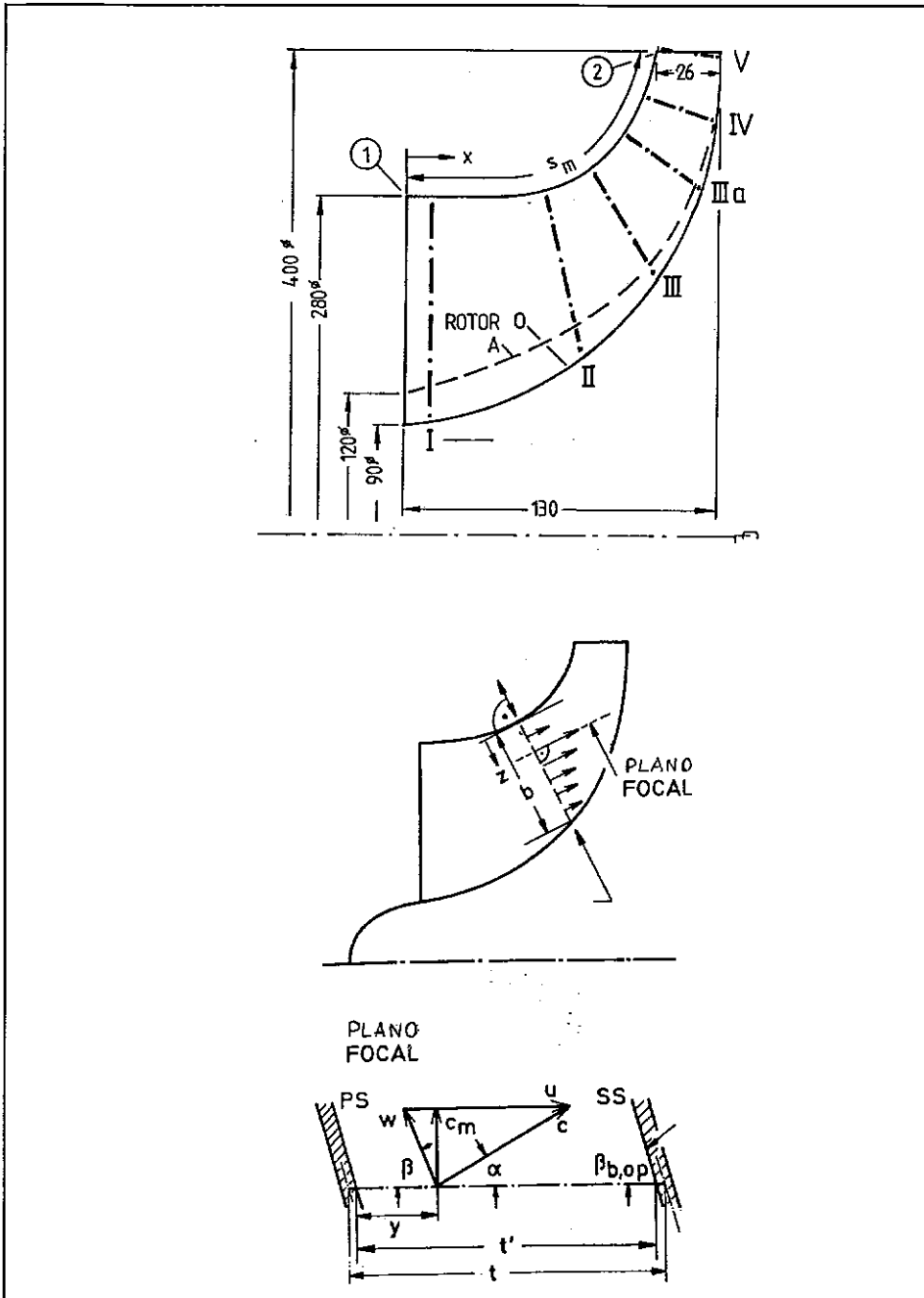


Figura V.3 - Planos de medição das velocidades.



O impelidor "A" de Eckardt será usado como geometria de entrada do programa desenvolvido a partir do esquema numérico apresentado no item IV.3.

Tabela V.3 - Posição dos Planos de medida

| Plano nº | $y^3/S_m$ |
|----------|-----------|
| I        | 0.08      |
| II       | 0.43      |
| III      | 0.59      |
| IIIa     | 0.73      |
| IV       | 0.87      |
| V        | 1.01      |

## V.2 - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS COMPUTACIONAIS E EXPERIMENTAIS

Os resultados experimentais foram extraídos das referências [21] e [22].

Foi utilizada uma malha computacional de 30 X 30, sendo 30 pontos do cubo à carcaça ("spanwise direction") e 30 pontos da entrada à saída ("steamwise direction"). Essa malha é fina o suficiente para capturar a maior parte da estrutura do escoamento para a geometria do impelidor de Eckardt. Os trabalhos de Moore e Moore, 1980 [23], mostraram que para essa geometria, uma malha de 14 X 17 já é boa para a avaliação numérica do escoamento.

O programa para resolução do escoamento num impelidor centrífugo foi escrito em FORTRAN e, ao rodar num PC 486/66, o tempo de execução foi de aproximadamente 6 horas, considerando que a convergência para o regime permanente se dá quando a mudança relativa máxima da pressão estática,  $\frac{|P_{j,k}^{v+1} - P_{j,k}^v|}{P_{j,k}^v}$ , é menor que 0.00001 ( $10^{-5}$ ).

Como descrito no item V.1, as medidas experimentais de velocidade foram realizadas ao longo de 6 planos ( I, II, III, IIIA, IV e V ) em pontos de

coordenadas normalizadas  $y_1/b=\text{constante}$  e  $y^2/t=\text{constante}$ , em cada plano posicionado ao longo do escoamento, onde  $b$  é a distância da carcaça ("shroud") ao cubo ("hub") e  $t$  é a distância de pá ("blade") a pá..

As condições de teste do impelidor "A" de Eckardt são as seguintes:

|   |                          |
|---|--------------------------|
| Fluido -----                              | Ar                       |
| Temperatura de Estagnação na Sucção ----- | 15 °C                    |
| Pressão de Estagnação na Sucção -----     | 1.03 kgf/cm <sup>2</sup> |
| Rotação -----                             | 14000 RPM                |
| Vazão Mássica -----                       | 16344/24300 kg/h         |

Os gráficos V.1 e V.2 apresentam a distribuição de pressão estática relativa ao longo da extremidade ("shroud") do impelidor para duas condições operacionais( Vazão mássica de 16344 kg/h e 24300 kg/h), onde  $y_1/b=1$ . Os gráficos V.3 a V.14 apresentam a distribuição de velocidade relativa medida na superfície de escoamento  $S_2$  considerada na posição  $y^2/t=0.5$ (posição intermediária entre as pás("blades")). Nos gráficos, a linha contínua representa os resultados de cálculo e os pontos discretos representam os resultados experimentais.

Os resultados de cálculo mostram uma boa concordância com os dados experimentais. Os valores de pressão estática desviaram dos resultados experimentais na entrada devido, provavelmente, à superestimação do efeito da viscosidade e do ângulo de incidência negativo sobre a pressão na entrada do impelidor.

Nos planos de medida I, II e III, os resultados previstos concordam bem com os dados experimentais, principalmente para a vazão de 16344 kg/h. Nos planos de medida seguintes ( planos IIIa, IV e V ), para as duas vazões, as velocidades medidas na região próxima à extremidade ("shroud") do impelidor são bem menores que as previstas pelo código computacional devido ao fenômeno de separação do escoamento que ocorre a partir do plano IIIa. No plano de saída essa discrepância é menor devido à minimização da separação obtida em função da geometria de pás para trás do impelidor nessa região.

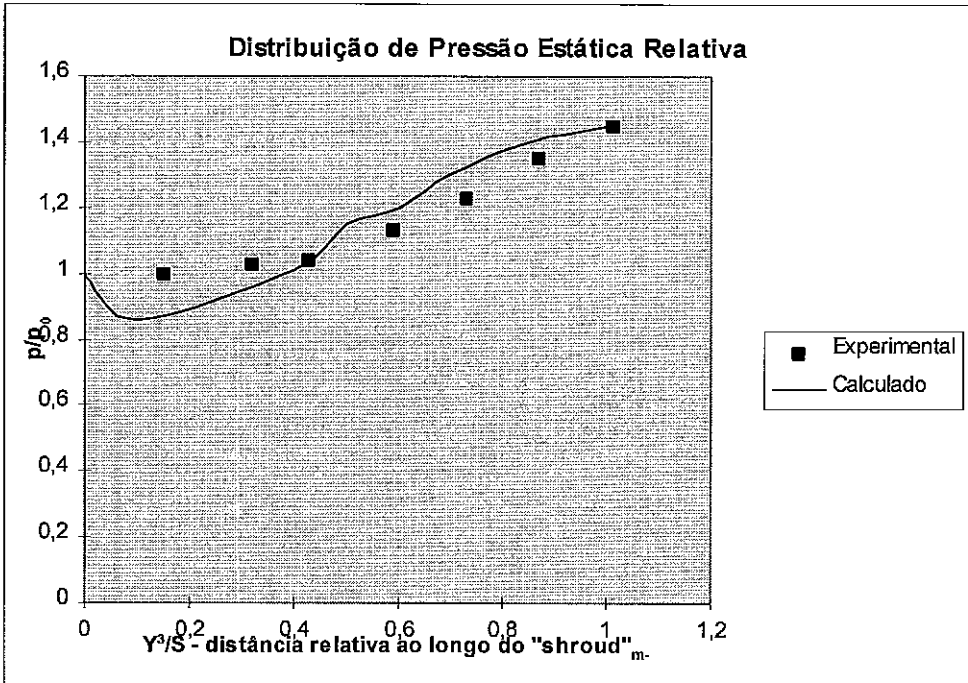


Gráfico V.1 - Pressão estática ao longo do "shroud"; Vazão : 16344 kg/h.

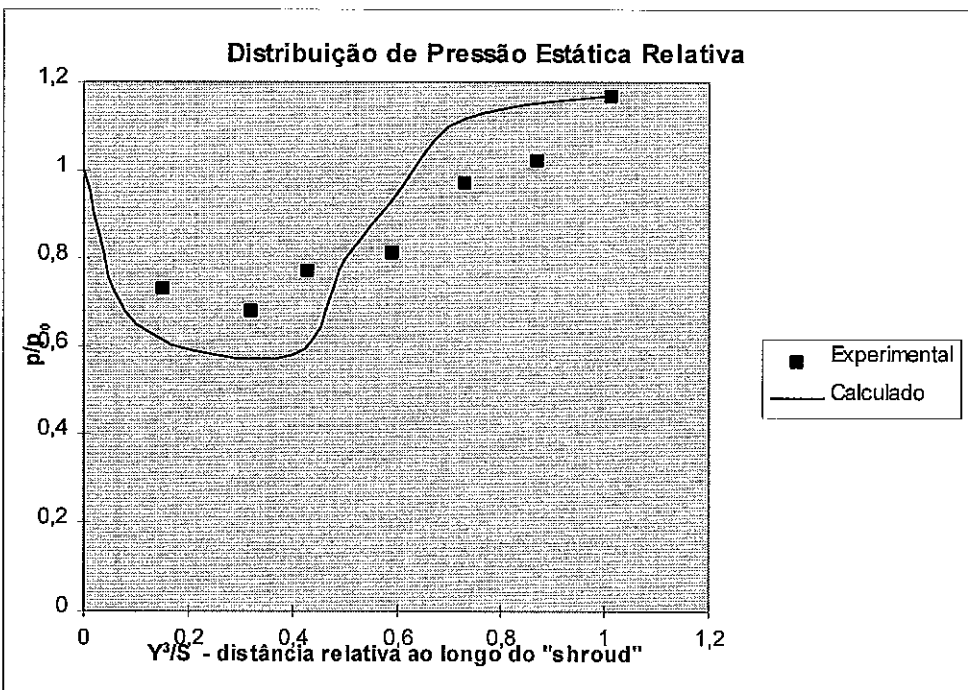


Gráfico V.2 - Pressão estática ao longo do "shroud"; Vazão: 24300 kg/h.

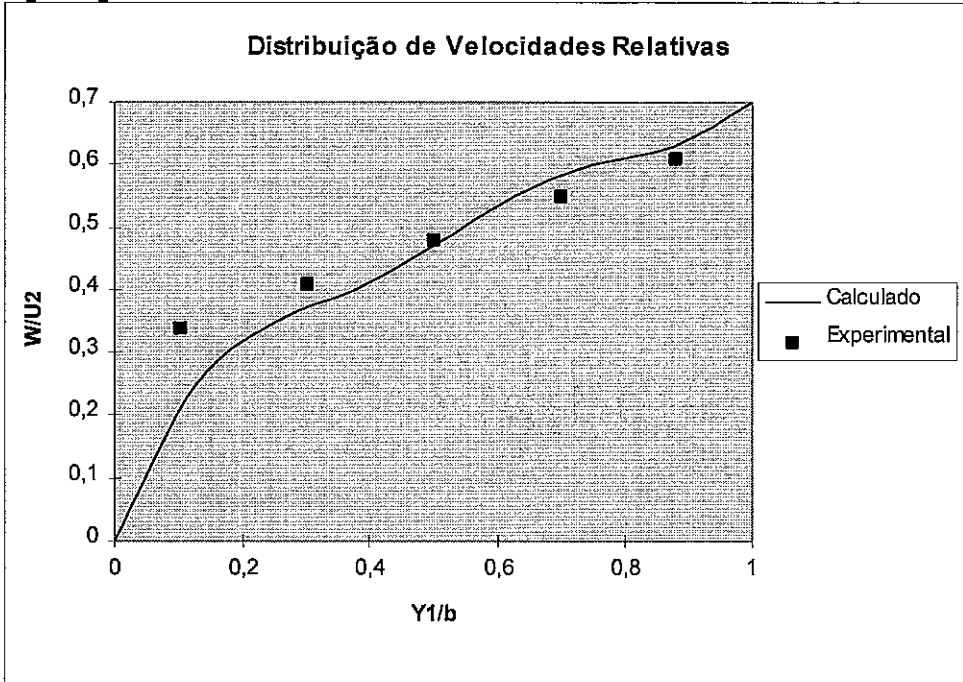


Gráfico V.3 - Plano I; Vazão: 16344 kg/h.

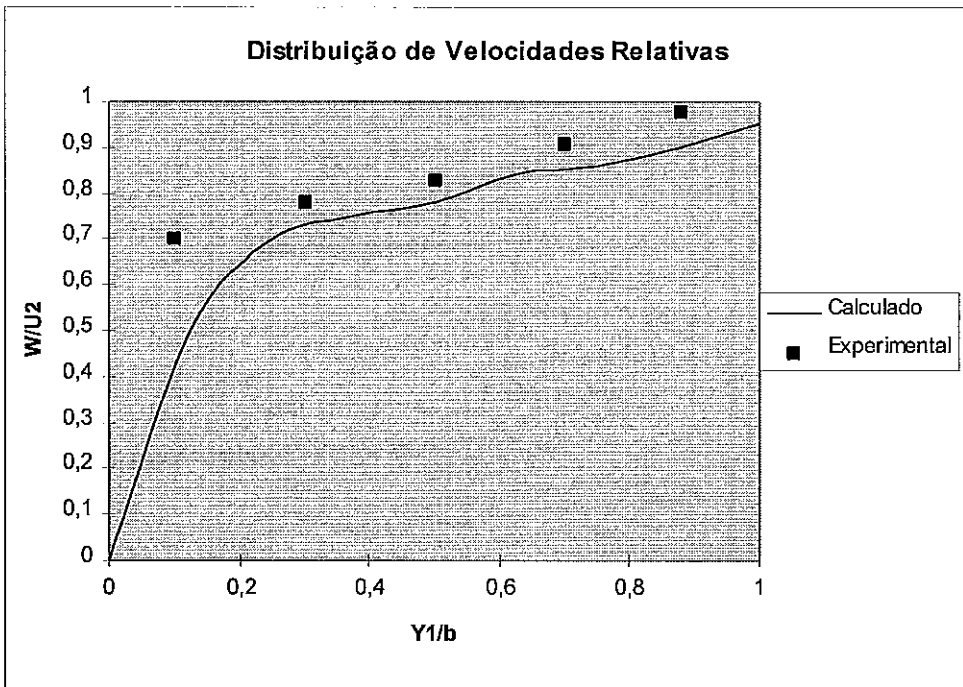


Gráfico V.4 - Plano I; Vazão: 24300 kg/h.

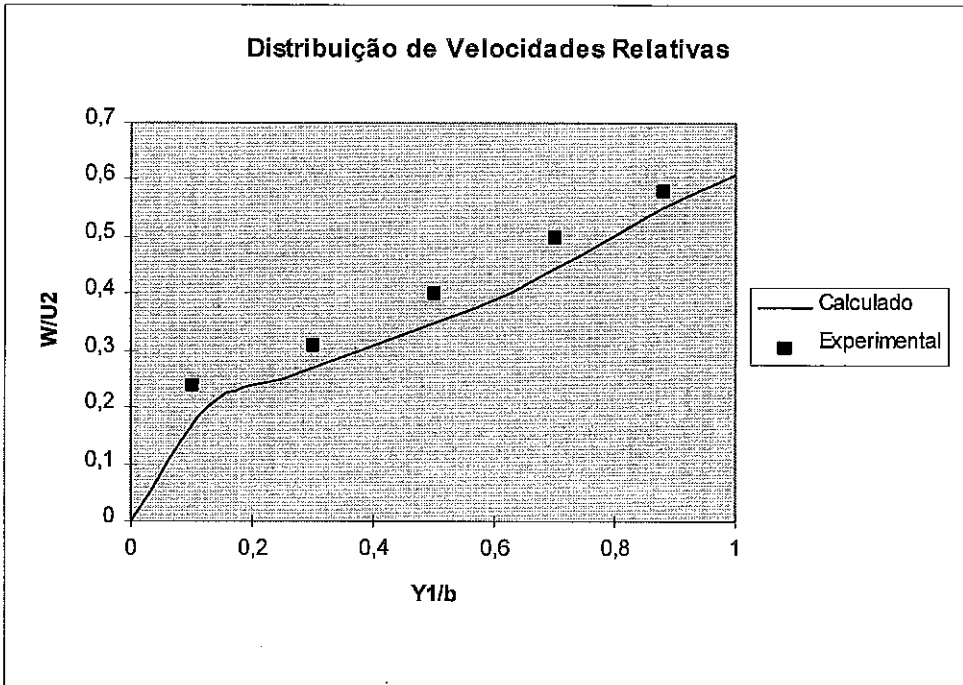


Gráfico V.5 - Plano II; Vazão: 16344 kg/h.

5

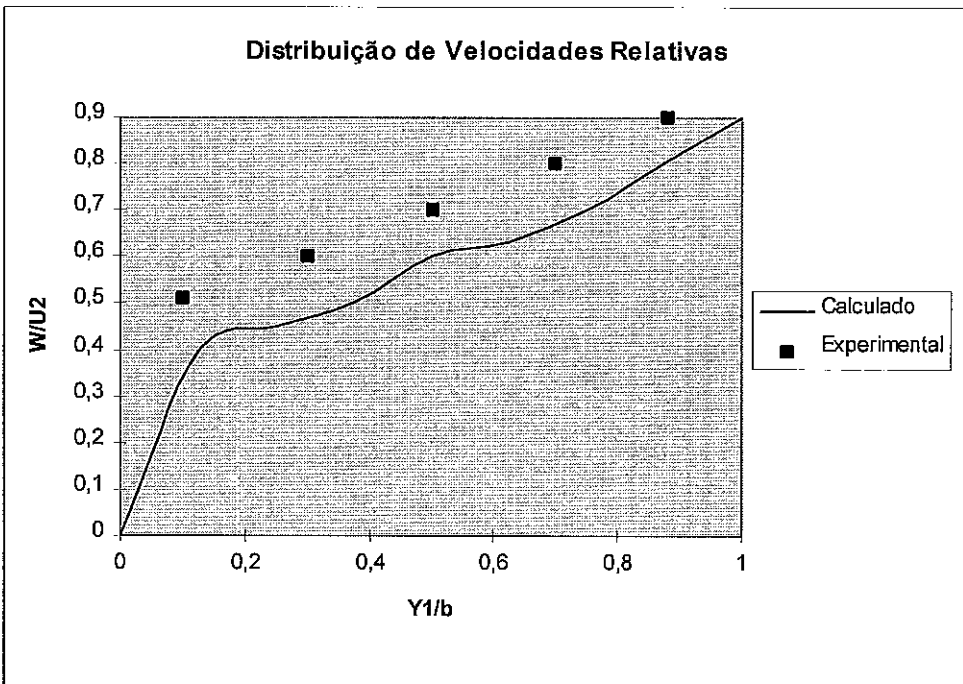


Gráfico V.6 - Plano II; Vazão: 24300 kg/h.

5

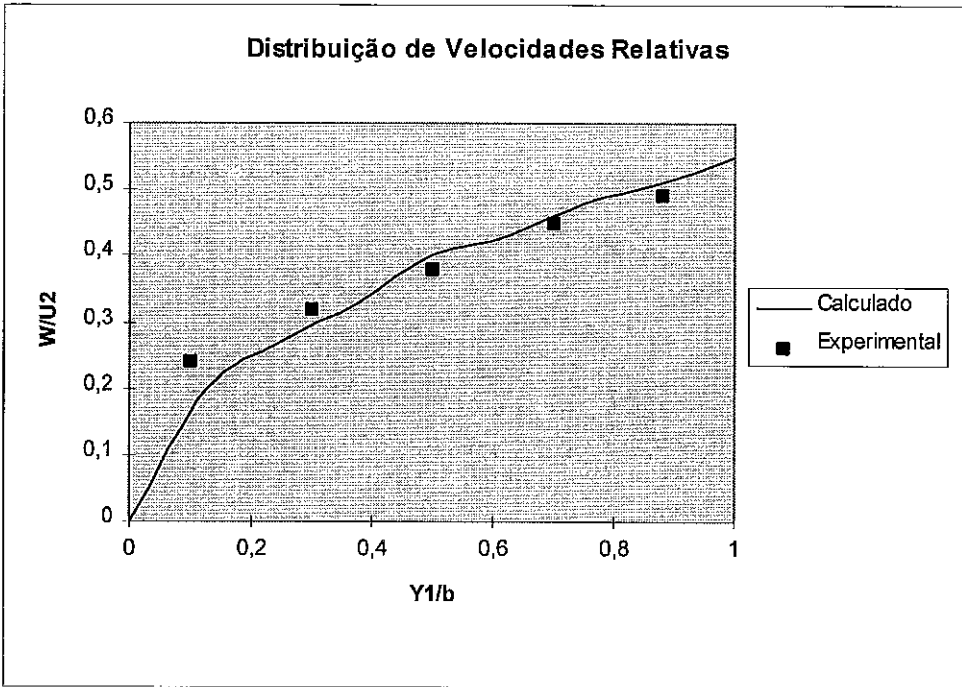


Gráfico V.7 - Plano III; Vazão: 16344 kg/h.

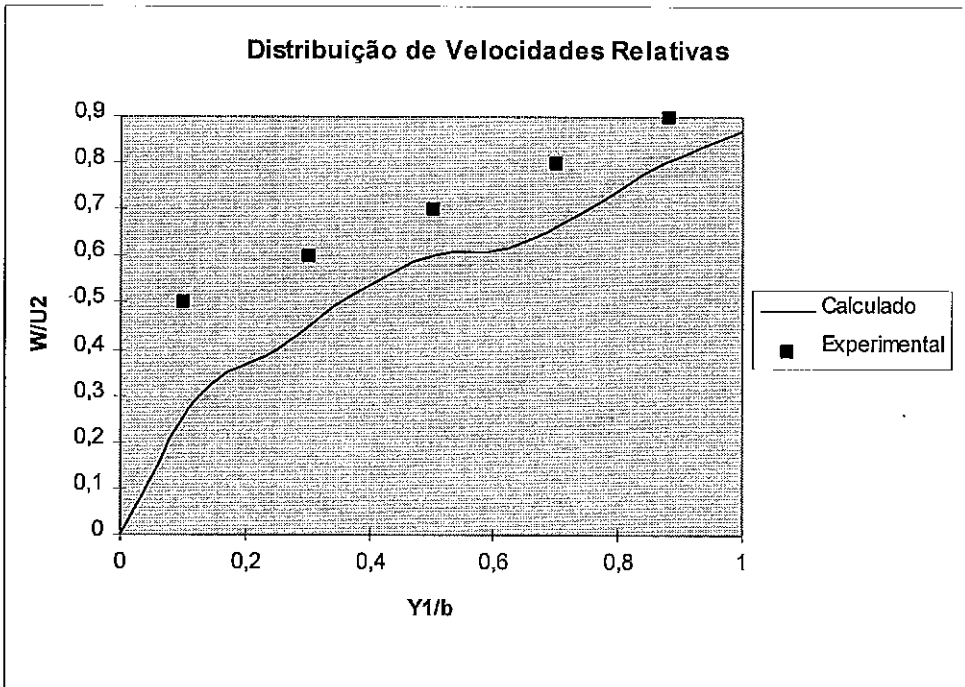


Gráfico V.8 - Plano III; Vazão: 24300 kg/h.

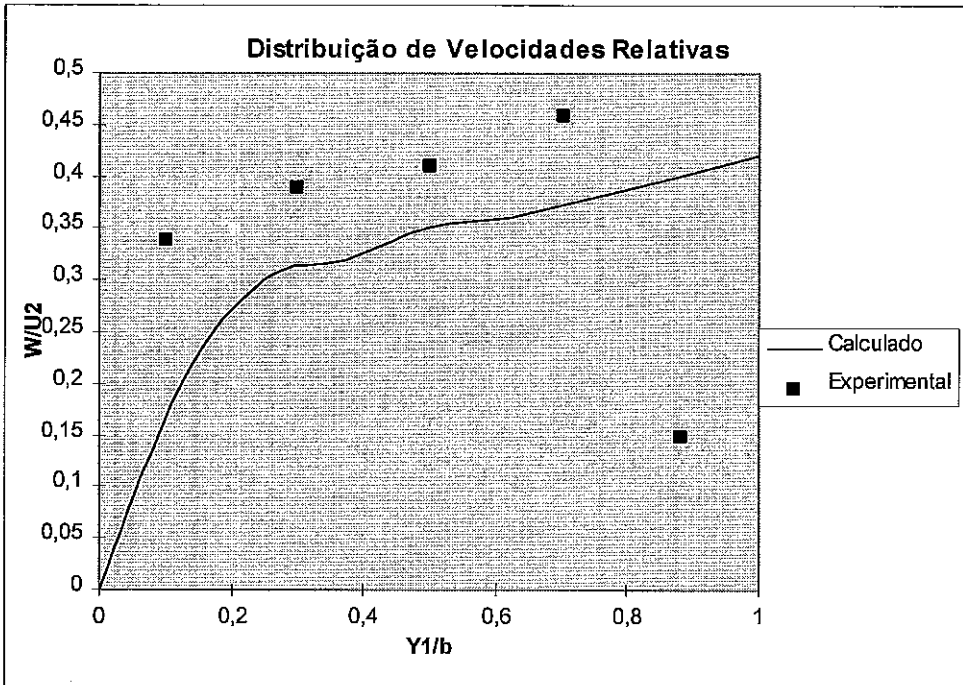


Gráfico V.9 - Plano IIIa; Vazão: 16344 kg/h.

5

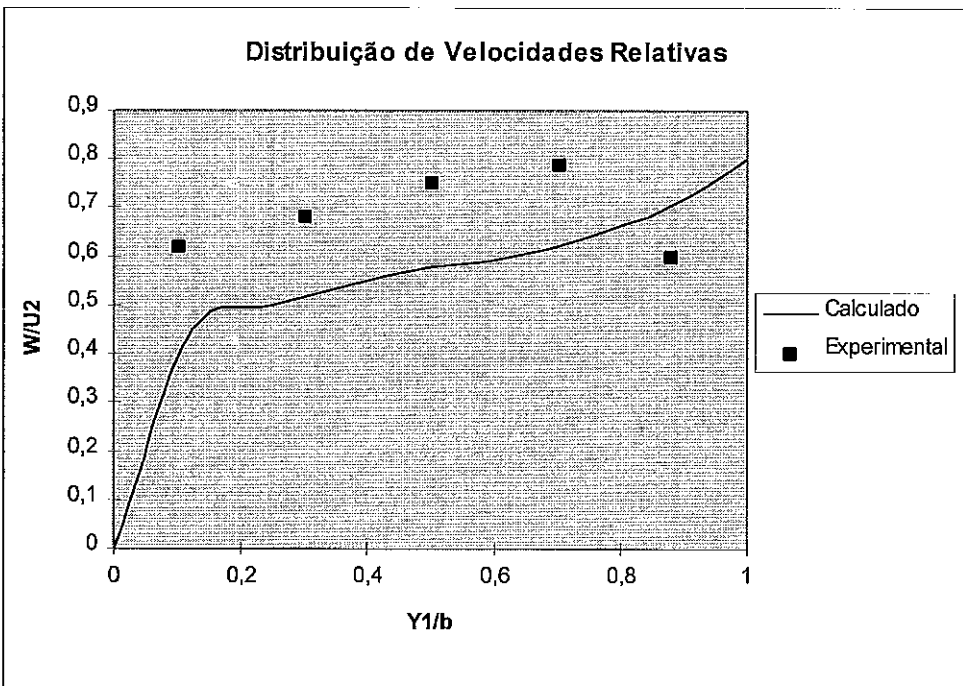


Gráfico V.10 - Plano IIIa; Vazão: 24300 kg/h.

5

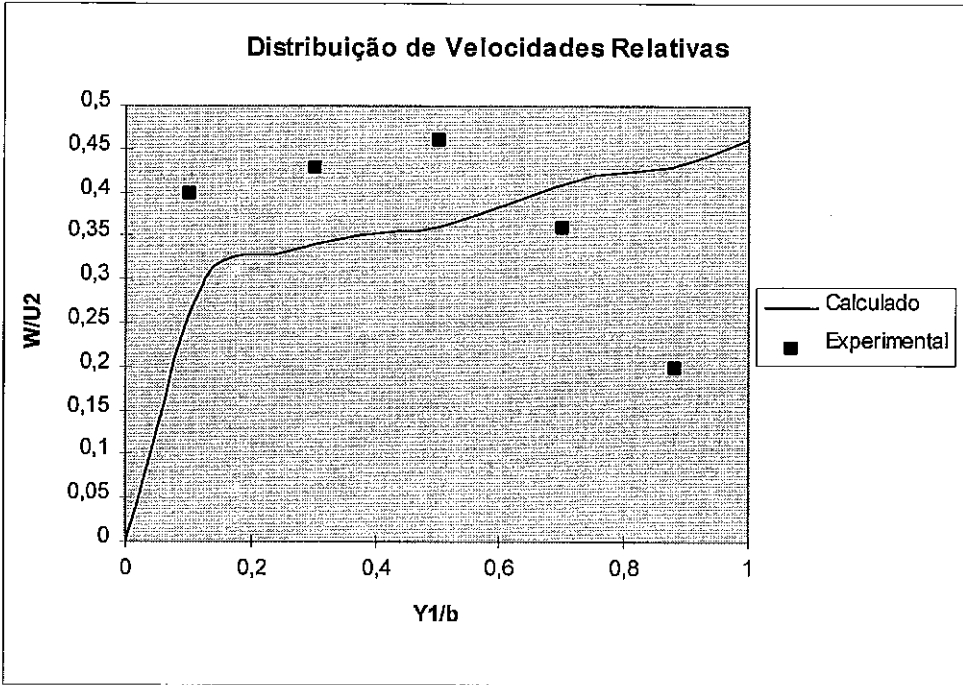


Gráfico V.11 - Plano IV; Vazão: 16344 kg/h.

5

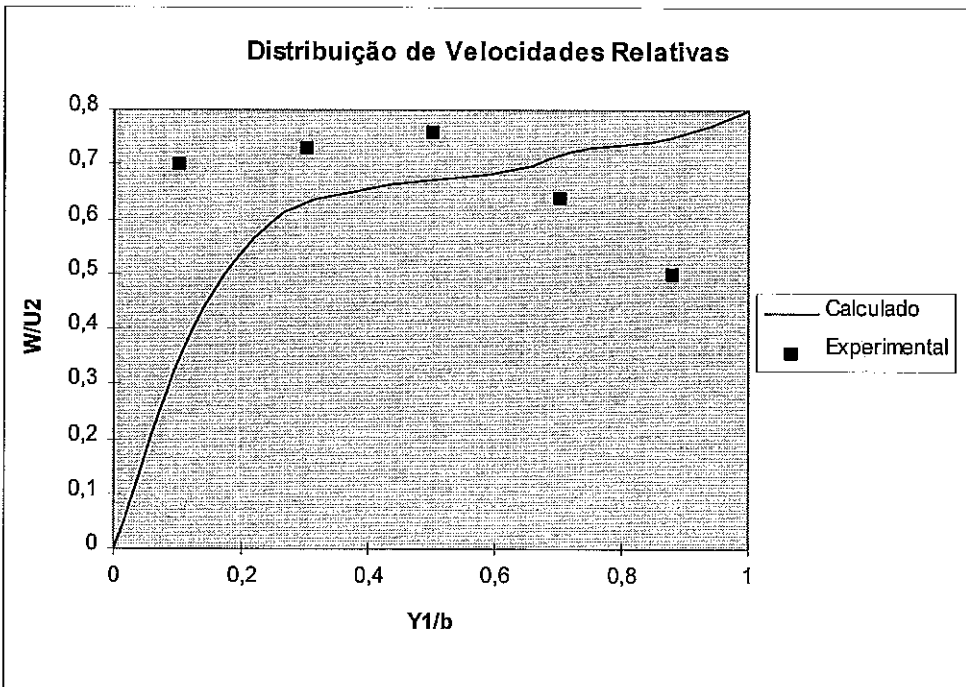


Gráfico V.12 - Plano IV; Vazão: 24300 kg/h.

5



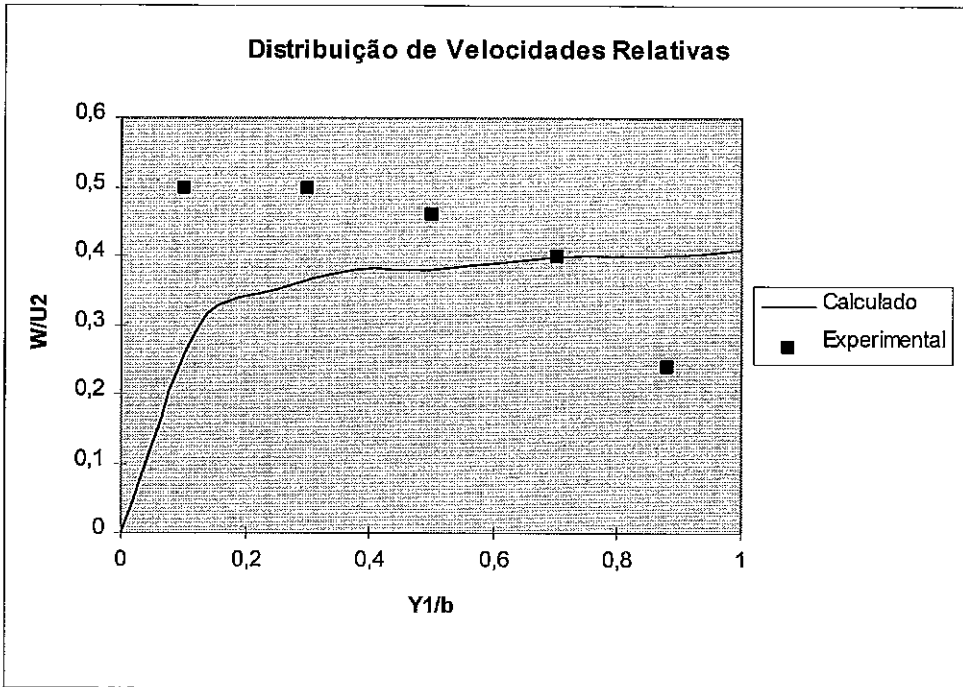


Gráfico V.13 - Plano V; Vazão: 16344 kg/h.

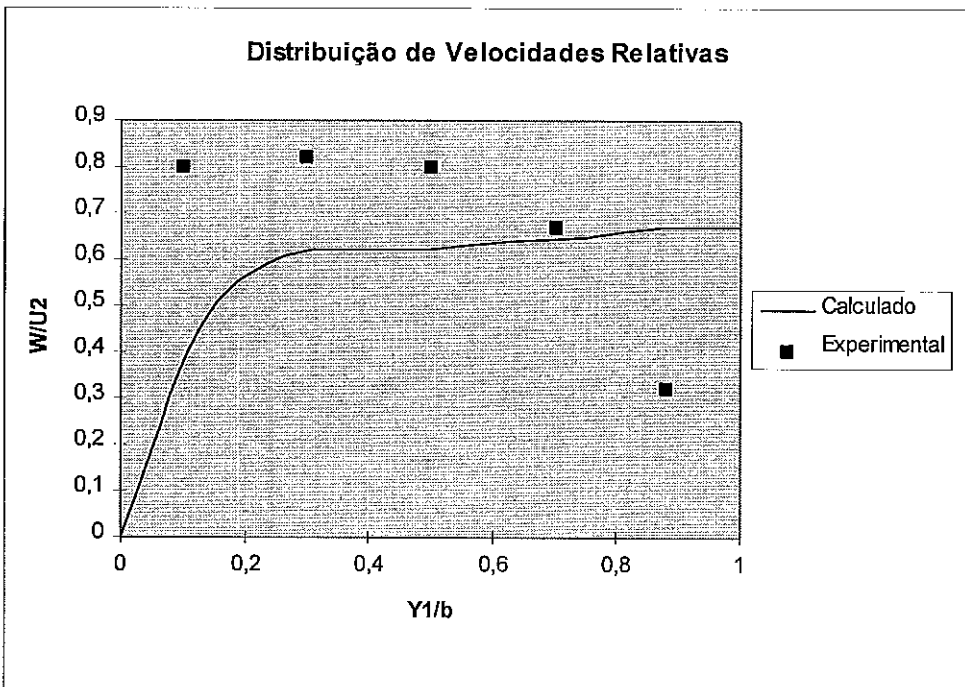


Gráfico V.14 - Plano V; Vazão: 24300 kg/h.

## CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### VI.1 - CONCLUSÕES

Os campos de escoamento medido e calculado para o impelidor de "A" de Eckardt foram comparados para verificar a confiabilidade de um método de cálculo quase tridimensional. A teoria levou em consideração a viscosidade e a turbulência, resolvendo o escoamento numa superfície de corrente ("stream surface").

A concordância do campo de velocidade é boa, principalmente na região onde não existe separação (plano IIIa).

A distribuição de pressão estática ao longo do "shroud" calculada concorda bem com a medida, a menos da região de entrada onde o programa deve estar superestimando o efeito da viscosidade e do ângulo de incidência negativa na entrada do impelidor.

A separação do escoamento logo na saída do indutor indica que o projeto do impelidor não foi otimizado. O início da pá para trás no impelidor "A" poderia se dar num raio menor que 160 mm de modo a evitar a separação e melhorar a eficiência do impelidor.

### VI.2 - SUGESTÕES

A análise numérica do escoamento em duas dimensões produziu bons resultados, principalmente do ponto de vista de características globais do escoamento. O próximo passo pode ser uma análise tridimensional do escoamento aproveitando as equações já desenvolvidas no item II.3. Essa análise permitirá avaliar detalhes do escoamento, principalmente na região da extremidade ("shroud")/superfície de sucção ("suction surface") do impelidor.

A análise termodinâmica dos perfis de temperatura, pressão e massa específica gerados poderão permitir avaliar a eficiência de compressão do conjunto impelidor/difusor.

Essa avaliação tridimensional ainda não tem sido usada como ferramenta de projeto de impelidores no dia a dia por causa do tempo de execução do programa ser elevado mesmo numa estrutura computacional de grande porte, por exemplo, num Cray-Xmp o tempo de execução chega a 24 horas ( Hah e outros, 1988 [24] ). Esse porém será o caminho seguido por usuários e fabricantes de compressores centrífugos, com o objetivo de obter maior compreensão da física do escoamento e, conseqüentemente, melhorar o desempenho das máquinas, tanto em termos de faixa operacional como de redução de consumo energético, ou seja, aumento de eficiência de compressão.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] FOWLER, H. S., 1968, "The Distribution and Stability of Flow in a Rotating Channel", ASME Journal of Engineering for Power, Vol. 90, pp. 229-236.
- [2] MOORE, J., 1973, "A Wake and an Eddy in a Rotating Radial Flow Passage", ASME Journal of Engineering for Power, Vol. 95, pp. 205-219.
- [3] DEAN, R. C., Jr., 1981, "On the Unresolved Fluids Dynamics of the Centrifugal Compressor", Advanced Centrifugal Compressors, ASME Publication, pp. 1-55.
- [4] HARTMANN, M. J., 1980, "Technical Evaluation Report and Discussion", Centrifugal Compressors, Flow, Phenomena and Performance, AGARD-CP-282, pp. vi-xi.
- [5] LAKSHMINARAYANA, B., 1991, "An Assessment of Computational Fluid Dynamic Techniques in the Analysis and Design of Turbomachinery - The 1990 Freeman Scholar Lecture", Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering, Vol. 113, pp. 315-352.
- [6] CASEY, M. V. e ROTH, P., 1984, "A Streamline Curvature Throughflow Method for Radial Turbocompressors", Computational Methods in Turbomachinery, IMechE Publication 1984-3, London, Paper No. C57/84.
- [7] WU, C. H., 1952, "A General Theory of Three Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachine in Radial, Axial and Mixed Flow Types", NACA TN 2604.
- [8] CHEN NAI-XING, 1987, "A Time Marching Method for Calculating S<sub>2</sub> Stram Surface Viscous Flow in a Single Rotor Compressor", ASME Paper 87-GT-67.
- [9] DELANEY, R. A., 1983, "Time Marching Analysis of Steady Transonic Flow in Turbomachinery Cascades Using Hopscotch Method", Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Power, Vol. 105, pp. 272-279.

- [10] DAWES, W. N., 1988, "Development of a 3D Navier Stokes Solver for Application to All Types of Turbomachinery", ASME Paper 88-GT-70.
- [11] DENTON, J. D., 1992, "The Calculation of Three-Dimensional Viscous Flow Through Multistage Turbomachines", Transactions of the ASME, Journal of Turbomachinery, Vol. 114, pp. 18-26.
- [12] DENTON, J. D., 1985, "Calculation of Fully Three Dimensional Flow Through Any Type of Turbomachinery Blade Row", AGARD LS 140.
- [13] DENTON, J. D. e SINGH, U. K., 1979, "Time Marching Methods for Turbomachinery Flow Calculation", VKI Lecture Series 1979-7.
- [14] DENTON, J. D., 1986, "The Use of a Distributed Force to Simulate Viscous Effects in 3D Flow Calculations", ASME Paper 86-GT-144.
- [15] CASEY, M. V., DALBERT, P. e ROTH, P., 1992, "The Use of 3D Viscous Flow Calculations in the Design and Analysis of Industrial Centrifugal Compressors", Transactions of the ASME, Journal of Turbomachinery, Vol. 114, pp. 27-37.
- [16] SOROKES, J. M., 1993, "The Practical Application of CFD in the Design of Industrial Centrifugal Impellers", DRESSER-RAND Employee Paper.
- [17] CUMPSTY, N. A., 1989, "Compressors Aerodynamics", Longman Scientific & Technical, pp. 476.
- [18] WARSI, Z. U. A., 1981, "Tensors and Differential Geometry Applied to Analytic and Numerical Coordinate Generation", MSUU-EIRS-81-1, Mississippi State University.
- [19] EISEMAN, P. R., 1980, "Geometric Methods in Computational Fluid Dynamics", ICASE 80-11, NASA Langley Research Center.

- [20] DAWES, W. N., 1987, "Application of a three-dimensional viscous compressible flow solver to a high-speed centrifugal compressor rotor - secondary flow and loss generation", IMechE International Conference Turbomachinery, Cambridge, Paper C261/87.
- [21] ECKARDT, D., 1980, "Flow Field Analysis of Radial and Backswept Centrifugal Compressor Impellers. Part I: Flow Measurements Using a Laser Velocimeter", Performance Prediction of Centrifugal Pumps and Compressors, The 25th Annual International Gas Turbine Conference, pp. 77-86.
- [22] SCHUSTER, P. e SCHMIDT-EISENLOHR, U., 1980, "Flow Field Analysis of Radial and Backswept Centrifugal Compressor Impellers. Part II: Comparison of Potential Flow Calculations and Measurements", Performance Prediction of Centrifugal Pumps and Compressors, The 25th Annual International Gas Turbine Conference, pp. 87-95.
- [23] MOORE, J. e MOORE, J. G., 1980, "Three Dimensional Flow Calculation for Assessing the Thermodynamic Performance of Centrifugal Compressors, Study of the Eckardt Compressor", Proceedings, AGARD Meeting on Centrifugal Compressors, Flow Phenomena and Performance, Brussels.
- [24] HAH, C., BRYANS, A. C., MOUSSA, Z. e TOMSHO, M. E., 1988, "Application of Viscous Flow Computations for the Aerodynamic Performance of a Backswept Impeller at Various Operating Conditions", Transactions of ASME, Journal of Turbomachinery, Vol. 110, pp. 303-311.
- [25] PLETCHER, R. H., TANNEHILL, J. C. e ANDERSON, D. A., 1984, Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, pp. 120-121.
- [26] GOURLAY, A. R. e MORRIS, J. L., 1972, "Hopscotch Difference Methods for Nonlinear Hiperbolic Systems", IBM Journal Res. and Develop., Vol. 16, Nº 4, pp. 349-353.