

A ESTRUTURA DA CAMADA LIMITE TURBULENTA
NA REGIÃO DE SEPARAÇÃO

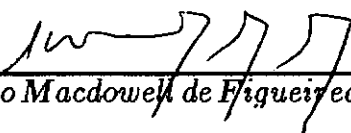
Daniel Onofre de Almeida Cruz

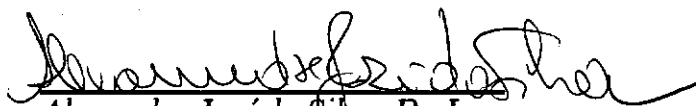
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PRO-
GRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA MECÂNICA

aprovada por:


Atila P. Silva Freire, PhD


Miguel Hiroo Hirata, PhD


Antonio Macdowell de Figueiredo, Dr. Ing.


Alexandre José da Silva, Dr. Ing.

RIO DE JANEIRO, RJ-BRASIL

abril de 1992

CRUZ, DANIEL ONOFRE DE ALMEIDA

A Estrutura da camada limite turbulenta na região de separação

VI, 64p. (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Mecânica, 1992)

Tese- Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Fenômenos de Transporte I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

À Ana e a meus pais

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos aqueles que de alguma forma contribuíram na realização deste trabalho. Em particular gostaria de agradecer a:

Atila P. Silva Freire

pela amizade, pelo apoio e pela cuidadosa orientação sem os quais a realização deste trabalho não teria sido possível:

Marcelo Henrique Barbosa

pelo grande apoio computacional.

Zenaide Alves de Araújo

pelo auxílio prestado durante a confecção final da tese.

CNPq

que sustentou financeiramente este trabalho.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em ciências (M. Sc.)

ESTRUTURA DA CAMADA LIMITE TURBULENTA NA REGIÃO DE SEPARAÇÃO

Daniel Onofre de Almeida Cruz

abril de 1992

Orientador: Atila P. Silva Freire

Programa: Engenharia Mecânica

No presente trabalho o método de análise de escalas e a técnica das expansões assintóticas combinadas são utilizadas para determinar a estrutura da camada limite turbulenta na região de separação. O escoamento ocorre sobre uma placa plana sujeita a um gradiente de pressão adverso e sem troca de calor. Será definida uma velocidade característica da região interna válida tanto na região de separação quanto longe desta. Usando esta velocidade definiremos um parâmetro pequeno em torno do qual, serão feitas expansões assintóticas que possibilitarão a obtenção das equações que regem o escoamento na parte interna da camada limite, para as primeiras ordens de aproximação, na região próxima ao ponto de descolamento. Da análise, surge um critério de descolamento simples e de razoável precisão. Os resultados são comparados com os dados experimentais de Simpson e com o critério de descolamento de Stratford.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

THE STRUCTURE OF THE TURBULENT BOUNDARY LAYER IN VICINITY OF A SEPARATION POINT

Daniel Onofre de Almeida Cruz

april, 1992

Supervisor: Atila P. Silva Freire

Department: Mechanical Engeneering

In the present work, the matched asymptotic expansions method and the scale analysis method are used to study the structure of a turbulent boundary layer in the vicinity of a separation point. The boundary layer is subject to an adverse pressure gradient and to no transfer of heat. A characteristic velocity is defined which holds both in the separation region and far away from it. With this velocity, a small parameter is defined from which asymptotic expansions are derived. These expansions yield two sets of approximate equations of motion: one for the near separation region and another for the far away region. From the analysis a simple and reasonably accurate separation criterion is obtained. The results are compared with the experimental work of Simpson and with the previous theory of Stratford.

ÍNDICE

<i>Ficha catalográfica</i>	ii
<i>Dedicatória</i>	iii
<i>Agradecimentos</i>	iv
<i>Resumo</i>	v
<i>Abstract</i>	vi
<i>Índice</i>	vii
<i>Nomenclatura</i>	ix
<i>Capítulo 1</i> INTRODUÇÃO	1
<i>Capítulo 2</i> ESTRUTURA DO ESCOAMENTO LONGE DA REGIÃO DE SEPARAÇÃO	5
<i>Capítulo 3</i> ESTRUTURA DO ESCOAMENTO NA REGIÃO DE SEPARAÇÃO	12

<i>Capítulo 4</i> CRITÉRIO DE DESCOLAMENTO	21
<i>Capítulo 5</i> SOLUÇÃO ADJACENTE AO PONTO DE DESCOLAMENTO	28
<i>Capítulo 6</i> ANÁLISE DOS RESULTADOS	35
<i>Capítulo 7</i> CONCLUSÃO	43
APÊNDICE	46
BIBLIOGRAFIA	58

NOMENCLATURA

v - velocidade normal à superfície sólida

u - velocidade tangente à superfície sólida

U_∞ - velocidade antes do corpo

U - velocidade fora da camada limite

U_{max} - valor máximo da velocidade fora da camada limite

u^* - velocidade adimensional eq. (5a) e (21)

v^* - velocidade adimensional eq. (5b)

u_τ - velocidade de fricção $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$

u_R - velocidade característica da região interna da camada limite eq. (9)

u_m - velocidade baseada na tensão máxima de cisalhamento $u_m = \sqrt{\frac{\tau_m}{\rho}}$

u_s - velocidade de Schofield e Perry eq. (29)

y - cordenada normal à superfície sólida

x - coordenada tangente à superfície sólida

L - comprimento característico da geometria do problema

y^* - coordenada adimensional eq. (5d) e (20)

x^* - coordenada adimensional eq. (5c)

\hat{y} - coordenada adimensional eq. (15b)

\hat{x} - coordenada adimensional eq. (15a)

X_d - valor da coordenada x no ponto de descolamento

P - pressão estática

P^* - pressão estática adimensional eq. (5h)

P_{min} - pressão estática mínima

Re - número de Reynolds $Re = \frac{U_\infty L}{\nu}$

Re_{δ_2} - número de Reynolds $Re_{\delta_2} = \frac{U_\infty \delta_2}{\nu}$

H - fator de forma da camada limite $H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$

$\overline{H} - \overline{H} = \frac{\delta_3}{\delta_2}$

$Z - Z = \frac{\sqrt{\frac{4P}{4x}} \delta}{U}$

R - coordenada radial

letras gregas

μ - coeficiente de viscosidade

ρ - densidade

ν - coeficiente cinemático de viscosidade

τ_w - tensão de cisalhamento na parede

τ_{ij} - tensões turbulentas

τ_m - tensão máxima de cisalhamento

τ_{ij}^* - tensões turbulentas adimensionais $\tau_{ij}^* = \frac{\tau_{ij}}{u_R^2 \rho}$

δ - espessura da camada limite

δ_1 - espessura de deslocamento

δ_2 - espessura de quantidade de movimento

δ_3 - espessura de energia

ϵ - $\epsilon = \frac{u_R}{U_\infty}$

$\hat{\epsilon}$ - $\hat{\epsilon} = \frac{1}{R_e \epsilon^2}$

β - fator corretivo eq. (26)

θ - coordenada angular

θ_0 - ângulo de descolamento da camada limite

$$\eta - \eta = \frac{y}{\delta}$$

γ_p - porcentagem de tempo na qual a velocidade do escoamento é positiva

Ψ - função corrente

$$\Theta - \Theta = Re_{\delta_2}^{\frac{1}{n}}$$

$$\Gamma - \Gamma = \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx}$$

$$\zeta - \zeta = \frac{\tau_w}{U^2 \rho} Re^{\frac{1}{n}}$$

Capítulo 1

Introdução

É indubitável que dentre a enorme variedade de ramos que a ciência moderna abrange, a mecânica dos fluidos ocupa uma posição de grande destaque. As mais elementares atividades como dirigir um automóvel ou respirar, até os grandes feitos como a ida do homem à lua, estão de algum modo direta ou indiretamente relacionados ao escoamento de fluidos. Assim é de vital importância o entendimento de fenômenos relacionados à fluidodinâmica. Infelizmente, devido à grande complexidade das equações que regem o escoamento de substâncias fluidas, torna-se extremamente difícil obter uma solução, mesmo que aproximada, para muitos problemas de interesse tecnológico. Um destes problemas que permanece sem uma solução definitiva, é a determinação do ponto de descolamento da camada limite. Uma explicação detalhada de como se comporta o escoamento nas imediações deste ponto, quando o fenômeno é provocado por um gradiente de pressão positivo (adverso), também não se encontra na literatura.

No presente trabalho, estudaremos o escoamento no regime incompressível, sem troca de calor, sobre uma placa plana sujeita a um gradiente de pressão adverso. Utilizaremos os métodos de análise de escalas e das expansões assintóticas combinadas, para determinar como se comporta a parte interna da camada limite na região de separação. Será definida uma nova velocidade característica da região interna, válida tanto na região de separação quanto longe desta. Procedendo a análise da estrutura do escoamento próximo ao ponto de descolamento, obteremos um critério de relativa simplicidade e de razoável precisão para o descolamento da camada limite turbulenta. Este critério será comparado com os dados experimentais de Simpson [46,49]. Relações de caráter qualitativo, serão também

fornecidas, mostrando como o gradiente de pressão externo influencia no ângulo de descolamento e na tensão na parede quando esta tende a zero.

Desde que Prandtl [37] no início deste século estabeleceu o conceito de camada limite, esforços vem sendo feitos no sentido de se compreender os processos que levam à separação. Nos casos em que o escoamento é provocado por mudanças súbitas na forma do corpo (arestas, pontas, etc.), o ponto de descolamento é determinado com certa facilidade, ficando as pesquisas voltadas neste caso para o escoamento à jusante do corpo [38,8,9]. Nos casos em que a separação é provocada por um gradiente de pressão positivo, o fenômeno se torna mais complicado, sendo o próprio conceito de separação motivo de discussão. No caso turbulento sabe-se que a separação não ocorre em um único ponto, mas espalha-se sobre uma região, envolvendo uma gama de estados [47,48,46,48,50,41,39]. Isto ocorre porque durante a separação, a velocidade média das partículas na região mais próxima à parede, troca de sentido de modo gradativo, com o escoamento reverso ocupando uma porcentagem de tempo cada vez maior. Ou seja, definindo γ_{pu} como sendo a fração da área do histograma de probabilidade da velocidade que apresenta valor positivo, temos que para um dado valor de y próximo de zero, onde y representa a coordenada normal à parede, a medida que nos aproximamos do ponto de descolamento, γ_{pu} tende a diminuir aproximando-se de zero quando a distância à jusante do ponto de descolamento cresce. Deste modo, definiu-se então separação como sendo o processo pelo qual a camada limite perde contato com a superfície sólida, e descolamento como sendo o ponto onde, com y tendendo à zero, γ_{pu} é igual a 0.5.

As primeiras tentativas de descrever o comportamento da camada limite laminar quando $\tau_w \rightarrow 0$ foram feitas por Howarth [25] na década de trinta que resolveu a equação de Navier-Stokes numericamente. Alguns anos mais tarde, no final da década de quarenta, Goldstein [21] baseado em uma solução obtida numericamente por Hartree, propôs uma solução analítica para a equação de camada limite laminar na forma de uma expansão em série, que descreve assintoticamente o comportamento da velocidade na região do ponto de descolamento. Posteriormente, outros autores [5,6,7,54,55] utilizando o mesmo procedimento, aprimoraram a solução obtida por Goldstein considerando inclusive o caso em que há troca de calor com a superfície sólida. Este método embora traga grandes in-

formações, sobre como a camada limite se comporta quando a tensão na parede tende a zero não pode ser utilizado na imediata vizinhança do ponto de descolamento, pois, como atestou o próprio Goldstein, nessa região as derivadas com relação a x , nos termos de tensão de cisalhamento, não podem mais ser desprezadas. Isto faz com que as hipóteses que sustentam a teoria de camada limite não sejam mais válidas.

Nos últimos anos alguns autores ([53, 15] fornecem uma abrangente revisão), utilizando a técnica conhecida como "triple deck", abordaram o problema de separação de camada limite laminar. Este procedimento consiste em dividir a equação de camada limite em expressões menos complexas, simplificando assim o problema. Este método, padece das mesmas limitações técnicas consideradas no parágrafo anterior. Isto por não considerar nas equações do movimento na região de separação, a relevância das derivadas com relação a x , nos termos de tensão de cisalhamento.

No caso da camada limite turbulenta, muitos trabalhos foram publicados com o intuito de estabelecer que modificações ocorrem na lei da parede quando $\tau_w \rightarrow 0$. A principal mudança deve-se ao fato de que, próximo ao ponto de descolamento, a hipótese de Prandtl (de que existe uma região onde a tensão turbulenta é constante), não mais se cumprir, embora o modelo de comprimento de mistura ainda seja válido [46]. Sendo assim, alguns autores, baseados em dados experimentais [4], propuseram que nessa região a tensão turbulenta teria um comportamento aproximadamente linear do tipo $\tau_t = \tau_w + \alpha y$, onde α é uma função de x . Mais recentemente Sychev e Sychev [59,60] e Sychev[61], tentaram desenvolver uma teoria assintótica que descrevesse o escoamento nas imediações do ponto de descolamento. Teoria esta que, apesar de inovadora, apresenta algumas inconsistências como atestado por Neish e Smith [34] e Melnik [32]. Este último propôs uma solução assintótica para a equação de camada limite turbulenta que, baseada no procedimento desenvolvido por Goldstein, procura representar o escoamento quando $\tau_w \rightarrow 0$. Essa solução contudo não abrange a região interna da camada limite, restringindo-se apenas a região mais externa onde ν_t (viscosidade turbulenta) é suposta constante [12].

Nos últimos anos muitos trabalhos computacionais e experimentais [18,63,1,

11,17,24], contribuíram sobremaneira para um melhor entendimento do fenômeno de separação.

Em 1979 Kader e Yaglom [27], utilizando argumentos dimensionais, encontraram que a camada limite turbulenta quando sujeita a um gradiente de pressão adverso, pode ser subdividida em quatro regiões. Uma região mais externa onde os "termos de inércia" e o gradiente de pressão se contrabalançam; uma segunda região onde o gradiente de pressão é balanceado basicamente pelas tensões turbulentas (Kader e Yaglom chegaram a essa conclusão fazendo com que o parametro adimensional s definido como $\frac{\delta}{u_\tau} \frac{dP}{dx}$ tendesse a infinito. Isto é equivalente a assumir essa hipótese como sendo válida apenas na região de separação, embora uma referência a este fato não tenha sido feita pelos autores); uma terceira região onde os termos turbulentos são dominantes e onde a lei da parede é válida; e finalmente, uma quarta região onde os termos laminares são dominantes e o perfil de velocidade pode ser aproximado por uma reta.

Como veremos neste trabalho, quando a tensão na parede tende a zero, o equilíbrio de forças muda muito, principalmente na região interna da camada limite. Isto faz com que a estrutura acima descrita seja inadequada para descrever o escoamento na região de separação.

Capítulo 2

Estrutura do Escoamento Longe da Região de Separação

O conceito de camada limite foi desenvolvido para facilitar a solução de problemas muito complexos pois possibilita o desmembramento da equação geral que rege o escoamento de fluidos newtonianos (equações de Navier-Stokes) em dois conjuntos de equações mais "simples". Uma para a região mais distante da superfície e outra para a região mais próxima a esta (equação de camada limite). Esta simplicidade é contudo relativa, pois embora menos complexas que as equações gerais, as equações aproximadas ainda apresentam grandes dificuldades. No caso da camada limite turbulenta, verificou-se que o problema poderia ser mais facilmente estudado se fosse dividido em duas partes, uma externa onde os termos de inércia e os termos de pressão são dominantes, e uma interna onde os termos de tensões turbulenta e laminar são de mesma ordem, e onde a velocidade média do escoamento é da mesma ordem das flutuações [31,61]. Outros autores, como os já citados Kader e Yaglom [27] e Sychev [60], sugerem que o escoamento de camada limite pode apresentar um número maior de camadas. Estas camadas contudo, são apenas subdivisões das regiões acima citadas.

No presente caso temos que as equações que regem o fenômeno são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Ao escrever as equações acima utilizamos a notação clássica. Estas equações são normalmente chamadas de equação da continuidade e de camada limite respectivamente.

No caso da região interna da camada limite podemos através de uma análise de escalas, determinar a ordem de grandeza de sua espessura. Supondo que a ordem de grandeza dos termos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad e \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y},$$

é dada por:

$$\frac{u_+}{y^2} \quad e \quad \frac{\rho u_+^2}{y},$$

respectivamente, onde u_+ é uma velocidade característica que será definida em breve e y a distância até a parede, temos que pela definição de região interna :

$$O\left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = O\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right),$$

$$O\left(\frac{\mu u_+}{y^2}\right) = O\left(\frac{\rho u_+^2}{y}\right), \quad (1)$$

$$O(y) = O\left(\frac{\nu}{u_+}\right). \quad (2)$$

Esta equação permanece um tanto vaga uma vez que a velocidade característica u_+ ainda precisa ser determinada. Para isso integraremos com relação a y a equação da conservação da quantidade de movimento na direção x obtendo:

$$\tau = \tau_w + O\left(\frac{\partial p}{\partial x} y\right) + O(\text{integral dos termos de inércia}) + O(\text{integral dos termos em } x), \quad (3a)$$

onde τ representa a soma das tensões turbulentas e laminares. Assumindo a hipótese de Prandtl de que nesta região, τ (em uma primeira ordem de aproximação) é constante e igual a τ_w , teremos após uma análise da ordem de grandeza dos termos:

$$O(\tau_w) \gg O\left(\frac{\partial P}{\partial x} y\right) \gg O(\text{integral dos termos de inercia}) \gg O(\text{integral das derivadas em } x). \quad (3b)$$

Deste modo supondo

$$O(\tau) = O(\rho u_+^2),$$

e como

$$\tau_w = \rho u_\tau^2,$$

teremos:

$$O(\rho u_+^2) = O(\rho u_\tau^2),$$

$$O(u_+) = O(u_\tau). \quad (4)$$

Os resultados até aqui obtidos são clássicos e podem ser encontrados em uma enorme variedade de trabalhos, tanto analíticos quanto experimentais. De posse dessa velocidade característica, poderemos agora determinar, qual a estrutura da camada limite longe do ponto de descolamento. Apresentaremos aqui apenas um resumo do procedimento necessário à obtenção dos resultados. Para maiores detalhes ver os trabalhos de Silva Freire e Hirata [51,52], Mellor [31] e Yajnik [66]. Definiremos agora as seguintes variáveis adimensionais :

$$u^* = \frac{u}{U_\infty} , \quad (5a)$$

$$v^* = \frac{v}{U_\infty} , \quad (5b)$$

$$x^* = \frac{x}{L} , \quad (5c)$$

$$y^* = \frac{y}{L} , \quad (5d)$$

$$\tau_{xy}^* = \frac{\tau_{xy}}{\rho u_\tau^2} , \quad (5e)$$

$$\epsilon = \frac{u_\tau}{U_\infty} , \quad (5f)$$

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{R_e \epsilon^2} , \quad (5g)$$

$$\frac{dP^*}{dx^*} = \frac{dP}{\rho U_\infty^2 dx^*} . \quad (5h)$$

Deste modo o sistema de equações a ser resolvido assume a forma:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (6a)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dp^*}{dx^*} + \epsilon^2 \frac{\partial \tau^*_{xy}}{\partial y^*} + \hat{\epsilon} \epsilon^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}. \quad (6b)$$

Aplicando o método da variável intermediária [34] ou método de análise de escalas, poderemos dividir a equação (6b) em equações mais simples, cujo domínio seja restrito a certas regiões do escoamento. Essas equações com seus respectivos domínios são dadas abaixo:

$$O(y^*) = O(1) : u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dP^*}{dx^*}, \quad (7a)$$

$$O(\epsilon^2) < O(y^*) < O(1) : u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dP^*}{dx^*}, \quad (7b)$$

$$O(y^*) = O(\epsilon^2) : u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dP^*}{dx^*} + \frac{\partial \tau^*_{xy}}{\partial y^*}, \quad (7c)$$

$$O(\hat{\epsilon} \epsilon) < O(y^*) < O(\epsilon^2) : \frac{\partial \tau^*_{xy}}{\partial y^*} = 0, \quad (7d)$$

$$O(y^*) = O(\hat{\epsilon} \epsilon) : \frac{\partial \tau^*_{xy}}{\partial y^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} = 0, \quad (7e)$$

$$O(y^*) < O(\hat{\epsilon}) : \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} = 0 . \quad (7f)$$

A estrutura obtida acima pode ser melhor visualizada com o auxílio da figura (1). Como podemos observar, o escoamento longe do ponto de descolamento apresenta de maneira bem definida, uma região onde os termos turbulentos são dominantes. Adotando o modelo de comprimento de mistura de Prandtl, e resolvendo a equação (7d), teremos:

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + c \quad (8)$$

Essa equação é a conhecida lei da parede, cuja validade é restrita a região longe do ponto de descolamento, onde a tensão na parede é muito maior que os demais termos do lado direito da equação (3a). Como veremos posteriormente, uma "lei da parede" válida na região de separação apresenta grandes diferenças com relação a equação (8).

Estes resultados contudo, só são válidos para regiões distantes do ponto de descolamento. Junto ao ponto de descolamento, as duas hipóteses básicas que sustentam essas conclusões (camada limite e Prandtl) não são mais válidas, pois, as derivadas em x não podem mais ser desprezadas, por ser $\frac{d\tau_w}{dx}$ singular quando $x = X_d$ (X_d representa o valor de x no ponto de descolamento). Além disto, a tensão turbulenta não tende a zero, ao contrário da tensão na parede, o que torna a equação (4) incorreta. Sendo assim, torna-se necessário a definição de um novo parâmetro que represente as características do escoamento próximo ao ponto de descolamento.

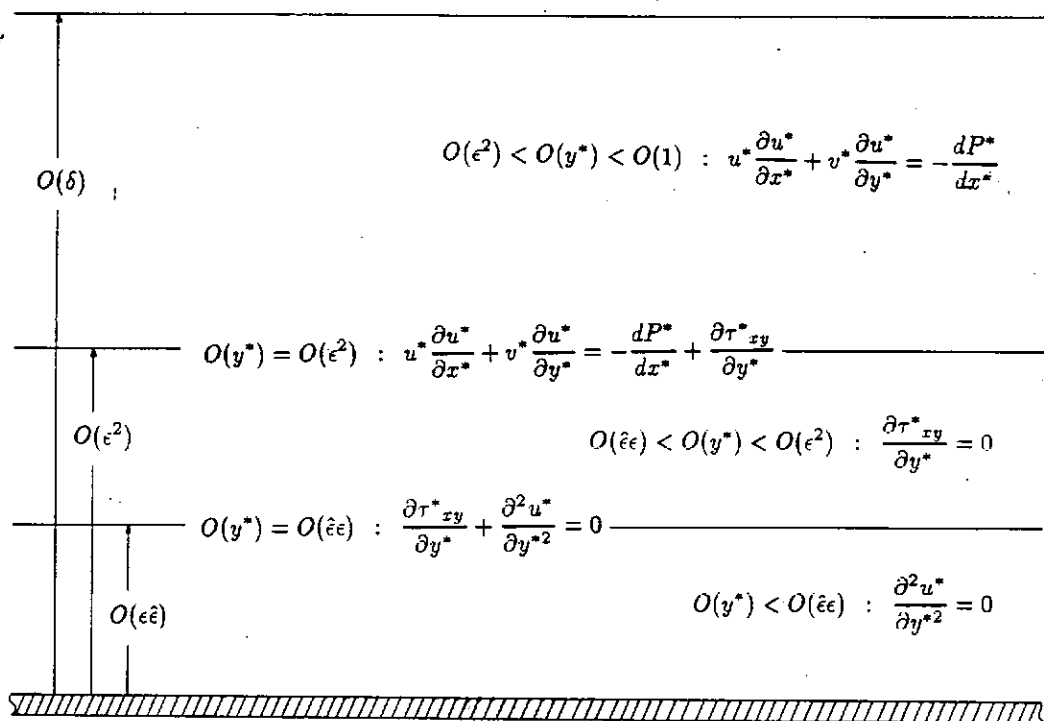


Fig.1 Estrutura da camada limite turbulenta longe do ponto de descolamento

Capítulo 3

Estrutura do escoamento na Região de Separação

Como foi dito anteriormente, as derivadas com relação a x crescem rapidamente quando nos aproximamos do ponto de descolamento, sendo que na região de separação elas apresentam a mesma importância das derivadas com relação a y nas equações do movimento (pelo menos na região interna da camada limite). Outro fenômeno que provoca grandes mudanças no escoamento na região próxima ao ponto de descolamento, é o fato da tensão na parede tender a zero. Isto modifica muito o balanço de forças na parte interna da camada limite pois agora a tensão turbulenta não é mais balanceada apenas pela tensão na parede (como sugere o sistema 3), uma vez que esta se aproxima de zero. Deste modo, todos os termos da equação (3a) apresentam a mesma ordem de grandeza. Portanto, todos devem ser considerados quando da análise para se determinar a nova velocidade característica. Para que possamos determinar esta nova velocidade, repetiremos o procedimento feito para o caso longe do ponto de descolamento. Porém, suporemos agora que:

$$O\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = O\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

e que (utilizando as equações (1) e (2)):

$$O\left(\int u \frac{\partial u}{\partial x} dy\right) = O\left(\int v \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) = O\left(\int \frac{\partial \tau_{xz}}{\rho \partial x} dy\right) = O\left(\int \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dy\right) = O(u_+^2) .$$

Temos então que a equação (3) assume a forma :

$$O(u_+^2) = O(u_\tau^2) + O\left(\frac{\nu}{u_+} \frac{\partial P}{\rho \partial x}\right) ,$$

ou ainda de forma aproximada :

$$u_+^2 = u_\tau^2 + \frac{\nu}{u_+} \frac{\partial P}{\rho \partial x} ,$$

$$u_+^3 = u_\tau^2 u_+ + \nu \frac{\partial P}{\rho \partial x} ,$$

$$u_+^3 - u_+ u_\tau^2 - \nu \frac{\partial P}{\rho \partial x} = 0 . \quad (9)$$

A equação (9) fornece a nova velocidade de referência, que a partir de agora será denominada de u_R . Esta velocidade é definida como sendo a maior raiz real da equação (9), e representa a ordem de grandeza da velocidade (e das flutuações) na parte interna da camada limite. Isto tanto na região de separação quanto longe desta pois, quando $O(u_+ u_\tau^2) \gg O(\nu \frac{\partial P}{\rho \partial x})$ teremos que a equação (9) se reduz a:

$$u_R^3 = u_\tau^2 u_R ,$$

$$u_R = u_\tau .$$

O mesmo resultado obtido pela equação (4). No caso do ponto de descolamento onde $u_\tau = 0$, a equação (9) assume a forma :

$$u_R = \sqrt[3]{\nu \frac{\partial P}{\rho \partial x}} . \quad (10)$$

De posse dessa velocidade, poderemos agora repetir o procedimento feito por Yajnik [66] e Mellor [31] para a região interna da camada limite, próximo ao ponto de descolamento. Restringiremos nossa análise a essa região uma vez que, é no escoamento muito próximo à parede que os efeitos do gradiente de pressão adverso se fazem sentir com mais intensidade. Isto ocorre porque, nesta região, as velocidades envolvidas são muito pequenas quando comparadas com as velocidades da região mais externa. Deste modo as partículas nesta região possuem uma energia cinética menor sendo, portanto, mais facilmente retardadas pelo gradiente de pressão externo.

Utilizaremos aqui o método das expansões assintóticas combinadas para estabelecer qual o sistema de equações que rege o escoamento nas primeiras ordens de aproximação. Para isto, precisaremos primeiramente definir um parâmetro pequeno característico do problema. Analogamente ao caso do escoamento longe do ponto de descolamento, definiremos o parâmetro pequeno como sendo a razão entre a velocidade característica da região interna, e a velocidade do escoamento antes da placa. Sendo assim teremos que $\epsilon = \frac{u_R}{U_\infty}$. Este parâmetro é semelhante ao adotado por Mellor em seu trabalho. Existe porém uma diferença entre a ordem de grandeza deles pois, tomando como válida a equação:

$$O\left(\frac{\partial P}{\rho \partial x}\right) = O\left(\frac{U_\infty^2}{L}\right) , \quad (11)$$

teremos :

$$O\left(\frac{u_R}{U_\infty}\right) = O\left(\sqrt[3]{\frac{\nu}{U_\infty L}}\right) ,$$

isto implica que,

$$O(\epsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{Re}}\right), \quad (12)$$

valor diferente daquele encontrado em trabalhos anteriores onde:

$$O(\epsilon) = O((\ln Re)^{-1}),$$

resultado válido apenas longe da região de separação. Procederemos a adimensionalização dos termos da equação de Navier-Stokes de maneira semelhante à proposta pelo conjunto de equações (5). Entretanto, agora as tensões turbulentas serão adimensionalizadas pela nova velocidade característica u_R . Portanto, teremos:

$$\tau_{ij}^* = \frac{\tau_{ij}}{\rho u_R^2}.$$

Deste modo o conjunto de equações que descreve o escoamento fica:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (13a)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \epsilon^2 \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y^*} + \epsilon^3 \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \epsilon^2 \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + \epsilon^3 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}, \quad (13b)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \epsilon^2 \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial y^{*2}} + \epsilon^3 \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^*} + \epsilon^2 \frac{\partial \tau_{yx}^*}{\partial x^{*2}} + \epsilon^3 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^*}, \quad (13c)$$

Cabe ressaltar que no conjunto de equações acima representado, o coeficiente que multiplica os termos das tensões laminares ϵ^3 , é o mesmo para o caso longe do ponto de descolamento $\epsilon^2 \hat{\epsilon}$, pois agora $\epsilon = \hat{\epsilon}$.

Seguindo o procedimento de trabalhos anteriores, suporemos que a solução do sistema (13), pode ser expressa na forma de uma expansão assintótica em torno do parâmetro pequeno ϵ [14,33]. Sendo assim, assumiremos as seguintes expansões válidas na região interna.

$$u^* = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \dots \quad (14a)$$

$$v^* = \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + \epsilon^3 v_3 + \dots \quad (14b)$$

$$P^* = P_1 + \epsilon P_2 + \epsilon^2 P_3 + \dots \quad (14c)$$

$$\tau_{ij}^* = \tau_{1ij} + \epsilon \tau_{2ij} + \epsilon^2 \tau_{3ij} + \dots \quad (14d)$$

Definiremos agora as seguintes variáveis:

$$\hat{x} = \frac{(x^* - Xd)}{\epsilon^2}, \quad (15a)$$

$$\hat{y} = \frac{y^*}{\epsilon^2}. \quad (15b)$$

Como no caso do escoamento longe do ponto de descolamento, o fator de escala da região interna da camada limite continua sendo $\epsilon \hat{\epsilon}$, uma vez que agora $\hat{\epsilon} = \epsilon$ como foi dito anteriormente. Encontramos, após substituir as equações (14) e (15) em (13), que:

Para a primeira ordem de aproximação :

$$\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial v_1}{\partial \hat{y}} = 0 , \quad (16a)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \hat{x}} = 0 , \quad (16b)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \hat{y}} = 0 , \quad (16c)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \hat{x}} = 0 , \quad (16d)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \hat{y}} = 0 , \quad (16e)$$

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \hat{y}} = \frac{-\partial P_3}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \tau_{1xy}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial \tau_{1xx}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \hat{x}^2} , \quad (16f)$$

$$u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \hat{y}} = \frac{-\partial P_3}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \tau_{1yy}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial \tau_{1yx}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \hat{x}^2} , \quad (16g)$$

Para a segunda ordem de aproximação :

$$\frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial v_2}{\partial \hat{y}} = 0 , \quad (17a)$$

$$u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}} + v_2 \frac{\partial u_1}{\partial \hat{y}} + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial P_4}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \tau_{2xy}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial \tau_{2xx}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \hat{x}^2}, \quad (17b)$$

$$u_2 \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}} + u_1 \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \hat{y}} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial P_4}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \tau_{2yy}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial \tau_{2xy}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial \hat{x}^2}, \quad (17c)$$

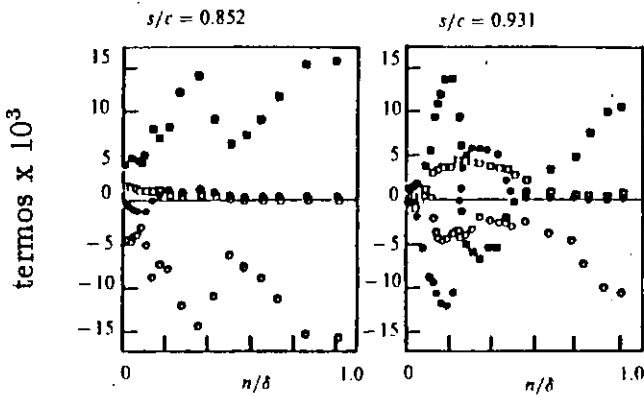
As equações (16) e (17) representam o sistema que descreve o escoamento na parte interna da camada limite que, como podemos observar, sofre grandes modificações na região de separação (compare com a equação (7e)). Dentre as principais modificações está o fato de que agora os "termos de inércia" apresentam a mesma importância que as tensões turbulentas e laminares nas equações do movimento. Isto nos sugere que, quando a tensão na parede aproxima-se de zero, a fronteira entre a região da esteira e a região interna (descrita na figura 1 por $O(\frac{y}{L}) = O(\epsilon^2)$), tende à desaparecer pois agora :

$$O(\epsilon) = O(\hat{\epsilon}),$$

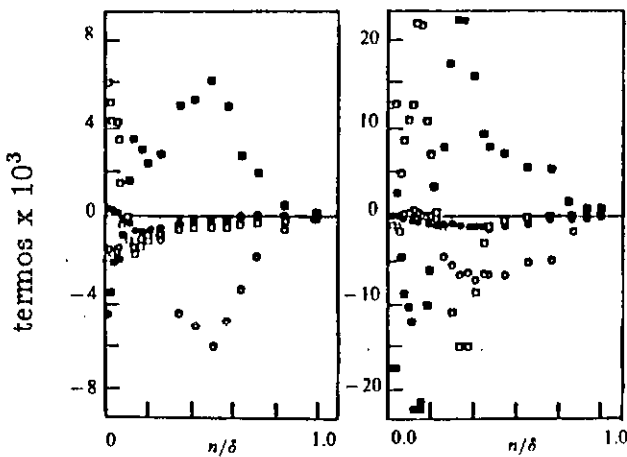
$$O(\epsilon^2) = O(\epsilon \hat{\epsilon}).$$

Este fenômeno explica-se pelo fato de que, com o desaparecimento da tensão na parede, as tensões turbulentas e laminares devem agora ser balanceadas pelos demais termos da equação do movimento. Outra grande mudança é o fato das tensões (turbulenta e laminar), da velocidade, e do gradiente de pressão na direção de y , tornarem-se relevantes no ponto de descolamento. Isto faz com que as equações que regem o escoamento em torno deste ponto, apresentem grande complexidade. O fato do gradiente de pressão na direção y não ser mais desprezível, não invalida a equação (12) pois isto não altera a ordem de grandeza do termo $\frac{\partial P}{\rho \partial x}$, ficando apenas ambos com a mesma ordem:

equação do momentum na direção do escoamento



equação do momentum na direção normal ao escoamento



$$\begin{aligned}
 \circ & \frac{\delta_1}{U_e^2} \left[\langle U \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right]; & \square & \frac{\sigma_1}{U_e^2} \frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial x}; \\
 \bullet & \frac{\delta_1}{U_e^2} \frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial y}; & \blacksquare & \frac{\delta_1}{U_e^2} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x}; \\
 \circ & \frac{\delta_1}{U_e^2} \left[\langle U \rangle \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial y} \right]; & \square & \frac{\delta_1}{U_e^2} \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial y}; \\
 \bullet & \frac{\delta_1}{U_e^2} \frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial x}; & \blacksquare & \frac{\delta_1}{U_e^2} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial y};
 \end{aligned}$$

Fig.3 Termos da equação do momentum na região de separação [63] Na figura acima temos que: s/c coordenada tangente a superfície do corpo, n/δ coordenada normal a superfície do corpo, U_e velocidade do escoamento na entrada do tunnel de vento, δ_1 espessura de deslocamento da camada limite. O ponto de descolamento esta localizado em $s/c = 0.87$.

Capítulo 4

Critério de Descolamento

A obtenção de um critério que possa prever de maneira simples e precisa, onde ocorre o ponto de descolamento da camada limite turbulenta, permanece até hoje como sendo um dos maiores desafios à ciência da mecânica dos fluidos.

Grande parte dos critérios hoje usados [10], utilizam o procedimento de resolver numericamente um sistema de equações, com o objetivo de obter o fator de forma da camada limite, H , suposto constante no ponto de descolamento. Esta técnica, embora possa apresentar bons resultados, tem o inconveniente de necessitar de parâmetros de precisão duvidosa, como o ponto de transição da camada limite por exemplo. O próprio fator de forma no ponto de descolamento não apresenta um valor bem definido. Alguns autores o assumem como estando entre 1.8 e 2.4 [42], trabalhos mais recentes contudo, o colocam em torno de 2.8 [18]. Outros critérios apresentam a vantagem de não depender de elementos fornecidos pela teoria de camada limite [57,58], necessitando apenas do conhecimento do escoamento potencial. Este fato faz com que tais critérios apresentem uma grande simplicidade, embora também possuam uma menor precisão.

Deduziremos aqui um critério de descolamento simples e relativamente preciso, baseado no fato de no ponto de descolamento não existir um limite bem definido entre as regiões interna e externa da camada limite. Este fato sugere que, uma "lei da parede" que seja válida até o ponto de descolamento, deverá confundir-se com a parte interna de alguma função que descreva o escoamento da esteira neste ponto (veja figura (3)).

Denominaremos aqui de "lei da parede", a uma equação que descreva o escoamento na região onde as tensões turbulentas são predominantes sobre as laminares, e onde a hipótese de comprimento de mistura seja ainda válida na descrição da turbulência. Muitos autores [28,29,30,43,64,65], propuseram vários tipos de "leis da parede" válidas até o ponto de descolamento, quase todas baseadas na hipótese de que as tensões turbulentas teriam um comportamento aproximadamente linear do tipo:

$$\tau_{xy} = \tau_w + \alpha y , \quad (19)$$

onde α é uma função de x . Esta hipótese tem a seu favor o argumento de que longe do ponto de descolamento, o termo $\frac{\partial P}{\partial x}$ é a correção de segunda ordem para a turbulência, como atesta a equação (3b). Embora este argumento, perca a validade à medida que nos aproximamos do ponto de descolamento, nesta região, como mostrou MacDonald [28], a equação (19) ainda é válida apesar de α ser um pouco diferente do gradiente de pressão externo. Isto ocorre devido aos demais termos da equação (3b) aumentarem em muito a sua influência.

Para que possamos obter a equação da "lei da parede" na região de separação, devemos primeiramente resolver a equação (19). Definindo as seguintes variáveis:

$$y^* = \frac{y u_R}{\nu} , \quad (20)$$

$$u^* = \frac{u}{u_R} . \quad (21)$$

Aplicando a hipótese de comprimento de mistura de Prandtl, e supondo que:

$$O(\alpha(x)) = O\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right), \quad (22a)$$

teremos após substituição na equação (19):

$$(ky^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*})^2 = \left(\frac{u_\tau}{u_R}\right)^2 + \frac{\partial P}{\rho \partial x} \frac{\nu}{u_R^3} y^*. \quad (22b)$$

Resolvendo então a equação diferencial (22b) teremos:

$$u^* = \frac{2}{k} \sqrt{\left(\frac{u_\tau}{u_R}\right)^2 + \frac{\partial P}{\rho \partial x} \frac{\nu}{u_R^3} y^*} + \frac{u_\tau}{u_R k} \ln \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{u_\tau}{u_R}\right)^2 + \frac{\partial P}{\rho \partial x} \frac{\nu}{u_R^3} y^*} - \frac{u_\tau}{u_R}}{\sqrt{\left(\frac{u_\tau}{u_R}\right)^2 + \frac{\partial P}{\rho \partial x} \frac{\nu}{u_R^3} y^*} + \frac{u_\tau}{u_R}} \right] + C, \quad (23)$$

onde C é, a princípio, uma função de $\frac{\partial P}{\partial x}$.

A equação (23), representa um avanço em relação aos trabalhos de Mellor [30] e de MacDonald [28]. Estes autores em seus trabalhos, chegaram a um resultado semelhante embora utilizassem o procedimento de dividir a equação (23) em duas partes, uma válida longe da região de separação e outra válida apenas nesta região.

A equação (23) é uma versão da lei da parede válida até o ponto de descolamento. Como podemos observar, ela apresenta comportamento bastante distinto dependendo da ordem de grandeza da tensão na parede. Na região onde a seguinte inequação é válida :

$$O(u_\tau^2) \gg O\left(\frac{\partial P}{\rho \partial x} \nu\right),$$

temos que a equação (23) se reduz a:

$$u^* = \frac{1}{k} \ln y^* + \frac{2}{k} + C' \quad (24)$$

que é a lei da parede clássica. Quando a tensão na parede tende à zero ou seja:

$$O(u\tau^2) \ll O\left(\frac{\partial P}{\rho \partial x} \nu\right),$$

a equação (23) assume a forma :

$$u^* = \frac{2}{k} \sqrt{y^*} + C'' , \quad (25)$$

onde C'' é uma função de $\frac{\partial P}{\partial x}$.

Essa equação foi deduzida primeiramente por Stratford [57] e descreve o comportamento da lei da parede quando $\tau_w = 0$. Stratford comparou a equação (25) com alguns experimentos encontrando pequenas discordâncias, as quais, segundo ele, eram devidas a mudanças que a constante k deveria apresentar na região de separação. Deste modo, foi proposto então uma constante corretiva β que visava minimizar essas discrepâncias. Adotando então o mesmo procedimento, teremos que a equação (25) fica:

$$u^* = \frac{2}{\beta k} \sqrt{y^*} + C'' \quad (26)$$

Em seu trabalho, Stratford encontrou valores de β variando entre 0.66 e 0.73. Devido a carência de dados experimentais, a determinação de um valor ótimo para β torna-se bastante difícil. Neste trabalho, comparações com os experimentos

de Simpson [47,50], mostram que valores em torno de 1.15 apresentam melhores resultados.

Para que possamos obter o critério de descolamento, devemos recorrer a uma equação que descreva o escoamento na região da esteira, próximo ao ponto de descolamento. Adotaremos então a equação desenvolvida por Schofield [44] que utiliza os parâmetro de similaridade de Schofield e Perry [35], e é dada por :

$$\frac{U - u}{u_s} = 1 - 0.4\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{1}{2}} - 0.6 \sin\left(\frac{\pi y}{2B}\right), \quad (27a)$$

onde:

$$B = 2.86 \delta_1 \frac{U}{u_s}.$$

Na sua versão em variáveis internas a equação (27a) toma forma:

$$\frac{u}{U} = 0.47\left(\frac{u_s}{U}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2}} + 1 - \frac{u_s}{U}. \quad (27b)$$

Notando-se que $B \approx \delta$ [28], temos que a equação (27b) fica :

$$\frac{u}{U} = 0.79 \frac{u_s}{U} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} + 1 - \frac{u_s}{U} \quad . (28) .$$

A razão de $\frac{u_s}{U}$, pode ser determinada através de um perfil de velocidade medido, adaptando-se a metodologia de Clauser [13] a equação (28).

A velocidade u_s , está relacionada á tensão de cisalhamento máxima pela relação:

$$\frac{u_s}{u_m} = 8 \frac{B}{L}, \quad (29)$$

onde:

$$u_m = \sqrt{\frac{\tau_m}{\rho}}$$

$\tau_m =$ tensão de cisalhamento máxima

$L =$ distância da τ_m até a parede

A equação (28) mostra que a velocidade varia proporcionalmente à raiz quadrada da distância até a parede, na parte interna da região da esteira. Isto concorda com os resultados de Kader e Yaglom [27] que usando análise dimensional chegaram a uma conclusão semelhante.

De posse das equações (23) e (28), podemos agora obter um critério para o descolamento. Quando a tensão na parede é zero, temos que as duas equações devem ser equivalentes, devendo portanto fornecer o mesmo valor para a derivada da velocidade média com relação a y . Sendo assim, teremos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} |_{eq(26)} = \frac{\partial u}{\partial y} |_{eq(28)},$$

$$\frac{\sqrt{\frac{dP}{\rho dx}} \sqrt{\delta}}{U} = 0.79 \frac{u_s}{U} \frac{\beta k}{2}. \quad (30)$$

Para obter o valor de $\frac{u_s}{U}$, utilizaremos a seguinte equação obtida empiricamente por Denguel e Fernholz [18].

$$\frac{u_s}{U} = 1.01 + 0.485(1 - \gamma_p) , \quad (31)$$

onde:

$$30\% < \gamma_p < 99\% .$$

No ponto de descolamento temos que,

$$\frac{u_s}{U} = 1.2525 \quad (32)$$

Substituindo a equação (32) em (30), e adotando $k = 0.41$ teremos:

$$\frac{\sqrt{\frac{dP}{\rho dx}} \sqrt{\delta}}{U} = 0.2 \beta . \quad (33)$$

A equação (33) nos fornece um critério para separação da camada limite turbulenta. Como podemos observar, o ponto de descolamento depende inversamente da velocidade fora da camada limite e, diretamente do gradiente de pressão. Estes fatos e uma estimativa do valor da constante β serão discutidos com mais detalhes no capítulo de análise dos resultados.

Capítulo 5

Solução Adjacente ao Ponto de Descolamento

O sistema de equações (16), sugere que o escoamento de uma camada limite na região de separação pode ser quase que totalmente descrito por uma lei da esteira, como mostram alguns trabalhos [40,44] . Existe contudo uma região onde:

$$O\left(\frac{y}{L}\right) = O\left(\frac{x - X_d}{L}\right) < O\left(\frac{\nu}{Lu_r}\right) = O(\epsilon^2) ,$$

na qual os termos laminares ainda predominam. Aplicando o método das variáveis intermediárias, obteremos que as equações que regem o escoamento nesta "subcamada laminar", em uma primeira ordem de aproximação, são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 , \tag{34a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 , \tag{34b}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 . \tag{34c}$$

A simetria do problema sugere o uso de coordenadas polares (R, θ) . Sendo assim, o conjunto de equações (34), expresso em termos da função corrente Ψ fica :

$$\nabla^4 \Psi(R, \theta) = 0, \quad (35)$$

sujeito as seguintes condições de contorno:

$$x < Xd,$$

$$\Psi(R, \pi) = 0, \quad (36a)$$

$$\Psi(R, \theta_0) = 0, \quad (36b)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(R, \pi) = 0, \quad (36c)$$

onde θ_0 é o ângulo de descolamento. A quarta condição de contorno virá do fato de que a solução deve ser continua em $y = \frac{\nu}{u_{RL}}$ (valor de y no qual a lei da parede e a solução da sub-camada laminar devem apresentar o mesmo valor) . Para que possamos resolver o sistema (35,36), suporemos uma solução para a equação (35) da forma:

$$\Psi(R, \theta) = R^n f(\theta) \quad (37)$$

onde:

$$2 < n < 3 .$$

A restrição de que $2 < n < 3$, se deve ao fato de que $\frac{d\tau_w}{dx}$ deve ser singular quando $\tau_w = 0$.

Substituindo (37) em (35) e aplicando as condições de contorno (36a), (36b) e (36c) teremos que a solução do problema fica:

$$\psi(R, \theta) = AR^n(\sigma_1 \cos(Z_1\theta) + \sigma_2 \sin(Z_1\theta) + \sigma_3 \cos(Z_2\theta) + \sin(Z_2\theta)) , \quad (38a)$$

onde:

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{n^2 + (n-2)^2 - \sqrt{(n^2 + (n-2)^2)^2 - 4n^2(n-2)^2}} , \quad (38b)$$

$$Z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{n^2 + (n-2)^2 + \sqrt{(n^2 + (n-2)^2)^2 - 4n^2(n-2)^2}} , \quad (38c)$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 Tg(Z_1\pi) + \frac{\lambda_2 \cos(Z_2\pi)}{\lambda_1 \cos(Z_1\pi)} - \frac{\sin(Z_2\pi)}{\cos(Z_1\pi)} , \quad (38d)$$

$$\sigma_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \beta_1} \left[\cos(Z_2 \theta_0) - \frac{\cos(Z_1 \pi) \cos(Z_1 \theta)}{\cos(Z_1 \pi)} - \frac{1}{\beta} \left[\sin(Z_2 \theta_0) - \frac{\sin(Z_2 \pi) \cos(Z_1 \theta_0)}{\cos(Z_1 \pi)} \right] \right], \quad (38e)$$

$$\sigma_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (38f)$$

$$\lambda_1 = Z_1 Tg(Z_1 \pi) \cos(Z_2 \pi) - Z_2 \sin(Z_2 \pi) - \frac{\beta_2}{\beta_1} \left[\cos(Z_2 \theta_0) - \frac{\cos(Z_2 \pi) \cos(Z_1 \theta_0)}{\cos(Z_1 \pi)} \right], \quad (38g)$$

$$\lambda_2 = Z_2 \cos(Z_2 \pi) + Z_1 Tg(Z_1 \pi) \sin(Z_2 \pi) - \frac{\beta_2}{\beta_1} \left[\sin(Z_2 \theta_0) - \frac{\sin(Z_2 \pi) \cos(Z_1 \theta_0)}{\cos(Z_1 \pi)} \right]. \quad (38h)$$

$$\beta_1 = \sin(Z_1 \theta_0) - Tg(Z_1 \pi) \cos(Z_1 \theta_0), \quad (38i)$$

$$\beta_2 = Z_1 [\cos(Z_1 \pi) + Tg(Z_1 \pi) \sin(Z_1 \pi)], \quad (38j)$$

Para maiores detalhes sobre o procedimento matemático necessário para se obter as equações acima veja Batchelor [2]. Deste modo a velocidade na direção de x em $\theta = \frac{\pi}{2}$ será dada por:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial R} = AnR^{n-1} \left(\sigma_1 \cos\left(Z_1 \frac{\pi}{2}\right) + \sigma_2 \sin\left(Z_1 \frac{\pi}{2}\right) + \sigma_3 \cos\left(Z_2 \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(Z_2 \frac{\pi}{2}\right) \right). \quad (39)$$

O valor da constante A, virá do fato de que em :

$$y = \frac{\nu}{u_R} \text{ e } x = X_d ,$$

ou

$$R = \frac{\nu}{u_R} \text{ e } \theta = \frac{\pi}{2} ,$$

as equações (26) e (39) devem apresentar o mesmo valor para a velocidade u. Sendo assim, teremos:

$$\left(\frac{dP}{dx}(X_d)\right)^{\frac{n-1}{3}} = \frac{An}{\frac{2}{\beta k} + C''} \sqrt[3]{\frac{\rho}{\nu}} (\sigma_1 \cos(Z_1 \frac{\pi}{2}) + \sigma_2 \sin(Z_1 \frac{\pi}{2}) + \sigma_3 \cos(Z_2 \frac{\pi}{2}) + \sin(Z_2 \frac{\pi}{2})) . \quad (40)$$

A equação (40) como podemos notar, não fornece apenas o valor da constante A, mas relaciona também o gradiente de pressão externo em $x = X_d$, com o ângulo de descolamento. O fato de C'' variar levemente com o gradiente de pressão, não permite uma equação de grande precisão. Contudo, uma avaliação qualitativa de como o gradiente de pressão externo influencia a tensão na parede na imediata vizinhança do ponto de descolamento pode ser obtida.

Quando $\theta \rightarrow \pi$ a velocidade na direção de x pode ser aproximada por:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = AR^{n-1}(\sigma_1 Z_1^2 \cos(Z_1 \pi) + \sigma_2 Z_1^2 \sin(Z_1 \pi) + \sigma_3 Z_2^2 \cos(Z_2 \pi) + Z_2^2 \sin(Z_2 \pi))(\theta - \pi) + O(\theta - \pi)^2 \quad (41)$$

ou ainda, fazendo uma mudança de coordenadas:

$$u = A|\hat{x}|^{n-2}(\sigma_1 Z_1^2 \cos(Z_1 \pi) + \sigma_2 Z_1^2 \sin(Z_1 \pi) + \sigma_3 Z_2^2 \cos(Z_2 \pi) + Z_2^2 \sin(Z_2 \pi))y . \quad (42)$$

Derivando a equação (42) com relação a y , teremos que a tensão na parede será dada por (em uma primeira ordem de aproximação):

$$\tau_w = \mu A|\hat{x}|^{n-2}(\sigma_1 Z_1^2 \cos(Z_1 \pi) + \sigma_2 Z_1^2 \sin(Z_1 \pi) + \sigma_3 Z_2^2 \cos(Z_2 \pi) + Z_2^2 \sin(Z_2 \pi)) . \quad (43)$$

A equação (43) relaciona a tensão na parede na imediata vizinhança do ponto de descolamento, com o gradiente de pressão externo uma vez que os coeficientes σ_i são funções do ângulo de descolamento, que é função do gradiente de pressão externo. A figura (4) mostra plotada a variação da tensão na parede com $\hat{\epsilon}$ para alguns valores de $\frac{dP}{dx}$. Como podemos observar a intensidade de $\frac{dP}{dx}$, causa grande influência na rapidez com que a tensão na parede tende a zero.

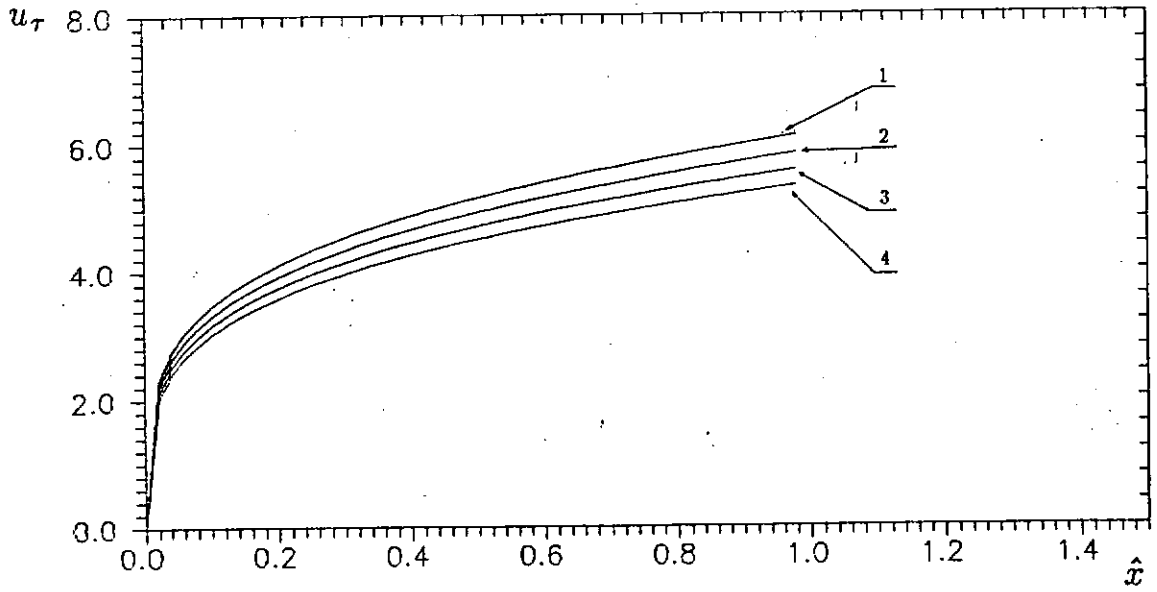


Fig.4 Variação da tensão na parede na imediata vizinhança do ponto de descolamento para, $n=2.25$, $A\mu = 1$ e varios valores de dP^*/dx^* : 1 \rightarrow 6.5, 2 \rightarrow 5.7, 3 \rightarrow 4.9, 4 \rightarrow 4.3.

Capítulo 6

Análise dos Resultados

Faremos agora uma análise mais detalhada dos resultados até aqui obtidos. A equação (26), será comparada com os resultados experimentais obtidos por Simpson [47,50]. Desta comparação obteremos uma estimativa para o valor da constante corretiva β .

O valor de β

A constante β foi introduzida primeiramente por Stratford [57,58], com o objetivo de corrigir pequenas discordâncias existentes entre a equação (25), e os resultados experimentais disponíveis na época. Segundo o próprio Stratford estas discordâncias dificilmente seriam corrigidas apenas com a introdução de uma constante no modelo de comprimento de mistura. Contudo, este procedimento se mostra bastante útil quando resultados de ordem superior não são necessários. A origem dessa discordância não está bem estabelecida, existindo basicamente duas hipóteses que tentam explicar o fenômeno. Na primeira, Stratford sugere que devido a existência de um gradiente de pressão adverso, o modelo de comprimento de mistura deveria apresentar pequenas modificações. Em uma segunda hipótese, outros autores [28], afirmam que na região de separação o coeficiente angular da

reta que representa as tensões turbulentas (equação (19)) é diferente do gradiente de pressão externo, embora tenha a mesma ordem de grandeza. Os resultados aqui obtidos indicam, um aumento da influencia dos termos de inércia na região interna da camada limite quando a tensão na parede tende a zero Isto torna a segunda hipótese uma descrição mais coerente do fenômeno, embora alguma modificação seja de se esperar no modelo de comprimento de mistura quando $\frac{dP}{\rho dx} \frac{\nu}{u_R} \gg u_\tau^2$.

Para que uma estimativa do valor de β pudesse ser feita, substituiu-se os valores de δ , $\frac{dP}{\rho dx}$ e U obtidos experimentalmente por Simpson [47,50] na equação (33). Desta análise concluiu-se que o critério de descolamento apresenta melhores resultados para valores de β em torno de 1.15. As figuras (5) e (6) mostram o comportamento do lado esquerdo da equação (33), aqui denominado de Z . A linha horizontal representa o lado direito da mesma equação quando $\beta = 1.15$. Como podemos observar, Z apresenta um crescimento com a aproximação do ponto de descolamento, atingindo um valor máximo nas imediações deste ponto. A diminuição do valor de Z , que aparece logo após o ponto de máximo, se deve ao fato de que, com a separação da linha de corrente zero da superfície do corpo, a velocidade potencial U apresenta um rápido crescimento provocando uma acentuada queda no valor de Z

Na figura (5) temos que o valor máximo de Z se encontra em torno de 0.23 enquanto que na figura (6) este se encontra próximo de 0.24. Devido ao pequeno número de dados experimentais disponíveis, uma análise profunda do valor de β não pôde ser feita. Os dados experimentais aqui utilizados são os mais confiáveis e completos existentes na literatura; deste modo os resultados aqui obtidos devem ser vistos como tendo um razoável grau de precisão. Neste trabalho, observando os valores máximos de Z obtidos, estimamos um valor para β em torno de 1.15, como já mencionado. Este resultado foi baseado principalmente na figura (5), uma vez que alguns valores de δ utilizados na obtenção da figura (6) são produto de interpolações.

De posse do valor de β , poderemos então substituí-lo na equação (33), que assume a forma:

$$\frac{\sqrt{\frac{dP}{\rho dx}} \sqrt{\delta}}{U} = 0.23 . \quad (44)$$

A equação (44) além de fornecer um critério para previsão do ponto de descolamento, possui informações qualitativas bastante interessantes. Como podemos observar o termo Z depende diretamente da raiz quadrada do gradiente de pressão. Isto implica que quanto maior o gradiente de pressão externo, menor será a distância percorrida pelo escoamento até o descolamento, como já era de se esperar. Cabe ressaltar ainda que a equação (44), só é válida para gradientes de pressão positivos. Ou seja, a camada limite turbulenta, nas condições estudadas, só apresenta o fenômeno de separação, sob a influência de um gradiente de pressão adverso.

Com relação à velocidade do escoamento fora da camada limite, U , observamos que o valor de Z varia de maneira inversamente proporcional a esta. Isto ocorre porque quando o valor de U aumenta, cresce também a energia cinética das partículas de fluido no interior da camada limite. Isto faz com que uma força que atue em sentido contrário à velocidade destas partículas (gradiente de pressão adverso), tenha que atuar por uma distância maior até provocar o descolamento. Sendo assim, quanto maior for o valor de U maior será a distância que o escoamento percorre antes de descolar.

Quanto a viscosidade, temos que esta aparece na equação (44) de maneira implícita, no valor da variável δ que varia de maneira diretamente proporcional a esta. Isto implica que os efeitos da viscosidade atuam de maneira a "antecipar" o fenômeno de separação. A razão disto é que quanto maior for a viscosidade, maior será a resistência do fluido ao escoamento, o que, devido a condição de não deslizamento, tornará mais difícil o movimento das partículas de fluido próximas a parede.

Observando a equação (44) notamos que, apesar de bastante simples, ela ainda depende de um parâmetro que só pode ser obtido através da teoria de camada limite. Este fato pode vir a ser um inconveniente, pois no caso de se desejar apenas uma estimativa da localização do ponto de descolamento, a equação (44) seria muito mais simples se dependesse apenas de parâmetros do escoamento potencial. Cabe ressaltar contudo, que apesar de tornar a utilização do critério

de descolamento muito rápida, o uso da teoria potencial para se obter o valor da velocidade fora da camada limite faz com que os resultados obtidos com este método devam ser vistos apenas como aproximações do valor real. Adotaremos aqui o procedimento de substituir o parâmetro δ por uma expressão que dependa apenas de informações que podem ser obtidas através do escoamento potencial. No presente caso, utilizaremos a seguinte equação:

$$\delta(x) = 0.37 x \left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{-\frac{1}{5}}, \quad (45)$$

que é válida para:

$$10^5 < R_e < 10^7 .$$

Esta equação foi obtida por Schlichting [42], e relaciona a espessura da camada limite turbulenta, sobre uma placa plana, com a distância ao longo desta. Como podemos notar, a substituição desta equação em (44) deverá acarretar erros, ela contudo, tornará bastante simples o processo de obtenção do ponto de descolamento. como veremos no exemplo a seguir.

Separação do escoamento em torno de um cilindro circular

Obteremos aqui um critério de descolamento de camada limite sobre um cilindro circular. Compararemos os resultados obtidos com valores experimentais [10] obtidos para números de Reynolds em torno de 10^5 , e com o critério de descolamento de Stratford.

Para que possamos obter o critério de descolamento, deveremos substituir a equação teórica, obtida através da teoria potencial, para a velocidade em torno de um cilindro, que é dada por:

$$U = 2U_{\infty} \sin\theta , \quad (46)$$

na equação (44). Assumindo a equação (45) como válida temos que o critério de descolamento toma a forma:

$$\sqrt{-\cot\theta} \theta^{0.4} = 0,18 R_e^{0.1} , \quad (47)$$

que é válida para :

$$10^5 < R_e < 10^7 .$$

Adotando agora a formula de Stratford temos que o critério de descolamento fica (para maiores detalhes ver apêndice):

$$[1 - \sin^2\theta] \sqrt{\frac{-\theta}{2} \sin 2\theta} = 0.39 (10^{-6} R_e)^{0.1} , \quad (48)$$

que é válida também para:

$$10^5 < R_e < 10^7 ,$$

onde em ambos os casos :

$$R_e = \frac{U_{\infty} r}{\nu} ,$$

$r = \text{raio do cilindro} ,$

$\theta = \text{ângulo em radianos tomado a partir do ponto de stagnação} .$

A figura (7) compara o resultado fornecido pela equação (47) para o ponto de descolamento com o critério de Stratford, e com o valor experimentalmente obtido. Como se pode notar, o erro introduzido pelo uso da equação (47) (1%), é bem menor que o erro apresentado pelo critério de Stratford (15%) .Apesar do pequeno erro obtido pelo uso da fórmula (47), o procedimento de se utilizar a equação (45) para exprimir o valor de δ nem sempre apresenta resultados tão bons. No caso geral o erro médio é da ordem de 10%.

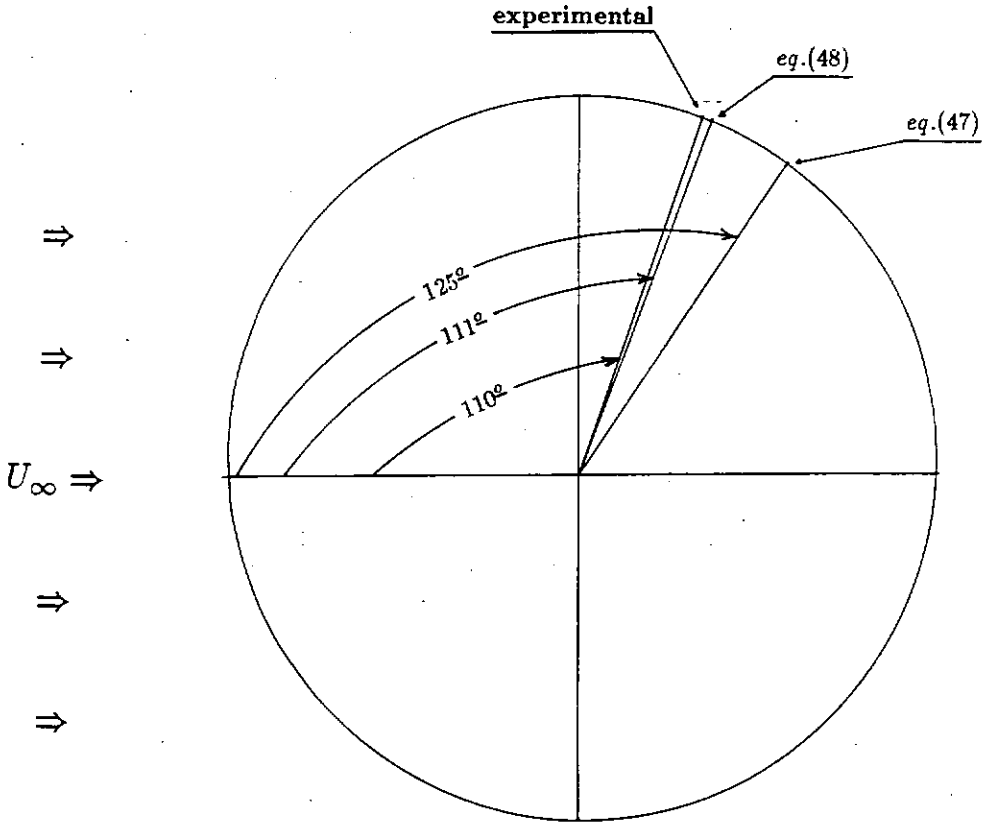


Fig.7 Separação de camada limite turbulenta sobre um cilindro circular, comparação entre experimentos e teoria.

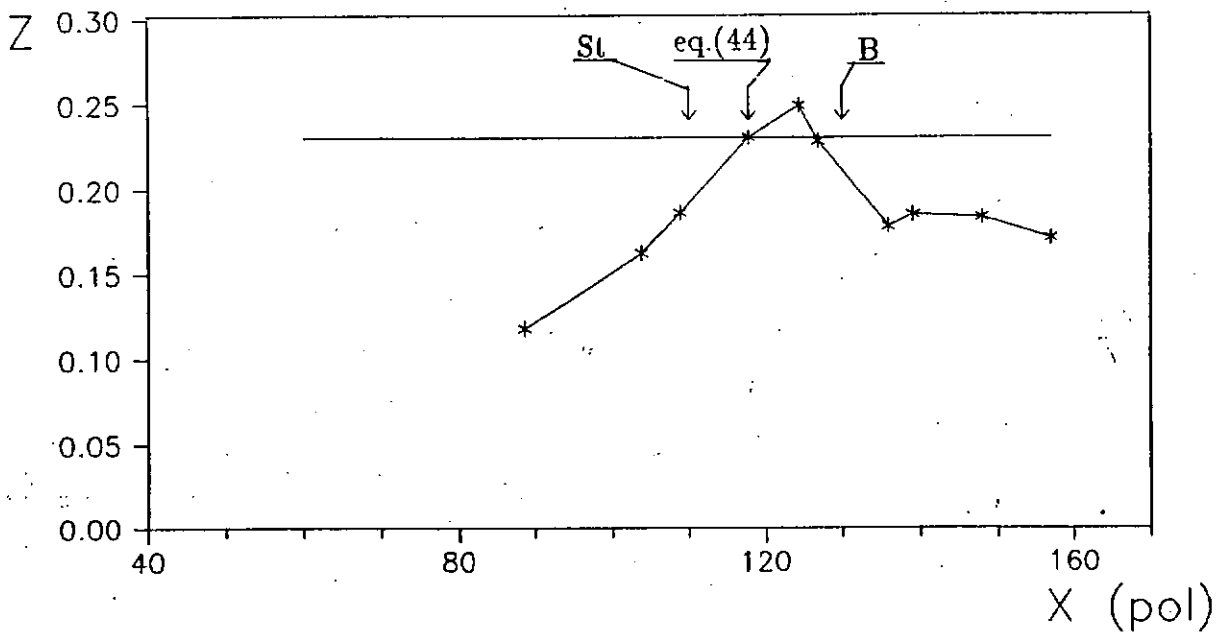
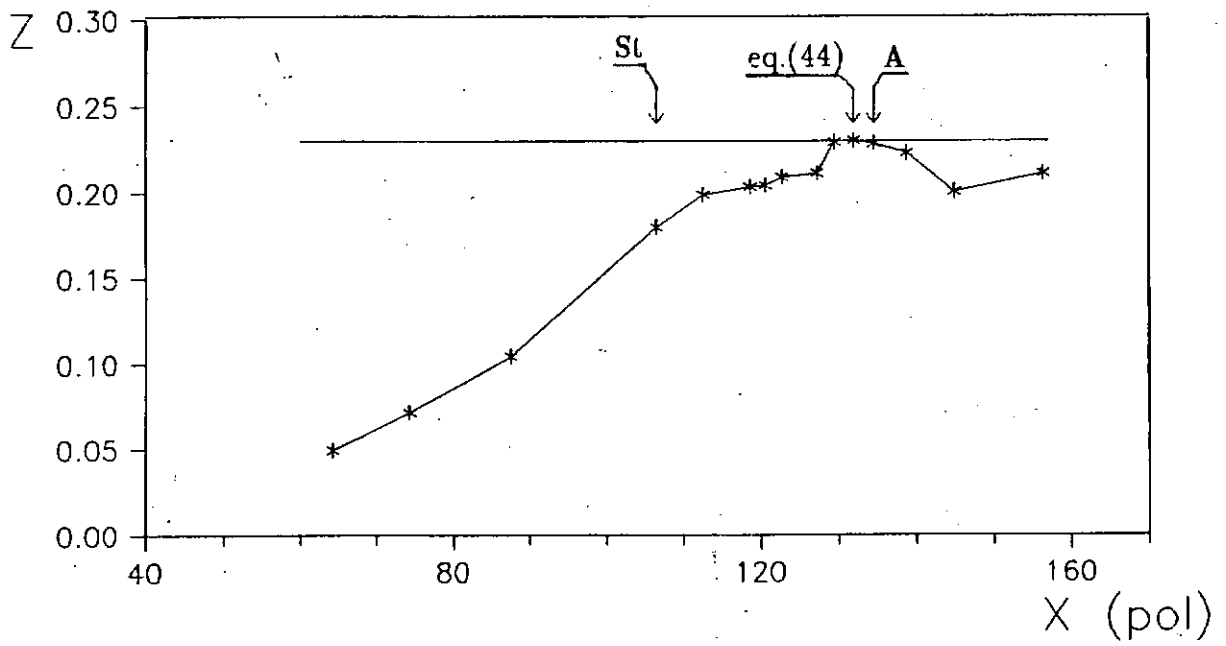


Fig. 5 e 6 Comparação entre os valores previstos para o ponto de descolamento: St-Stratford [57], eq.(44)-equação (44), A-Simpson[47], B-Simpson[50].

Conclusão

No presente trabalho, estudou-se o fenômeno de separação da camada limite turbulenta, sobre uma placa plana sujeita a um gradiente de pressão adverso. Os resultados até aqui obtidos são válidos para o caso incompressível, sem troca de calor. Os principais resultados obtidos neste trabalho são os seguintes:

1 - A obtenção de uma velocidade característica da região interna da camada limite válida até o ponto de descolamento. De posse desta velocidade foi possível, definir um parâmetro pequeno característico do problema (ϵ) e observar como varia a ordem de grandeza deste, quando a tensão na parede tende a zero. Esta variação vai desde $O(\epsilon) = O((\ln R_e)^{-1})$, para regiões longe do ponto de descolamento, até $O(\epsilon) = O(\frac{1}{\sqrt[3]{R_e}})$ nas imediações deste ponto.

2 - Análise assintótica das equações na região de separação. Utilizando-se a técnica das expansões assintóticas combinadas foi possível determinar quais as equações que regem o escoamento na região de separação. Através desta análise, constatou-se que a estrutura do escoamento muda bastante quando a tensão na

parede tende a zero, sendo muito diferente da estrutura clássica válida longe da região de separação.

3 - Obtenção de um critério de descolamento. Observando-se a estrutura do escoamento na região de separação, constatou-se que uma lei da parede que descrevesse o escoamento próximo ao ponto de descolamento, deveria confundir-se com a parte interna de alguma função que representasse o escoamento na esteira. Deste modo foram utilizadas as equações (23) e (28) representando uma "lei da parede" e uma "lei da esteira" respectivamente. Do acoplamento destas duas equações obteve-se um critério de descolamento cuja relação entre simplicidade e precisão mostrou-se muito boa.

4 - A influência do gradiente de pressão na tensão na parede quando esta tende a zero. As equações (40) e (43) mostram que quando a tensão na parede tende a zero esta apresenta um comportamento do tipo:

$$\tau_w = C |x - X_d|^{n-2}$$

onde C é uma função do gradiente de pressão externo em $x = X_d$ e $2 < n < 3$. Como foi mostrado, quanto maior for o gradiente de pressão externo em $x=X_d$ maior será a velocidade com que a tensão na parede tende a zero.

Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestões para trabalhos futuros podemos citar:

1 - Extensão dos resultados aqui obtidos para o caso térmico. Utilizando-se a equação (23) e uma lei da esteira, é possível a obtenção de uma equação para o número de Stanton válida na região de separação.

2 - Aplicação da técnica conhecida como "triple deck" e da teoria da variável intermediária ao problema de separação de camada limite turbulenta, com o objetivo de estabelecer as principais diferenças existentes entre o fenômeno turbulento e laminar, além de determinar a natureza da singularidade existente no ponto de descolamento para o caso turbulento.

3 - Extensão dos resultados para o escoamento compressível e com injeção, tanto para o caso térmico quanto para o caso cinético.

Apêndice

Procuraremos neste apêndice apresentar uma revisão dos métodos mais utilizados atualmente na previsão do ponto de descolamento da camada limite. Serão mostrados aqui procedimentos utilizados tanto no caso laminar quanto no caso turbulento. Nos restringiremos aos escoamentos incompressíveis e bidimensionais.

Camada Limite Laminar

O escoamento em camada limite laminar é muito mais sensível à influência de um gradiente de pressão adverso que o escoamento turbulento. Uma vez que a camada limite laminar é, de certo modo, mais acessível a um tratamento matemático, a previsão do ponto de descolamento laminar pode ser obtida com certa acurácia. O ponto de descolamento para o caso do escoamento laminar é basicamente independente do número de Reynolds. Sendo assim, o ponto de descolamento está geometricamente fixado na superfície do corpo. Por exemplo, o ponto de descolamento para o caso do escoamento laminar sobre um cilindro circular está geralmente localizado na mesma posição angular, independentemente das dimensões do cilindro e do valor da velocidade do escoamento fora da camada limite. Esta posição está em torno de 81° , medidos a partir do ponto de estagnação.

O Método de Pohlhausen

Pohlhausen [36] desenvolveu uma solução aproximada para a equação da camada limite usando uma forma adimensional do perfil de velocidade dada por:

$$\frac{u}{U} = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 ,$$

onde $\eta = y/\delta$, y sendo a distância medida perpendicularmente a partir da parede e δ a espessura da camada limite. Um parâmetro adimensional λ , relacionado com o gradiente de pressão externo, é definido por:

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx} . \quad (49)$$

Os coeficientes a,b,c e d podem ser determinados como funções de λ utilizando-se condições de contorno na parede e no início da camada limite. Quando a condição $\frac{du}{d\eta}|_{y=0} = 0$ é satisfeita, o ponto de descolamento é dado pelo critério $\lambda = -12$. Deste modo como δ e $\frac{dU}{dx}$ são funções de x a localização do ponto de descolamento pode ser facilmente determinada através da equação (49). Prevista por este método simples, a posição do ponto de descolamento geralmente fica a jusante do valor dado por dados experimentais.

O Método de Shvets

O método de Shvets [45] foi desenvolvido a partir de uma aproximação de

segunda ordem para a solução da equação de camada limite.

A equação de camada limite transformada é dada por:

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy - U \frac{dU}{dx} .$$

As condições de contorno são:

$$y = 0 , u = 0 ,$$

$$y = \delta , u = U .$$

A solução desta equação, em uma aproximação de segunda ordem, fornece:

$$\nu \frac{u}{U} = \frac{\delta^2}{24} \frac{dU}{dx} (\eta^4 - 12\eta^2 + 11\eta) - \frac{U}{24} \frac{d\delta}{dx} \delta (\eta^4 - \eta) + \eta ,$$

onde $\eta = \frac{y}{\delta}$.

No ponto de descolamento onde $\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0$, essa expressão se reduz a:

$$\nu \left(\frac{3}{8} \frac{dU}{dx} \delta^2 + \frac{u}{8} \frac{d\delta}{dx} \delta \right) = 1 .$$

Assumindo ser a espessura da camada zero em $x = 0$ e resolvendo para δ^2 temos:

$$\frac{1}{\nu} \delta = \left(\frac{16}{U^6} \right) \int_0^x U^5 dx .$$

Avaliando a tensão na parede,

$$\tau_w = \frac{U^4}{3} \left(\int_0^x U^5 dx \right)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{4}{U^6} \frac{dU}{dx} \int_0^x U^5 dx \right].$$

Uma vez que no ponto de descolamento $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$, o critério de descolamento fica :

$$\frac{4}{U^6} \frac{dU}{dx} \int_0^x U^5 dx = -1 .$$

O ponto de descolamento é então determinado avaliando-se apenas a velocidade do escoamento potencial embora a separação seja um fenômeno governado pelo escoamento interno viscoso.

O Método de Stratford

Stratford [56] desenvolveu equações para a parte interna e externa da camada limite. Na região externa as "forças de inércia" são basicamente balanceadas pelo gradiente de pressão. Na região mais interna, o gradiente de pressão é balanceado pelas forças viscosas.

Stratford originalmente obteve uma expressão matemática baseada na solução de Blasius. Curle e Skan [16] modificaram as previsões de Stratford para separação laminar comparando-a com uma rigorosa solução de Gortler [22]. O critério de descolamento modificado é :

$$\left[\bar{x}^2 C_p \left(\frac{dC_p}{d\bar{x}} \right)^2 \right] = 0.0104 ,$$

onde:

$$\bar{x} = x_{eq} + x_d .$$

O símbolo x_{eq} se refere ao comprimento equivalente a jusante do ponto no qual a velocidade potencial é máxima, e é dado por:

$$x_{eq} = \int_0^x \left(\frac{U}{U_{max}} \right)^{8.17} dx ;$$

x_d é a distância entre o ponto no qual a velocidade potencial é máxima até ponto de descolamento. O coeficiente de pressão C_p é dado por:

$$C_p = \frac{P - P_{min}}{\frac{1}{2}\rho U_{max}^2} ,$$

Este método é relativamente simples de se aplicar uma vez que, como o método de Shvet, ele se baseia apenas em propriedades do escoamento potencial, e não envolve características do escoamento viscoso.

O Método de Thwaites, Curle e Skan

Se além da distribuição de velocidade do escoamento externo a espessura da quantidade de movimento da camada limite é conhecida, o método de Thwaites[62], modificado por Curle e Skan [16] se mostra bastante útil. De uma forma inovadora, Thwaites utilizou a espessura da quantidade de movimento da camada limite como a principal variável dependente e estabeleceu uma relação entre

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \text{ e } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} ,$$

para resolver a equação diferencial de camada limite. Com

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{U l}{\delta_2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{U m}{\delta_2^2},$$

é então possível estabelecer uma relação entre l e m examinando-se as várias soluções conhecidas para a equação de camada limite tais como as de Pohlhausen [36], Falkner e Skan [19], Howarth [25], Hartree [25], Blasius [3], Iglisch [26].

Integrando-se a equação integral da quantidade de movimento

$$\frac{d\delta_1}{dx} = -(H + 2) \frac{dU}{dx} \frac{\delta_2}{U} + \frac{\nu}{U} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0},$$

obtemos então a solução original de Thwaites

$$\delta_2^2 = 0.45 U^{-6} \nu \int_0^x U^5 dx,$$

com

$$m = \frac{-\delta_2^2}{\nu} \frac{dU}{dx},$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{U l(m)}{\delta_2}.$$

O critério de descolamento é então dado por :

$$m = 0.082,$$

$$l(m) = l(0.082) = 0 ,$$

e

$$H(0.082) = 3.7 .$$

O Critério modificado por Curle e Skan fornece:

$$\frac{\delta_2}{\nu} \frac{dU}{dx} = -0.09$$

Camada Limite Turbulenta

Na prática, escoamento turbulento é muito mais comum que o escoamento laminar, especialmente para altos números de Reynolds. Contudo, por ser a mecânica do escoamento turbulento pouco entendida, sua solução não é passível de um tratamento analítico e requer dados empíricos. A previsão do ponto de descolamento para o caso de escoamentos turbulentos externos deve se basear nos conceitos de camada limite. De um modo geral, as previsões neste caso são mais trabalhosas e menos precisas que aquelas para o caso do escoamento laminar.

No passado, o problema do descolamento turbulento sobre um cilindro circular, foi investigado analítica e experimentalmente. Uma vez que o escoamento turbulento supera melhor dificuldades como gradiente de pressão adverso e a ação da viscosidade, este percorre uma distância maior antes de separar. Para o escoamento turbulento, o ponto de descolamento está em torno de 110° (medidos a partir do ponto de estagnação), comparado com 81° do caso laminar.

O Método de von Doenhoff e Tetervin

Para gradientes de pressão moderados, como no caso de um aerofólio, von Doenhoff e Tetervin [67], desenvolveram um procedimento analítico relativamente simples para a previsão do ponto de descolamento turbulento. Este procedimento se baseia em H (fator de forma da camada limite) e na rapidez com que H cresce. As duas equações seguintes devem ser resolvidas simultaneamente para que se possa obter o valor de H e de θ ao longo da superfície do corpo.

$$\frac{d\delta_2}{dx} \frac{\delta_2(H+2)}{2q} \frac{dq}{dx} = [5.89 \log_{10}(4.075 Re_{\delta_1})]^{-2},$$

$$\delta_2 \frac{dH}{dx} = e^{4.68(H-2.975)} \left[\frac{\delta_2}{q} \frac{dq}{dx} [5.89 \log_{10}(4.075 Re_{\delta_2})]^2 - 2.035(H - 1.286) \right].$$

Nas equações acima x representa a distância ao longo da superfície do corpo, desde o ponto de transição da camada limite. Este método é relativamente simples de se aplicar uma vez que o critério de descolamento é assumido como dependendo apenas do valor de H . Se H atinge um valor entre 1.8 e 2.6 e, apresenta um crescimento muito rápido, então o fenômeno de separação turbulenta é esperado.

O Método de Garner

Garner [20] combinou dois métodos diferentes (Howart [25], von Doenhoff e

Tetervin [67]), e expressou a tensão na parede por uma lei de potência e pelos dois seguintes parâmetros:

$$\Theta = \delta_2 Re_{\delta_2}^{\frac{1}{n}},$$

e

$$\Gamma = \frac{\Theta}{U} \frac{dU}{dx},$$

onde n pode ser assumido como sendo 6 e x é a distância ao longo do corpo.

Garner considerou o efeito exercido pela transição no ponto de descolamento turbulento, e derivou as seguintes equações empiricamente:

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{7}{6} \left[\zeta - \Gamma \left(H + \frac{13}{7} \right) \right], \quad (a1)$$

$$\Theta \frac{dH}{dx} = e^{5(H-1.4)} \left[-\Gamma - 0.0135(H - 1.4) \right], \quad (a2)$$

onde:

$$\zeta = \left(\frac{\tau_w}{\rho U^2} \right) Re_{\delta_2}^{\frac{1}{n}}.$$

O descolamento é previsto para ocorrer quando $H = 2.6$. Para uma dada distribuição de velocidade, o procedimento de cálculo é dado por :

1 - Determina-se o desenvolvimento da camada limite laminar antes da transição.

2 - Decide-se em que ponto da superfície do corpo ocorre a transição.

3 - Calcula-se o valor de Θ imediatamente após a transição.

4a - Se a transição ocorrer à jusante do ponto onde a velocidade potencial é máxima, assume-se que $\frac{dH}{dx} = 0$ no ponto de transição

4b - Se a transição ocorrer à montante do ponto onde a velocidade potencial é máxima, assume-se então H como sendo constante entre o ponto de transição e o ponto onde a velocidade é máxima . O valor de Θ no ponto onde a velocidade é máxima é dado por:

$$U_{max}^k \Theta = [U^k \Theta]_{tr} + 0.007623 \int U^k dx ,$$

onde o subscrito denota valores no ponto assumido de transição, e a integral é tomada a partir do ponto de transição até o ponto de velocidade máxima. Temos ainda que $k = \frac{6}{7}H + \frac{13}{6}$.

5 - Finalmente determina-se o ponto de descolamento integrando-se as equações (a1) e (a2).

O método de Garner geralmente é mais rápido e mais preciso que o método de Doenhoff - Tetervin.

A Magnitude de L como um Critério

Usando-se H e \bar{H} (a razão entre a espessura de energia e a espessura de quantidade de movimento), o critério de descolamento é dado pelo parâmetro adimensional definido por:

$$L = \int_{\bar{H}_0}^{\bar{H}} \frac{d\bar{H}}{(H-1)\bar{H}},$$

onde

$$\bar{H} = \frac{\delta_3}{\delta_2},$$

e δ_3 é a espessura de energia que é dada por:

$$\delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left[1 - \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right] dy.$$

O ponto de descolamento está previsto para ocorrer na região onde L assume valores entre -0.13 e -0.18, o que corresponde a valores de H entre 1.8 e 2.4.

O critério de Stratford

Stratford [57,58] utilizando um procedimento semelhante ao utilizado para a camada limite laminar, encontrou soluções para as regiões externa e interna da camada limite turbulenta na região de separação. Através do acoplamento dessas soluções (interna e externa), Stratford obteve o seguinte critério :

$$(2C_p)^{\frac{(n-2)}{4}} \left(x \frac{dC_p}{dx} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.06\beta(10^{-6} R_e)^{0.1} \quad \left(C_p \leq \frac{n-2}{n+1} \right),$$

onde

$$C_p = \left(\frac{P - P_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \right),$$

$$\beta = 0.66 \rightarrow \left(\frac{d^2 P}{dx^2} < 0 \right),$$

$$\beta = 0.73 \rightarrow \left(\frac{d^2 P}{dx^2} \geq 0 \right).$$

No critério acima R_e é o número de Reynolds baseado no valor local de x , e n é uma função do número de Reynolds dada por $n = \log_{10} R_e$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ADAMS, E.W. and JOHNSTON, J.P., "Flow Structure in the Near-Wall Zone of a Turbulent Separated Flow", *AIAA Journal*, **26**, (8), 932 (1988)
- [2] BATCHELOR, G.K., "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge University Press (1970)
- [3] BLASIUS, H., "The Boundary Layer in Fluids with Little Friction", NASA TM 1256 (1908)
- [4] BRADSHAW, P., "The Turbulence Structure of Equilibrium Boundary Layers", *J. Fluid Mech.*, **29**, Part 4, 625 (1967)
- [5] BUCKMASTER, J., "The Behavior of a Laminar Compressible Boundary Layer on a Cold Wall Near a Point of Zero Skin Friction", *J. Fluid Mech.*, **44**, 273 (1970)
- [6] BUCKMASTER, J., "The Unsteady Evolution of the Singularity at Separation", *J. Eng. Math.*, **5**, (3), 223 (1973)
- [7] BUCKMASTER, J., "Separation and Compressible Boundary Layer", *J. Eng. Math.*, **5**, (1), 71 (1971)
- [8] CASTRO, I.P. and HAQUE, A.J., "The Structure of a Turbulent Shear Layer Bounding a Separation Region", *J. Fluid Mech.*, **179**, 439 (1987)
- [9] CASTRO, I.P. and HAQUE, A.J., "The Structure of a Shear Layer Bounding a Separation Region. Part 2. Effects of Free Stream Turbulence", *J. Fluid Mech.*, **192**, 577 (1988)

- [10] CHANG, P.R., "Control of Flow Separation", Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill Book Company (1976)
- [11] CHEN, H.C. and PATEL, V.C., "Near Wall Turbulence Models for Complex Flows Including Separation", AIAA Journal, **26**, (6), 641 (1987)
- [12] CLAUSER, F., "The Turbulent Boundary Layer", Adv. Appl. Mech., **IV**, 1, (1956)
- [13] CLAUSER, F.H., "Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients", J. of the Aero. Sc., **21**, 91-109 (1954)
- [14] COLE, J.D., "Perturbation Methods in Applied Mathematics", Blaisdell Publishing Company (1968)
- [15] CROCCO, L., "Flow Separation", AGARD Conference Proceedings (168) (Supplement) (1975)
- [16] CURLE, N. and SKAN, S.W. "Approximate Methods for Predicting Separation Properties of Laminar Boundary Layers", Aeronaut. Quart., Vol. VII, pp. 257-268
- [17] DANDY, D.S. and LEAL, L.G., "Boundary Layer Separation from a Smooth Slip Surface", Phys. Fluids, **29**, (5), 360 (1986)
- [18] DENGUEL, P. and FERNHOLZ, H.H., "An Experimental Investigation of a Incompressible Turbulent Boundary Layer in the Vicinity of Separation", J. Fluid Mech, **212**, 615 (1990)
- [19] FALKNER, V.M. and S.W. SKAN, "Some Approximate Solution of Boundary Layer Equations", ARC R&M 1314 (1930)
- [20] GARNER, H.C., "The Development of Turbulent Boundary Layers", ARC R&M 2133 (1944)

- [21] GOLDSTEIN, S., "On Laminar Boundary Layer Flow Near a Position of Separation", *A.J. Mech. Appl. Math*, **1**, 43 (1948)
- [22] GORTLER, H., "A New Series for the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows", *J. Math. Mech.*, Vol.6, pp. 1-66 (1958)
- [23] HARTREE, D.R., "A Solution of the Boundary Layer Equation for Schubauer's Observed Pressure Distribution for an Elliptic Cylinder", *ARC R&M 3966* (1939)
- [24] HIGUCHI, H. and FARELL, C., "On the Flow Separation and Reattachment around a Circular Cylinder at Critical Reynolds Numbers", *J. Fluid Mech.*, **200**, 149 (1989)
- [25] HOWARTH, L., "On the Solution of Laminar Boundary Equations", *Proc. Roy. Soc. A*, **164**, 547 (1938)
- [26] IGLISCH, R., "Exact Calculation of Laminar Boundary Layer in Longitudinal Flow Over a Plate with Homogeneous Suction", *NACA TM 1206* (1944)
- [27] KADER, B.A. and YAGLOM, A.M., "Similarity Treatment of Moving-Equilibrium Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients", *J. Fluid Mech.*, **89** Part 2, 305 (1979)
- [28] MACDONALD, H.J., "The Effects of Pressure Gradients on the Law of the Wall in Turbulent Flow", *J. Fluid Mech.*, **35**, Part 2, 311 (1968)
- [29] MELLOR, G.L. and GIBSON, M.D., "Equilibrium Turbulent Boundary Layers", *J. Fluid Mech.*, **24**, Part 2, 225 (1966)
- [30] MELLOR, G.L., "The effects of Pressure Gradients on Turbulent Flow Near a Smooth Wall", *J. Fluid Mech.*, **24**, Part 2, 255 (1966)
- [31] MELLOR, G.L., "The Large Reynolds Number, Asymptotic Theory of Tur-

- bulent Boundary Layers”, *Int. J. Engng. Sci.*, **10**, 851 (1972)
- [32] MELNIK, R.E., “An Asymptotic Theory of Turbulent Separation”, *Compte Rendus de l’Académie des Sciences et des Lettres de Paris, Série B*, **17**, 165 (1989)
- [33] NAYFEH, A.H., “Introduction to Perturbation Techniques”, Wiley-Interscience Publication (1981)
- [34] NEISH, A. and SMITH, F.T., “The Turbulent Boundary Layer and a wake of an Aligned Flat Plate”, Internal report, Department of Mathematics University College, London (1987)
- [35] PERRY, A.E. and SCHOFIELD, W.H., “Mean Velocity and Shear Stress Distribution in Turbulent Boundary Layers”, *The Physics of Fluids*, **16**, (12), 2068 (1973)
- [36] POHLHAUSEN, K., “The Approximate Integration of the Differential Equation for the Laminar Boundary Layer” by R.C. Anderson, University of Florida, Gainesville, 1965, AD 645 , 784 (1971)
- [37] PRANDTL, L., “Über Flüssigkeitsbewegung Bei Sehr Kleiner Reibung”, *Proceedings 3rd Inter. Math. Congr. Heidelberg* (1904)
- [38] RUDERICH, R. and FERNHOLZ, H.H., “An Experimental Investigation of a Turbulent Shear Flow with Separation, Reverse Flow and Reattachment”, *J. Fluid Mech.*, **163**, 283 (1986)
- [39] SANDBORN, V.A. and LIU, C.Y., “On Turbulent Boundary Layer Separation”, *J. Fluid Mech.*, **32**, 293, (1968)
- [40] SANDBORN, V.A., “Boundary Layer Separation and Reattachment”, *Fluid Mech. Acoustic and Design of Turbomachinery*, NASA SP-304, pt.1, 279 (1970)

- [41] SANDBORN, V.A. and KLINE, S.J., "Flow Models in Boundary-Layer Stall Inception", *Trans. A.S.M.E.D., J. Basic Engenee.*, **83**, 317 (1961)
- [42] SCHLICHTING, H., "Boundary Layer Theory", McGraw-Hill Book Company (1962)
- [43] SCHOFIELD, W.H., "Equilibrium Boundary Layers in Moderate to Strong Adverse Pressure Gradients", *J. Fluid Mech.*, **113**, 91 (1981)
- [44] SCHOFIELD, W.H., "Two-Dimensional Separating Turbulent Boundary Layer", *A.I.A.A. Journal* , **24**, (10), 1611 (1986)
- [45] SHVETS, M.E., "Method of Successive Aproximations for the Solution of Certain Problems in Aerodynamics", NACA TM 1286 (Translated from a russian article in *Pri.Kl. Mat. Imer.*, Vol. 13, No.3) (1940)
- [46] SHILOH, K.; SHIVAPRASAD, B.G. and SIMPSON, R.L., "The Structure of a Separating Turbulent Boundary Layer. Part 3. Transverse Velocity Measurements", *J. Fluid Mech.*, **113**, 75 (1981)
- [47] SIMPSON, R.L.; CHEW, Y.T. and SHIVAPRASAD, B.G., "The Structure of a Separating Turbulent Boundary Layer. Part 1. Mean Flow and Reynolds Stresses", *J. Fluid Mech.*, **113**, 23 (1981)
- [48] SIMPSON, R.L.; CHEW, Y.T. and SHIVAPRASAD, B.G., "The Structure of a Separating Turbulent Boundary Layer. Part 2. Higher Order Turbulence Results", *J. Fluid Mech.*, **113**, 53 (1981)
- [49] SIMPSON, R.L.; SHIVAPRASAD, B.G. and CHEW, Y.T., "The Structure of a Separating Turbulent Boundary Layer. Part 4. Effects of Periodic Free Stream Unsteadness", *J. Fluid Mech.*, **127**, 219 (1983)
- [50] SIMPSON, R.L.; STRICKLAND, J.H. and BARR, P.W., "Features of a Separating Turbulent Boundary Layer in the Vicinity of Separation", *J. Fluid*

Mech., **79 - 3**, 553 (1977)

- [51] SILVA FREIRE, A.P. and HIRATA, M.H., "Approximate Solutions to Singular Perturbation Problems: the Intermediate Variable Technique", *J. of Mathematical Analysis and Applications*, **145**, (1), 241, (1990)
- [52] SILVA FREIRE, A.P. and HIRATA, M.H., "On the Matching Conditions for Turbulent Boundary Layer Problems with Heat Transfer", *Proceedings 2nd ENCIT, Águas de Lindóia, SP* (1988)
- [53] SMITH, F.T., "Modelling of Separating Flow and its Stability", *J. of Theo. and Applied Mech.*, Número especial, 47 (1986)
- [54] STEWARTSON, K., "The Behavior of a Laminar Compressible Boundary Layer Near a Point of Zero Skin Friction", *J. Fluid Mech.*, **12**, 117, (1961)
- [55] STEWARTSON, K., "On Goldstein's Theory of Laminar Separation", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **11**, 399 (1958)
- [56] STRATFORD, B.S., "Flow in the Laminar Boundary Layer Near Separation", *ARC Technical Report R&M 3002* (1957)
- [57] STRATFORD, B.S., "The Prediction of Separation of the Turbulent Boundary Layer", *J. Fluid Mech.*, **5**, 1 (1959)
- [58] STRATFORD, B.S., "An Experimental Flow with Zero Skin Friction Throughout its Region of Pressure Rise", *J. Fluid Mech.*, **5**, 17 (1959)
- [59] SYCHEV, V.V. and SYCHEV, V., "On Turbulent Boundary Layer Structure", *P.M.M. U.S.S.R.*, **51**, (4), 462 (1987)
- [60] SYCHEV, V.V. and SYCHEV, V., "On Turbulent Separation", *P.M.M. U.S.S.R.*, **20**, 133 (1980)

- [61] SYCHEV, V.V., "On Certain Singularities in Solutions of Equations of Boundary Layer on a Moving Surface", P.M.M. U.S.S.R., **22**, 371 (1987)
- [62] THUAITES, B., "Approximate Calculation of the Laminar Boundary Layer", Aeronaut. Quart., Vol. 1, pp. 255-280 (1949)
- [63] THOMPSON, B.E. and WHITELOW, I.H., "Characteristics of a Trailing-edge Flow with Turbulent Boundary Layer Separation", J. Fluid Mech., **157**, 305 (1985)
- [64] TOWNSEND, A.A., "The Development of Turbulent Boundary Layers with negligible wall Stress", J. Fluid Mech., **8**, 143 (1959)
- [65] TOWNSEND, A.A., "Equilibrium Layers and Wall Turbulence", J. Fluid Mech., **11**, 97 (1960)
- [66] YAJNIK, K.S., "Asymptotic Theory of Turbulent Shear Flows", J. Fluid Mech., **42**, Part 2, 411 (1970)
- [67] VON DOENHOFF, A.E. and TETERVIN, N., "Determination of General Relations for the Behavior of Turbulent Boundary Layers", NACA Report 772 (1943)