

A CAMADA LIMITE TURBULENTA, COMPRESSÍVEL, COM ADIÇÃO
DE CALOR E MASSA—UMA ABORDAGEM ASSINTÓTICA

Cláudio de Castro Pellegrini

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Aprovada por :

Atila Pantaleão Silva Freire

Prof. Atila Pantaleão Silva Freire, Ph.D

Alcir de Faro Orlando

Prof. Alcir de Faro Orlando, Ph.D

R. Mach. Cotta

Prof. Renato Machado Cotta, Ph.D

Júlio César Passos

Prof. Júlio César Passos, D.Sc

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

fevereiro de 1991

PELLEGRINI, CLÁUDIO DE CASTRO

A Camada Limite Turbulenta Compressível com Adição de Calor e
Massa—Uma Abordagem Assintótica [Rio de Janeiro], 1991.

XIII, 96 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Mecânica, 1991)

Tese—Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Fenômenos de Transporte I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

Aos meus pais.

Agradecimentos

Gostaria de tornar pública a minha gratidão a todos aqueles que participaram de alguma forma na elaboração deste trabalho. Em particular, gostaria de agradecer, à

Átila P. Silva Freire,

por sua orientação cuidadosa e disponível, sempre preocupada com a formação, mais do que com a mera informação,

André da Costa Barros,

pelo indispensável auxílio computacional,

Marcello A. Faraco Medeiros,

pela amizade, pelos conselhos, as críticas e as muitas sugestões que emitiu durante o curso deste trabalho, e que foram decisivos nos rumos que este tomou.

CNPQ,

que sustentou financeiramente parte deste trabalho.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciência (M. Sc.)

A CAMADA LIMITE TURBULENTA, COMPRESSÍVEL, COM ADIÇÃO
DE CALOR E MASSA—UMA ABORDAGEM ASSINTÓTICA

Cláudio de Castro Pellegrini

fevereiro de 1991

Orientador: Átila P. Silva Freire

Programa: Engenharia Mecânica

Neste trabalho, o método das expansões assintóticas combinadas, juntamente com a técnica das variáveis intermediárias, são utilizados para obter equações para o cálculo dos coeficientes de atrito e troca térmica em escoamentos turbulentos, compressíveis, sobre placa plana porosa, com injeção normal de calor e massa. Fórmulas para os perfis de velocidade e temperatura são deduzidas, e expressões inéditas para a variação das constantes de integração destas fórmulas com o número de Mach e com a taxa de injeção são apresentadas. A análise não utiliza a transformação de Van Driest. Todos os resultados teóricos são comparados com dados experimentais de diversos autores, mostrando boa concordância.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

THE COMPRESSIBLE TURBULENT BOUNDARY LAYER WITH ADDITION
OF MASS AND HEAT—AN ASYMPTOTIC APPROACH

Cláudio de Castro Pellegrini

February, 1991

Supervisor: Átila P. Silva Freire

Department: Mechanical Engineering

In this work, the matched asymptotic expansions method, together with the intermediate variable technique, is used to obtain expressions for the evaluation of skin-friction and heat exchange coefficients, in compressible turbulent flows over flat porous surfaces, with normal addition of heat and mass. Expressions for the velocity and the temperature profiles are deduced, and new expressions for the dependence of the integration constants in these formulae on Mach number and injection rate are presented. The analysis does not use Van Driest's transformation. All theoretical results are compared with the experimental data of a number of authors showing good agreement.

ÍNDICE

Ficha Catalográfica	ii
Dedicatória	iii
Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Índice	vii
Nomenclatura	ix
<i>Capítulo 1</i> INTRODUÇÃO	1
<i>Capítulo 2</i> EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO MÉDIO	6
<i>Capítulo 3</i> ANÁLISE ASSINTÓTICA DAS EQUAÇÕES	15
3.1 Domínio de Validade da Primeira Ordem de Aproximação das Equações do escoamento Médio	16
3.2 Análise Assintótica da Camada da Parede	26

3.3	Análise Assintótica da Camada Exterior	37
3.4	Combinação das Soluções — Equações do Atrito e da Troca	
	Térmica	42
<i>Capítulo 4</i>	DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES	44
<i>Capítulo 5</i>	ANÁLISE DOS RESULTADOS	69
<i>Capítulo 6</i>	CONCLUSÃO	83
APÊNDICES	87
1	Ordem de Grandeza de E' e P'	87
2	Solução das Equações Aproximadas de Quantidade de Movimento e Energia na Região Completamente Turbulenta	90
3	Solução das Equações Aproximadas de Pressão na Região Com- pletamente Turbulenta	92
BIBLIOGRAFIA	93

NOMENCLATURA

Letras latinas

- A_u Constante de integração do perfil de velocidade.
- A_{u_0} Constante de integração do perfil de velocidade, caso sem injeção.
- A_e Constante de integração do perfil de energia.
- A_{e_0} Constante de integração do perfil de energia, caso sem injeção.
- A_p Constante de integração do perfil de pressão.
- C Constante de integração do perfil de pressão.
- C_e Constante de proporcionalidade na expressão de A_e — eqn. (4.27).
- C_f Coeficiente de atrito.
- $C_{f_{exp}}$ Coeficiente de atrito — valores experimentais.
- $C_{f_{calc-p}}$ Coeficiente de atrito — valores calculados pelas expressões (3.47) e (3.48), com os valores teóricos propostos para as constantes.
- $C_{f_{calc-e}}$ Coeficiente de atrito — valores calculados pelas expressões (3.47) e (3.48), com os valores experimentais medidos para as constantes.
- C_i Constantes de integração dos perfis de velocidade, energia e pressão, para i variando de 1 a 5.
- c_p Calor específico à pressão constante.
- c_{p_∞} Calor específico à pressão constante, no escoamento externo à camada limite.
- E Energia total — definida na eqn. (2.8a).
- E_e^+ Parâmetro na expressão de A_e — eqn. (4.27).
- E_{c_∞} Número de Eckert avaliado no escoamento externo à camada limite — $U_\infty^2 / c_{p_\infty} (T_\infty - T_w)$.
- $E_{c_\infty}^*$ Número de Eckert modificado, avaliado no escoamento externo à camada limite — $U_\infty^2 / c_{p_\infty} T_\infty$.
- $E_{c_{médio}}$ Energia cinética média — definida pela eqn. (2.27).

$E_{c_{t,u,r,b}}$	Energia cinética turbulenta — definida pela eqn. (2.28).
e_r	Energia característica da camada da parede.
f	Função genérica.
F	Taxa adimensional de injeção — definida por $\rho_w v_w / \rho_\infty U_\infty$.
i	Vetor unitário na direção \overline{OX} .
j	Vetor unitário na direção \overline{OY} .
k	Condutividade térmica.
K_u	Constante de proporcionalidade na expressão do comprimento de mistura de u' .
K_e	Constante de proporcionalidade na expressão do comprimento de mistura de E' .
M_∞	Número de Mach avaliado no escoamento externo à camada limite.
p	Pressão termodinâmica.
P	Pressão total — definida pela eqn. (2.8b).
P_u	Parâmetro da função de Coles, para o perfil de velocidade — definido por $P_u = 2\Pi_u / K_u$.
P_e	Parâmetro da função de Coles, para o perfil de velocidade — definido por $P_e = 2\Pi_e / K_e$.
Pr_w	Número de Prandtl avaliado na parede — $\mu_w c_{p_w} / k_w$.
Pr_∞	Número de Prandtl avaliado no escoamento externo à camada limite — $\mu_\infty c_{p_\infty} / k_\infty$.
p_r	Pressão termodinâmica característica da camada da parede.
P_r	Pressão total característica da camada da parede.
q	Vetor fluxo de calor.
q_c	Fluxo de calor transferido por condução.
q_t	Fluxo de calor transferido por turbulência.
\dot{q}_w''	Fluxo de calor por unidade de área através da parede.
q_x	Fluxo de calor na direção x .
q_y	Fluxo de calor na direção y .
R	Constante dos gases perfeitos para o ar.
Re_w	Número de Reynolds avaliado na parede — $\rho_w U_\infty X / \mu_w$.
Re_∞	Número de Reynolds avaliado no escoamento externo à camada limite — $\rho_\infty U_\infty X / \mu_\infty$.

$Re_{\delta_2 w}$	Número de Reynolds baseado em δ_2 , avaliado na parede — $\rho_w U_\infty \delta_2 / \mu_w$.
St	Coefficiente de troca térmica.
St_{exp}	Coefficiente de troca térmica — valores experimentais.
St_{calc-p}	Coefficiente de troca térmica — valores calculados através das expressões (3.47) e (3.48), com os valores teóricos propostos para as constantes.
St_{calc-e}	Coefficiente de troca térmica — valores calculados através das expressões (3.47) e (3.48), com os valores experimentais medidos para as constantes.
t	Tempo.
t_0	Instante inicial no tempo — eqn. (2.15).
t_1	Instante final no tempo — eqn. (2.15).
T	Temperatura.
t_r	Temperatura característica da camada da parede.
u	Velocidade na direção tangencial à parede.
U_a^+	Parâmetro na expressão de A_u — eqn. (4.15).
U_∞	Velocidade do escoamento externo à camada limite.
u_r	Velocidade característica da camada da parede, ou velocidade de fricção.
v	Velocidade na direção normal à parede.
v_w	Velocidade normal à parede, na parede.
v_∞	Velocidade normal à parede, no escoamento externo à camada limite.
\mathbf{w}	Vetor velocidade.
w	Função adimensional de Coles.
x	Coordenada tangencial à parede.
y	Coordenada normal à parede.
y^*	Coordenada normal à parede, característica da região completamente turbulenta.
$y_{u,d}$	Coordenada normal à parede, adimensionalizada em relação à espessura da camada limite dinâmica.
$y_{t,d}$	Coordenada normal à parede, adimensionalizada em relação à espessura da camada limite térmica.

Letras gregas

γ_u	Parâmetro pequeno relativo à espessura da camada limite dinâmica —
------------	--

- definido pela eqn. (3.11).
- γ_t Parâmetro pequeno relativo à espessura da camada limite térmica — definido pela eqn. (3.11).
- δ_u Espessura da camada limite dinâmica.
- δ_t Espessura da camada limite térmica.
- δ_2 Espessura de deslocamento da camada limite — definida na referência [35].
- Δ Operador diferença — definido por $\Delta\psi = \psi_\infty - \psi_w$.
- ϵ_1 Parâmetro pequeno relativo a u_τ — definido pela eqn. (3.10).
- ϵ_2 Parâmetro pequeno relativo a v_w .
- ζ Variável dependente genérica.
- η Fator de esticamento.
- η_e Fator de esticamento da camada externa.
- η_p Fator de esticamento da camada da parede.
- μ Viscosidade.
- ν Viscosidade cinemática.
- Π_u Parâmetro da função de Coles para o perfil de velocidade.
- Π_t Parâmetro da função de Coles para o perfil de energia.
- ρ Massa específica.
- ρ_τ Massa específica característica da camada da parede.
- $\mathcal{T}_{\zeta\xi}$ Fluxo turbulento de quantidade de movimento ou calor, devido às flutuações ζ' e ξ' — definido pela eqn. (2.21).
- \mathcal{T}_l Fluxo laminar de quantidade de movimento ou calor.
- \mathcal{T}_t Fluxo turbulento de quantidade de movimento ou calor.
- \mathcal{T}_w Tensão na parede.
- Φ Função dissipação.
- $\Phi_{médio}$ Função dissipação média — definida pela eqn. (2.25).
- Φ_{turb} Função dissipação turbulenta — definida pela eqn. (2.26).
- φ_u Variável auxiliar na determinação das constantes da parte dinâmica do problema — definida por $(1/K_u) \ln(yu_\tau/\nu_w) + A_u$.
- φ_e Variável auxiliar na determinação das constantes da parte térmica do problema — definida por $(1/K_e) \ln(yu_\tau/\nu_w)Pr_w + A_e$.
- ξ Variável dependente genérica.

ψ Variável dependente genérica.

Índices inferiores

()_{ad} Variável adimensional.

()_w Valor da variável na parede.

()_∞ Valor da variável no escoamento externo à camada limite

Índices superiores

()' Flutuação turbulenta da variável.

$\overline{(\)}$ Valor médio da variável.

()⁺ Variável da camada da parede.

Capítulo 1

Introdução

O estudo sistemático dos problemas de camada limite com sucção ou injeção de fluido remonta aos primeiros anos da década de 50, quando pela primeira vez se investigou a utilização deste sistema no resfriamento de superfícies aerodinâmicas aquecidas pelo vôo a velocidades supersônicas. Desde então, muito tem sido publicado a respeito, à medida que novas aplicações vêm sendo imaginadas, principalmente nos últimos anos.

De fato, injeção ou sucção de fluido a partir de uma superfície porosa sobre a qual uma camada limite compressível esteja se desenvolvendo, é uma idéia que possui inúmeras aplicações. Duas aplicações típicas são a proteção térmica de câmaras de combustão de motores de foguetes (a combustível líquido), e de superfícies aerodinâmicas dos veículos espaciais que reentram na atmosfera, sendo que, no primeiro caso, o fluido de injeção é geralmente o próprio combustível. Outras aplicações importantes são, por exemplo, o resfriamento de palhetas de turbinas, e o aumento da espessura de deslocamento em camadas limite se desenvolvendo no interior de túneis de vento, para fins laboratoriais.

Uma outra aplicação que vem ganhando crescente importância nos últimos anos, é o controle do atrito em corpos submetidos a escoamentos supersônicos. Neste caso, o valor do atrito pode ser diminuído atrasando-se, ou mesmo evitando-se, a separação da camada limite, por sucção de fluido, ou ainda modificando-se a inclinação do perfil de velocidades junto à parede, por injeção.

É digno de nota, por fim, que escoamentos em que haja mudança de fase ou reação química próximo à parede podem ser tratados pela mesma teoria. Em todos os casos mencionados, o termo *transpiração* é encontrado na literatura

significando tanto injeção quanto sucção de fluido.

Pelos exemplos apresentados, percebe-se que em certas aplicações pode ser vantajoso utilizar-se a injeção de fluido como sistema de refrigeração de uma superfície, ao invés de construí-la com materiais termo-resistentes. Isso se deve ao fato de que, em certos casos, tais materiais tornam-se proibitivamente caros, ou, na pior das hipóteses, nem existem. Fica também evidente que os resultados obtidos pelos estudos em regime incompressível não se aplicam ao caso compressível, visto que aqueles não prevêm qualquer variação de temperatura devida à desaceleração do escoamento junto às superfícies.

Motivado pelas aplicações citadas, este trabalho visa obter expressões que permitam o cálculo dos coeficientes de atrito e de troca térmica em camadas limite compressíveis, turbulentas, e com injeção. Contudo, como salienta TORII [1], medidas experimentais destes coeficientes tendem a se tornar bastante imprecisas à medida que a taxa de injeção aumenta, de modo que a simples comparação das expressões propostas com os valores medidos não é suficiente para validar uma certa teoria. Assim, este trabalho propõe ainda expressões para os perfis de velocidade e de temperatura. Todos os resultados são comparados com dados experimentais de MABEY [2], SQUIRE [3], e DANBERG [4], mostrando boa concordância.

O problema considerado aparece ilustrado na fig. 1. O fluido em estudo escoava em regime supersônico, bidimensional, sobre uma superfície plana porosa, através da qual pode-se injetar ou succionar fluido. A porosidade da superfície e a taxa de injeção são de tal ordem que uma condição de contorno do tipo $v(x, 0) = v_w(x)$, onde $v_w(x)$ é contínua, pode ser assumida onde quer que haja transpiração. † O número de Reynolds do escoamento é tal que o regime é turbulento, sendo o escoamento médio permanente. Admite-se ainda que, nos casos em que houver troca térmica com a placa, a temperatura na interface com o escoamento é a mesma do fluido transpirado.

Além disso, o presente estudo limitar-se-á a analisar casos em que ve-

† De fato, como ressaltam KAYS e MOFFAT [5], se os poros forem largos demais, ou por demais espaçados, ou ainda, se as velocidades de transpiração forem altas demais, a estrutura da camada limite será modificada, e passará a diferir significativamente da estrutura observada no caso sem transpiração.

$$p = R\rho T$$

$$M_\infty > 1$$

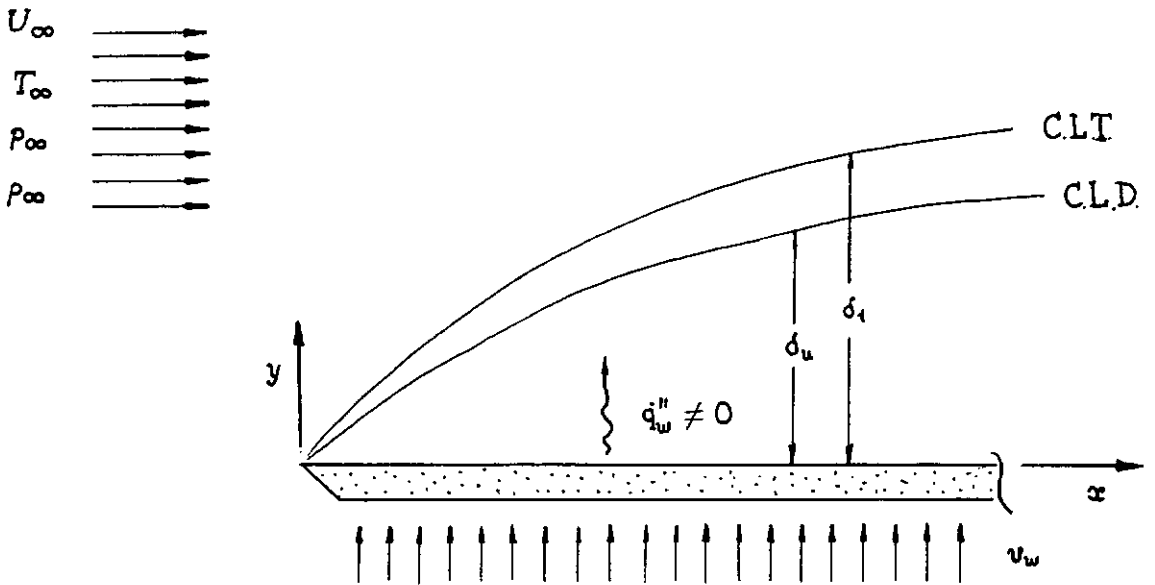


Fig. 1 — Ilustração do problema.

locidade, temperatura, massa específica, pressão termodinâmica e propriedades do fluido não variem ao longo do comprimento da placa, no escoamento externo. Admitiremos ainda que a velocidade de transpiração, v_w , seja constante e positiva, isto é, que tenhamos injeção de fluido, ao longo de toda a placa, e que tanto o fluido injetado quanto o que escoo paralelamente à placa sejam o ar. As condições termodinâmicas do escoamento ficam restritas aos casos em que seja válido utilizar a equação dos gases perfeitos como equação de estado para o ar.

Como já dissemos anteriormente, um grande número de trabalhos, tanto teóricos quanto experimentais, têm sido publicado nos últimos anos a respeito do problema que estamos tratando.† A maioria dos resultados obtidos vêm das investigações de SQUIRE e seus colaboradores [3,6,7,8,9], na Universidade de Cambridge. Nestes trabalhos, que não lidam com a parte térmica do problema, o coeficiente de atrito é calculado pela utilização da teoria do comprimento de mistura (como definido em [10]), e constitui extensão a uma conhecida solução do caso sem transpiração.‡ Infelizmente, os valores do coeficiente de atrito são calculados através de uma equação decorrente de uma formulação integral da equação da conservação da quantidade de movimento, que tende a ser muito pouco precisa à medida que a taxa de injeção aumenta. Mais recentemente, SILVA FREIRE [11] propôs uma solução obtida aplicando a transformação de Van Driest ao resultado para o caso incompressível, obtido anteriormente por ele mesmo [12]. Esta solução mostrou-se, por sua vez, bem mais próxima aos valores experimentais.

Neste trabalho, utilizamos o método das expansões assintóticas combinadas, juntamente com a teoria das variáveis intermediárias [13,14] para obter expressões para o cálculo dos coeficientes de atrito e de troca térmica, e para avaliar os perfis de velocidade e de temperatura. O desenvolvimento apresentado difere da forma clássica encontrada, por exemplo, em [12]. Na presente análise, a teoria das variáveis intermediárias é utilizada para decidir em que regiões o escoamento deve ser dividido pelas *distensões de coordenadas** usadas na posterior análise com expansões assintóticas combinadas. Em seguida, para cada uma das duas regiões

† SPALDING e CHI [10] fazem excelente revisão dos métodos existentes para o cálculo do atrito, no caso sem transpiração

‡ SPALDING e CHI [10] apontam esta solução do caso sem transpiração como sendo a que melhores resultados apresenta

* O termo vem do inglês 'stretching'

então definidas, valores de referência apropriados são escolhidos para a adimensionalização das equações que governam o escoamento, garantindo, deste modo, ordem de grandeza unitária a todos os termos de todas as equações em ambas as regiões. Em todo o resto, o procedimento é clássico. As variáveis dependentes do problema são expandidas em séries assintóticas em torno dos parâmetros pequenos encontrados, e a coleta de termos de mesma ordem de grandeza conduz aos vários sistemas de equações aproximadas. Na região mais próxima à parede, os sistemas das duas primeiras ordens são resolvidos fornecendo uma aproximação para os perfis de velocidade e temperatura. Na região mais próxima à extremidade da camada limite, apenas a solução de primeira ordem é obtida analiticamente, sendo a de segunda ordem proposta através de uma extensão à solução dada por COLES [15] ao problema incompressível sem injeção. As expressões assim encontradas para os perfis são avaliadas nos pontos extremos das camadas limites dinâmica e térmica, fornecendo expressões para o cálculo dos coeficientes de atrito e de troca térmica.

Para o presente conhecimento do autor, esta é a primeira vez que as expressões do coeficiente de troca térmica e do perfil de temperatura são propostas para o caso compressível com injeção, através de algum método analítico. Além disso, é também a primeira vez que as expressões do atrito e do perfil de velocidade são propostas de forma matematicamente rigorosa. Todas as expressões mencionadas apresentam, como já dissemos, boa concordância com os dados experimentais, sendo que nas duas últimas, a concordância obtida é superior à do trabalho anterior de SILVA FREIRE [12].

Capítulo 2

Equações do Escoamento Médio

O ponto de partida para resolver o problema em estudo são as equações de conservação da massa, da quantidade de movimento nas direções x e y , e da energia, uma equação de estado para o ar, considerado gás perfeito, e relações constitutivas para suas propriedades.

As cinco primeiras podem ser obtidas em SCHLICHTING [16]. Das relações constitutivas, a para o calor específico à pressão constante pode ser obtida de VAN WYLEN e SONNTAG [17], para a faixa de temperatura entre 300 e 3500 K, complementada por uma curva ajustada aos dados experimentais apresentados em INCROPERA [18], para temperaturas menores que 300 K. A relação para a viscosidade, pode ser obtida de BLEVINS [19] para a faixa de temperaturas de interesse. A relação para a condutividade térmica não será incluída porque, como veremos mais adiante, os termos contendo esta variável não figuram no sistema de equações aproximadas que resolveremos. Assim, o sistema de equações que analisaremos, é o seguinte:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{w}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\nabla \cdot \mathbf{w} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\nabla \cdot \mathbf{w} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\frac{DP}{Dt} - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \nabla \cdot \mathbf{w} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mu\Phi, \quad (2.4)$$

$$p = R\rho T, \quad (2.5)$$

com as relações para as propriedades dadas por:

$$\mu = \frac{3.87081 \cdot 10^{-6} (T)^{1/2}}{1.147 \left(\frac{T}{78.6}\right)^{-0.415}} + \left(\frac{T}{78.6} + 0.5\right)^{-2.0}, \quad (2.6)$$

$$c_p = 9.3355 - 122.56 \left(\frac{T}{100}\right)^{-1.5} + 256.38 \left(\frac{T}{100}\right)^{-2.0} - 196.08 \left(\frac{T}{100}\right)^{-3.0}, \quad (2.7)$$

$$\text{onde: } E = c_p T + \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \text{ e,} \quad (2.8a)$$

$$P = p + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2). \quad (2.8b)$$

No conjunto de equações acima, Φ representa a função dissipação, definida em [16] por:

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2. \quad (2.9)$$

O sistema (2.1)–(2.5) é clássico na solução de problemas de transferência de calor e massa, exceto pela equação (2.4), que aparece numa forma um pouco

modificada. Para obter esta equação na forma em que ela aparece, consideramos conservação da energia total (interna + mecânica) na dedução da equação da conservação de energia [16], e depois definimos as variáveis E e P pelas expressões (2.8).

A razão para tal modificação é encontrada em BLACKWELL [20]. Neste trabalho, o autor sugere que é preciso escrever a equação válida na região mais externa da camada limite na variável E , para que a solução obtida a partir desta seja também válida. O próprio Blackwell afirma, contudo, que este procedimento deve ser verificado comparando previsões teóricas com resultados experimentais. No presente trabalho, a equação (2.4) aparece escrita na variável E para que procedimento semelhante ao de Blackwell possa ser utilizado em ambas as regiões do escoamento. Como no seu trabalho, a validade de tal procedimento também será verificada experimentalmente, no capítulo 4.

A interpretação física dos termos que distinguem a equação (2.4) de sua forma clássica é a seguinte: $\rho DE/Dt$ representa a variação da energia total por unidade de volume, isto é, o fluxo de energia total, e substitui o fluxo de energia interna da forma clássica. O termo DP/Dt representa o fluxo de trabalho devido à compressão ou expansão do fluido, e leva em conta a desaceleração deste como sendo um aumento na pressão (isto é, P é a pressão total). Ele substitui o termo Dp/Dt , que não inclui a última consideração mencionada. Finalmente, $-\frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)\nabla \cdot \mathbf{w}$ representa a diferença entre as partes devidas à velocidade nos dois termos anteriores, garantindo que a equação (2.4) pode ser reescrita na forma clássica, se feitas as simplificações apropriadas.

Para descrever completamente o escoamento, do ponto de vista matemático, precisamos ainda de condições de contorno apropriadas. Considerando o grau e a ordem das equações do sistema (2.1)-(2.7), o conjunto de condições de contorno pode ser escrito:

Condições em u :

$$u(x, \delta_u) = U_\infty, \quad (2.10a)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (2.10b)$$

$$u(x_1, y) = u_1(y). \quad (2.10c)$$

Condições em v :

$$v(x, \delta_u) = v_\infty, \quad (2.11a)$$

$$v(x, 0) = v_w, \quad (2.11b)$$

$$v(x_1, y) = v_1(y). \quad (2.11c)$$

Condições em T :

$$T(x, \delta_t) = T_\infty, \quad (2.12a)$$

$$T(x, 0) = T_w, \quad (2.12b)$$

$$T(x_1, y) = T_1(y). \quad (2.12c)$$

Condições em p :

$$p(x, \delta_u) = p_\infty, \quad (2.13a)$$

$$p(x, 0) = p_w. \quad (2.13b)$$

Para obter a partir do sistema (2.1–2.13) um conjunto de equações válidas para o caso turbulento, as variáveis dependentes do problema serão reescritas como soma de um termo médio com uma perturbação turbulenta. Essa hipótese é clássica em estudos de turbulência, e pode ser sintetizada na forma:

$$\psi = \bar{\psi} + \psi', \quad (2.14)$$

onde ψ é qualquer variável dependente, e $\bar{\psi}$ é definido por:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \psi dt. \quad (2.15)$$

onde $t_1 - t_0$ é um intervalo de tempo suficientemente grande para que o valor $\bar{\psi}$ de fato permaneça constante com o tempo.

Substituindo as expressões (2.14) e (2.15) nas equações (2.1)–(2.13), e tirando a média temporal† das equações resultantes, obtêm-se o seguinte sistema:

$$\frac{\partial}{\partial x} \overline{(\rho u)} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{(\rho v)} = 0, \quad (2.16)$$

† Schlichting [16] demonstra importantes propriedades da média temporal.

$$\begin{aligned} \overline{(\rho u)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{(\rho v)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \bar{\mathbf{w}} \right) + \overline{\mathcal{T}_{uu}} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \overline{\mathcal{T}_{uv}} \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \overline{(\rho u)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \overline{(\rho v)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \bar{\mathbf{w}} \right) + \overline{\mathcal{T}_{vv}} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \overline{\mathcal{T}_{vu}} \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \overline{(\rho u)} \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} + \overline{(\rho v)} \frac{\partial \bar{E}}{\partial y} &= \bar{u} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} + \mu \Phi_{\text{médio}} - E_{c_{\text{médio}}} \\ &+ \left(\frac{\partial \overline{\mathcal{T}_{Eu}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\mathcal{T}_{Ev}}}{\partial y} \right) + \left(u' \frac{\partial \bar{P}'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{P}'}{\partial y} \right) + \mu \Phi_{\text{turb}} - E_{c_{\text{turb}}}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\bar{p} = R (\overline{\rho T} + \overline{\rho' T'}), \quad (2.20)$$

onde: $\tau_{\xi\xi} = - \left(\overline{\rho \xi' \zeta'} + \overline{\zeta \rho' \xi'} + \overline{\rho' \xi' \zeta'} \right)$, ξ e ζ assumindo valores E , u e v , (2.21)

$$E_c = \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \nabla \cdot \mathbf{w}, \quad (2.22)$$

$$\bar{\mathbf{w}} = (\bar{u} \mathbf{i} + \bar{v} \mathbf{j}), \quad (2.23)$$

$$\bar{\mathbf{q}} = (\bar{q}_x \mathbf{i} + \bar{q}_y \mathbf{j}), \quad (2.24)$$

$$\Phi_{\text{médio}} = \Phi(\bar{u}, \bar{v}), \quad (2.25)$$

$$\Phi_{\text{turb}} = \Phi(u, v) - \Phi(\bar{u}, \bar{v}), \quad (2.26)$$

$$E_{c_{\text{médio}}} = E_c(\bar{u}, \bar{v}), \quad (2.27)$$

$$E_{c_{tur b}} = E_c(u, v) - E_c(\bar{u}, \bar{v}). \quad (2.28)$$

Neste sistema não foram escritas as equações para as propriedades do fluido, porque como mostra LAUFER [21], as flutuações são pequenas quando comparadas às das outras variáveis, de modo que os termos que as contém poderão ser desprezados na dedução das equações aproximadas. Os termos $\Phi_{tur b}$ e $E_{c_{tur b}}$ também não foram escritos de forma explícita por motivo semelhante. Como veremos adiante, uma pequena análise será suficiente para sabermos quais termos de $\Phi_{tur b}$ e $E_{c_{tur b}}$ devem ser retidos nas aproximações.

A dedução do sistema (2.16)–(2.19) pode ser encontrada no trabalho de VAN DRIEST [22], substituindo-se T e p deste por E e P respectivamente, considerando-se as relações (2.21)–(2.28), e eliminando os termos $(\rho u)'$ e $(\rho v)'$ através das identidades:

$$\overline{(\rho u)} + (\rho u)' = \bar{\rho} \bar{u} + \bar{\rho} u' + \rho' \bar{u} + \rho' u', \quad (2.29)$$

$$\overline{(\rho v)} + (\rho v)' = \bar{\rho} \bar{v} + \bar{\rho} v' + \rho' \bar{v} + \rho' v'. \quad (2.30)$$

As condições de contorno para o sistema (2.16)–(2.20) são as seguintes:

Condições em u :

$$\bar{u}(x, \delta_u) = U_\infty, \quad (2.31a)$$

$$\bar{u}(x, 0) = 0, \quad (2.31b)$$

$$\bar{u}(x_1, y) = u_1(y). \quad (2.31c)$$

Condições em v :

$$\bar{v}(x, 0) = v_w, \quad (2.32a)$$

$$\bar{v}(x, \delta_u) = v_\infty. \quad (2.32b)$$

$$\bar{v}(x_1, y) = v_1(y). \quad (2.32c)$$

Condições em T :

$$\bar{T}(x, \delta_t) = T_\infty, \quad (2.33a)$$

$$\bar{T}(x, 0) = T_w, \quad (2.33b)$$

$$\bar{T}(x_1, y) = T_1(y). \quad (2.33c)$$

Condições em p :

$$\bar{p}(x, \delta_u) = p_\infty, \quad (2.34a)$$

$$\bar{p}(x, 0) = p_w. \quad (2.34b)$$

Na lista acima, figuram algumas condições de contorno que, como veremos a seguir, não serão utilizadas na solução das equações aproximadas. As

equações (2.16)–(2.28) com as condições (2.31)–(2.34) definem matematicamente o problema que vamos resolver. A análise assintótica destas equações é o assunto do próximo capítulo.

Capítulo 3

Análise Assintótica das Equações

A análise assintótica de um sistema de equações consiste geralmente de seis etapas:

- Adimensionalização das equações, com identificação dos parâmetros pequenos existentes.
- Distensão de coordenadas das equações, dividindo o escoamento em camadas e definindo o domínio de validade das soluções de cada camada.
- Expansão das variáveis dependentes do problema em séries assintóticas.
- Coleta dos termos de mesma ordem de grandeza, formando os sistemas de equações aproximadas para as várias ordens.
- Solução dos sistemas aproximados mencionados.
- Combinação das soluções para as várias camadas numa solução única, válida em todo o domínio.

Neste trabalho um método ligeiramente diferente será utilizado na análise do problema. Em primeiro lugar, as equações do sistema (2.16)–(2.28) serão analisadas em uma primeira ordem de aproximação através do método das variáveis intermediárias. Esta análise fornece, além de importantes informações sobre a física do problema, as distensões de coordenadas apropriados à análise assintótica a ser feita em seguida. Depois disto, os cinco primeiros passos descritos acima serão executados para cada camada separadamente. Finalmente, as soluções válidas para cada camada serão combinadas numa solução única.

A diferença entre o método clássico e o proposto, reside essencialmente no fato de que neste, mais de um tipo de adimensionalização é proposto, enquanto

que naquele, a adimensionalização é única. O motivo pelo qual propomos tal modificação é que nos parece mais fácil e menos sujeito a erros efetuar uma comparação de ordem de grandeza entre termos de uma equação adimensional se a ordem de todas as variáveis for unitária, ficando os números adimensionais encontrados no processo encarregados de fornecer a verdadeira ordem dos termos. Como o problema é dividido em duas regiões, isso pode ser conseguido selecionando fatores de adimensionalização diferentes para cada uma. Os itens seguintes desenvolvem este estudo de acordo com o método descrito.

3.1 Domínio de Validade da Primeira Ordem de Aproximação das Equações do Escoamento Médio

Com o objetivo de descobrir os fatores de distensão de coordenadas apropriados ao problema, o método das variáveis intermediárias será aplicado ao sistema de equações (2.16)–(2.20) neste ítem. O método baseia-se principalmente nas idéias de Saul Kaplun e seus colaboradores, e pode ser encontrado de forma bastante clara no trabalho de LAGERSTROM e CASTEN [14]. Para uma melhor entendimento do método, um conjunto de exemplos bastante útil pode ser encontrado no trabalho de SILVA FREIRE e HIRATA [23]. Além disso, um outro artigo de SILVA FREIRE [24] faz análise semelhante à que faremos neste sub-capítulo.

O primeiro passo na análise que vamos realizar é a adimensionalização do sistema (2.16)–(2.28) através de valores de referência apropriados. Os valores escolhidos aparecem na lista abaixo, de onde as barras denotando média temporal foram omitidas por simplicidade:

$$u_{ad} = u/U_{\infty}, \quad (3.1a)$$

$$v_{ad} = (v - v_w)/U_{\infty}, \quad (3.1b)$$

$$\rho_{ad} = (\rho - \rho_w)/(\rho_\infty - \rho_w), \quad (3.1c)$$

$$p_{ad} = (p - p_w)/(p_\infty - p_w), \quad (3.1d)$$

$$T_{ad} = (T - T_w)/(T_\infty - T_w), \quad (3.1e)$$

$$E_{ad} = (E - E_w)/(E_\infty - E_w), \quad (3.1f)$$

$$P_{ad} = (P - P_w)/(P_\infty - P_w), \quad (3.1g)$$

$$(\rho u)_{ad} = (\rho u)/(\rho_\infty U_\infty), \quad (3.1h)$$

$$(\rho v)_{ad} = ((\rho v) - (\rho v)_w)/(\rho_\infty U_\infty), \quad (3.1i)$$

$$u'_{ad} = u'/u_\tau, \quad (3.1j)$$

$$v'_{ad} = v'/u_\tau, \quad (3.1k)$$

$$\rho'_{ad} = \rho'/(u_\tau \rho_\infty/U_\infty), \quad (3.1m)$$

$$p'_{ad} = p'/(u_\tau^2 \rho_\infty), \quad (3.1n)$$

$$T'_{ad} = T'/(u_\tau T_\infty/U_\infty), \quad (3.1o)$$

$$E'_{ad} = E' / (u_r E_\infty / U_\infty), \quad (3.1p)$$

$$P'_{ad} = P' / (u_r^n P_\infty / U_\infty^n), \quad n = 1, 2 \dagger, \quad (3.1q)$$

$$\mu_{ad} = \mu / \mu_\infty, \quad (3.1r)$$

$$c_{p_{ad}} = c_p / c_{p_\infty}, \quad (3.1s)$$

$$k_{ad} = k / k_\infty, \quad (3.1t)$$

$$x_{ad} = x / x, \quad (3.1u)$$

$$y_{u_{ad}} = y_u / \delta_u \eta, \quad (3.1v)$$

$$y_{t_{ad}} = y_t / \delta_t \eta, \quad (3.1x)$$

Na lista acima, todas as variáveis do escoamento médio, exceto v e (ρv) aparecem adimensionalizadas de maneira a terem ordem de grandeza entre 0 e 1. A ordem de v e (ρv) pode ser conhecida através da equação da continuidade.

As expressões (3.1v) e (3.1x), como se pode observar são distensões da coordenada normal à parede, sendo η o fator de distensão adimensional variável, que utilizaremos para investigar as várias regiões do escoamento. Nestas expressões, as espessuras das camadas limite dinâmica e térmica aparecem representadas respectivamente por δ_u e δ_t . Da maneira com que foi definido, se assumirmos

† Conforme restrições dadas no apêndice 1

que y adimensional tem ordem de grandeza unitária, o valor de η nos conduz à região do escoamento onde valem as equações aproximadas encontradas.

A expressão (3.1j) mostra que na adimensionalização de u' foi utilizada a velocidade de referência u_τ , chamada velocidade de fricção, e definida através de:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}, \quad (3.2)$$

onde τ_w é a tensão cisalhante na parede, cujo correspondente adimensional é Cf . A razão para tal escolha é que, como mostra AFZAL em seu trabalho [25], u' varia entre as ordens de grandeza de 0 e u_τ , ou seja, introduzindo a notação para ordens de grandeza, $O(u') \leq O(u_\tau)$. Medidas posteriores realizadas por KISTLER e CHEN [26], e por MORKOVIN [27], mostraram ser válidas as relações:

$$O\left(\frac{u'}{U_\infty}\right) = O\left(\frac{v'}{U_\infty}\right) = O\left(\frac{T'}{T_\infty}\right) = O\left(\frac{\rho'}{\rho_\infty}\right) = O\left(\sqrt{\frac{p'}{\rho_\infty U_\infty^2}}\right). \quad (3.3)$$

Através das definições (2.8) para as variáveis E e P , pode-se mostrar ainda (Apêndice 1) que:

$$O\left(\frac{u'}{U_\infty}\right) = O\left(\frac{E'}{E_\infty}\right) = O\left(\frac{P'}{P_\infty}\right)^{1/n}, \quad (3.4)$$

onde $n = 1, 2$, conforme restrições dadas no apêndice 1. Com estas relações mostramos que todas as variáveis adimensionais da lista (3.1) tem ordem de grandeza entre 0 e 1. Substituindo estas expressões no sistema (2.16)–(2.20) e abandonando-se os índices e as barras, obtemos o seguinte sistema de equações adimensionais:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{\gamma_u \eta} \frac{\partial}{\partial y_u}(\rho v) = 0, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
(\rho u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_u \eta} \left[\rho v + \frac{(\rho v)_w}{\rho_\infty U_\infty} \right] \frac{\partial u}{\partial y_u} &= \frac{-\Delta p}{\rho_\infty U_\infty^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{p_w}{\Delta p} \right) \\
&+ \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{w} \right) \right] - \epsilon_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho \frac{\Delta \rho}{\rho_\infty} + \frac{\rho_w}{\rho_\infty} \right) u' u' + u \rho' u' \right. \\
&+ \left. \epsilon_1 \rho' u' u' \right] + \frac{1}{Re_\infty \gamma_u \eta} \frac{\partial}{\partial y_u} \left[\mu \left(\frac{1}{\gamma_u \eta} \frac{\partial u}{\partial y_u} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \frac{\epsilon_1^2}{\gamma_u \eta} \frac{\partial}{\partial y_u} \left[\left(\rho \frac{\Delta \rho}{\rho_\infty} + \frac{\rho_w}{\rho_\infty} \right) u' v' \right. \\
&\quad \left. + \left(v + \frac{v_w}{U_\infty} \right) \rho' u' + \epsilon_1 \rho' u' v' \right], \quad (3.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\rho v + \frac{(\rho v)_w}{\rho_\infty U_\infty} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_u \eta} \left(\rho v + \frac{(\rho v)_w}{\rho_\infty U_\infty} \right) \frac{\partial v}{\partial y_u} &= \frac{-\Delta p}{\rho_\infty U_\infty^2} \frac{1}{\gamma_u \eta} \frac{\partial p}{\partial y_u} \\
&+ \frac{1}{Re_\infty \gamma_u \eta} \frac{\partial}{\partial y_u} \left[\mu \left(\frac{1}{\gamma_u \eta} 2 \frac{\partial v}{\partial y_u} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{w} \right) \right] - \epsilon_1^2 \frac{1}{\gamma_u \eta} \frac{\partial}{\partial y_u} \left[\left(\rho \frac{\Delta \rho}{\rho_\infty} + \frac{\rho_w}{\rho_\infty} \right) v' v' \right. \\
&\quad \left. + \left(v + \frac{v_w}{U_\infty} \right) \rho' v' + \epsilon_1 \rho' v' v' \right] + \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{1}{\gamma_u \eta} \frac{\partial u}{\partial y_u} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\
&\quad - \epsilon_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho \frac{\Delta \rho}{\rho_\infty} + \frac{\rho_w}{\rho_\infty} \right) v' u' + u \rho' v' + \epsilon_1 \rho' u' v' \right], \quad (3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\rho u) \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\Delta E}{E_\infty} + \frac{E_w}{E_\infty} \right) + \frac{1}{\gamma_t \eta} \left[\rho v + \frac{(\rho v)_w}{\rho_\infty U_\infty} \right] \frac{\partial E}{\partial y_t} \\
&= \frac{Ec_\infty^*}{(1 + Ec_\infty^*/2)} \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\Delta P}{P_\infty} + \frac{P_w}{P_\infty} \right) + \frac{1}{\gamma_t \eta} \left(v + \frac{v_w}{U_\infty} \right) \frac{\partial P}{\partial y_t} \right] \\
&\quad + \frac{Pr_\infty^{-1} Re_\infty^{-1}}{(T_\infty/T_w + Ec_\infty^*/2)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{\gamma_t^2 \eta^2} \frac{\partial}{\partial y_t} \left(k \frac{\partial T}{\partial y_t} \right) \right] \\
&+ \frac{Ec_\infty^*}{(1 + Ec_\infty^*/2)} \left(\frac{1}{\gamma_t^2 \eta^2 Re_\infty} \mu \Phi_{\text{medio}} - Ec_{\text{medio}} \right) - \epsilon_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho \frac{\Delta \rho}{\rho_\infty} + \frac{\rho_w}{\rho_\infty} \right) u' E' \right. \\
&\quad \left. + u \rho' E' + \epsilon_1 \rho' u' E' \right] - \epsilon_1^2 \frac{1}{\gamma_t \eta} \frac{\partial}{\partial y_t} \left[\left(\rho \frac{\Delta \rho}{\rho_\infty} + \frac{\rho_w}{\rho_\infty} \right) v' E' + \left(v + \frac{v_w}{U_\infty} \right) \rho' E' \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_1 \rho' v' E' \right] + \frac{Ec_\infty^*}{(1 + Ec_\infty^*/2)} \epsilon_1^{1+i} \left(u' \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_t \eta} v' \frac{\partial P'}{\partial y_t} \right)
\end{aligned}$$

$$+ \epsilon_1^2 \frac{Ec_\infty^*}{(1 + Ec_\infty^*/2)} \left(\frac{1}{\gamma_i^2 \eta^2 Re_\infty} \mu \Phi_{turb} - E_{c_{turb}} \right), \quad (3.8)$$

$$p \left(\frac{\rho_\infty T_\infty}{\rho_w T_w} - 1 \right) = \left(T \frac{\Delta T}{T_w} + 1 \right) \left(\rho \frac{\Delta \rho}{\rho_w} + 1 \right) + \frac{\rho_\infty T_\infty}{\rho_w T_w} \epsilon_1^2 \rho' T'. \quad (3.9)$$

Nestas equações, aparecem os dois parâmetros pequenos, ϵ_1 e γ , definidos como:

$$\epsilon_1 = \frac{u_r}{U_\infty} \quad (3.10)$$

$$\gamma_i = \frac{\delta_i}{X}, \text{ onde } i = u, T \quad (3.11)$$

Além disso, aparecem também os adimensionais $Re_\infty = \rho_\infty U_\infty X / \mu_\infty$, $Pr_w = \mu_\infty c_{p\infty} / k_\infty$, $Ec_\infty = U_\infty^2 / c_{p\infty} (T_\infty - T_w)$, e definimos $Ec_\infty^* = U_\infty^2 / c_{p\infty} T_\infty$. Aqui, o operador Δ esta sendo usado para representar a diferença entre os estados do fluido no escoamento exterior e na parede. O termo $\nabla \cdot w$ não foi explicitamente escrito, a despeito de conter o termo $\partial v / \partial y$, porque a equação da conservação de massa mostra que $O(\partial v / \partial y) = O(\partial u / \partial X) = O(1)$.

Para se obter à partir do sistema (3.5)–(3.9) uma aproximação de primeira ordem que seja válida nas várias regiões do escoamento, variamos o valor de η arbitrariamente, desprezando, em seguida, os termos de ordem superior. Assim obtivemos os seguintes sistema aproximados:

Conservação de Massa

$O(1) \geq O(\eta)$:

$$O(u) = O\left(\frac{v}{\gamma_u \eta}\right). \quad (3.12)$$

Conservação da Quantidade de Movimento — direção x

$$O(1) \geq O(\eta) > O\left(\frac{\epsilon_1^2}{\gamma_u}\right) :$$

$$(\rho u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_u \eta} (\rho v) \frac{\partial u}{\partial y_u} = \frac{-\Delta p}{\rho_\infty U_\infty^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{p_w}{\Delta p} \right), \quad (3.13a)$$

$$O(\eta) = O\left(\frac{\epsilon_1^2}{\gamma_u}\right) :$$

$$(\rho u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_u \eta} (\rho v) \frac{\partial u}{\partial y_u} = \frac{-\Delta p}{\rho_\infty U_\infty^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{p_w}{\Delta p} \right) - \frac{\partial}{\partial y_u} \left[\left(\rho \frac{\Delta \rho}{\rho_\infty} + \frac{\rho_w}{\rho_\infty} \right) u' v' \right], \quad (3.13b)$$

$$O\left(\frac{\epsilon_1^2}{\gamma_u}\right) > O(\eta) > O\left(\frac{1}{Re_\infty \gamma_u \epsilon_1}\right) :$$

$$\frac{\partial}{\partial y_u} \left[\left(\frac{\rho_w}{\rho_\infty} \right) u' v' = 0 \right], \quad (3.13c)$$

$$O(\eta) = O\left(\frac{1}{Re_\infty \gamma_u \epsilon_1}\right) :$$

$$\frac{\partial}{\partial y_u} \left[\left(\frac{\rho_w}{\rho_\infty} \right) u' v' \right] + \frac{\partial}{\partial y_u} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y_u} \right) = 0, \quad (3.13d)$$

$$O(\eta) < O\left(\frac{1}{Re_\infty \gamma_u \epsilon_1}\right) :$$

$$\frac{\partial}{\partial y_u} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y_u} \right) = 0. \quad (3.13e)$$

Conservação da Quantidade de Movimento — direção y

$$O(1) \geq O(\eta) \geq O\left(\frac{\epsilon_1^2}{\gamma_u}\right) :$$

$$\frac{\partial p}{\partial y_u} = 0, \quad (3.14a)$$

$$O(\eta) < O\left(\frac{\epsilon_1^2}{\gamma_u}\right) :$$

$$\frac{\partial p}{\partial y_u} - \frac{\partial}{\partial y_u} (v'v') = 0, \quad (3.14b)$$

Conservação da Energia Total

$$O(1) \geq O(\eta) > O\left(\frac{\epsilon_1^2}{\gamma_t}\right) :$$

$$\begin{aligned} (\rho u) \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\Delta E}{E_\infty} + \frac{E_w}{E_\infty} \right) + \frac{1}{\gamma_t \eta} + (\rho v) \frac{\partial E}{\partial y_t} = \frac{Ec_\infty^*}{(1 + Ec_\infty^*/2)} \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\Delta P}{P_\infty} + \frac{P_w}{P_\infty} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma_t \eta} v \frac{\partial P}{\partial y_t} - E_{c_m \acute{e}d i o} \right], \quad (3.15a) \end{aligned}$$

$$O(\eta) = O\left(\frac{\epsilon_1^2}{\gamma_t}\right) :$$

$$\begin{aligned}
(\rho u) \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\Delta E}{E_\infty} + \frac{E_w}{E_\infty} \right) + \frac{1}{\gamma_t \eta} + (\rho v) \frac{\partial E}{\partial y_t} &= \frac{Ec_\infty^*}{(1 + Ec_\infty^*/2)} \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\Delta P}{P_\infty} + \frac{P_w}{P_\infty} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\gamma_t \eta} v \frac{\partial P}{\partial y_t} - E_{c_{médio}} \right] - \frac{\partial}{\partial y_u} \left[\left(\rho \frac{\Delta \rho}{\rho_\infty} + \frac{\rho_w}{\rho_\infty} \right) E' v' \right], \quad (3.15b)
\end{aligned}$$

$$O\left(\frac{\epsilon_1^2}{\gamma_t}\right) > O(\eta) > O\left(\frac{1}{Re_\infty Pr_w \gamma_t \epsilon_1}\right) :$$

$$\frac{\partial}{\partial y_u} \left[\left(\frac{\rho_w}{\rho_\infty} \right) E' v' \right] = 0, \quad (3.15c)$$

$$O(\eta) = O\left(\frac{1}{Re_\infty Pr_\infty \gamma_t \epsilon_1}\right) :$$

$$\frac{Re_\infty^{-1} Pr_\infty^{-1}}{(T_\infty / \Delta T + Ec_\infty^*/2)} \frac{\partial}{\partial y_t} \left(k \frac{\partial T}{\partial y_t} \right) - \frac{\partial}{\partial y_u} \left[\left(\frac{\rho_w}{\rho_\infty} \right) E' v' \right] = 0, \quad (3.15d)$$

$$O(\eta) < O\left(\frac{1}{Re_\infty Pr_\infty \gamma_t \epsilon_1}\right) :$$

$$\frac{\partial}{\partial y_t} \left(k \frac{\partial T}{\partial y_t} \right) = 0 \quad (3.15e)$$

Na dedução da equação (3.8) o valor $1/\gamma_t^2 \eta^2$ aparece posto em evidência antes das variáveis $\Phi_{médio}$ e Φ_{turb} . De fato, pela definição de Φ (Ref. [16]), observa-se que nenhum termo pertencente a estas variáveis tem ordem de grandeza superior a esta em ambos os casos. Procedimento semelhante foi usado quando se

colocou $\epsilon_1/\gamma_H\eta^2$ em evidência no termo $E_{c_{turb}}$. Para obter as equações aproximadas (3.13c)–(3.13e) e (3.15c)–(3.15e), uma consideração extra foi feita. De acordo com as adimensionalizações propostas nas equações (3.1), as condições de contorno do problema na parede são $u(x, 0) = v(x, 0) = T(x, 0) = \rho(x, 0) = p(x, 0) = 0$. Deste modo, parece válido afirmar que, nas camadas mais próximas à parede, estas variáveis, u , v , T , ρ e p , tenham ordem de grandeza inferior à unitária. Com isso, fica justificado o valor $\eta_u = (Re_\infty \epsilon_1 \gamma_u)^{-1}$ e $\eta_t = (Re_\infty \epsilon_1 \gamma_t Pr_\infty)^{-1}$ na segunda camada a contar da parede, além do aparecimento do termo $\partial(v'v')/\partial y$ na equação (3.14b), e do não aparecimento de termos de ordem unitária vindos de $\Phi_{médio}$ na equação (3.8).

De um modo geral, consideramos na dedução dos sistemas aproximados de equações, que a operação derivação não altera a ordem de grandeza dos termos. Além disso, consideramos também que $O(\epsilon_1) > O(Re_\infty)^{-1}$, e que $O(T_\infty/\Delta T + Ec_\infty/2) = O(Ec_\infty^*/(1 + Ec_\infty^*/2)) = O(1)$.

Observando os conjuntos de equações; (3.13) e (3.15), notamos que, de acordo com as definições de LAGERSTROM e CASTEN [14], as equações (3.13b), (3.13d), (3.15b) e (3.15d) são *suficientemente ricas* para conter todas as outras de seus respectivos sistemas, sendo, por este motivo chamadas *equações principais*. Considerando a definição de LAGERSTROM e CASTEN [14] de *domínio de validade* das soluções, concluímos que é suficiente resolver as equações mencionadas com as condições de contorno do escoamento externo e da parede para obter uma solução ao problema válida em toda a camada limite. Deste modo, os fatores de distensão de coordenadas apropriados para a equação da conservação da quantidade de movimento na direção x , e para a equação da conservação de energia são, respectivamente:

Equação da conservação da quantidade de movimento:

$$\eta_e = \frac{\epsilon_1^2}{\gamma_u} \quad (3.16a)$$

$$\eta_p = (Re_\infty \epsilon_1 \gamma_u)^{-1} \quad (3.16b)$$

Equação da conservação de energia:

$$\eta_e = \frac{\epsilon_1^2}{\gamma_t} \quad (3.17a)$$

$$\eta_p = (Re_\infty \epsilon_1 \gamma_t Pr_\infty)^{-1} \quad (3.17b)$$

Para as duas equações restantes, isto é, a equação da conservação da quantidade de movimento na direção y , e a equação da conservação da massa, a escolha entre as expressões (3.16) e (3.17) como fator de distensão é indiferente, de modo que as expressões (3.16) serão utilizadas. Tanto nestas, como nas expressões (3.17), os índices "e" e "p" significam valores relativos à região mais próxima ao escoamento externo e à parede, respectivamente. As regiões definidas por estas distensões, serão, daqui por diante, chamadas *camada exterior* e *camada da parede* respectivamente.

3.2 Análise Assintótica da Camada da Parede

Para adimensionalizar as equações que regem o fenômeno nesta camada, utilizamos valores de referência que sejam da ordem de grandeza de cada variável na região. Os valores usados aparecem na lista abaixo:

$$u_{ad} = u/u_\tau, \quad (3.18a)$$

$$v_{ad} = (v - v_w)/u_\tau, \quad (3.18b)$$

$$\rho_{ad} = (\rho - \rho_w)/\rho_\tau, \quad (3.18c)$$

$$p_{ad} = (p - p_w)/p_\tau, \quad (3.18d)$$

$$T_{ad} = (T - T_w)/t_\tau, \quad (3.18e)$$

$$E_{ad} = (E - E_w)/e_\tau, \quad (3.18f)$$

$$P_{ad} = (P - P_w)/P_\tau, \quad (3.18g)$$

$$(\rho u)_{ad} = \rho u / \rho_w u_\tau, \quad (3.18h)$$

$$(\rho v)_{ad} = (\rho v - (\rho v)_w) / \rho_w u_\tau, \quad (3.18i)$$

$$u'_{ad} = u' / u_\tau, \quad (3.18j)$$

$$v'_{ad} = v' / u_\tau, \quad (3.18l)$$

$$\rho'_{ad} = \rho' / \rho_\tau, \quad (3.18m)$$

$$p'_{ad} = p' / p_\tau, \quad (3.18n)$$

$$T'_{ad} = T' / t_\tau, \quad (3.18o)$$

$$E'_{ad} = E' / e_\tau, \quad (3.18p)$$

$$P'_{ad} = P' / P_\tau, \quad (3.18q)$$

$$\mu_{ad} = \mu / \mu_w, \quad (3.18r)$$

$$c_{p_{ad}} = c_p / c_{p_w}, \quad (3.18s)$$

$$k_{ad} = k / k_w, \quad (3.18t)$$

$$x_{ad} = x / x, \quad (3.18u)$$

$$y_{u_{ad}} = y / \delta_u, \quad (3.18v)$$

$$y_{t_{ad}} = y / \delta_t. \quad (3.18x)$$

Nestas expressões, $t_\tau, e_\tau, \rho_\tau, p_\tau, P_\tau$ são definidos por:

$$t_\tau = \frac{\dot{q}''}{c_{p_w} \rho_w u_\tau}, \quad (3.19)$$

$$e_\tau = \frac{\dot{q}''}{\rho_w u_\tau}, \quad (3.20)$$

$$\rho_\tau = \rho_\infty \frac{t_\tau}{T_\infty}, \quad (3.21)$$

$$p_\tau = p_\infty \frac{u_\tau^2}{U_\infty^2}, \quad (3.22)$$

$$P_\tau = P_\infty \frac{u_\tau^2}{U_\infty^2} \dagger. \quad (3.23)$$

As expressões para t_τ e e_τ decorrem diretamente das condições de contorno utilizadas na solução clássica do problema incompressível, mostrada, por exemplo, em [28]. A equação mencionada pode ser obtida imaginando-se que na região em estudo vale apenas o termo de convecção turbulenta de calor, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial y} (v' T') = 0. \quad (3.24)$$

Se integrarmos esta equação uma vez, admitindo como condição de contorno o fluxo de calor pela parede, teremos, na forma adimensional:

$$v' T' = \frac{\dot{q}_w''}{c_{p_w} \rho_w U_\infty \Delta T}. \quad (3.25)$$

A expressão para t_τ aparece ao redefinirmos a condição de contorno acima como $u_\tau t_\tau / U_\infty \Delta T$. A equação (3.25) deixa claro que, se a (3.24) é válida, então, $O(T') = O(t_\tau)$.

A expressão para e_τ pode ser obtida de forma análoga, isto é, imaginando que uma equação do tipo $\partial(v' E') / \partial y = 0$ seja válida nesta região, adimensionalizando-a por $\rho_w U_\infty \Delta E$, e redefinindo a condição de contorno correspondente como $u_\tau e_\tau / U_\infty \Delta E$. Como no caso anterior, fica assegurado que $O(E') = O(e_\tau)$.

Se fizermos, por fim, a hipótese de que a ordem de magnitude da turbulência não muda quando o escoamento se torna compressível, estarão justificadas nossas definições (3.19) e (3.20). É interessante observar que, ao invés de recorrer ao trabalho de AFZAL [25] para definir a ordem de grandeza de u' , como foi feito no ítem anterior, poderíamos ter recorrido ao mesmo raciocínio empregado no caso de E' . No caso de u' , a equação válida seria $\partial(v' u') / \partial y = 0$, que integrada

† Nesta região $n = 2$, conforme apêndice 1 (ver também rodapé da pag. 18)

e adimensionalizada forneceria $u'v' = T_w/\rho_w U_\infty^2$. A expressão clássica para u_τ resultaria desta última, se redefiníssemos a condição de contorno como u_τ^2/U_∞^2 .

As definições de ρ_τ , p_τ e P_τ foram tiradas das expressões (3.3) e (3.4), e apenas garantem que $O(\rho_\tau) = O(\rho')$, $O(p_\tau) = O(p')$, e que $O(P_\tau) = O(P')$. De fato, mantidas estas relações de ordem de grandeza, nenhuma das três definições acima é chave na solução do problema, uma vez que não pretendemos propor expressões para os perfis de pressão e massa específica.

Ainda a respeito do caso incompressível, pode-se observar que $O(u) = O(u')$, e que $O(T - T_w) = O(T')$ nesta região. Por analogia, vamos assumir que $O(\psi - \psi_w) = O(\psi')$, onde ψ pode assumir os valores p , P , ρ , v , E , (ρu) e (ρv) . Deste modo fica mostrado que todas as variáveis adimensionais têm ordem de grandeza unitária†.

Substituindo as expressões (3.18) no sistema (2.16)–(2.20), temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{\gamma_u} \frac{\partial}{\partial y_u}(\rho v) = 0, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} (\rho u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_u} \left(\rho v + \frac{(\rho v)_w}{\rho_\infty u_\tau} \right) \frac{\partial u}{\partial y_u} &= -\frac{p_\tau}{\rho_w u_\tau^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{p_w}{p_\tau} \right) \\ &+ \frac{U_\infty/u_\tau}{Re_w} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{w} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho \frac{\rho_\tau}{\rho_w} + 1 \right) u' u' \right] \\ &+ \frac{\rho_\tau}{\rho_w} (u \rho' u' + \rho' u' u') \left. \right] + \frac{U_\infty/u_\tau}{Re_w \gamma_u} \frac{\partial}{\partial y_u} \left[\mu \left(\frac{1}{\gamma_u} \frac{\partial u}{\partial y_u} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ &- \frac{1}{\gamma_u} \frac{\partial}{\partial y_u} \left\{ \left(\rho \frac{\rho_\tau}{\rho_w} + 1 \right) u' v' + \frac{\rho_\tau}{\rho_w} \left[\left(v + \frac{v_w}{u_\tau} \right) \rho' u' + \rho' u' v' \right] \right\}, \quad (3.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\rho v) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_u} \left[\rho v + \frac{(\rho v)_w}{\rho_\infty u_\tau} \right] \frac{\partial v}{\partial y_u} &= \frac{1}{\gamma_u} \frac{p_\tau}{\rho_w u_\tau^2} \frac{\partial p}{\partial y_u} \\ &+ \frac{U_\infty/u_\tau}{Re_w \gamma_u} \frac{\partial}{\partial y_u} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y_u} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{w} \right) \right] - \frac{1}{\gamma_u} \frac{\partial}{\partial y_u} \left\{ \left(\rho \frac{\rho_\tau}{\rho_w} + 1 \right) v' v' \right\} \end{aligned}$$

† Note que a eqn. (2.27) mostra que $O([\rho u]'/\rho_\infty U_\infty) = O([\rho v]'/\rho_\infty U_\infty) = O(u_\tau/U_\infty)$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_r}{\rho_w} \left[\left(v + \frac{v_w}{u_r} \right) \rho' v' + \rho' v' v' \right] \left. \right\} + \frac{U_\infty / u_r}{Re_w} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{1}{\gamma_u} \frac{\partial u}{\partial y_u} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho \frac{\rho_r}{\rho_w} + 1 \right) v' u' + \frac{\rho_r}{\rho_w} (u \rho' v' + \rho' u' v') \right], \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\rho u) \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_t} \left(\rho v + \frac{(\rho v)_w}{\rho_w u_r} \right) \frac{\partial E}{\partial y_t} \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho \frac{\rho_r}{\rho_w} + 1 \right) u' E' + \frac{\rho_r}{\rho_w} (u \rho' E' + \rho' u' E') \right] \\
& + \frac{1}{\gamma_t} \frac{\partial}{\partial y_t} \left\{ \left(\rho \frac{\rho_r}{\rho_w} + 1 \right) v' E' + \frac{\rho_r}{\rho_w} \left[\left(v \frac{v_w}{u_r} \right) \rho' E' + \rho' v' E' \right] \right\} \\
& = \frac{\rho_\infty P_r E_\infty}{\rho_w P_\infty e_r} \frac{Ec_\infty^*}{(1 + Ec_\infty^*/2)} \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{P_w}{P_r} \right) + \frac{1}{\gamma_t} \left(v + \frac{v_w}{u_r} \right) \frac{\partial P}{\partial y_t} \right. \\
& + u' \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_t} v' \frac{\partial P'}{\partial y_t} \left. \right] + \frac{t_r U_\infty E_\infty}{T_\infty u_r e_r} \frac{1}{Pr_w Re_w} \frac{c_{p_w} / c_{p_\infty}}{(1 + Ec_\infty^*/2)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right. \\
& + \frac{1}{\gamma_t^2} \frac{\partial}{\partial y_t} \left(k \frac{\partial T}{\partial y_t} \right) \left. \right] + \frac{u_r E_\infty}{U_\infty e_r} \frac{1}{Re_w} \frac{Ec_\infty^*}{(1 + Ec_\infty^*/2)} \mu (\Phi_{m\u00e9dio} + \Phi_{turb}) \\
& - \frac{u_r^2 E_\infty}{U_\infty e_r} (Ec_{m\u00e9dio} - Ec_{turb}), \quad (3.29)
\end{aligned}$$

$$\rho \frac{p_r}{p_w} + 1 = \left(T \frac{t_r}{T_w} + 1 \right) \left(\rho \frac{\rho_r}{\rho_w} + 1 \right) + \frac{\rho_r t_r}{\rho_w T_w} \rho' T'. \quad (3.30)$$

De acordo com os resultados da se\u00e7\u00e3o 3.1, os distens\u00f5es de coordenadas apropriados para se obter as equa\u00e7\u00f5es v\u00e1lidas na camada da parede, s\u00e3o dados por $y_u^+ = y_u / (Re_\infty \epsilon_1 \gamma_u)^{-1}$ e $y_t^+ = y_t / (Re_\infty Pr_\infty \epsilon_1 \gamma_t)^{-1}$. Nesta se\u00e7\u00e3o, por uma quest\u00e3o de simplicidade nos c\u00e1lculos, vamos substituir os valores de Re_∞ e Pr_∞ por Re_w e Pr_w , respectivamente. Deste modo, os distens\u00f5es de coordenadas apropriados a esta regi\u00e3o ficam:

$$y_u^+ = y_u (Re_w \epsilon_1 \gamma_u), \quad (3.31a)$$

$$y_t^+ = y_t(Re_w Pr_w \epsilon_1 \gamma_t), \quad (3.31b)$$

Nestas expressões o índice " + " representa variável esticada. Se substituirmos estas expressões no sistema (3.26)–(3.29), e levarmos em conta a relação entre as ordens de grandeza das variáveis do problema, dada pelas expressões (3.3) e (3.4), veremos que o termo de injeção aparece na equação da quantidade de movimento como uma correção de ordem v_w/u_τ aos termos de tensão laminar e turbulenta, e na equação da energia como uma correção, também de ordem v_w/u_τ , aos termos de transferência de calor por condução e por turbulência. Assim, para que nossas equações aproximadas de segunda ordem possam dar conta dos efeitos devidos à injeção, todas as variáveis dependentes do problema serão expandidas em torno do parâmetro $v_w/u_\tau = \epsilon_2/\epsilon_1$, pequeno por hipótese. A expressão geral desta expansão é a seguinte:

$$\begin{aligned} \psi = & \psi_{11} + (\epsilon_2/\epsilon_1)\psi_{21} + (\epsilon_1)\psi_{12} + (\epsilon_2/\epsilon_1)^2\psi_{31} + (\epsilon_2)\psi_{22} + (\epsilon_1^2)\psi_{13} \\ & + (\epsilon_2/\epsilon_1)^3\psi_{41} + (\epsilon_2^2/\epsilon_1)\psi_{32} + (\epsilon_2\epsilon_1)\psi_{23} + (\epsilon_1^3)\psi_{14} + \dots, \end{aligned} \quad (3.32)$$

que pode também ser escrita na forma de um somatório, de modo que a relação de recorrência para a formação dos termos fique explícita:

$$\psi = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty} \epsilon_1^{j-1} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^{i-1} \psi_{ij}. \quad (3.33)$$

A expansão (3.32) foi feita também em torno do parâmetro pequeno ϵ_1 , de modo que as equações aproximadas possam dar conta de efeitos desta ordem, se necessário. Se substituirmos esta expansão no sistema (3.26)–(3.30) depois de esticado, e coletarmos termos de mesma ordem de grandeza, obtemos, para as duas primeiras ordens:

Primeira ordem:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u)_{11}^+ + \epsilon_1 Re_w \frac{\partial}{\partial y_u^+} (\rho v)_{11}^+ = 0, \quad (3.34a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_u^+} \left(\frac{\partial u_{11}^+}{\partial y_u^+} \right) - \frac{\partial}{\partial y_u^+} (u'v')_{11}^+ = 0, \quad (3.34b)$$

$$\frac{\partial p_{11}^+}{\partial y_u^+} - \frac{\partial}{\partial y_u^+} (v'v')_{11}^+ = 0, \quad (3.34c)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_t^+} \left(\frac{\partial T_{11}^+}{\partial y_u^+} \right) - \frac{\partial}{\partial y_t^+} (E'v')_{11}^+ = 0, \quad (3.34d)$$

$$\rho_{11}^+ + T_{11}^+ = 0. \quad (3.34e)$$

Segunda ordem:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u)_{21}^+ + \epsilon_1 Re_w \frac{\partial}{\partial y_u^+} (\rho v)_{21}^+ = 0, \quad (3.35a)$$

$$\frac{\partial u_{11}^+}{\partial y_u^+} = \frac{\partial}{\partial y_u^+} \left(\frac{\partial u_{21}^+}{\partial y_u^+} \right) - \frac{\partial}{\partial y_u^+} (u'v')_{21}^+, \quad (3.35b)$$

$$\frac{\partial p_{21}^+}{\partial y_u^+} - \frac{\partial}{\partial y_u^+} (v'v')_{21}^+ = 0, \quad (3.35c)$$

$$\frac{\partial E_{11}^+}{\partial y_t^+} = \frac{\partial}{\partial y_u^+} \left(\frac{\partial T_{21}^+}{\partial y_u^+} \right) - \frac{\partial}{\partial y_u^+} (E'v')_{21}^+, \quad (3.35d)$$

$$p_{11}^+ = \rho_{11}^+ T_{11}^+ + (\rho' T')_{11}^+ + T_{21}^+ + \rho_{21}^+. \quad (3.35e)$$

Aqui também, como nas expressões (3.31), o índice " + " representa variável esticada. Como dissemos na seção anterior, as condições de contorno válidas para esta região do escoamento, são as vigentes na parede.

O problema de valor de contorno estabelecido pela equação (3.34b) e as condições de contorno associadas, pode ser resolvido na forma em que está. Contudo, solução de problema similar apresentada anteriormente [29], sugere que a concordância não seria boa. Para contornar tal inconveniente, os sistemas (3.34) e (3.35) serão resolvidos de forma simplificada. A análise do problema por variáveis intermediárias, feita na seção anterior, mostra, com as equações (3.13c) e (3.15c), que existe uma região menos próxima à parede, onde se pode desprezar os termos de tensão laminar e de condução de calor nas equações de primeira ordem da quantidade de movimento na direção x , e da energia, respectivamente. Essa simplificação corresponde a adotar fatores de esticamento mais próximos de 1 do que os correntes. Além disso, observando as equações (3.35b) e (3.35d), concluímos que, à medida que os fatores de esticamento se aproximam de 1, os termos laminar e de condução destas equações também podem ser desprezados. Na região, então, aonde todos os termos, laminares e de condução, de ambas as ordens de aproximação podem ser desprezados, é que o problema será resolvido. Em alusão aos termos que não foram desprezados, a nova região abordada será chamada *região completamente turbulenta*.

Para resolver os sistemas assim obtidos, precisamos ainda de algum modelo para os termos turbulentos. A teoria do comprimento de mistura de Prandtl têm sido aplicada com sucesso ao estudo de escoamentos ao longo de paredes (tubos, canais, placas e camadas limite), e aos problemas de escoamento turbulento livre (sem paredes sólidas, como no caso de um jato se misturando ao ar circunvizinho). A expressão de Prandtl para os fluxos turbulentos de quantidade de movimento e calor, assumindo o comprimento de mistura proporcional à distância à parede, é a seguinte:

$$-\overline{\zeta' \xi'} = K_{\zeta} K_{\xi} y^2 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y}. \quad (3.36)$$

onde ζ e ξ podem assumir os valores u , v e T , e K_{ζ} e K_{ξ} são constantes de

proporcionalidade dos respectivos comprimentos de mistura. Com estas hipóteses, a solução do problema de valor de contorno em estudo é:

$$u_{11}^+ = \left(\frac{1}{K_u} \ln y_u^+ + A_u \right), \quad (3.37a)$$

$$u_{21}^+ = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{K_u} \ln y_u^+ + A_u \right)^2, \quad (3.37b)$$

$$E_{11}^+ = \left(\frac{1}{K_e} \ln y_t^+ + A_e \right), \quad (3.37c)$$

$$E_{21}^+ = \frac{1}{4} \left\{ 2 \left(\frac{1}{K_e} \ln y_t^+ + A_e \right)^2 - \frac{K_u}{K_e} \left[2 \left(\frac{1}{K_e} \ln y_t^+ + A_e \right) \right]^2 \right\}. \quad (3.37d)$$

A dedução completa destas equações é mostrada no apêndice 2. Nelas, A_u e A_e são constantes a determinar, que aparecem na solução porque não são conhecidos valores de velocidade e temperatura na fronteira da região que estamos tratando. A determinação destas constantes, bem como de K_u e K_e , será feita num capítulo posterior, através das condições de contorno (2.31c) e (2.33c), isto é, por comparação das expressões (3.37) com uma série de dados experimentais.

Comparação dos resultados (3.37a) e (3.37b) com os obtidos anteriormente por SILVA FREIRE [11,12], evidencia duas importantes características daqueles. A primeira, é que nossa expressão do perfil de velocidades é bastante semelhante à obtida para o caso incompressível. A influência do número de Mach aparece embutida apenas no parâmetro u_τ , e, como ficará mais claro adiante, nas constantes K_u e A_u . A segunda, é que, neste trabalho, algumas das condições de contorno da parede são utilizadas na região completamente turbulenta, de modo que apenas as constantes A_u e K_u restam a ser determinadas. A validade deste procedimento é mostrada no apêndice 2, aonde aparece também a dedução completa das equações (3.37). No trabalho de SILVA FREIRE [12], as condições de contorno da parede não são utilizadas na dedução de seu perfil de velocidade, e, por isso,

cinco constantes restam a determinar. Posteriormente, esse número é reduzido a dois, por comparação dos resultados obtidos com os de STEVENSON [30].

Expressões dimensionais para os perfis de velocidade e temperatura podem ser obtidas, substituindo as expressões (3.37) nas respectivas expansões assintóticas (cuja expressão geral é a (3.32)), depois substituindo y_u^\dagger e y_t^\dagger por y_u e y_t , respectivamente, através das expressões (3.31)†, e, finalmente, redimensionalizando todas as variáveis dependentes pelas expressões (3.18). O resultado é:

$$u = u_\tau \left(\frac{1}{K_u} \ln y \frac{u_\tau}{\nu_w} + A_u \right) + \frac{v_w}{4} \left(\frac{1}{K_u} \ln y \frac{u_\tau}{\nu_w} + A_u \right)^2, \quad (3.38a)$$

$$E = E_w + e_\tau \left(\frac{1}{K_e} \ln y \frac{u_\tau}{\nu_w} Pr_w + A_e \right) + e_\tau \frac{v_w}{4u_\tau} \left[2 \left(\frac{1}{K_e} \ln y \frac{u_\tau}{\nu_w} Pr_w + A_e \right)^2 - \frac{K_u}{K_e} \left(\frac{1}{K_u} \ln y \frac{u_\tau}{\nu_w} + A_u \right)^2 \right]. \quad (3.38b)$$

É interessante notar que a expressão do perfil de energia depende dos parâmetros u_τ , K_u e A_u , acoplando, portanto, as soluções térmica e dinâmica do problema. Mesmo que através de alguma hipótese extra, feita no decorrer da dedução da expressão (3.34b), esses três parâmetros fossem eliminados, os problemas continuariam acoplados, uma vez que, por definição, $E = c_p T + (1/2)u^2$.

Além dos resultados apresentados, mais dois podem ser deduzidos dos sistemas aproximados (3.34) e (3.35). Integrando as equações (3.34c) e (3.35c), e redimensionalizando os resultados, temos que a pressão é dada por:

$$p = p_w + A_p p_\tau + v_w \frac{p_\tau}{u_\tau} \left(\frac{1}{K_u} \ln y \frac{u_\tau}{\nu_w} + A_u \right) C. \quad (3.39)$$

† Na verdade, as expressões (3.37) só valem no limite inferior da região que está sendo tratada. Mesmo assim, como não se conhece o valor exato dos distensões de coordenadas para a região em questão, as expressões mencionadas serão usadas.

onde C e A_p são constantes a determinar. Utilizando a definição de E na equação (3.34e), temos, para a massa específica:

$$\rho = \rho_w - \rho_r \left(\frac{1}{K_e} \ln y \frac{u_r}{\nu_w} Pr_w + A_e \right). \quad (3.40)$$

Se assumirmos a hipótese de que a teoria do comprimento de mistura de Prandtl também é válida para descrever o campo de flutuações da massa específica, a equação (3.35e) fornece uma correção de segunda ordem com forma bilogarítmica, como as expressões (3.38), para a massa específica. Assim como as expressões (3.38), a (3.39) e a (3.40) também são válidas apenas na região completamente turbulenta. Detalhes a respeito da dedução da equação (3.39) são dados no apêndice 3.

3.3 Análise Assintótica da Camada Exterior

Nesta região, vamos supor que todas as variáveis médias tenham a mesma ordem de grandeza que têm no escoamento externo. Além disso, sabemos que todas as variáveis turbulentas mantêm a ordem de grandeza dada pelas expressões (3.3) e (3.4) até bem próximo do limite da camada limite. Sendo assim, a adimensionalização apropriada nesta região é idêntica à proposta pelas expressões (3.1), se fizermos $\eta = 1$, e, conseqüentemente, o sistema de equações adimensionais associado será idêntico ao sistema (3.5)–(3.9), também fazendo $\eta = 1$.

De acordo com os resultados obtidos na seção 3.1, as distensões de coordenadas apropriadas para estudar a presente região são $\eta_e = \epsilon_1^2/\gamma_e$ para a equação da energia, e $\eta_u = \epsilon_1^2/\gamma_u$ para todas as outras. É evidente que, feitas estas distensões, substituídas as expansões assintóticas nas equações resultantes, e coletados os termos de mesma ordem de grandeza, o sistema aproximado de primeira ordem será idêntico ao composto pelas equações (3.12), (3.13b), (3.14a), (3.15b) e (3.9), com as condições de contorno do escoamento externo.

Como no caso da camada da parede, o sistema de equações mencionado não será resolvido na região à qual o esticamento conduz, por causa, também, das dificuldades matemáticas envolvidas. Como da outra vez, nos deslocaremos na direção do escoamento externo, até uma região onde os termos turbulentos possam ser desprezados. Como no outro caso, isso corresponde a adotar η mais próximo de 1, como esclarecem as expressões (3.13a) e (3.15a), da análise do problema por variáveis intermediárias. Em virtude da semelhança da região assim definida com a esteira formada em certos tipos de escoamento, ela será chamada *região da esteira*.

Assim, o sistema de equações aproximadas que vamos resolver, é idêntico ao que vale para o escoamento externo, e com as condições de contorno do escoamento externo, que continuam válidas nesta região. A solução, em primeira ordem de aproximação é então:

$$u = U_{\infty}, \quad (3.41a)$$

$$E = E_{\infty}, \quad (3.41b)$$

$$p = p_{\infty}, \quad (3.41c)$$

$$\rho = \rho_{\infty}. \quad (3.41d)$$

Soluções analíticas obtidas diretamente das equações aproximadas de segunda ordem nesta região, não são conhecidas até o momento pelo autor, para qualquer das variáveis, exceto a pressão. Para a pressão, substituição das expansões assintóticas na equação do momento linear em y fornece $p_{21} = p_{12} = C^{te}$, onde $C^{te} = 0$, por causa da condição de contorno (2.34b). Assim, a expressão (3.41c) é uma aproximação que vale até a segunda ordem de aproximação,

e, além disso, vale ainda para toda a camada exterior, e não só para a região da esteira.

Para obter uma aproximação de segunda ordem para os perfis de velocidade e temperatura, uma extensão baseada no trabalho de COLES [15] é proposta. Baseado em evidências experimentais obtidas da análise de um grande número de perfis de velocidade incompressíveis, sem injeção, Coles propôs a seguinte expressão para a velocidade média:

$$u = u_r \left[\frac{1}{K_u} \ln y \frac{u_r}{\nu_w} + A_u + \frac{\Pi_u}{K_u} w\left(\frac{y}{\delta_u}\right) \right], \quad (3.42)$$

onde w é uma função universal da variável y/δ_u , que Coles determinou experimentalmente em seu trabalho, e que assume o valor $w = 2$ em $y = \delta_u$, e tende a zero quando y tende a zero. Π_u , é uma constante, também determinada por Coles, e que vale 0.55, no caso sem gradiente de pressão que ele estudou. De acordo com o autor, a expressão (3.42) é válida numa região que abrange as regiões completamente turbulenta e exterior. Se reescrevermos a expressão de Coles para o perfil de velocidades na forma

$$u = U_\infty + u_r \left[\frac{1}{K_u} \ln \frac{y}{\delta_u} + \frac{\Pi_u}{K_u} \left(w\left(\frac{y}{\delta_u}\right) - 2 \right) \right], \quad (3.43)$$

veremos que ela fornece uma correção de segunda ordem ao perfil, dado por (3.41a), que é função de y/δ_u .

Uma interessante interpretação física da solução de Coles, válida para o caso incompressível, sem injeção, pode ser obtida comparando a expressão (3.42) com a solução clássica para a camada da parede. Olhando para o primeiro membro da expressão (3.38a), que, como dissemos, é igual à solução do caso incompressível sem injeção, e para a expressão (3.42), veremos que a função $w(y/\delta_u)$ é a diferença entre a velocidade na região da esteira e a velocidade que seria prevista pela lei da parede para esta região. A figura 2, da próxima página, esclarece melhor esta afirmativa.

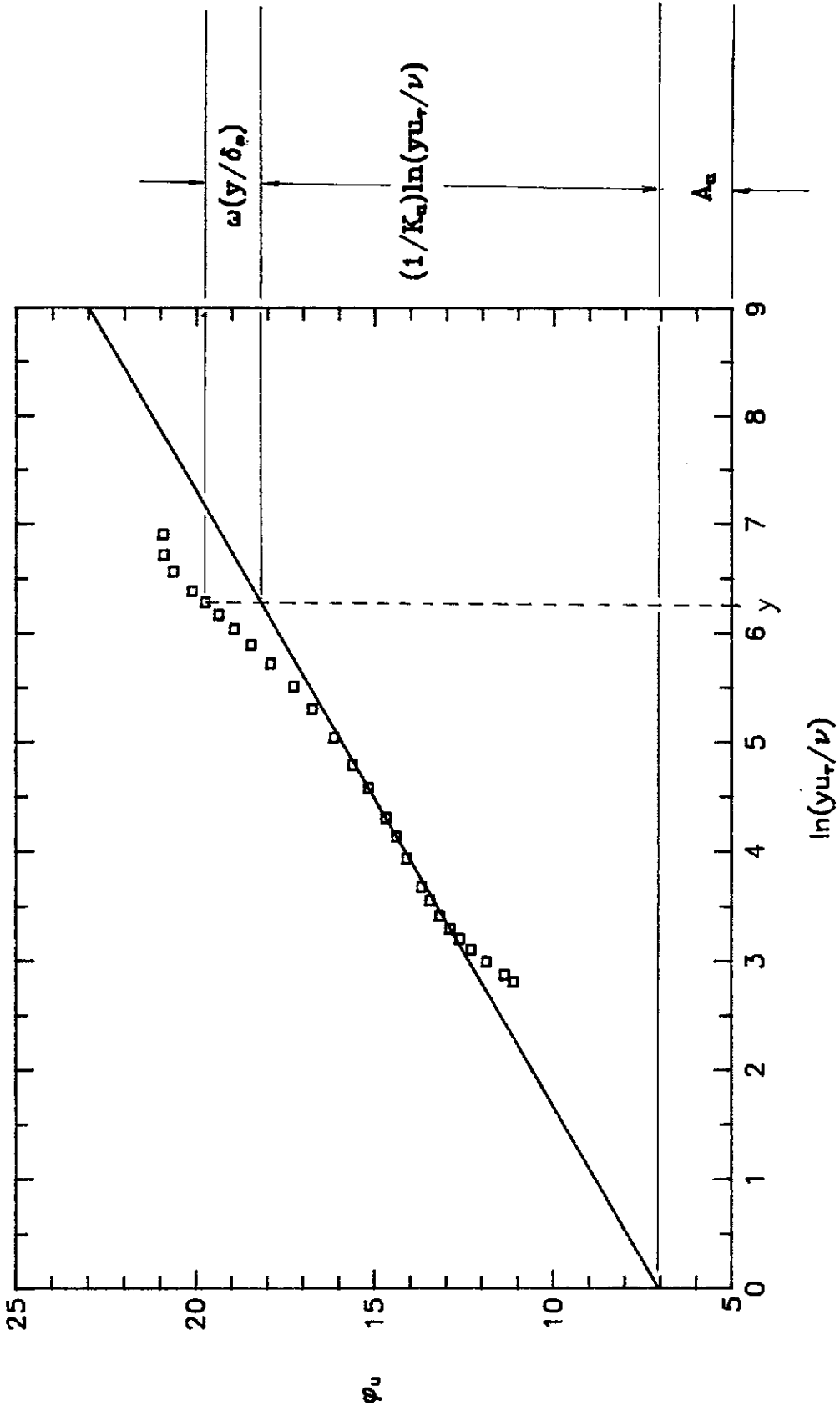


Fig. 2 - Interpretação física da solução de Coles

Uma extensão ao trabalho de Coles para os casos compressível e com injeção, pode ser tentada de várias formas. SILVA FREIRE apresenta duas dessas formas em seus artigos [12] e [11], o primeiro para o caso incompressível, e o segundo para o caso compressível, ambos com injeção. A concordância com dados experimentais mostrou-se muito boa no primeiro caso, mas apenas razoável no segundo. Neste trabalho vamos propor uma expressão para o perfil de velocidades que apresente melhor concordância com os dados experimentais do que a de Silva Freire, e que, além disso, sirva de modelo para uma expressão análoga no caso do perfil de temperatura.

Observando que a correção de segunda ordem do perfil de velocidades da região da parede, (3.38a), é simplesmente o quadrado da correção de primeira ordem, utilizamos a função de Coles, e propomos:

$$u = u_r \left[\frac{1}{K_u} \ln y \frac{u_r}{\nu_w} + A_u + \frac{P_u}{2} w\left(\frac{y}{\delta_u}\right) \right] + \frac{v_w}{4} \left[\frac{1}{K_u} \ln y \frac{u_r}{\nu_w} + A_u + \frac{P_u}{2} w\left(\frac{y}{\delta_u}\right) \right]^2, \quad (3.44)$$

onde, por simplicidade de notação, escrevemos $P_u = 2\Pi_u/K_u$. De maneira análoga, para o perfil de energia, propomos:

$$E = E_w + e_r \left[\frac{1}{K_e} \ln y \frac{u_r}{\nu_w} Pr_w + A_e + \frac{P_e}{2} w\left(\frac{y}{\delta_t}\right) \right] + \frac{e_r v_w}{u_r 4} \left\{ 2 \left[\frac{1}{K_e} \ln y \frac{u_r}{\nu_w} Pr_w + A_e + \frac{P_e}{2} w\left(\frac{y}{\delta_t}\right) \right]^2 - \frac{K_u}{K_e} \left[\frac{1}{K_u} \ln y \frac{u_r}{\nu_w} + A_u + \frac{P_u}{2} w\left(\frac{y}{\delta_u}\right) \right]^2 \right\}. \quad (3.45)$$

Estas expressões, como a de Coles, se reduzem à solução da região completamente turbulenta para pequenos valores de y , pois $w \rightarrow 0$, quando $y \rightarrow 0$. Deste modo, ambas são válidas tanto na região exterior, quanto na completamente turbulenta.

3.4 Combinação das Soluções - Equações do Atrito e da Troca Térmica

Conforme foi dito no início do capítulo, o último passo na obtenção da solução é a *combinação*† das soluções das regiões da parede e da esteira numa única expressão válida na maior parte da camada limite. Esse processo estabeleceria um conjunto de restrições às constantes K , A e P . Contudo, como dissemos na seção anterior, as expressões dos perfis de velocidade e energia da região exterior, são válidas também na região completamente turbulenta, de modo que efetuar a combinação entre as respectivas expressões só forneceria relações triviais entre as constantes. Além disso, se uma solução assintótica de segunda ordem tivesse sido encontrada para as equações da região da esteira ao invés de se ter proposto uma solução análoga à de Coles, o método das variáveis intermediárias sugere que a combinação não seria mesmo possível. De fato, de acordo com a análise feita na seção 3.1, regiões da esteira e completamente turbulenta são governadas por conjuntos de equações intermediárias, não admitindo, possivelmente, combinação.

Um resultado importante pode ser obtido, contudo, por combinação, no que diz respeito ao perfil de pressão. Combinando os resultados (3.39) e (3.41c), da seção anterior, obtemos:

$$p_{\infty} = p_w. \quad (3.46)$$

Observando a expressão (3.39) novamente, concluímos que a aproximação acima é válida, pelo menos, até a ordem p_{τ} , isto é, de acordo com (3.22), até a ordem $p_{\infty}(u_{\tau}^2/U_{\infty}^2)$. Deste modo, a pressão não varia dentro da camada limite na direção y apreciavelmente, e a distribuição de pressões do escoamento externo pode, com boa precisão, ser considerada impressa sobre a superfície.

Por fim, as expressões dos perfis de velocidade e energia podem ser utilizadas para se obter previsões dos coeficientes de atrito e troca térmica. Para tanto, basta que se conheça o valor de qualquer par ordenado pertencente ao domínio de cada uma das expressões (3.44) e (3.45). Os valores escolhidos, por

† O termo vem do inglês 'matching'.

causa de sua reprodutibilidade, são, respectivamente, (δ_u, U_∞) e (δ_t, E_∞) , que, substituídos nas equações mencionadas fornecem:

$$u_\infty = u_\tau \left(\frac{1}{K_u} \ln \delta \frac{u_\tau}{\nu_w} + A_u + P_u \right) + \frac{v_w}{4} \left(\frac{1}{K_u} \ln \delta \frac{u_\tau}{\nu_w} + A_u + P_u \right)^2, \quad (3.47)$$

$$E_\infty = E_w + e_\tau \left(\frac{1}{K_e} \ln \delta \frac{u_\tau}{\nu_w} Pr_w + A_e + P_e \right) + \frac{e_\tau v_w}{u_\tau 4} \left[2 \left(\frac{1}{K_e} \ln \delta \frac{u_\tau}{\nu_w} Pr_w + A_e + P_e \right)^2 - \frac{K_u}{K_e} \left(\frac{1}{K_u} \ln \delta \frac{u_\tau}{\nu_w} + A_u + P_u \right)^2 \right]. \quad (3.48)$$

Esses resultados, juntamente com as expressões (3.44) e (3.45), que foram usadas para obtê-los, são o resultado central deste trabalho. Estas quatro equações, mais duas para as espessuras das respectivas camadas limite† (δ_u e δ_t), dão a solução completa ao problema, se resolvidas numericamente por algum método iterativo.

† Obtidas, por exemplo através dos balanços integrais da quantidade de movimento na direção x , e da energia

Capítulo 4

Determinação das Constantes

Nesse capítulo serão obtidos os valores das constantes de integração encontradas nas soluções apresentadas no capítulo anterior. Para esclarecer detalhes importantes a respeito da maneira de determinar tais constantes, vamos resumir primeiramente, a origem destas:

- a) K_u e K_e aparecem nas expressões (3.37), dos perfis de velocidade e temperatura para a região completamente turbulenta, em decorrência dos modelos de turbulência utilizados.
- b) A_u e A_e aparecem nas mesmas expressões, em virtude da falta de condições de contorno adequadas para a velocidade e a energia total no limite da região completamente turbulenta.
- c) P_u e P_e são introduzidas na solução da região da esteira, através das expressões (3.44) e (3.45), juntamente com a função de Coles

Feito isto, uma análise a respeito da dependência destas constantes com as variáveis do escoamento é oportuna. Em primeiro lugar, observando que a expressão (3.38a), do perfil de velocidade na região completamente turbulenta, é idêntica à proposta anteriormente para o caso incompressível por outros autores ([13], [30]), concluímos que a variação dos perfis com o número de Mach do escoamento externo, M_∞ , só pode estar embutida nas constantes K_u e A_u . Tal variação já foi registrada numa análise feita por MABEY [31], sobre os dados experimentais dele próprio. Pela semelhança entre as equações (3.38a) e (3.38b), o mesmo tipo de variação parece razoável para as constantes K_e e A_e .

Em segundo lugar, por serem as velocidades de injeção pequenas, não

é de se esperar que as regiões completamente turbulenta ou da esteira sofram modificações em virtude da injeção, de modo que apenas A_u e A_e devem variar com a velocidade de injeção, v_w . Esta variação também já foi constatada por outros autores, por exemplo, SQUIRE [6], e SILVA FREIRE [12], no caso de A_u .

Observando, em seguida, a expressão (3.44), notamos que, no caso sem injeção, esta se reduz à expressão proposta por COLES [15] para o perfil de velocidades, no caso incompressível. Como o próprio Coles observou, quando realizou suas experiências, a constante Π_u varia, de forma assintótica, com o número de Reynolds. Assim, é de se esperar que, no nosso caso, tanto P_u quanto P_e apresentem o mesmo comportamento. Variações com o número de Mach são também de se esperar, pois $P_u = 2\Pi_u/K_u$ e $P_e = 2\Pi_e/K_e$.

Além disso, é certo que escoamentos de fluidos com propriedades térmicas diferentes e/ou razões T_w/T_∞ diferentes, devem apresentar perfis de temperatura diferentes, de modo que todas as constantes da parte térmica do problema devem depender dos número de Prandtl e de Eckert do escoamento externo. Variações deste tipo em parâmetros definidos de forma semelhante a A_e , já foram detectadas por outros autores [28,32,33,34] em análises do caso incompressível. MEDEIROS [28], verificou que um parâmetro definido de forma semelhante a K_e não varia com o número de Prandtl. Como o número de Eckert inclui em si a velocidade do escoamento externo, U_∞ , as constantes de integração da parte dinâmica do problema também deverão variar com este adimensional.

Resumindo tudo o que dissemos nos parágrafos anteriores, de forma simbólica, escrevemos:

$$K_u = f_1(M, Ec_\infty), \quad (4.1)$$

$$A_u = f_2(M, Ec_\infty, v_w), \quad (4.2)$$

$$P_u = f_3(M, Ec_\infty, Re_\infty), \quad (4.3)$$

$$K_e = f_4(M, Ec_\infty, Pr_w), \quad (4.4)$$

$$A_e = f_5(M, Ec_\infty, Pr_w, v_w), \quad (4.5)$$

$$P_e = f_6(M, Ec_\infty, Re_\infty, Pr_w). \quad (4.6)$$

onde f_i denota funções genéricas para $i = 1, 2, \dots, 6$. Nas expressões acima, decidimos utilizar Pr_w em vez de Pr_∞ , para que as constantes que dependem desse valor possam levar em conta a presença da parede mais facilmente.

Para determinar experimentalmente as funções f_i , vamos separar o estudo em duas partes, referentes respectivamente aos casos sem e com injeção de calor através da parede. Essa separação, na verdade, é mais do que didática. O motivo principal é que os dados com injeção de calor disponíveis apresentam-se bastante incompletos, não permitindo que se deduza expressões que valham indiferentemente para os dois casos. Os dois sub-capítulos subsequentes tratam desse assunto.

4.1 Caso sem injeção de Calor

Neste caso, as equações (4.1)–(4.3) se reduzem a:

$$K_u = f'_1(M), \quad (4.7)$$

$$A_u = f'_2(M, v_w), \quad (4.8)$$

$$P_u = f'_3(M, Re_\infty). \quad (4.9)$$

Os valores destas três constantes podem ser obtidos dos dados experimentais se estes forem convenientemente representados em gráfico. Se resolvermos a equação (3.38a) em $(1/K_u)\ln(yu_\tau/\nu_w) + A_u$, obtemos:

$$\frac{1}{K_u} \ln y \frac{u_\tau}{\nu_w} + A_u = \frac{2u_\tau}{v_w} \left(\sqrt{\frac{uv_w}{u_\tau^2} + 1} - 1 \right), \quad \text{se } v_w \neq 0, \quad (4.10a)$$

$$\frac{1}{K_u} \ln y \frac{u_\tau}{\nu_w} + A_u = \frac{u}{u_\tau}, \quad \text{se } v_w = 0. \quad (4.10b)$$

Chamando o lado direito destas expressões φ_u , e representando os dados experimentais em gráficos $\varphi_u \times \ln(y^*)$, onde $y^* = (yu_\tau/\nu_w)$, os coeficientes linear e angular da reta obtida, serão os valores de A_u e K_u procurados, respectivamente. Evidentemente, a mencionada reta só existe na região completamente turbulenta, aonde vale a equação (3.38a). A figura 3, ilustra o processo, com os dados sem injeção de MABEY [2], para números de Mach 2.5 e 4.5. A figura 4 representa os dados com e sem injeção de SQUIRE [3], com número de Mach de 2.5, e taxa de injeção adimensional (definida neste trabalho como $F = \rho_w v_w / \rho_\infty U_\infty$) variando de 0 a 0.0036. Nesta figura, fica também ilustrada a dependência de A_u com a taxa de injeção.

Para obter o valor de P_u basta resolver a equação (3.44), do perfil de velocidades nas regiões completamente turbulenta e da esteira, para a variável $(1/K_u)\ln(yu_\tau/\nu_w) + A_u + (P_u/2)w(y/\delta_u)$, de maneira análoga ao que se fez para a equação (3.38a):

$$\frac{1}{K_u} \ln y \frac{u_\tau}{\nu_w} + A_u + \frac{P_u}{2} w \left(\frac{y}{\delta_u} \right) = \frac{2u_\tau}{v_w} \left(\sqrt{1 + \frac{uv_w}{u_\tau^2}} - 1 \right), \quad \text{se } v_w \neq 0, \quad (4.11a)$$

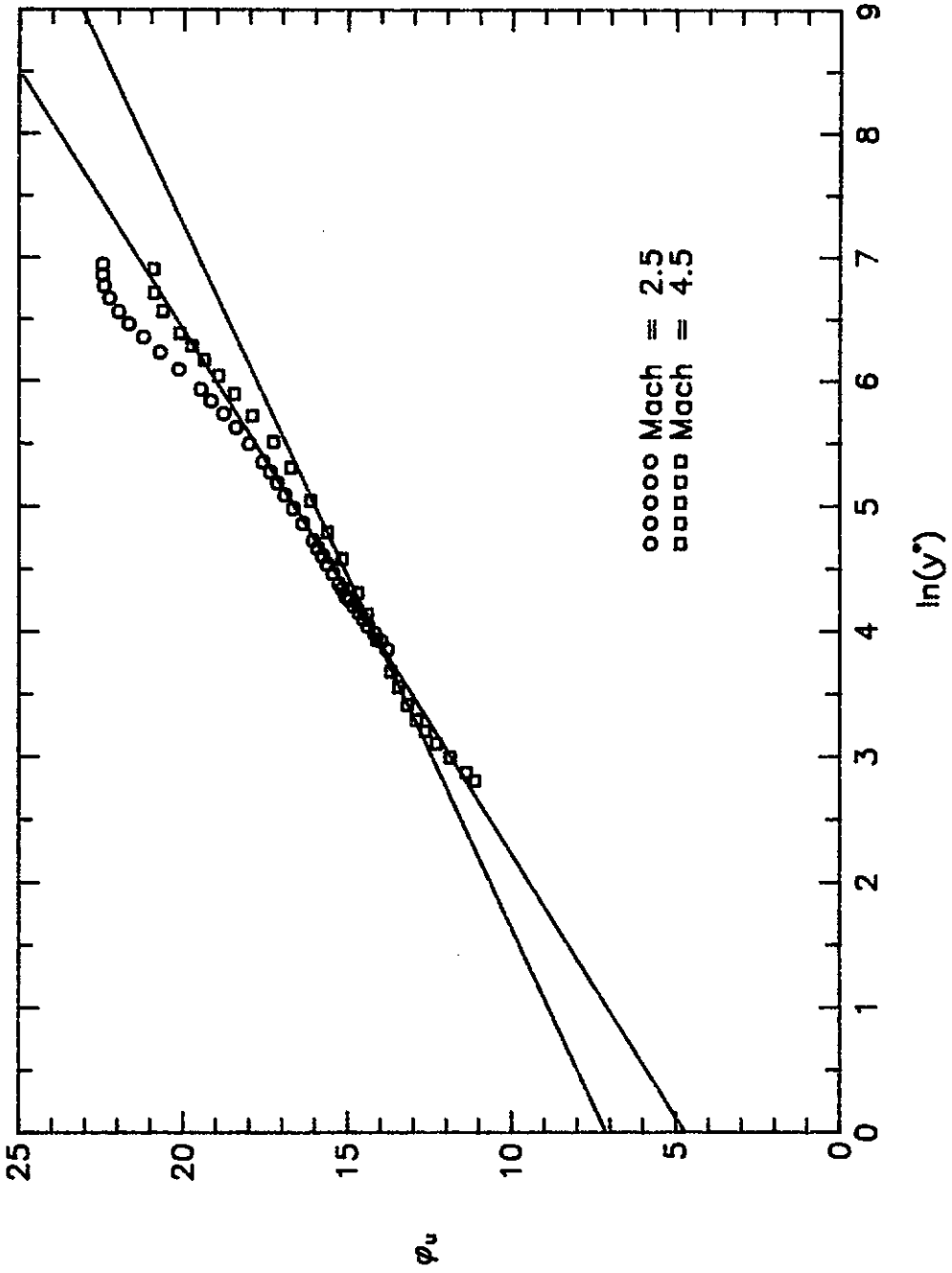


Fig. 3 -- Ilustração do processo de obtenção de K_u e A_u , dados de Mabey (2)

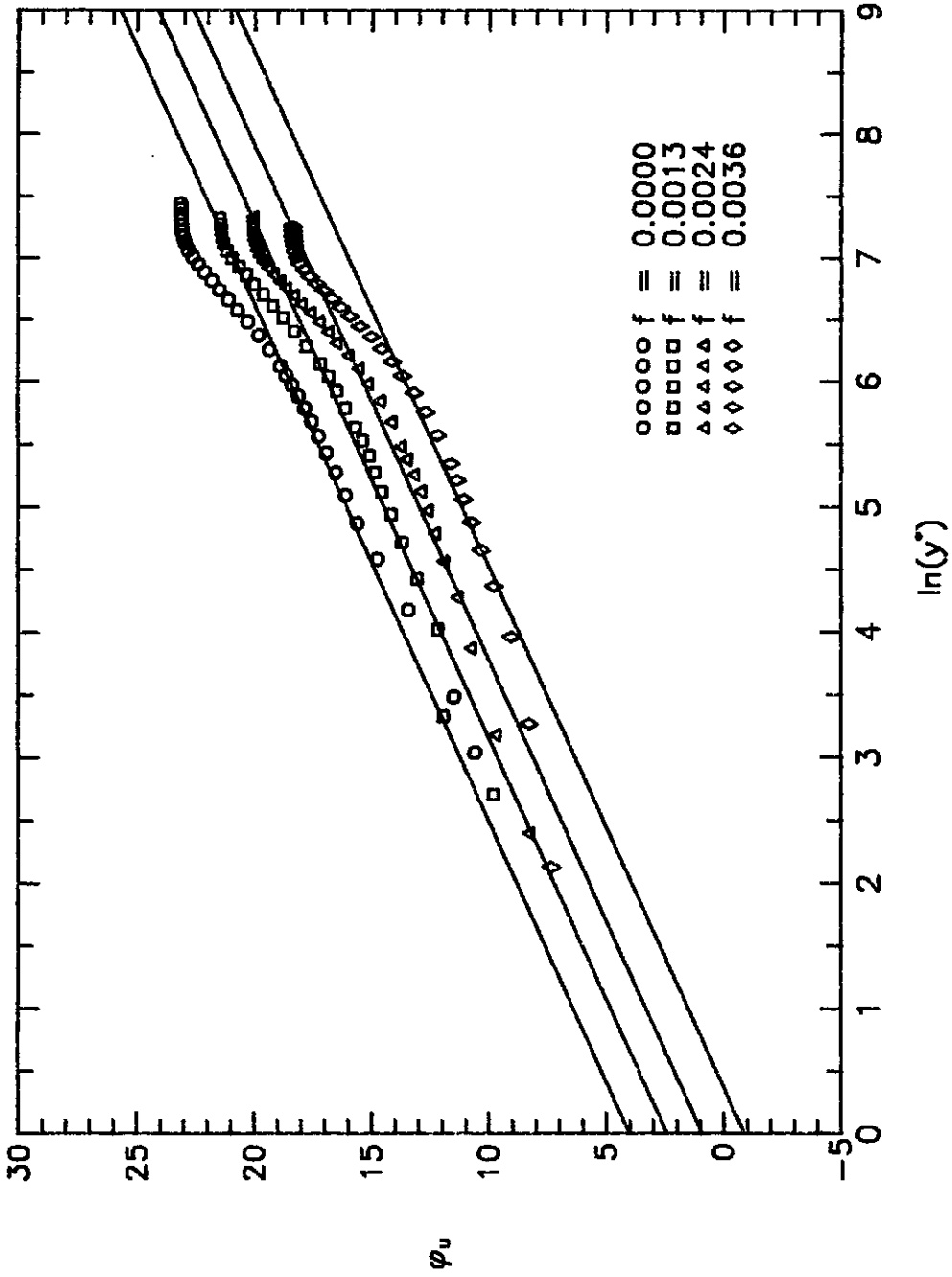


Fig. 4 - Ilustração do processo de obtenção de K_{in} e A_{in} .
 Dados com injeção, de Squire (3)

$$\frac{1}{K_u} \ln y \frac{u_r}{\nu_w} + A_u + \frac{P_u}{2} w \left(\frac{y}{\delta_u} \right) = \frac{u}{u_r}, \quad \text{se } v_w = 0. \quad (4.11b)$$

Fazendo a diferença entre as equações acima e as equações (4.10a) e (4.10b) avaliadas em $y = \delta_u$, vemos que o resultado é justamente P_u . O modo gráfico de se obter tal diferença aparece exemplificado na figura 5, para um perfil de velocidades de Mabey, sem injeção, com número Mach 4.5.

A análise descrita foi feita, sobre 28 perfis de MABEY [2]†, e 3 de SQUIRE [3] sem injeção, com Mach variando de 1.8 a 4.5, e sobre 9 perfis de SQUIRE [3] com injeção variando de 0.00065 a 0.0036 e número de Mach entre 1.8 e 3.55. A dependência das constantes com Mach e com a taxa de injeção foi constatada, como se previa. Os resultados para K_u , e para A_{u_0} , isto é, A_u no caso sem injeção, aparecem representadas nas figuras 6 e 7, juntamente com os polinômios que melhor descrevem suas variações. Os polinômios ajustados levam em conta que K_u deve tender a 0.4, e que A_{u_0} deve tender a 5.0,‡ à medida que M_∞ tende a zero, de modo que nossa expressão de velocidade se reduza à conhecida expressão válida para o caso incompressível.

Para os valores de P_u , nenhuma tendência definida de variação com o número de Reynolds foi observada, sendo que um valor médio igual a 1.75 ajustou-se bem aos dados experimentais, como um todo. Esse valor é menor do que o encontrado geralmente na literatura para o caso incompressível, que vale em torno de 2.5. Valores das constantes K_u e A_{u_0} para números de Mach intermediários, podem ser obtidos diretamente das figuras, ou a partir dos polinômios ajustados. As expressões destes, mais a de P_u , aparecem abaixo:

$$K_u = 0.316 + 0.22M_\infty - 0.007M_\infty^2, \quad \text{para } 2.5 \leq M_\infty \leq 4.5, \quad (4.12)$$

† FERNHOLZ e FINLEY [35] afirmam ser o conjunto de dados de Mabey os melhores atualmente disponíveis na literatura.

‡ Valores largamente documentados na literatura para o caso incompressível.

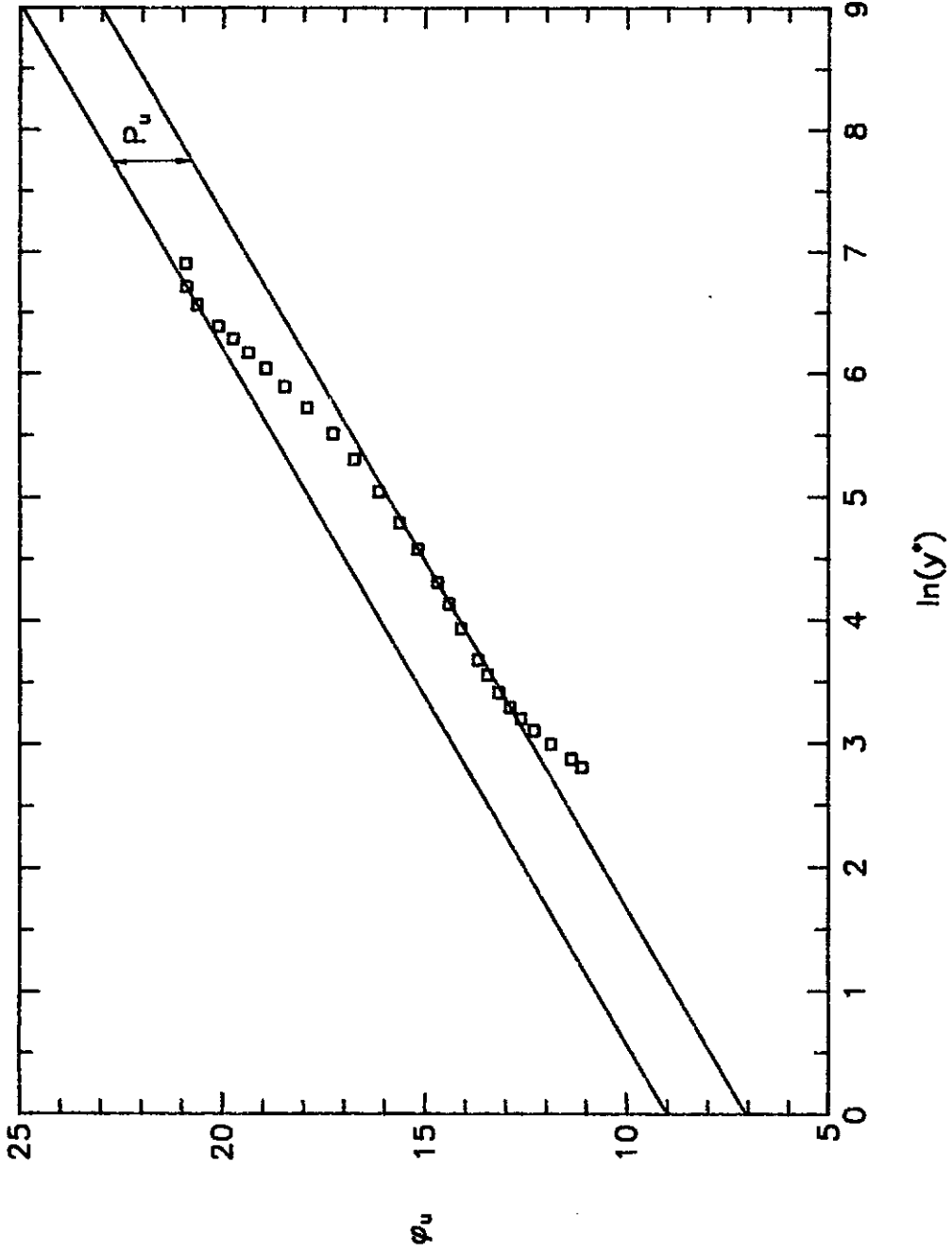


Fig. 5 — Ilustração do processo de obtenção de P_u

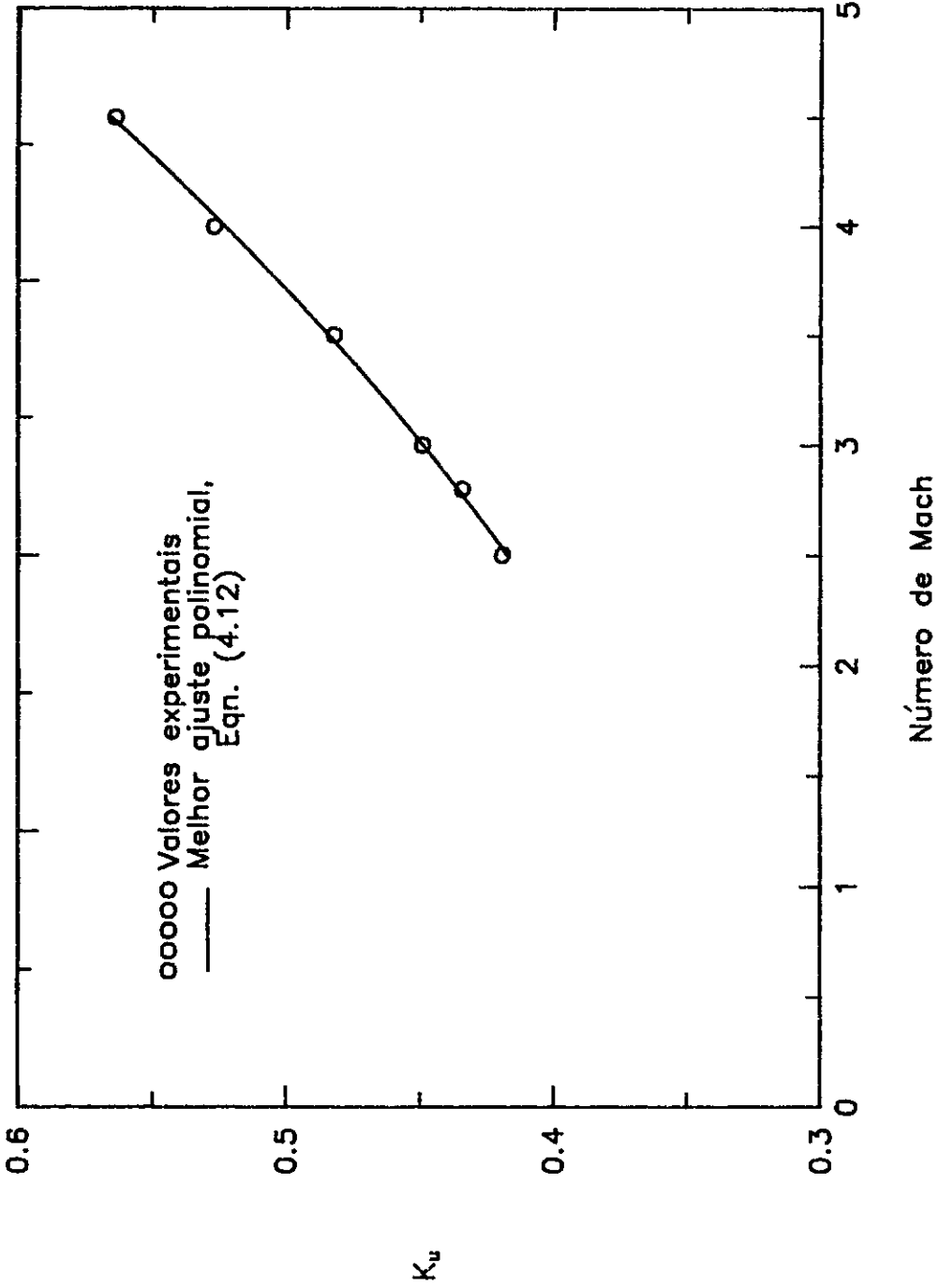


Fig. 6 -- Variação de K_u com o número de Mach. Dados com e sem injeção, de Squire (3) e Mabey (2).

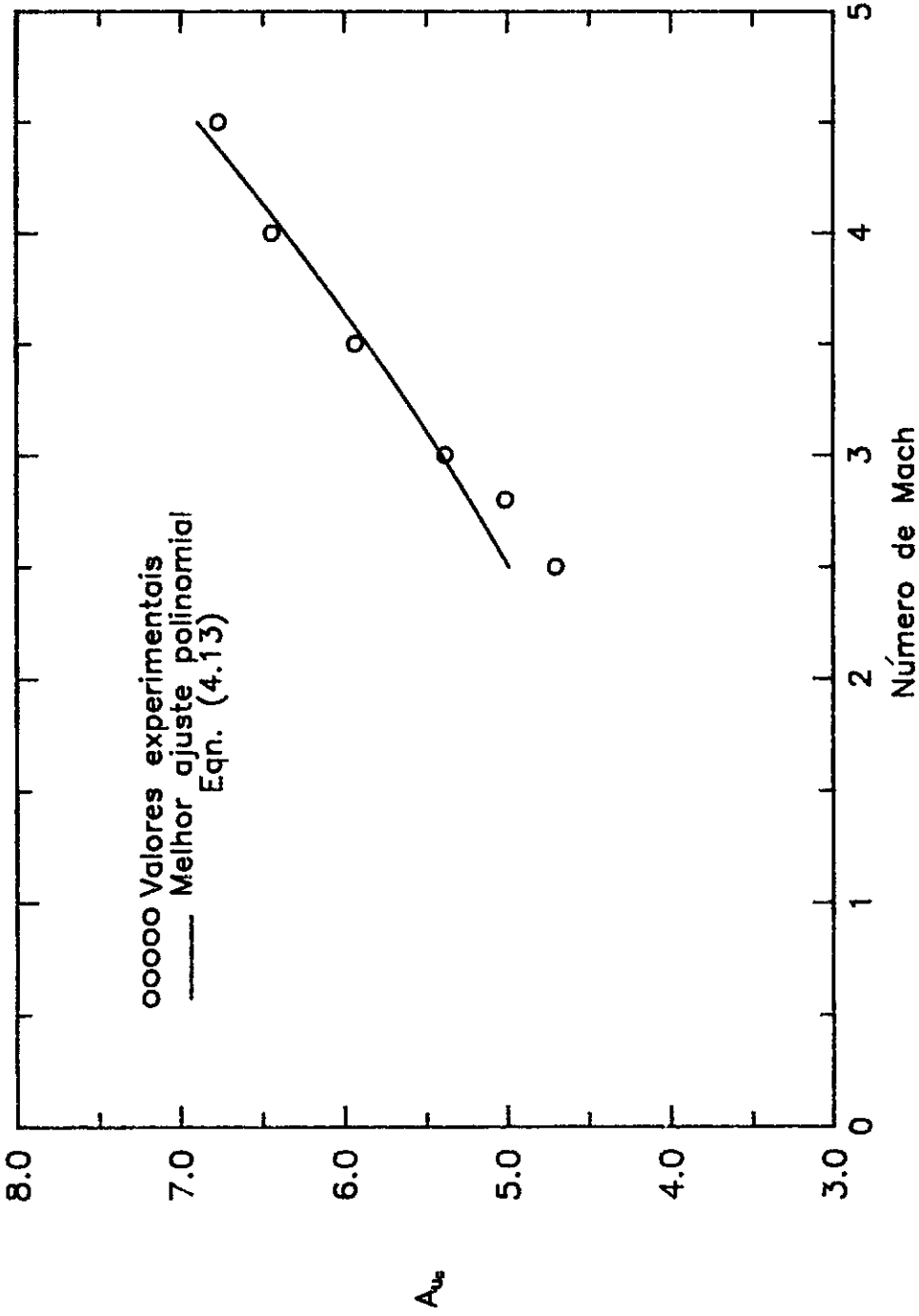


Fig. 7 - Variação de $A_{0.5}$ com o número de Mach para o caso sem injeção, com os dados de Mabey (2)

$$A_{u_0} = 3.553 + 0.363M_\infty - 0.084M_\infty^2, \quad \text{para } 2.5 \leq M_\infty \leq 4.5, \quad (4.13)$$

$$P_u = 2\Pi_u/K_u = 1.75. \quad (4.14)$$

Interpretar os valores obtidos para A_u , envolve uma dificuldade adicional. Em seus experimentos, Squire mediu os perfis de velocidade para três números de Mach, e para três taxas de injeção por número de Mach. O problema, é que as taxas e injeção não são as mesmas para números de Mach diferentes, de modo que não é possível determinar a dupla dependência e A_u com estas variáveis. Para contornar tal dificuldade, decidiu-se utilizar alguma teoria que descrevesse tal variação, em vez de tentar obtê-la empiricamente. A teoria que melhor se ajustou aos dados experimentais pode ser encontrada resumidamente no trabalho de SIMPSON [36]. Em poucas palavras, Simpson deriva uma expressão para a variação de A_u com v_w e M_∞ , assumindo que existe, abaixo da região completamente turbulenta, uma sub-camada laminar, aonde vale uma equação do tipo $u/u_r = y u_r / \nu_w$. Assumindo, ainda, que existe um ponto aonde esta equação e a equação da região completamente turbulenta valem simultaneamente, o valor da constante A_u fica determinado. A expressão de Simpson, que utilizamos neste trabalho, considerando que K_u e A_u variam com M_∞ , é a seguinte:

$$A_u = \frac{2u_r}{v_w} \left(\sqrt{\frac{U_a^+ v_w}{u_r} + 1} - 1 \right) + \frac{1}{K_u} \ln \frac{1}{U_a^+}. \quad (4.15)$$

onde U_a^+ é obtido resolvendo a equação transcendental $U_a^+ = (1/K_u) \ln U_a^+ + A_{u_0}$.

4.2 Caso com injeção de Calor

Como dissemos antes, os dados experimentais encontram-se bastante incompletos nesse caso. Experimentos só foram realizados para um único número de Mach, e para um único fluido, de modo que as equações (4.1)–(4.6) se reduzem a:

$$K_u = f_1''(Ec_\infty), \quad (4.16)$$

$$A_u = f_2''(Ec_\infty, v_w), \quad (4.17)$$

$$P_u = f_3''(Ec_\infty, Re_\infty), \quad (4.18)$$

$$K_e = f_4''(Ec_\infty), \quad (4.19)$$

$$A_e = f_5''(Ec_\infty, v_w), \quad (4.20)$$

$$P_e = f_6''(Ec_\infty, Re_\infty). \quad (4.21)$$

válidas para um número de Mach em torno de 6.5, e o número de Prandtl do ar.

Utilizando procedimento idêntico ao descrito no caso sem injeção de calor, a análise foi realizada sobre 12 perfis de velocidade de DANBERG [4] sem injeção, com a taxa T_w/T_∞ variando de 4.1 a 7.8, e sobre 22 perfis do mesmo autor [4], com taxas de injeção variando de 0.0004 a 0.0025, e com T_w/T_∞ variando de 3.8 a 7.7. A variação de K_u , A_u e P_u descrita pelas equações (4.16)–(4.18), foi de fato observada, e é mostrada nas figuras 8, 9 e 10, respectivamente. Como no

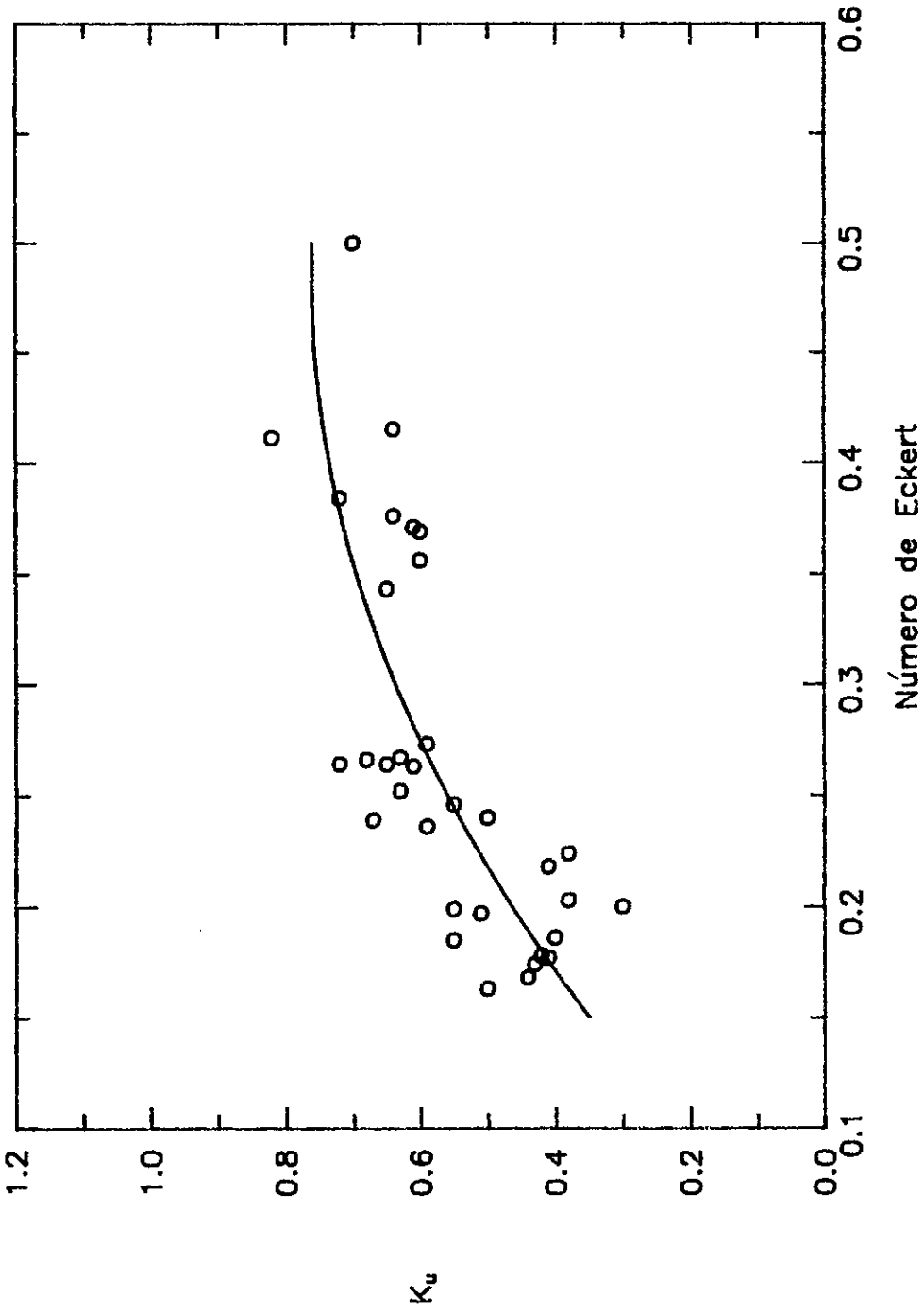


Fig. 8 - Variação de K_u com o número de Eckert, dados de Danberg (4) com e sem injeção.

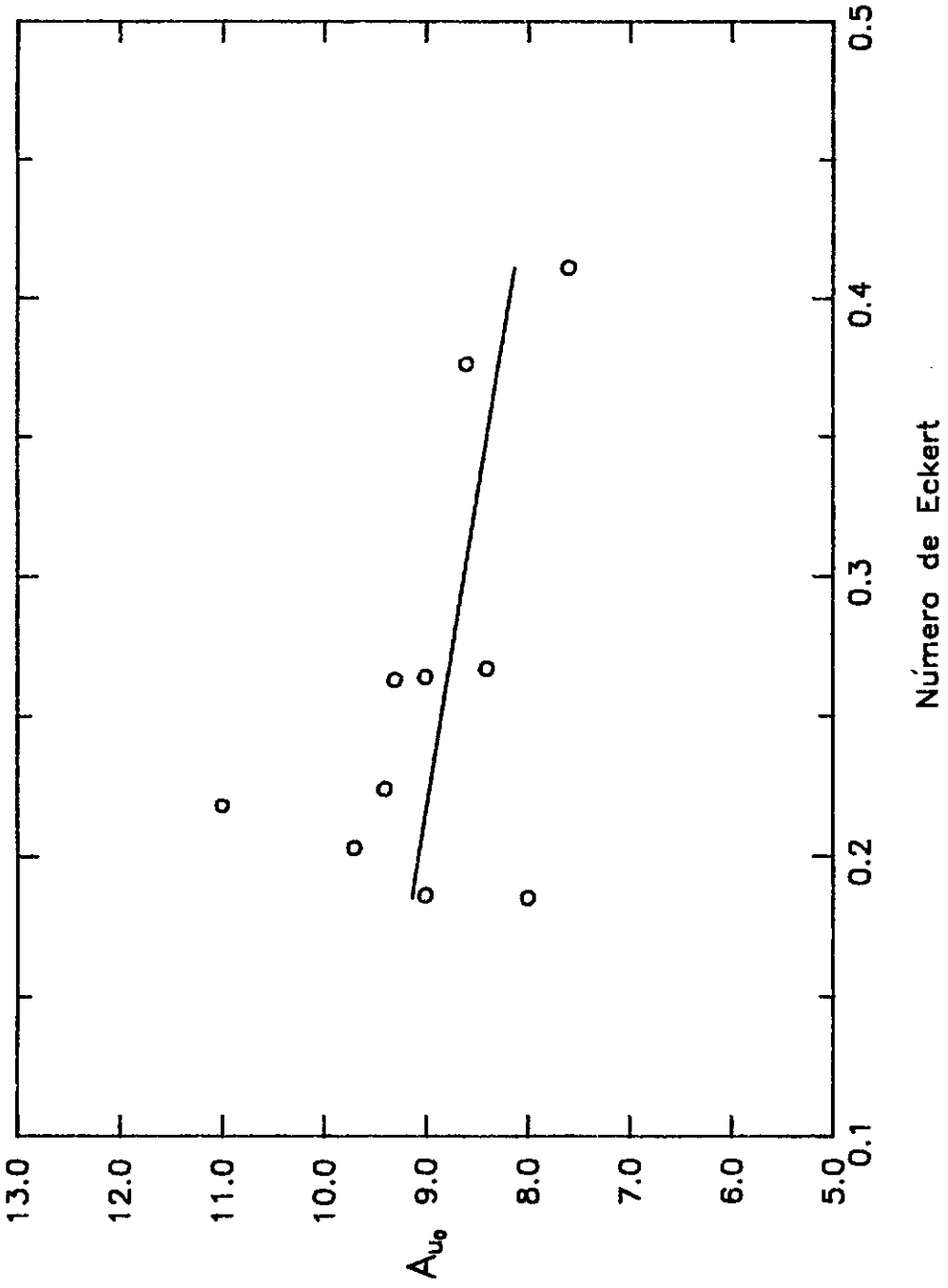


Fig. 9 - Variação de A_{u_6} com o número de Eckert, dados sem injeção de Danberg (4).

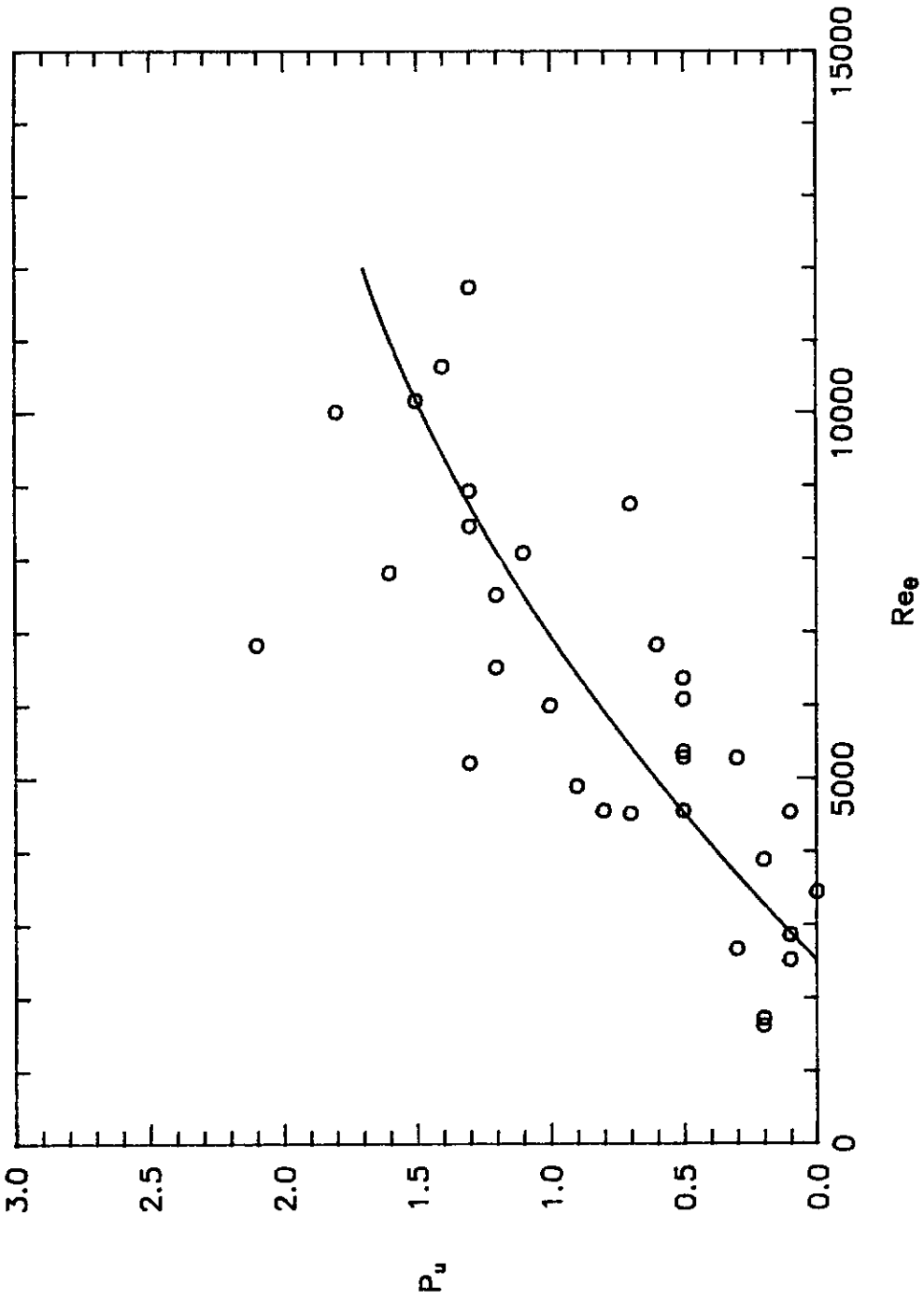


Fig. 10 - Variação de P_u com Re_e , dados com e sem injeção de Danberg (4).

outro caso, os valores experimentais aparecem juntamente com os polinômios que melhor se ajustaram a eles, que são:

$$K_u = -0.104 + 3.586Ec_\infty - 3.714Ec_\infty^2, \quad \text{para } 0.16 \leq Ec_\infty \leq 0.50, \quad (4.22)$$

$$A_{u_0} = 9.960 - 4.473Ec_\infty, \quad \text{para } 0.24 \leq Ec_\infty \leq 0.45. \quad (4.23)$$

O ajuste destes polinômios aos pontos experimentais não seguiu nenhum tipo de critério estatístico. Os polinômios apenas representam a tendência dos pontos naquela região, expressos pela curva de menor grau possível. Para os valores de P_u , não foi proposto um polinômio que melhor descrevesse a variação dos dados experimentais. Valores dessa constante para taxas de injeção e números de Eckert intermediários podem ser obtidos diretamente da curva desenhada no gráfico da figura 10, traçada no formato observado comumente na literatura ([7], por exemplo). Neste caso também, a expressão (4.15), descreve aceitavelmente bem a dependência de A_u simultaneamente com M_∞ , v_w e T_w/T_∞ .

As constantes da parte térmica do problema, foram determinadas de maneira essencialmente idêntica ao que foi feito na parte dinâmica. Resolvendo a equação (3.38b) em $(1/K_e) \ln(yu_\tau/\nu_w)Pr_w + A_e$, obtemos:

$$\frac{1}{K_e} \ln y \frac{u_\tau}{\nu_w} Pr_w + A_e = \frac{u_\tau}{v_w} \left(\sqrt{\frac{2v_w}{u_\tau} \left(\frac{E - E_w}{e_r} + \frac{v_w}{4u_\tau} \varphi_u^2 \right) + 1} - 1 \right), \quad \text{se } v_w \neq 0, \quad (4.24a)$$

$$\frac{1}{K_e} \ln y \frac{u_\tau}{\nu_w} Pr_w + A_e = \frac{E - E_w}{e_r}, \quad \text{se } v_w = 0. \quad (4.24b)$$

Chamando o lado direito destas expressões φ_e , e representando os dados experimentais em gráficos $\varphi_e \times \ln(y^* Pr_w)$, os coeficientes linear e angular das

retas obtidas são as constantes A_e e K_e procuradas, respectivamente.† O comportamento dos dados experimentais é mostrado nas figuras 11, para o caso sem injeção de massa, e 12, para casos com injeção. Como no caso sem injeção de calor, a constante P_e pode ser obtida da forma gráfica mostrada na figura 7. Isso fica claro resolvendo-se a equação (3.45) para $(1/K_e) \ln y(u_r/\nu_w) Pr_w + A_e + (P_e/2)w(y/\delta_t)$, análogamente ao caso anterior.

A análise foi, então, feita sobre o mesmo conjunto de experimentos de Danberg utilizado antes. O resultado, mostrando as dependências sugeridas pelas expressões (4.19)–(4.21), aparece nas figuras 13, 14 e 15, para K_e , A_{e_0} e P_e , respectivamente. De novo, valores destas constantes para números de Eckert e de Reynolds intermediários, podem ser obtidos diretamente dos gráficos, ou, no caso de K_e e A_{e_0} , dos polinômios ajustados, cujas expressões aparecem abaixo:

$$K_e = -0.619 + 6.370Ec_\infty - 5.462Ec_\infty^2, \quad \text{para } 0.16 \leq Ec_\infty \leq 0.50, \quad (4.25)$$

$$A_{e_0} = 15.668 - 36.094Ec_\infty, \quad \text{para } 0.18 \leq Ec_\infty \leq 0.45 \quad (4.26)$$

Cabe ressaltar neste ponto, que as figuras 11 e 12 validam uma hipótese feita no segundo capítulo. Elas mostram que os dados experimentais expressos na variável energia total, de fato se comportam como previsto na equação (3.45), válida nas regiões completamente turbulenta e exterior da camada limite. É importante notar ainda que, ao longo do desenvolvimento deste trabalho, verificou-se, à guisa de confirmação, que semelhante lei escrita para a variável temperatura não descrevia apropriadamente os resultados experimentais.

† Rigorosamente falando, φ_e , como definido pela equação (4.24a), é uma aproximação. Na realidade, se tentarmos escrever a equação (3.38b) na forma que fizemos, o termo φ_u^2 aparecerá multiplicado pelo fator K_u/K_e , tornando esta equação transcendental, e impossibilitando assim o traçado dos gráficos. Como $K_u/K_e \approx 1$, fizemos simplesmente $K_u/K_e = 1$ na expressão (4.24a).

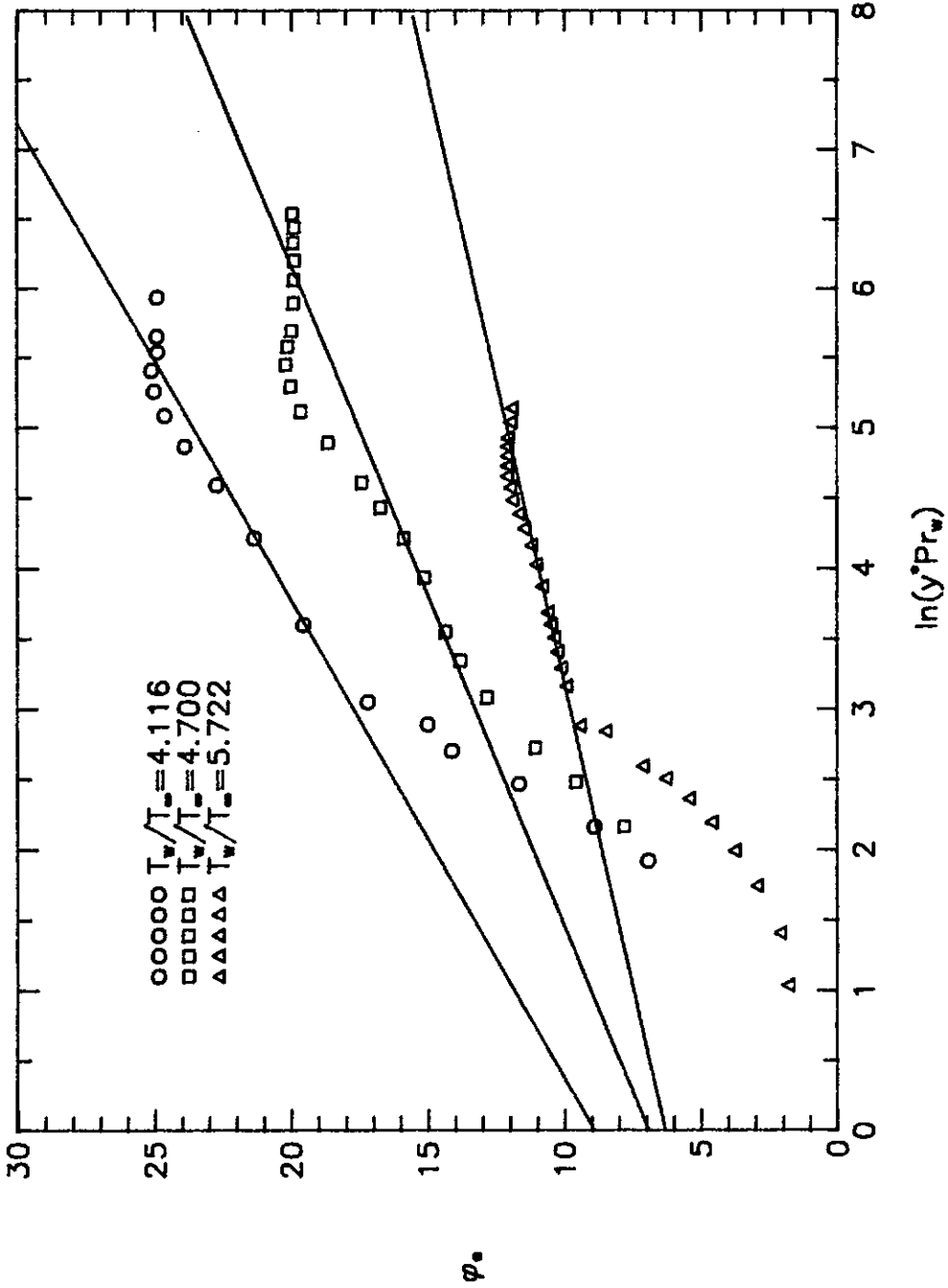


Fig. 11 - Processo de obtenção das constantes K_s e A_s .
 Dados de Danberg (4), sem injeção de massa.

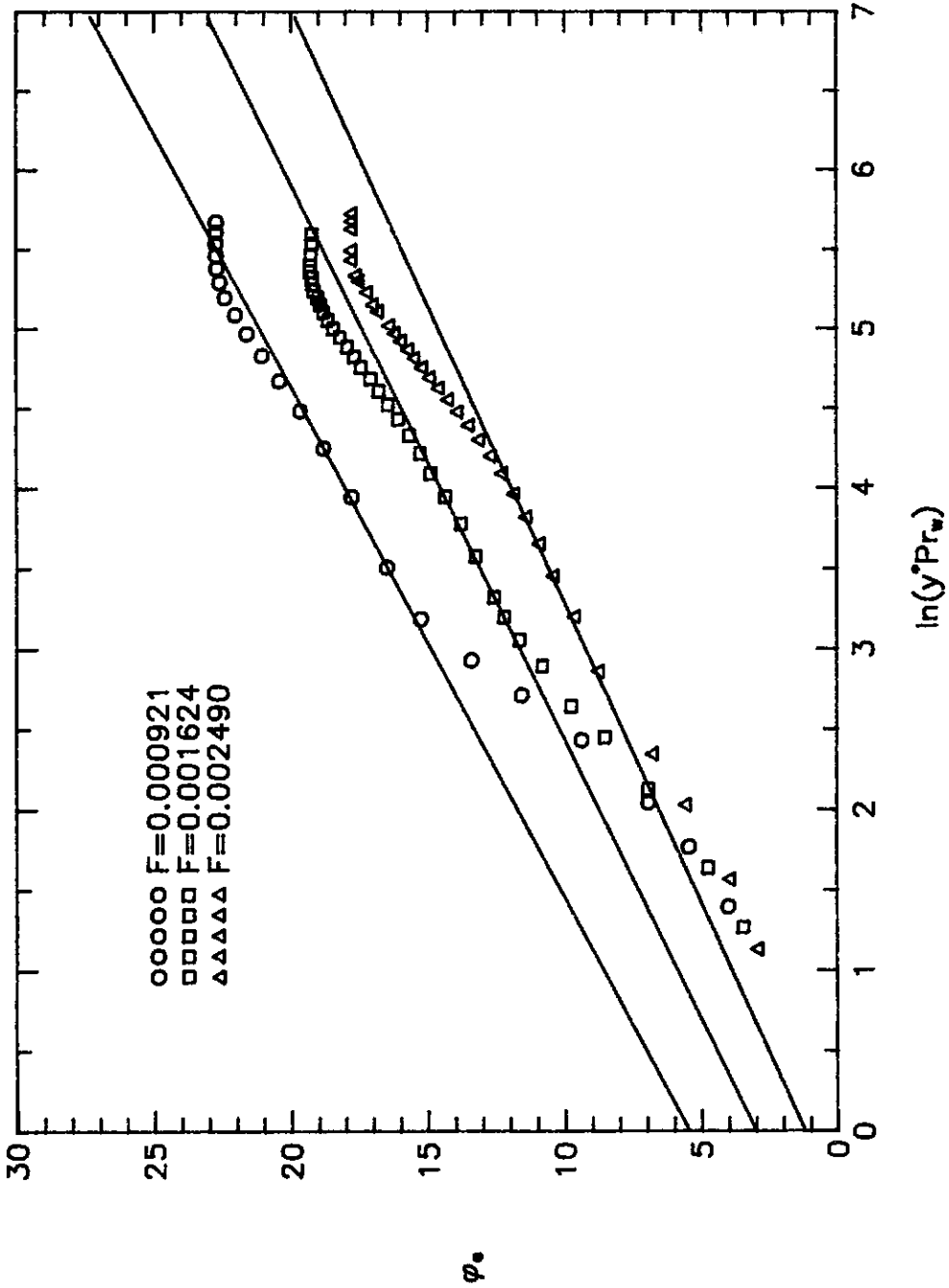


Fig. 12 -- Processo de obtenção das constantes K_0 e A_0 . Dados de Danberg (4), com injeção de massa, T_w/T_∞ em torno de 4.

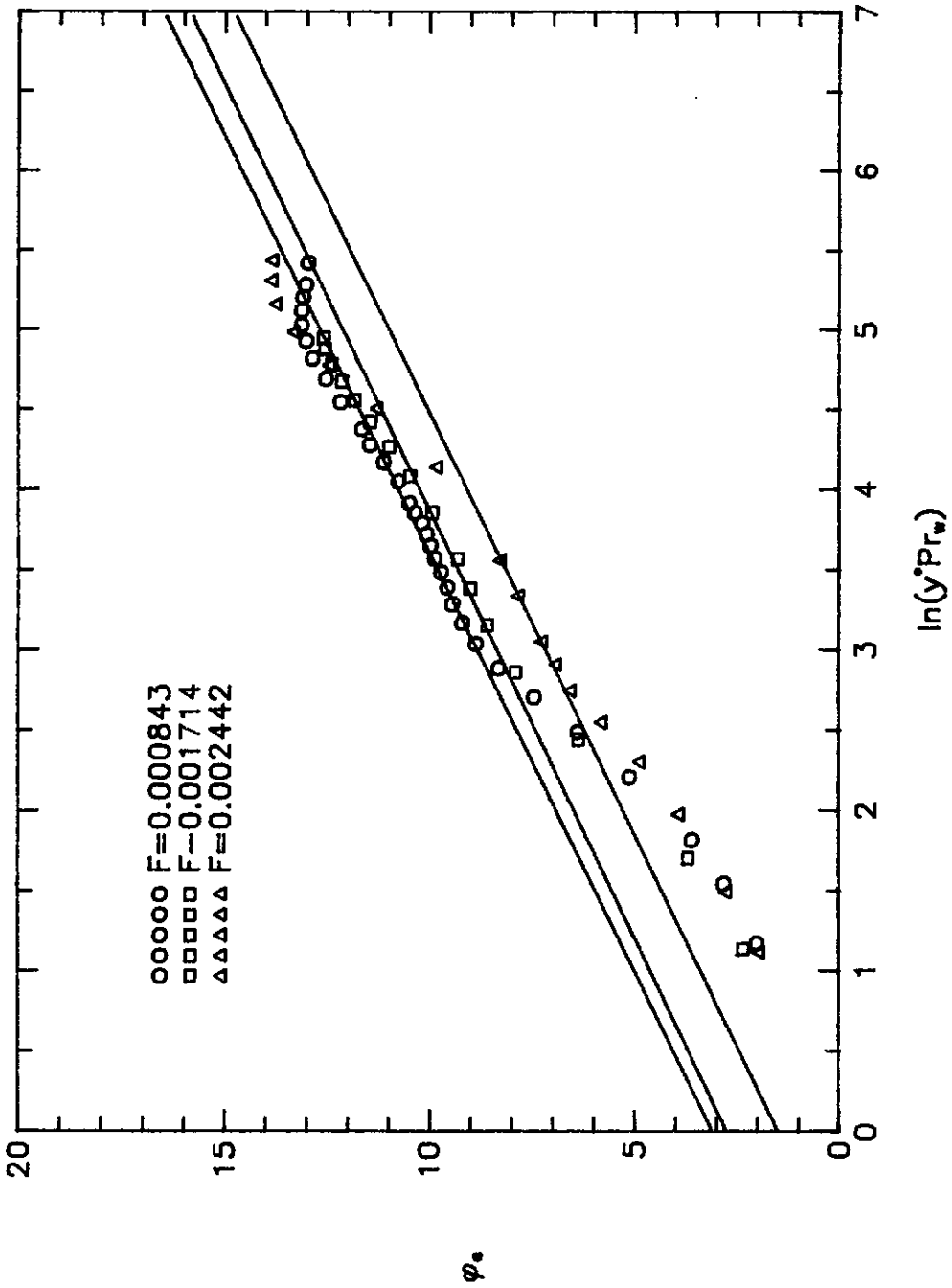


Fig. 12b - Processo de obtenção das constantes K_e e A_e . Dados de Danberg (4), com injeção de massa, T_w/T_∞ em torno de 5.

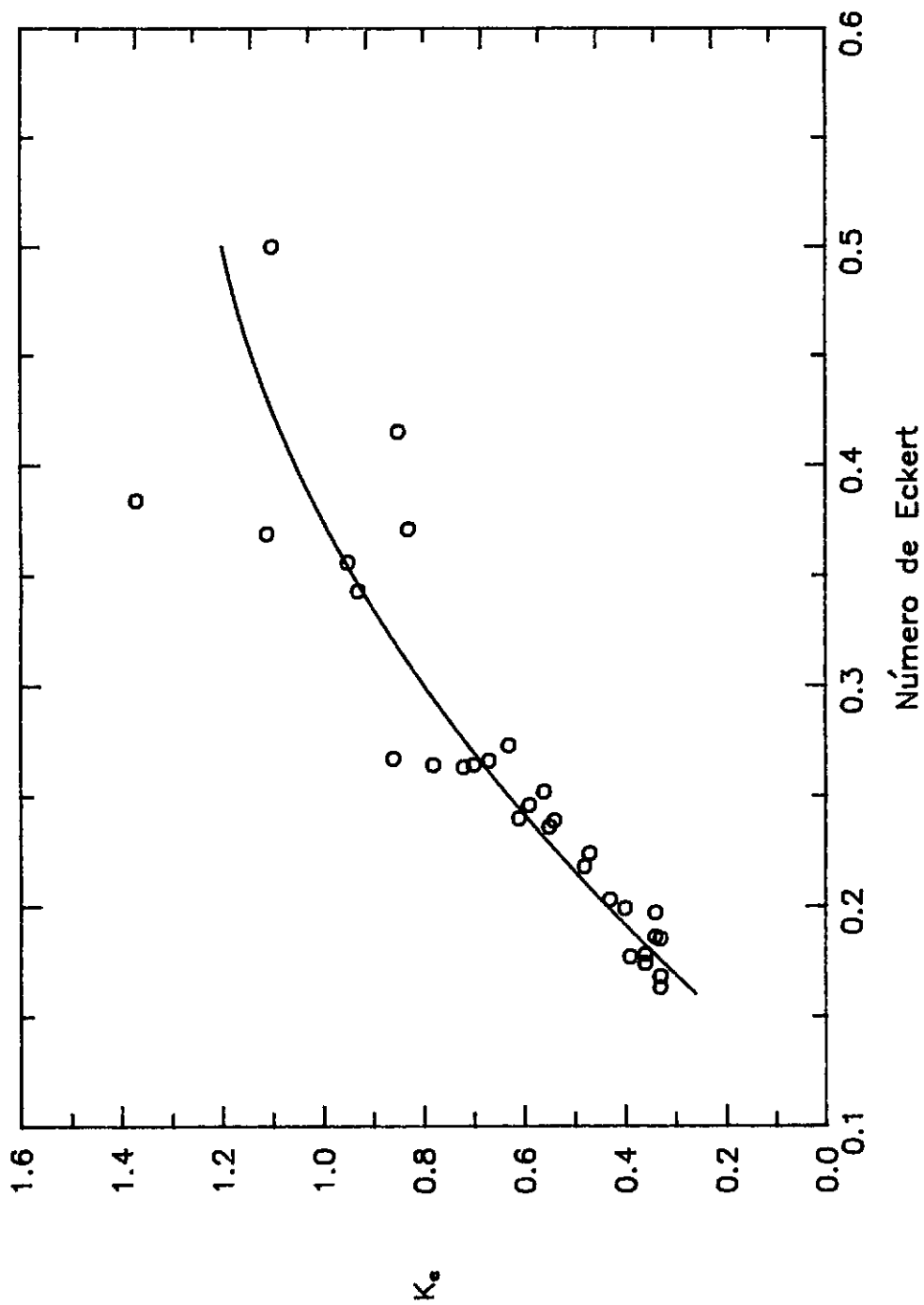


Fig. 13 - Variação de K_e com o número de Eckert. Dados com e sem injeção de DANBERG (4).

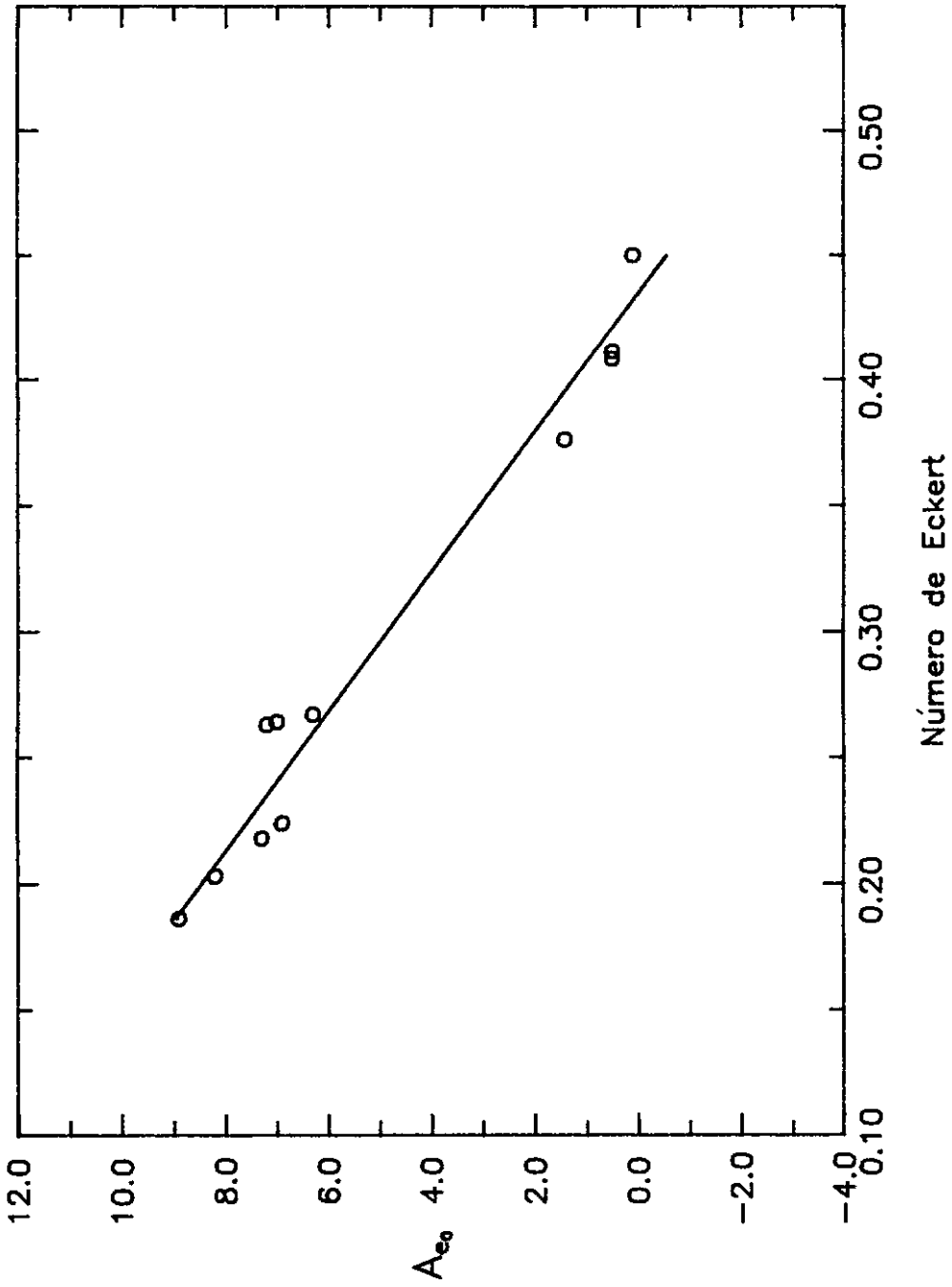


Fig. 14 - Variação de A_{e0} com o número de Eckert.
Dados sem injeção de Danberg (4).

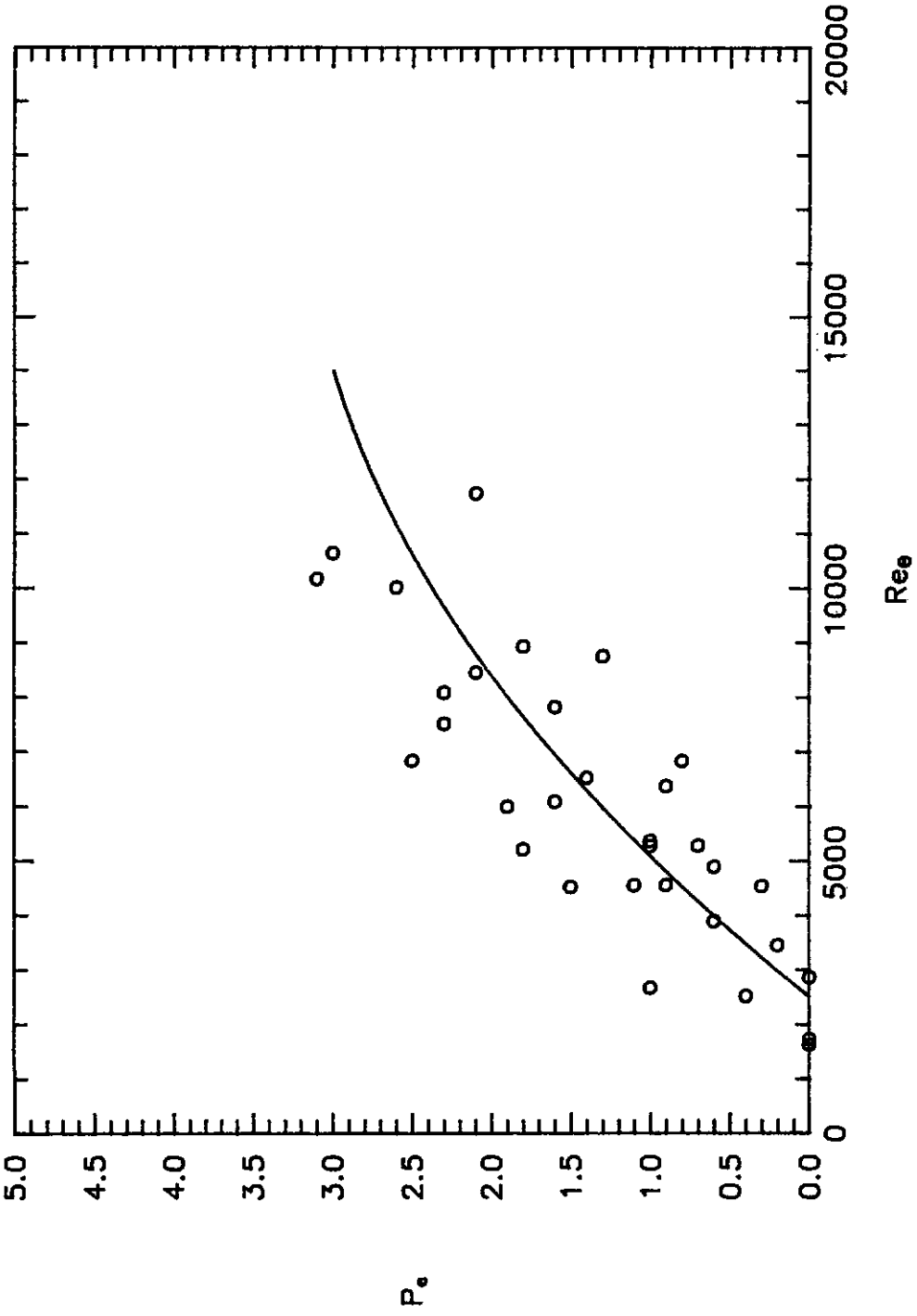


Fig. 15 - Variação de P_e com Re_e , dados com e sem injeção de Danberg (4).

Para descrever os valores de A_e , uma teoria análoga à de Simpson, que trata apenas do perfil de velocidade, foi utilizada. Em primeiro lugar, assumimos que haja uma região abaixo da região completamente turbulenta, aonde seja válida uma equação do tipo $(E - E_w)/e_\tau = C_e \cdot (yu_\tau/\nu_w)Pr_w$, onde C_e é uma constante a determinar. Em seguida, assumimos que existe um ponto aonde esta equação e a equação da região completamente turbulenta valem simultaneamente. Como no caso de A_u , isso determina o valor de A_e , dado, então, por:

$$A_e = \frac{2u_\tau}{v_w} \left(\sqrt{\frac{E_a^+ v_w}{u_\tau e_\tau} + 1} - 1 \right) + \frac{1}{K_e} \ln \frac{C_e}{E_a^+}, \quad (4.27)$$

onde E_a^+ é obtido da equação transcendental $E_a^+ = (1/K_e) \ln(E_a^+/C_e) + A_{u_0}$. Representando os dados experimentais em gráficos, nas variáveis $(E - E_w)/e_\tau$, e $y(u_\tau/\nu_w)Pr_w$, o valor da constante C_e pôde ser calculado. O polinômio que melhor ajuste mostrou foi o seguinte:

$$C_e = 2.831 + -12.323Ec_\infty + 13.792Ec_\infty^2 \quad (4.28)$$

As expressões (4.27) e (4.28) fornecem previsões boas da constante A_e , de modo que, como no caso de A_u , elas também foram preferidas à uma descrição puramente empírica do comportamento de A_e .

Capítulo 5

Análise dos Resultados

Este capítulo é dedicado a uma análise mais detalhada das expressões apresentadas nos dois capítulos anteriores, bem como a uma comparação final entre previsões teóricas e dados experimentais. Por uma questão, de facilidade na apresentação, dividimos o assunto em duas partes, a primeira relativa à parte dinâmica, e a segunda à parte térmica do problema.

5.1 Análise dos Resultados Dinâmicos

Para iniciar esta análise, é interessante que se reveja o método pelo qual as constantes K_u , A_u e P_u foram obtidas, na seção anterior. Tal revisão, deixa claro dois pontos importantes:

- a) Os valores obtidos para estas constantes, dependem fortemente dos valores experimentais de C_f ,
- b) Os valores das constantes dependem uns dos outros.

Com isto em mente, passemos então a uma análise do resultado da equação (3.44). As figuras 16, 17, 18, 19 e 20 mostram a comparação entre as previsões teóricas e os dados experimentais. Nas figuras 16 e 17 são mostrados vários perfis sem injeção de Mabey, para números de Mach variando de 2.5 a 4.5.

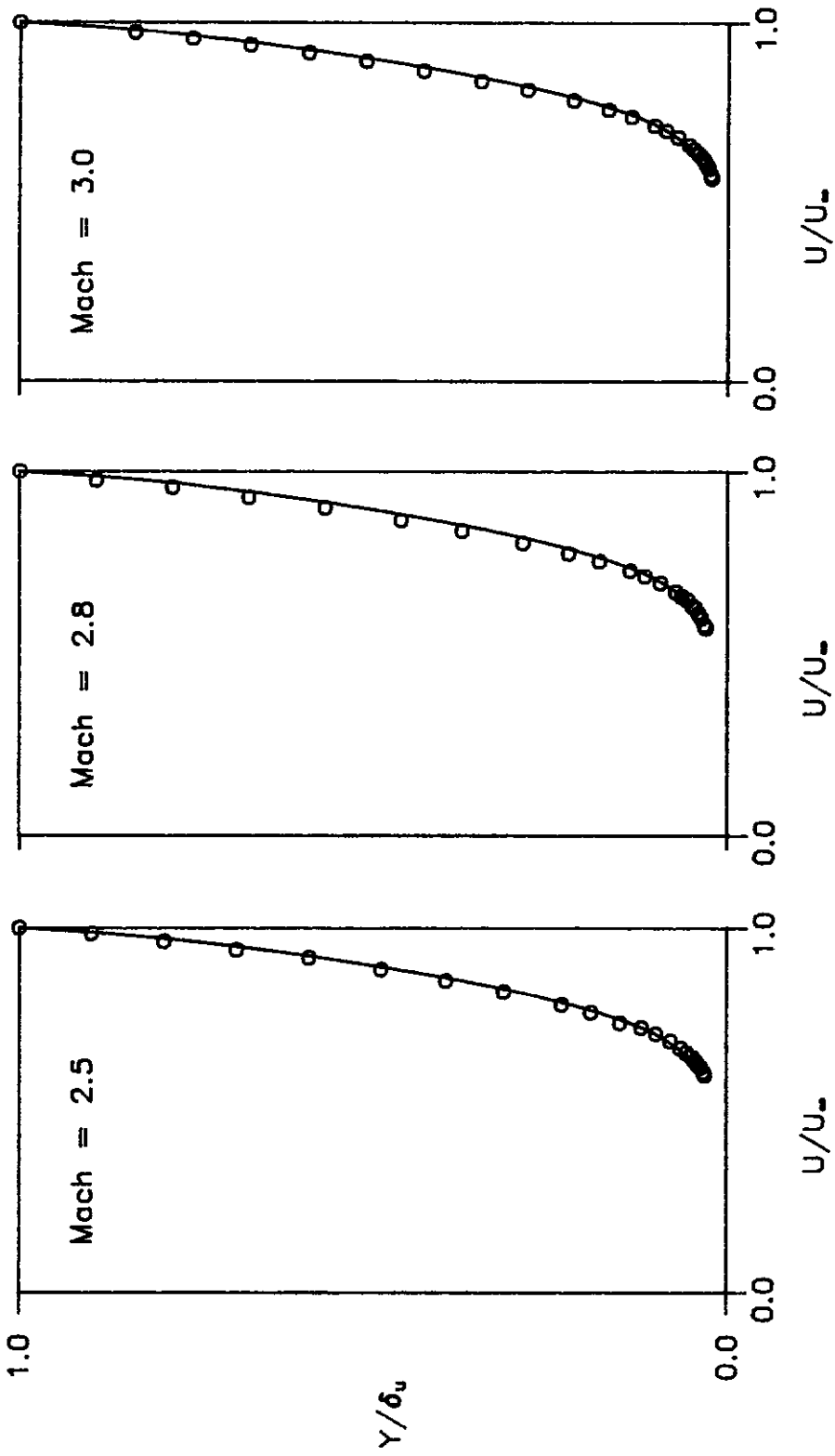


Fig. 16 - Perfis de velocidade, dados sem injeção de Mabey (2).
Círculos - dados exp. Linha cheia - eqn. (3.44).

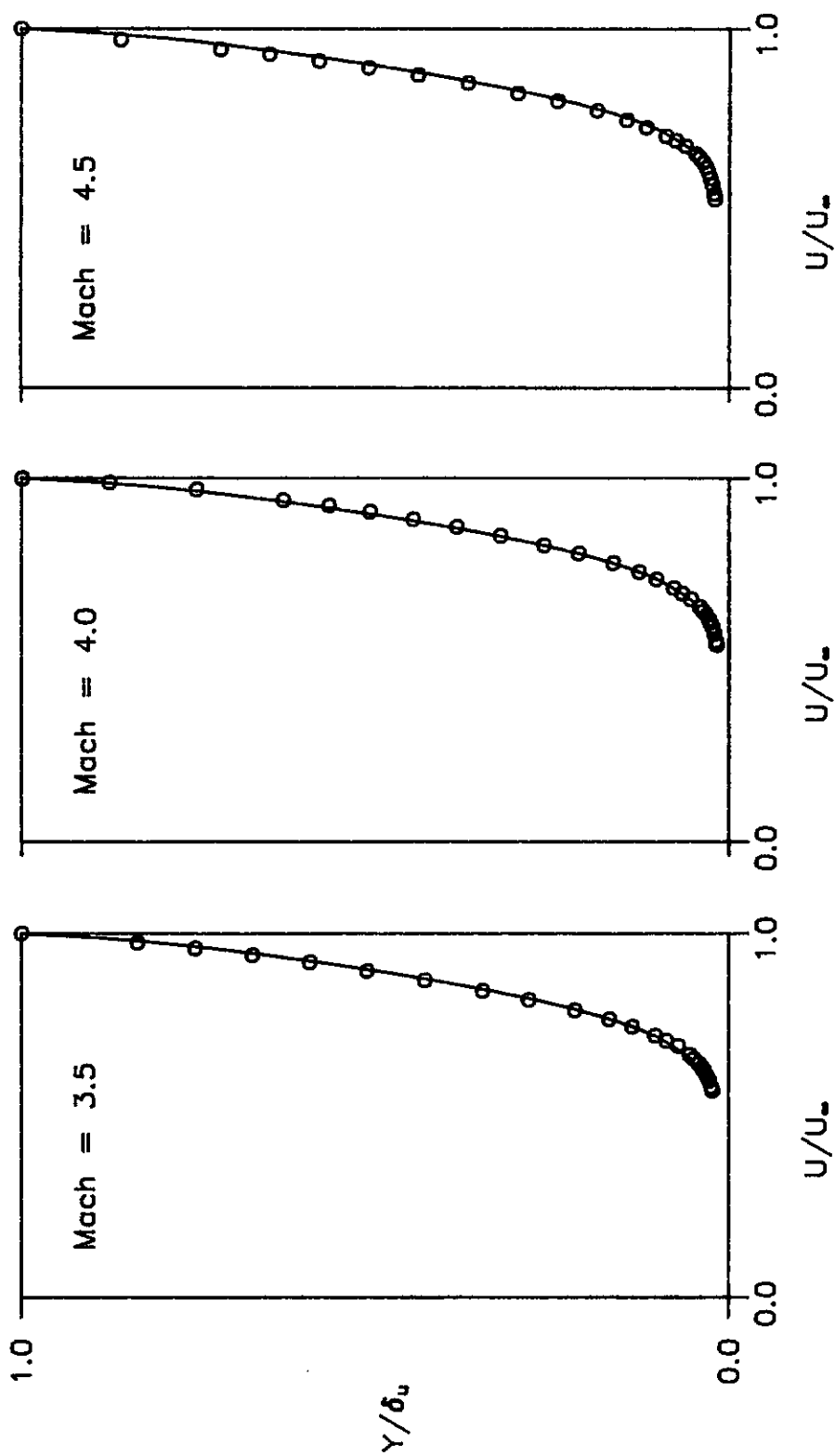


Fig. 17 - Perfis de velocidade, dados sem injeção de Mabey (2).
Círculos - dados exp. Linha cheia - eqn. (3.44).

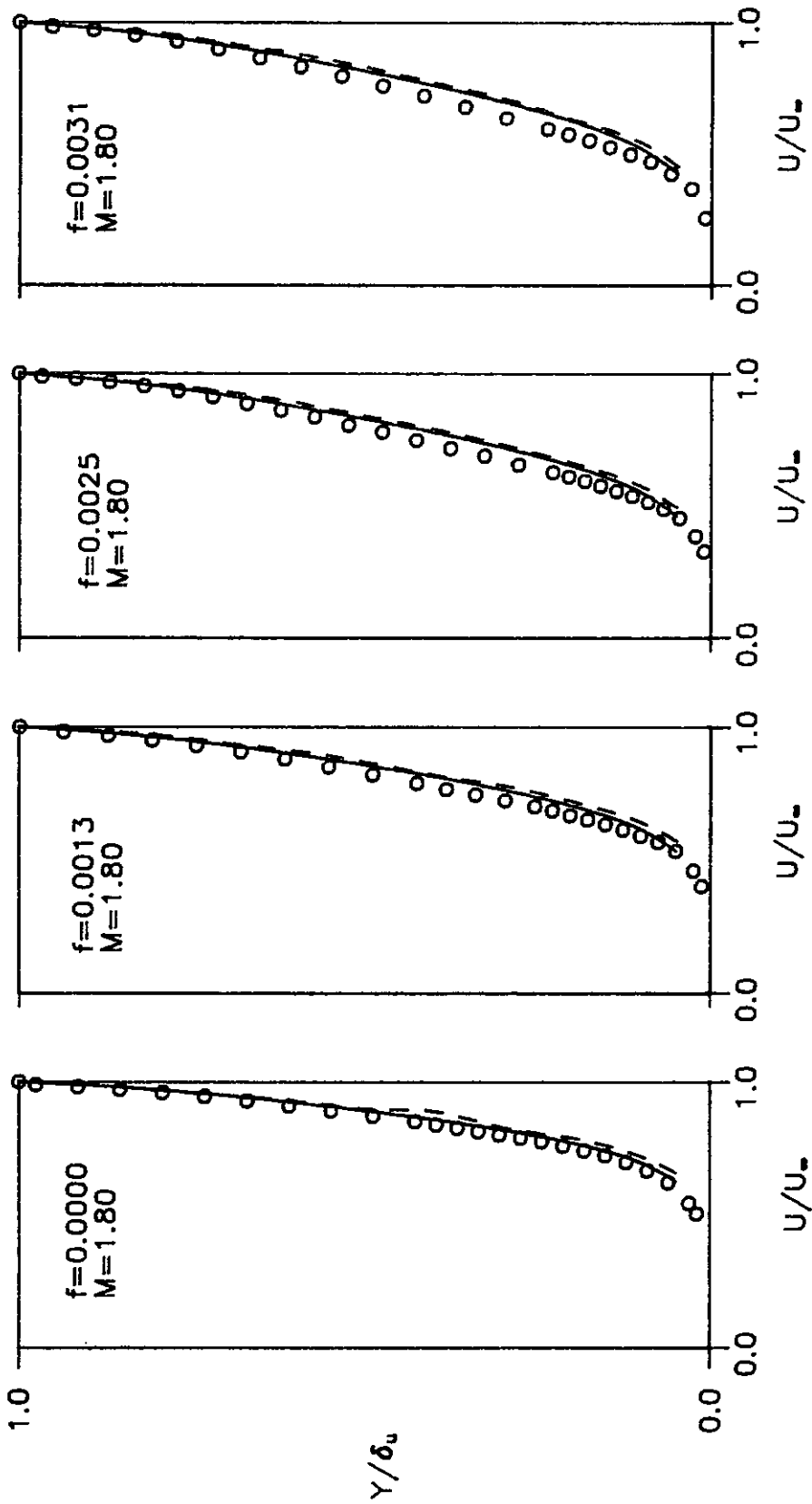


Fig. 18 - Perfis de velocidade com injeção, dados de Squire (3). Mach = 1.8
 Círculos - dados exp. Linha cheia - eqn. (3.44).
 Linha tracejada - ref. (13).

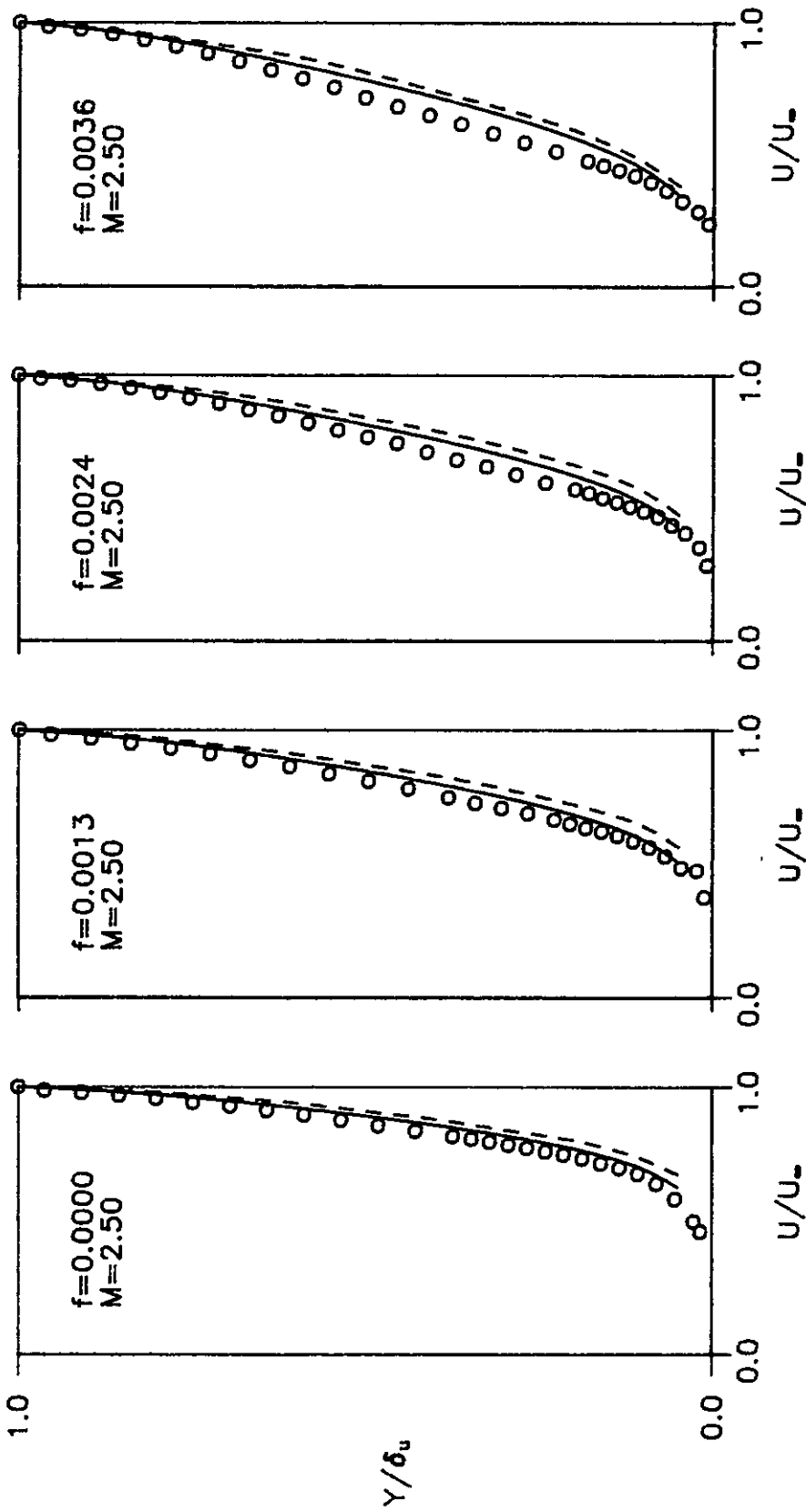


Fig. 19 - Perfis de velocidade com injeção, dados de Squire (3), Mach = 2.5
 Círculos - dados exp. Linha cheia - eqn. (3.44).
 Linha tracejada - ref. (13).

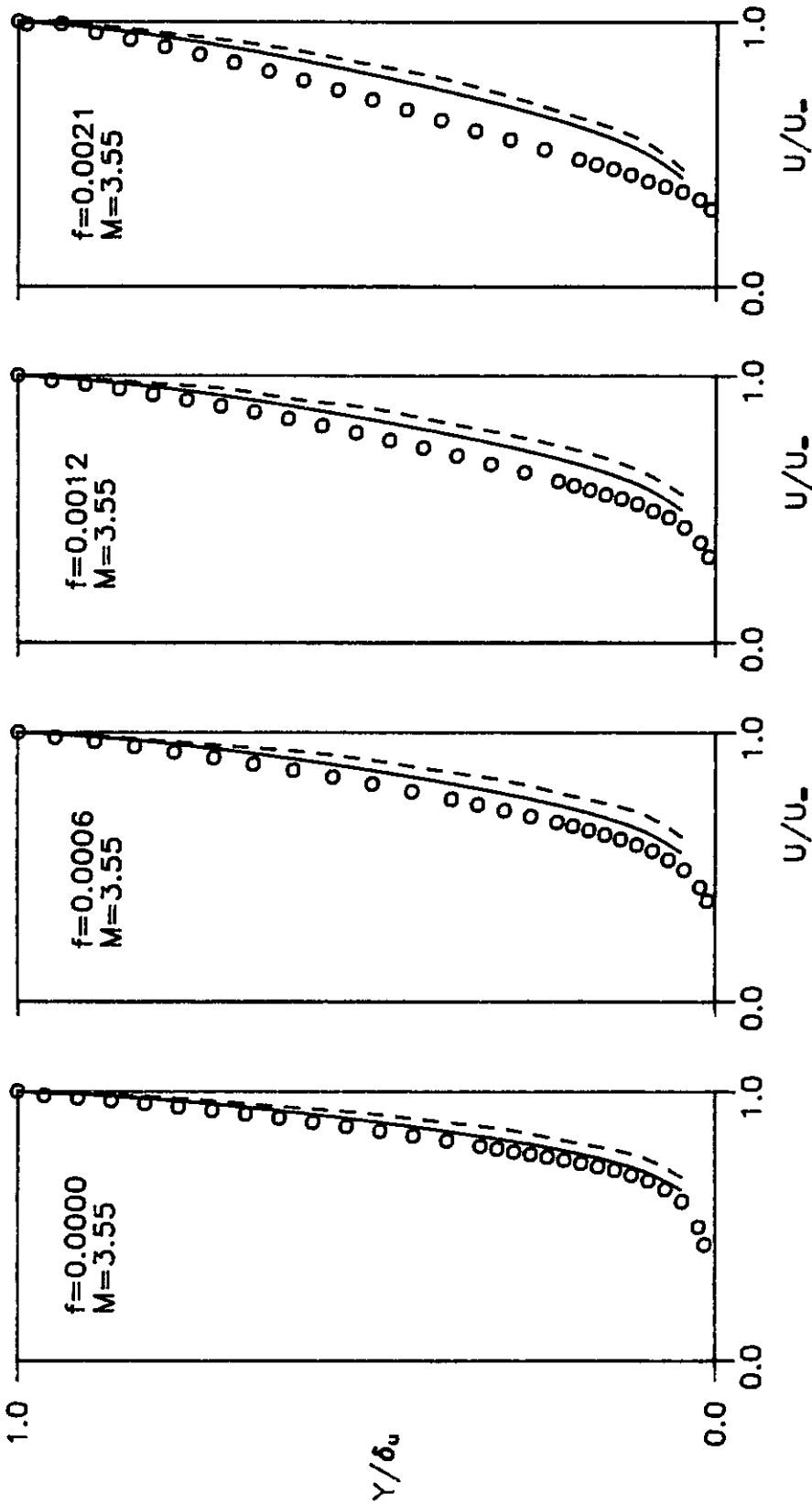


Fig. 20 - Perfis de velocidade com injeção, dados de Squire (3), Mach 3.55
 Círculos - dados exp. Linha cheia - eqn. (3.44).
 Linha tracejada - ref. (13).

Nas figuras 18, 19 e 20 aparecem, os perfis com injeção de Squire para números de Mach de 1.8, 2.5 e 3.55, respectivamente. A concordância se mostra excelente para os casos sem injeção, boa para valores pequenos e médios da taxa de injeção, e apenas razoável para as taxas de injeção mais altas. Em todos os casos, porém, as figuras deixam evidente que a concordância se mostra melhor do que a apresentada pela teoria anterior de SILVA FREIRE [12].

Um detalhe digno de nota quanto à equação (3.44) é que a compressibilidade não é levada em conta de forma explícita nesta, mas apenas implícitamente através das constantes K_u , A_u e P_u . A validade deste procedimento fica atestada pela excelente concordância entre teoria e experimento, apresentada nas figuras, em todos os casos sem injeção. Os pequenos desvios observados em tais figuras não apresentam tendência definida, e podem ser atribuídos às discordâncias entre as expressões propostas para as constantes e seus valores experimentais.

A respeito da confiabilidade das expressões propostas para K_u , A_u e P_u , note-se que os dados utilizados neste trabalho para o caso sem injeção, são, conforme dito anteriormente, aqueles recomendados por FERNHOLZ e FINLEY [35] como o caso teste até o momento, de modo que as expressões (4.12), (4.13) e (4.14) são bastante confiáveis.† No caso com injeção, contudo, o próprio autor das experiências propõe correções aos seus valores de C_f , que são, de acordo com a referência [12], tão menos confiáveis quanto maior for a taxa de injeção. Assim, lembrando que K_u e P_u não variam com a injeção, concluímos que a expressão (4.15), para a variação de A_u é bem menos confiável do que aquelas para K_u , A_u e P_u . Esse é um dos motivos pelos quais a concordância entre os perfis teóricos e experimentais piora sensivelmente à medida que a taxa de injeção aumenta. Infelizmente, os dados utilizados no caso com injeção, são os únicos disponíveis no momento, de modo que um melhor entendimento a respeito da capacidade da equação (3.44) em descrever o perfil de velocidades com injeção, fica adiada para quando dispusermos de dados mais confiáveis.

Pelo que foi dito acima, fica claro que as expressões que descrevem a

† A única ressalva a esse respeito, é que P_u exhibe valores menores do que os normalmente apresentados na literatura. Isso sugere que os experimentos teriam sido realizados com um número de Reynolds tal que a região exterior não se encontrava totalmente desenvolvida.

dependência das três constantes com o número de Mach e com a taxa de injeção devem ser consideradas com cuidado. O comportamento "suave" dos valores experimentais obtidos, sugere que se pode interpolar valores a partir das curvas com segurança. Não se aconselha, contudo, obter valores destas curvas, extrapolando os limites entre os quais elas foram estabelecidas, através de nenhum método. Principalmente, não é permitido extrapolá-las simplesmente entrando nas expressões (4.12), (4.13) e (4.14) com valores fora da faixa para qual elas foram ajustadas, porque nenhuma garantia existe de que os polinômios utilizados apresentem comportamento consistente fora desses limites.

Um outro fato digno de nota a respeito das constantes, é que, diferentemente de K_u , A_{u_0} e P_u , a expressão para A_u não foi obtida apenas através de um ajuste de curvas. Como dissemos no capítulo anterior, depois que o valor desta constante foi obtida para o caso sem injeção, a teoria de Simpson foi utilizada para propor uma expressão que levasse em conta a injeção. O motivo para este procedimento é simples: variando A_u ao mesmo tempo com M_∞ e com v_w , levantar experimentalmente a dependência de A_u com essas duas variáveis seria uma tarefa bastante trabalhosa e sujeita a erros. Em vez disso, simplesmente assumimos a teoria de Simpson como o nosso ajuste experimental, ignorando a teoria proposta pelo seu autor. Isso não constitui, de fato, nenhum contra-senso uma vez que o próprio ajuste de curvas não fornece, em si, também, nenhum esclarecimento a respeito dos fenômenos envolvidos.

Finalmente, comparação entre teoria e experimento para os valores do coeficiente de atrito, pode ser vista na tabela 1 e na figura 21. A tabela 1 reúne alguns dos casos sem injeção de Mabey para números de Mach em toda a faixa analisada. A figura 21 apresenta todos os casos com injeção disponíveis, devidos à Squire. Como se pode ver, a concordância em ambos os casos é boa.

Na tabela 1 existem duas colunas de valores calculados de C_f . Para explicar este fato, é preciso primeiramente esclarecer um detalhe sobre a maneira com que foram retirados dos gráficos os valores das constantes do capítulo anterior. Basicamente, o processo é o que aparece ilustrado nas figuras 3, 4 e 5, para perfis de vários números de Mach. Na prática, tal processo foi levado a cabo sobrepondo-se primeiramente vários perfis experimentais de mesmo número de Mach, de modo que possíveis variações na inclinação das retas ajustadas pudessem ser compen-

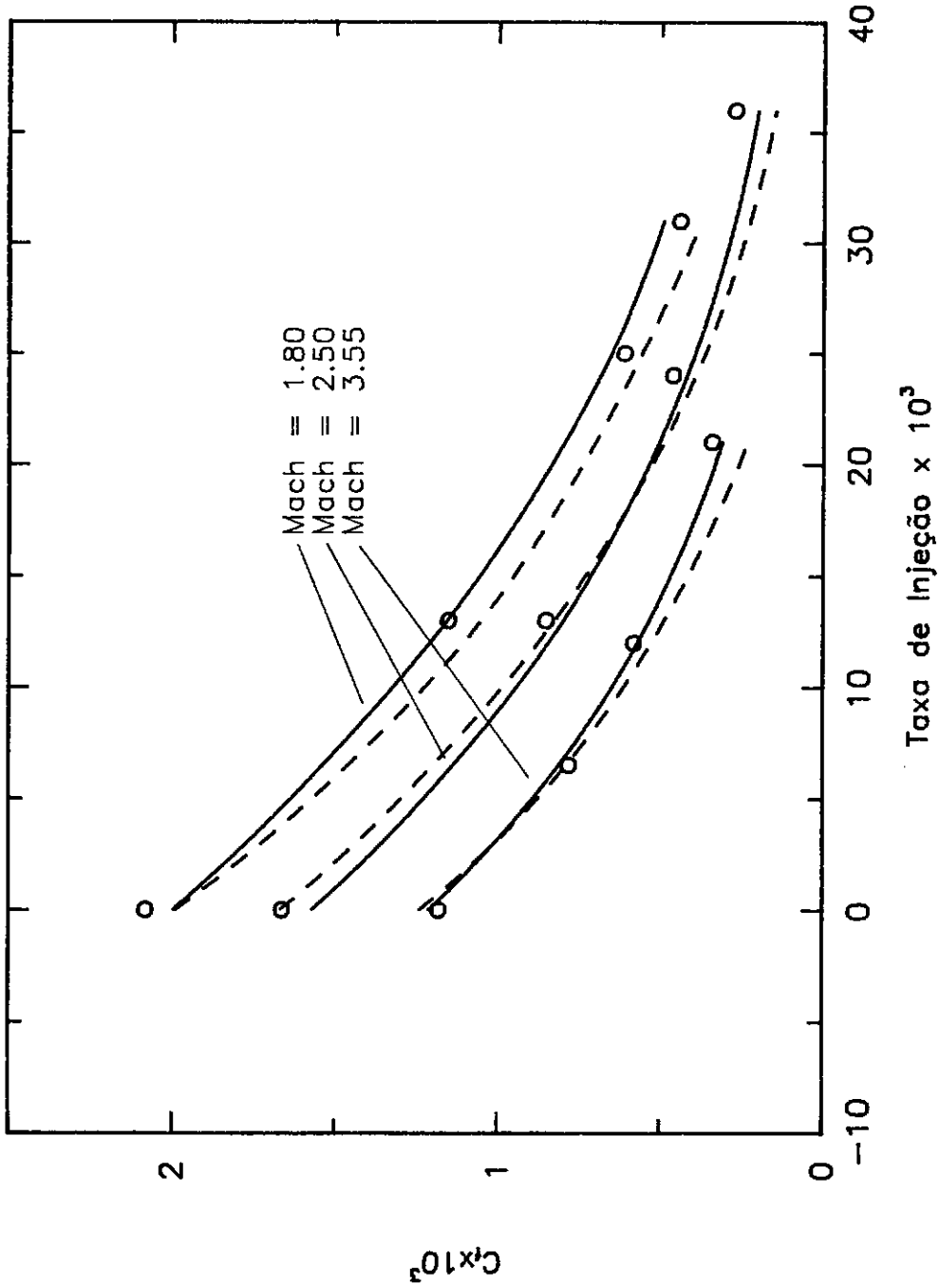


Fig. 21 - Coeficiente de arrasto, dados de Squire (3), com e sem injeção. Círculos - dados experimentais. Linha cheia - eqn (3.47). Linha tracejada - ref. (13).

sadas. Assim, os valores experimentais das constantes representados nas figuras 6 e 7 são, na realidade, valores experimentais médios dessas constantes.

Das duas colunas da tabela 1, a primeira, Cf_{calc-e} , representa os valores de Cf calculados com os valores experimentais médios das constantes K_u , A_u e P_u , para cada número de Mach, e a segunda, Cf_{calc-p} , representa os valores de Cf calculados com as expressões teóricas propostas para estas constantes. A idéia da primeira coluna, é que se possa através de seus valores avaliar o espalhamento dos dados experimentais para cada número de Mach.

Observando a tabela 1, se vê que os valores de Cf_{calc-p} , e Cf_{calc-e} , estão sempre próximos, mostrando assim que a teoria utilizada descreve bem o fenômeno, e que, desconsiderado o espalhamento experimental observado nos perfis para um mesmo número de Mach, as expressões para as constantes descrevem apropriadamente sua dependência.

Tabela 1

$Re_{\delta_2 w}$	$Mach$	$Cf_{exp} \cdot 10^3$	$Cf_{calc-e} \cdot 10^3$	$Cf_{calc-p} \cdot 10^3$
$7.8 \cdot 10^3$	2.5	1.62	1.57	1.57
$3.1 \cdot 10^3$	2.5	1.85	1.84	1.84
$6.4 \cdot 10^3$	2.8	1.48	1.51	1.51
$3.2 \cdot 10^3$	2.8	1.66	1.73	1.74
$7.5 \cdot 10^3$	3.0	1.37	1.38	1.38
$3.0 \cdot 10^3$	3.0	1.57	1.59	1.59
$6.5 \cdot 10^3$	3.5	1.19	1.21	1.21
$2.8 \cdot 10^3$	3.5	1.39	1.42	1.43
$6.0 \cdot 10^3$	4.0	1.04	1.09	1.12
$2.1 \cdot 10^3$	4.0	1.30	1.28	1.31
$4.3 \cdot 10^3$	4.5	0.95	1.03	1.05
$1.5 \cdot 10^3$	4.5	1.30	1.19	1.20

5.2 Análise dos Resultados Térmicos

Como no caso dinâmico, aqui as constantes dependem fortemente dos valores experimentais de Cf , umas das outras, e, além disso, dos valores medidos do número de Stanton. Comparação entre teoria e experimento pode ser vista nas figuras 22 e 23. Na 22 são mostrados apenas alguns casos sem injeção de Danberg. Na 23, aparecem alguns perfis com injeção para as várias taxas T_w/T_∞ investigadas. A concordância, como se pode ver, é apenas razoável.

Investigando o comportamento da equação (3.45), observa-se, como no caso anterior, que não há dependência explícita desta com o número de Mach. Tal dependência, aparece de maneira embutida nas constantes K_u , A_u e P_u , e apareceria em K_e , A_e e P_e , caso o experimento tivesse sido realizado para mais de um número de Mach. Infelizmente, os dados usados são os únicos disponíveis até o momento, de modo que tal dependência não pôde ser constatada.

A respeito da confiabilidade dos dados experimentais utilizados nesta parte, FERNHOLZ e FINLEY [35], fornecem importantes detalhes à respeito da maneira com que foram realizados os experimentos. O comentário final dos editores acentua os seguintes aspectos, entre outros: o experimento, na verdade, fornece dados sobre uma camada limite transicional. Embora a parte externa da camada se apresente completamente turbulenta para os números de Reynolds mais altos, devido ao efeito da retirada de calor pela parede, e dos altos números de Mach, as regiões mais internas da camada não apresentam características de turbulência totalmente desenvolvida. Além disso, uma diferença de até 10% é observada entre medidas da pressão estática na parede e no escoamento exterior à camada limite, sem que nenhuma explicação satisfatória seja dada pelo autor para tal fato.

Mais importante, entretanto, que estes dados, é o comentário dos editores a respeito dos coeficientes de atrito e troca térmica. Nas experiências de Danberg, esses coeficientes foram obtidos a partir dos gradientes dos perfis extrapolados até a parede, e portanto, nas palavras dos próprios editores "devem ser tratados com reservas". De acordo com estes, "o valor de Cf , especialmente, deve ser considerado apenas uma aproximação".

Além disso, o número de Mach do escoamento exterior à camada limite apresenta variações de experimento para experimento. Como K_e , A_e e P_e variam

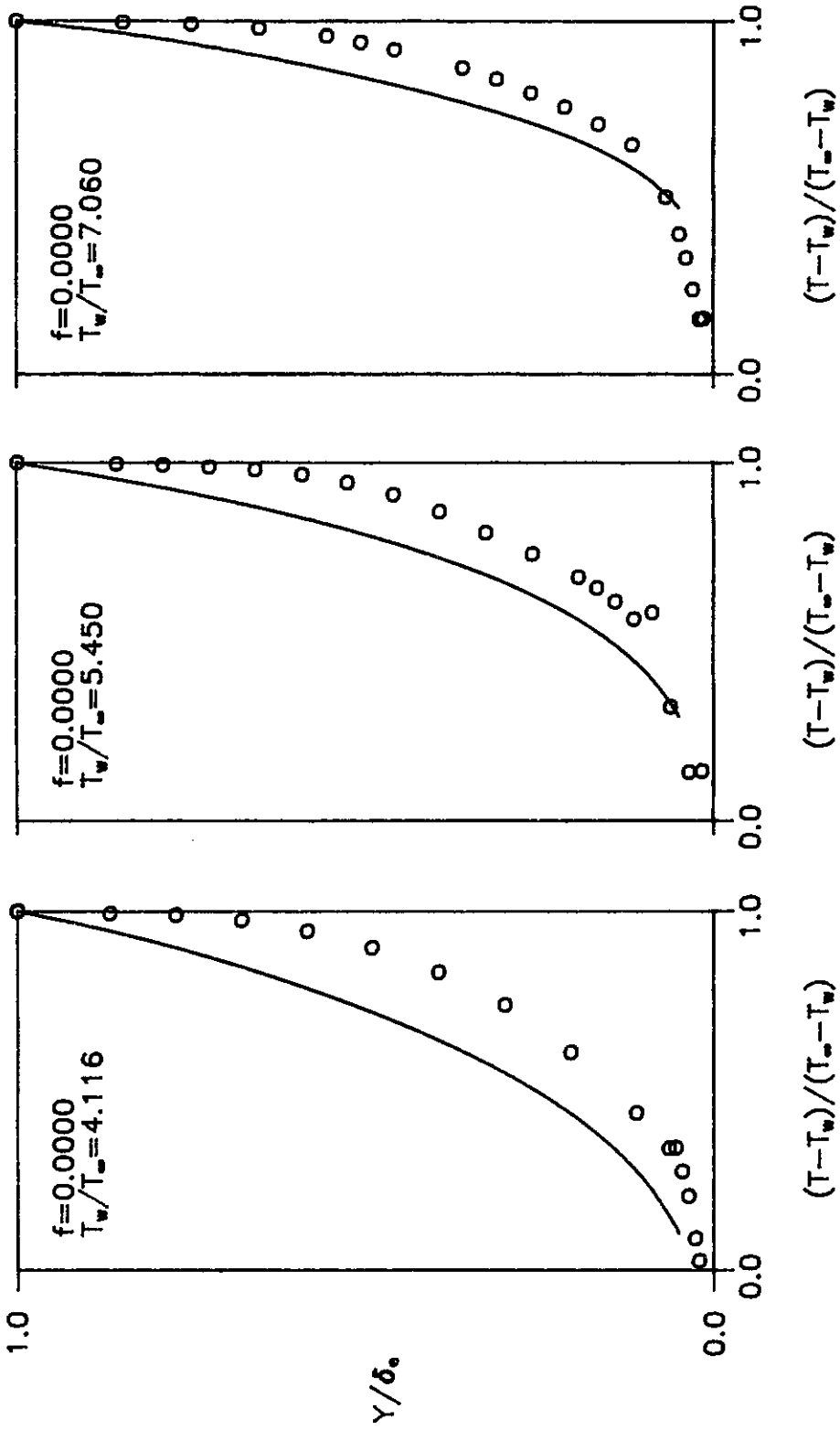


Fig. 22 - Perfis de temperatura, dados de Danberg (4) com injeção de calor, e sem injeção de massa. Círculos - dados exp. Linha cheia - eqn (3.45).

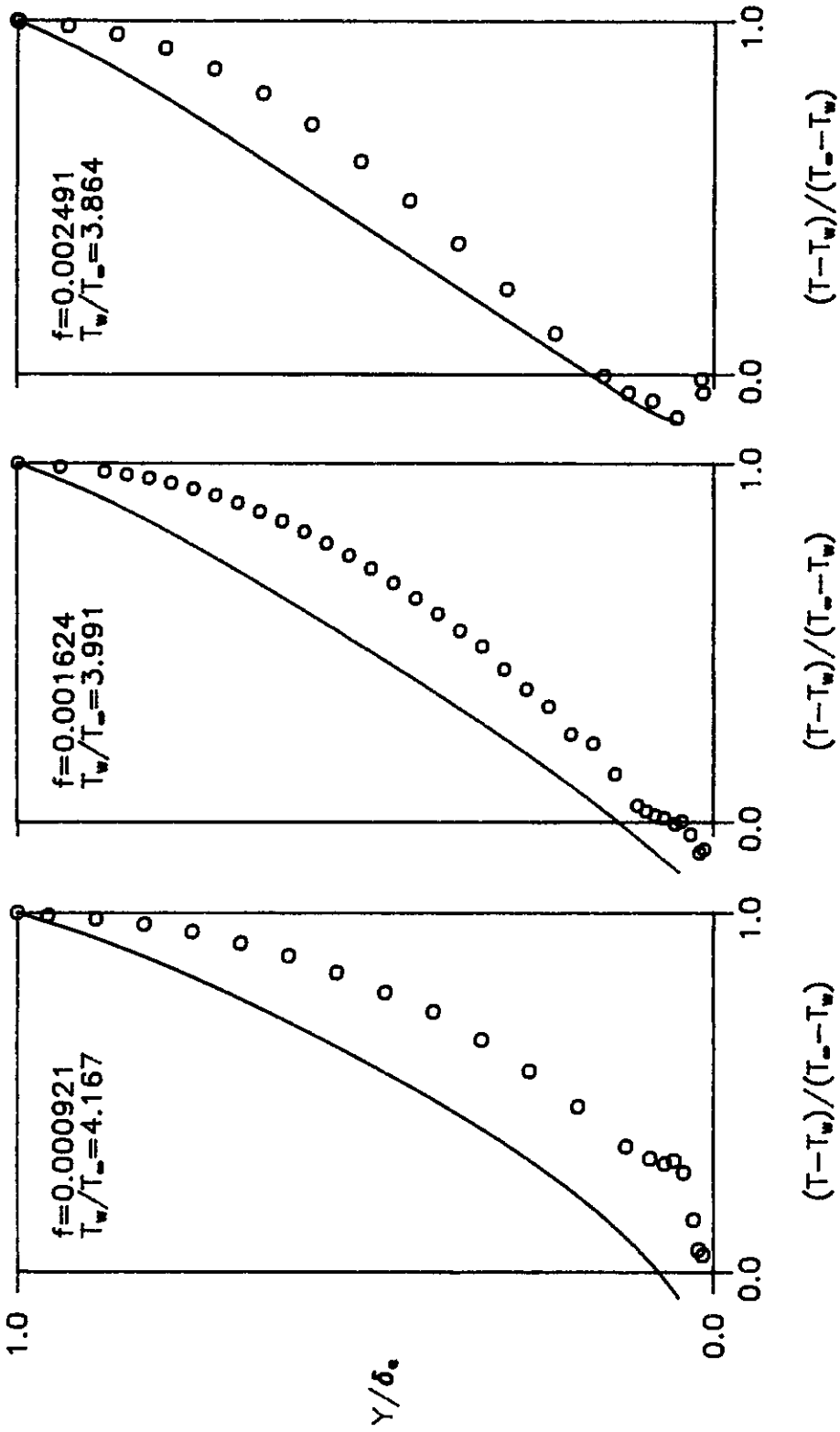


Fig. 23 - Perfis de temperatura, dados de Danberg (4), com injeção de calor e massa. Círculos - dados exp. Linha cheia - eqn. (3.45).

com o número de Mach, o espalhamento experimental dos pontos é magnificado, como se pode observar nas figuras 8, 9 e 10. Nestas, chama a atenção o grande espalhamento observado no caso das constantes P_u e P_e , motivo pelo qual nenhuma tentativa de propor expressões para suas variações foi feita.

Pelo que foi dito, fica claro que a confiabilidade das expressões propostas para as constantes é bem menor do que no caso dinâmico. De fato, alguns pontos experimentais estão tão distantes da curva média proposta, que seria de se estranhar se erros de até 50% nas previsões de St não aparecessem de vez em quando, como realmente ocorre (ver tabela 2, adiante). Com mais razão ainda do que no caso dinâmico, fica aqui recomendado que extremo cuidado seja empregado na utilização destas expressões.

Cabe ainda ressaltar que, pelos mesmos motivos apresentados para A_u , a utilização da expressão (4.27) para descrever a variação de A_e não constitui nenhum contra-censo. De fato, tanto esta expressão, quanto a (4.15) poderiam ter sido propostas diretamente de maneira empírica.

Para encerrar a análise da qual trata este trabalho, a tabela 2 mostra a comparação entre resultados teóricos e dados experimentais do coeficiente de troca térmica, para alguns dos casos de Danberg testados.

Tabela 2

F	Re_w	T_w/T_∞	$St_{exp} \cdot 10^4$	$St_{calc-e} \cdot 10^4$	$St_{calc-p} \cdot 10^4$
0.0000	$10.0 \cdot 10^6$	4.700	4.00	4.04	4.12
0.0000	$3.0 \cdot 10^6$	5.450	6.77	6.88	6.65
0.0000	$9.7 \cdot 10^6$	7.060	8.30	8.04	3.33
0.0004	$9.6 \cdot 10^6$	4.410	2.95	2.97	3.45
0.0009	$4.7 \cdot 10^6$	5.348	3.97	4.03	3.89
0.0007	$11.0 \cdot 10^6$	7.010	4.49	4.32	3.86
0.0016	$4.0 \cdot 10^6$	3.991	2.57	2.66	2.66
0.0017	$3.5 \cdot 10^6$	4.954	3.28	3.29	3.01
0.0016	$4.5 \cdot 10^6$	7.649	5.18	4.66	9.13
0.0025	$3.2 \cdot 10^6$	3.864	1.96	1.99	1.71
0.0024	$3.3 \cdot 10^6$	4.800	2.26	2.27	2.70

Aqui se vê que, como no caso dos perfis, a concordância é também

apenas razoável. Como na tabela anterior, duas colunas de valores calculados de St foram apresentados. A idéia é essencialmente a mesma do caso anterior. Comparação entre os dois valores mostra que existe, em certos casos, grande discordância entre estes.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho foi apresentada solução ao problema da camada limite turbulenta, compressível, sobre uma placa plana, com injeção de calor e massa. Foram deduzidas expressões para o cálculo dos coeficientes de atrito e de troca térmica, e apresentadas equações para os perfis de velocidade e temperatura. Para obter tais resultados, foi utilizado o método das expansões assintóticas combinadas, juntamente com a teoria das variáveis intermediárias. Este procedimento, que ao presente conhecimento do autor é inédito em problemas de camada limite, apresenta algumas características dignas de nota:

- A teoria das variáveis intermediárias foi utilizada para indicar quais as distensões de coordenadas apropriadas à posterior solução assintótica do problema.
- Conhecendo as regiões do escoamento governadas pelas equações principais, a ordem de grandeza das variáveis nestas foi estimada, e duas listas de valores característicos das variáveis foram propostos, de modo que a adimensionalização em cada região resultou em equações com todos os termos de ordem unitária.
- De posse dos conjuntos de equações principais adimensionais, e depois de feitas as distensões de coordenadas, o problema foi resolvido não através das equações principais, mas sim de dois conjuntos de equações intermediárias, por causa das dificuldades matemáticas envolvidas.
- Do que foi dito no item anterior, segue-se que a combinação das soluções, de acordo com a teoria das variáveis intermediárias, nas duas

regiões do escoamento não parece possível. Esse problema foi contornado propondo uma extensão à solução dada por Coles, que é válida para as duas regiões.

- As expressões para o atrito e a troca térmica foram obtidas avaliando-se as equações dos perfis de velocidade e temperatura, no limite das camadas limite. Em trabalhos anteriores, como [12], por exemplo, tal dedução é feita através da combinação das soluções.
- Pelo fato de que o conjunto de equações da região mais próxima à parede não vale até a parede, faltaram condições de contorno adequadas na solução deste. Isso implicou no aparecimento de constantes a determinar na solução.

Embora os aspectos mais importantes das soluções já tenham sido discutidos anteriormente, vale a pena resumir algumas de suas características mais interessantes:

- As equações (3.44), (3.45), (3.47) e (3.48) são o resultado central desse trabalho. De posse destas, e de mais duas para as espessuras das camadas limite dinâmica e térmica, tem-se a solução completa do problema. As seis equações são, contudo, acopladas três a três, de modo que algum método computacional iterativo tem que ser usado na solução.
- As constantes de integração encontradas em nossas equações variam com os números de Reynolds, Mach e Eckert, e com a taxa de injeção. A variação com algumas destas variáveis, já havia sido mostrada em trabalhos anteriores de PELLEGRINI e outros [37], e de MEDEIROS [38]. A variação com o número de Prandtl não pode ser detectada por ausência de dados experimentais disponíveis, mas é tida como muito provável pelo autor, uma vez que MEDEIROS e SILVA FREIRE [28] já observaram fato semelhante no caso incompressível para A_e .
- Para o presente conhecimento do autor, esta é a primeira vez que expressões para o coeficiente de troca térmica e para o perfil de temperatura são propostas para o caso que estamos estudando. É também a primeira vez que expressões para o atrito e o perfil de velocidade são propostas de forma matematicamente rigorosa.
- Ficou mostrada a existência de uma lei bilogarítmica para a energia to-

tal, E , válida na região completamente turbulenta, no caso com injeção, como atesta a figura 12. Ficou, além disso, mostrada a existência da lei linear $(E - E_w/e_\tau) = C_e \cdot (yu_\tau/\nu_w)Pr_w$, válida para uma região bem próxima da parede, tendo a dependência da constante C_e com o número de Eckert sido expressa pela relação (4.28).

- As soluções obtidas mostram, como um todo, boa concordância com os dados experimentais. A piora desta concordância à medida que a taxa de injeção aumenta pode, em princípio, ser atribuída a dois fatores principais: em primeiro lugar, à medida que v_w aumenta, o parâmetro pequeno ϵ_2/ϵ_1 também aumenta, violando a hipótese inicial de parâmetro pequeno. Em segundo lugar, a função de Coles, criada para o caso sem injeção, foi utilizada nos termos de injeção das soluções. Esse processo pode, por si só, envolver algum erro, que seria potencializado pela variável v_w , que aparece multiplicada por tais termos.
- No caso das expressões não inéditas apresentadas neste trabalho, a concordância é melhor que a do trabalho anterior de Silva Freire [11].

Resta agora, utilizar a análise de resultados que fizemos no capítulo anterior, mais as conclusões tiradas acima, para apresentar sugestões de trabalhos futuros neste campo. Sugerimos o seguinte:

- No capítulo anterior, dissemos que um dos motivos prováveis pelos quais nossas soluções discordavam dos dados experimentais em certos casos, estaria ligada aos valores pouco precisos dos coeficientes de atrito e de troca térmica medidos experimentalmente. Uma primeira sugestão seria que se fizesse um maior número de trabalhos experimentais, apresentando medidas desses coeficientes tão precisas quanto possível, de modo que se pudesse decidir até que ponto as discrepâncias entre teoria e experimento observadas se devem à teoria utilizada.
- Embora a concordância entre os perfis de velocidade teóricos e experimentais apresentada aqui represente um avanço em relação ao trabalho anterior de Silva Freire [11], esta ainda não se apresenta tão boa como a do caso sem injeção. Sugerimos que se procure melhorar tal concordância, por exemplo, propondo um perfil de velocidades para a região da esteira de maneira diferente do que foi feito aqui.

- A metodologia utilizada neste trabalho, permite extensão ao caso de escoamentos sobre superfícies rugosas, e com gradiente de pressão. Tal estudo já foi iniciado, no caso incompressível, e merece ser tentada no caso compressível.
- Os resultados desta teoria não foram comparadas com escoamentos de outros fluidos senão o ar, por ausência de dados. Avaliar a necessidade deste resultados, e, eventualmente, gerá-los, pode ser um avanço sensível na área de transferência de calor, tanto do ponto de vista de engenharia, quanto do próprio entendimento do fenômeno como um todo.

APÊNDICES

1 - ORDEM DE GRANDEZA DE E' E P'

Aplicando a definição (2.14) a ambos os lados da definição de E , expressão (2.8a), temos:

$$\bar{E} + E' = c_p(\bar{T} + T') + \frac{1}{2}[(\bar{u}\bar{u} + 2\bar{u}u' + u'u') + (\bar{v}\bar{v} + 2\bar{v}v' + v'v')]. \quad (A1.1)$$

Se tirarmos a média temporal desta expressão, vamos obter uma outra expressão para \bar{E} . Subtraindo esta última da primeira, e dividindo ambos os lados da igualdade resultante por E_∞ , segue que:

$$\frac{E'}{E_\infty} = \frac{c_p T' + \frac{1}{2} [(2\bar{u}u' + u'u' - \overline{u'u'}) + (2\bar{v}v' + v'v' - \overline{v'v'})]}{c_{p\infty} T_\infty + \frac{1}{2} (U_\infty^2 + v_\infty^2)}. \quad (A1.2)$$

Para avaliar a ordem de grandeza do lado direito desta expressão, vamos considerar os dois casos possíveis:

- a) $O(c_{p\infty} T_\infty / U_\infty^2) > O(1)$ — Com esta hipótese, mais o fato de que nos escoamentos sobre placa plana $O(\bar{u}) > O(\bar{v})$, e desprezando-se os termos de menor ordem, a expressão (A1.2) fica:

$$O\left(\frac{E'}{E_\infty}\right) = O\left(\frac{c_p T' + \bar{u}u'}{c_{p\infty} T_\infty}\right), \quad (A1.3)$$

e portanto,

$$O\left(\frac{E'}{E_\infty}\right) = O\left(\frac{T'}{T_\infty}\right) + \left(\frac{u'}{U_\infty} \frac{\bar{u}U_\infty}{c_{p_\infty}T_\infty}\right). \quad (\text{A1.4})$$

Se considerarmos novamente a hipótese inicial, e lembrarmos que $O(u'/U_\infty) = O(T'/T_\infty)$, veremos que o último termo da expressão acima é de ordem menor ou igual que o penúltimo. Assim:

$$O\left(\frac{E'}{E_\infty}\right) = O\left(\frac{T'}{T_\infty}\right) = O\left(\frac{u'}{U_\infty}\right). \quad (\text{A1.5})$$

b) $O(c_{p_\infty}T_\infty/U_\infty^2) = O(1)$ — De maneira análoga ao caso anterior, a expressão (A1.2) se reduz a:

$$O\left(\frac{E'}{E_\infty}\right) = O\left(\frac{c_p T' + \bar{u}u'}{c_{p_\infty}T_\infty + (1/2)U_\infty^2}\right), \quad (\text{A1.6})$$

Lembrando a condição inicial, $O(c_{p_\infty}T_\infty) = O(U_\infty^2)$. Assim, para considerações de ordem de grandeza, é válido escrever que $O(c_{p_\infty}T_\infty + U_\infty^2) = O(c_{p_\infty}T_\infty)$. Esse resultado transforma a expressão (A1.6) na expressão (A1.3), de modo que a conclusão a respeito da ordem de grandeza de E' é a mesma, ou seja:

$$O\left(\frac{E'}{E_\infty}\right) = O\left(\frac{T'}{T_\infty}\right) = O\left(\frac{u'}{U_\infty}\right). \quad (\text{A1.7})$$

c) $O(c_{p_\infty}T_\infty/U_\infty^2) < O(1)$ — De maneira análoga ao item a), a expressão (A1.2) se reduz a:

$$O\left(\frac{E'}{E_\infty}\right) = O\left(\frac{c_{p_\infty}T_\infty}{U_\infty^2} \frac{T'}{T_\infty}\right) + O\left(\frac{\bar{u}u'}{U_\infty^2}\right). \quad (\text{A1.8})$$

Esta expressão deixa claro que, em escoamentos deste tipo, a ordem de E'/E_∞ depende da região que estiver sendo analisada. Considerando a hipótese inicial, e lembrando que na camada da parede $O(\bar{u}) = O(u')$:

$$O\left(\frac{E'}{E_\infty}\right) < O\left(\frac{u'}{U_\infty}\right). \quad (\text{A1.9})$$

Esse resultado encerra a análise de E' .

Para obter a ordem de grandeza de P' , procedemos de maneira análoga ao que acabamos de fazer. Lembrando que $p_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2$, escrevemos, então:

$$O\left(\frac{P'}{P_\infty}\right) = O\left[\frac{p' + \frac{1}{2}(2\bar{\rho}\bar{u}u' + \bar{u}\bar{u}\rho')}{\rho_\infty U_\infty^2}\right]. \quad (\text{A1.10})$$

Esta expressão, como a (A1.8), deixa evidente que a ordem de grandeza de P'/P_∞ depende da região do escoamento considerada. De fato, utilizando a (3.3) mais uma vez, temos que:

$$O\left(\frac{P'}{P_\infty}\right) = O\left(\frac{u'^2}{U_\infty^2}\right), \quad \text{para } O(\bar{u}/U_\infty) \leq O(\sqrt{u'/U_\infty}), \text{ e} \quad (\text{A1.11a})$$

$$O(\bar{\rho}/\rho_\infty) \leq O(\sqrt{\rho'/\rho_\infty}),$$

$$O\left(\frac{P'}{P_\infty}\right) = O\left(\frac{u'}{U_\infty}\right), \quad \text{para } O(\sqrt{u'/U_\infty}) < O(\bar{u}/U_\infty) \leq O(1), \text{ e} \quad (\text{A1.11b})$$

$$O(\sqrt{\rho'/\rho_\infty}) < O(\bar{\rho}/\rho_\infty) \leq O(1).$$

2 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES APROXIMADAS DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO E ENERGIA NA REGIÃO COMPLETAMENTE TURBULENTA

Em primeiro lugar, vamos reescrever as equações (3.34b), (3.35b), (3.34d), (3.35d), nesta ordem, da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial y_u^+} (\tau_{l_{11}}^+ + \tau_{t_{11}}^+) = 0, \quad (A2.1a)$$

$$\frac{\partial u_{11}^+}{\partial y_u^+} = \frac{\partial}{\partial y_u^+} (\tau_{l_{21}}^+ + \tau_{t_{21}}^+), \quad (A2.1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_t^+} (q_{c_{11}}^+ + q_{t_{11}}^+) = 0, \quad (A2.1c)$$

$$\frac{\partial E_{11}^+}{\partial y_t^+} = \frac{\partial}{\partial y_t^+} (q_{c_{21}}^+ + q_{t_{21}}^+), \quad (A2.1d)$$

onde τ_l , τ_t , q_c e q_t são, respectivamente os fluxos de quantidade de movimento, laminar e turbulento, e os fluxos de calor, por condução e turbulento. Nas expressões acima pode-se perceber que as simplificações referentes à região completamente turbulenta ainda não foram feitas. Se integrarmos a expressão (A2.1a), e substituirmos no resultado a condição de contorno (2.31a), adimensionalizada de acordo com a lista (3.18), teremos:

$$\tau_{l_{11}} + \tau_{t_{11}} = 1. \quad (A2.2)$$

Se desprezarmos, agora, o termo de tensão laminar, e substituirmos o termo de tensão turbulento por sua expressão dada pela teoria do comprimento de mistura de Prandtl (equação (3.36)), integrando, segue que:

$$u_{11}^{\dagger} = \frac{1}{K_u} \ln y_u^{\dagger} + A_u. \quad (\text{A2.3})$$

Como esta expressão não vale até a parede, a condição de contorno $u^{\dagger}(x, 0) = 0$ não pode ser usada, e a constante A_u fica a determinar. Repetindo todo o procedimento para a equação (A2.1c) temos:

$$E_{11}^{\dagger} = \frac{1}{K_t} \ln y_t^{\dagger} + A_e. \quad (\text{A2.4})$$

Se integrarmos também uma vez a expressão (A2.1b) obtemos:

$$u_{11}^{\dagger} = \tau_{t_{21}} + \tau_{t_{21}} + C_1. \quad (\text{A2.5})$$

Esta expressão vale até a parede, de modo que a condição de contorno (2.31c) implica $C_1 = 0$. Integrando novamente a (A2.5), teremos, após algum rearranjo:

$$u_{21}^{\dagger} = \frac{1}{4} u_{11}^{\dagger 2} + C_2. \quad (\text{A2.6})$$

Este resultado não vale até a parede, de modo que constante C_2 fica a determinar. Entretanto, a expressão para o perfil de velocidades já contém uma constante a determinar, A_u ; a presença de outra implicaria em não podermos comparar os perfis propostos com os experimentais para obter seus valores. Por este motivo, assumiremos, sem maiores justificativas, que $C_2 = 0$, o que corresponde a dizer que apenas um grau de liberdade é suficiente no ajuste de nossas curvas teóricas ao experimento. Uma outra alternativa seria supor que a expressão (A2.6) valha até a parede, já que a (A2.5) também vale. Disto, $C_2 = 0$ seguiria imediatamente. Rescrevendo, então a expressão (A2.6) temos:

$$u_{21}^+ = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{K_u} \ln y_u^+ + A_u \right)^2. \quad (\text{A2.7})$$

De maneira análoga, se integrarmos uma vez a expressão (A2.1d), com as condições de contorno (2.33a) e $E_{11}^+(x, 0) = 0$, teremos $E_{11}^+ = q_{c_{21}}^+ + q_{t_{21}}$. Nova integração, com utilização do modelo de comprimento de mistura para a turbulência, fornece:

$$E_{21}^+ = \frac{1}{2} E_{11}^{+2} - \frac{K_u}{4K_e} u_{11}^{+2} + C_3, \quad (\text{A2.8})$$

onde pode-se fazer $C_3 = 0$ por considerações análogas à do caso do perfil de velocidades. A expressão para E_{21}^+ fica então:

$$E_{21}^+ = \frac{1}{4} \left[2 \left(\frac{1}{K_e} \ln y_e^+ + A_e \right)^2 - \frac{K_u}{k_e} \left(\frac{1}{K_u} \ln y_u^+ + A_u \right)^2 \right]. \quad (\text{A2.9})$$

3 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES APROXIMADAS DA PRESSÃO NA REGIÃO COMPLETAMENTE TURBULENTA

A equação (3.34c), integrada uma vez, fornece $p_{11}^+ = (v'v')_{11}^+ + C_4$. Esta equação é válida até a parede, onde as flutuações turbulentas se anulam, de modo que $C_4 = 0$. De acordo com a teoria do comprimento de mistura de Prandtl, $(v'v') = C_{te}(u'v')$. Como na região completamente turbulenta $\tau_{11} = (u'v')_{11} = 1$, (equação (A2.2), depois de desprezado o termo laminar), segue que:

$$p_{11}^+ = A_p, \quad (\text{A3.1})$$

onde A_p é constante arbitrária. Integrando também uma vez a equação (3.35c), temos $p_{21}^+ = (v'v')_{21}^+ + C_5$. Pelo mesmo motivo que C_4 , $C_5 = 0$. Como $(v'v') =$

$C_1 \epsilon(u'v')$, e, de acordo com a equação (A2.5) desprezado o termo laminar e posto $C_1 = 0$ temos $\tau_{21}^+ = (u'v')_{21}^+ = u_{11}^+$, segue que:

$$p_{21}^+ = C \left(\frac{1}{K_u} \ln y_u^+ + A_u \right), \quad (\text{A3.2})$$

onde C é constante a determinar. Como as equações (A2.2) e (A2.5), usadas na dedução das expressões acima só valem na região completamente turbulenta, estas últimas também só valem nestes limites.

Bibliografia

- [1] TORII, K., NISHIWAKI, N. e HIRATA, M., 'Heat Transfer and Skin Friction in Turbulent Boundary Layer with Mass Injection', *Proceedings of Third International Heat Transfer Conference*, vol. **3**, pp. 34-48, Chicago (1966).
- [2] MABEY, D. G., MEYER, H. U., e SAWYER, W. G., 'Experimental and Theoretical Studies of the Boundary Layer on a Flat Plate at Mach Numbers from 2.5 to 4.5', *RAE TR*, No. **74127**, (1974).
- [3] SQUIRE, L. C., 'Further Experimental Investigations of Compressible Turbulent Boundary Layers With Air Injection', *ARC R&M*, No. **3627**, (1970).
- [4] DANBERG, J. E., 'Characteristics of the Turbulent Boundary Layer With Heat and Mass Transfer: Data Tabulation', *NOL TR*, No. **67-6**, (1967).
- [5] KAYS, W. M. e MOFFAT, R. J., 'The Behavior of Transpired Turbulent Boundary Layers', *Stanford University Report* No. HMT-20 (1975).
- [6] SQUIRE, L. C., 'A Law of the Wall for Compressible Turbulent Boundary Layers With Air Injection', *J. Fluid Mech.*, vol. **37**, pp. 449-456 (1969).
- [7] SQUIRE, L. C., 'Eddy Viscosity Distributions in Compressible Turbulent Boundary Layers With Air Injection', *Aero Q.*, vol. **XXIII**, pp. 169-182 (1971).
- [8] SQUIRE, L. C. e VERMA, V. K., 'The Calculation of Compressible Turbulent Boundary Layers With Fluid Injection', *ARC CP*, No. **1265**, (1973).
- [9] JEROMIN, L. O. F., 'An Experimental Investigations of Compressible Turbulent Boundary Layers With Air Injection', *ARC R&M*, No. **3526**, (1968).
- [10] SPALDING, D. B. e CHI, S. W., 'The Drag of a Compressible Turbulent Boundary Layer on a Smooth Flat Plate With and Without Heat Transfer', *J. Fluid Mech.*, vol. **18**, pp. 117-143 (1964).

- [11] SILVA-FREIRE, A. P., 'An Extension of the Transpired Skin-friction Equation to the Compressible Turbulent Boundary Layers', *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. **31**, pp. 2395–2398 (1988).
- [12] SILVA-FREIRE, A. P., 'An Asymptotic Solution for Transpired Incompressible Turbulent Boundary Layers', *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. **31**, pp. 1011–1021 (1988).
- [13] KAPLUN, S., 'Fluid Mechanics and Singular Perturbations', *Academic Press, San Diego*, (1967)
- [14] LAGERSTROM, P. A. e CASTEN, R. G., 'Basic Concepts Underlying Singular Perturbation Techniques', *SIAM*, vol. **14**, pp. 63–120 (1972).
- [15] COLES, D., 'The Law of the Wake in the Turbulent Boundary Layer', *J. Fluid Mech.*, vol. **1**, pp. 191–226 (1956).
- [16] SCHLICHTING, H., 'Boundary Layer Theory', *McGraw Hill, New York* (1979).
- [17] VAN WYLEN, G. J. e SONNTAG, R. E., 'Fundamentos da Termodinâmica Clássica', *Edgar Blücher, São Paulo* (1976).
- [18] INCROPERA, F. P. e DeWITT, D. D., 'Fundamentals of Heat and Mass Transfer', *McGraw Hill, New York* (1971).
- [19] BLEVINS, R. D., 'Applied Fluid Dynamics Handbook', *Van Nostrand Reinhold Company, New York* (1984).
- [20] BLACKWELL, B. F., KAYS, W. M., MOFFAT, R. J., 'The Turbulent Boundary Layer on a Porous Plate: an Experimental Study of the Heat Transfer Behavior with Adverse Pressure Gradients', *Stanford University Report No. HMT-16* (1972).
- [21] LAUFER, J., 'Thoughts on Compressible Turbulent Boundary Layer', *Rand Corporation, RM-5946-PR, Santa Monica* (1969).
- [22] VAN DRIEST, E. R., 'Turbulent Boundary Layers in Compressible Fluids', *North American Aviation, Inc.*, vol. **18**, pp. 145–160 (1951).
- [23] SILVA-FREIRE, A. P. and HIRATA, M. H., 'Aproximate Solutions to Singular Perturbation Problems: the Intermediate Variable Technique', *J. Math. Analysis and Applications*, vol. **145**, pp. 241–253 (1990).

- [24] SILVA-FREIRE, A. P., 'On the Matching Conditions for a Two-Deck Compressible Turbulent Boundary Layer', *ZAMM*, vol. **69**, pp. 100-104 (1989).
- [25] AFZAL, N., 'A Higher Order Theory for Compressible Turbulent Boundary Layers at Moderately Large Reynolds Number', *J. Fluid Mech.*, vol. **57**, pp. 1-27 (1973).
- [26] KISTLER, L. A. e CHEN, W. S., 'A Fluctuating Pressure Field in a Supersonic Turbulent Boundary Layer', *J. Fluid Mech.*, vol. **16**, pp. 41-64 (1963).
- [27] MORKOVIN, M. V., 'Effects of Compressibility on Turbulent Flows', *Mécanic de la turbulence*, pp. 367-380 (1962).
- [28] MEDEIROS, M. A. F. and SILVA-FREIRE, A. P., 'The Thermal Turbulent Boundary Layer in an Incompressible Flow', *Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, vol. **2**, pp. 65-68, Rio de Janeiro (1989).
- [29] BEJAN, A., 'Convection heat transfer', *John Wiley and Sons*, (1984).
- [30] STEVENSON, T. N., 'A law of the Wall for Turbulent Boundary Layers With Suction or Injection', *Cranfield College of Aero Rep Aero*, No. **166**, (1963).
- [31] MABEY, D. G., 'Some Boundary Layer Measurements on a Flat Plate at Mach Numbers From 2.5 to 4.5', *AGARD Conf. proc. 93*, paper No. 2, (1971)
- [32] GOWEN, R. A. and SMITH, J. W., 'The Effect of the Prandtl Number on Temperature Profiles for Heat Transfer in Turbulent Pipe Flows', *Chem. Engng. Sci.*, vol. **22**, pp. 1701-1711 (1967).
- [33] KADER, B. A. and YAGLOM, A. M., 'Heat and Mass Transfer Laws for Fully Turbulent Wall Flows', *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. **15**, pp. 2329-2351 (1972).
- [34] YAKHOT, V., ORSZAG, S. A., YAKHOT, A., 'Heat Transfer in Turbulent Fluids - I. Pipe Flow', *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. **30**, pp. 15-22 (1987).
- [35] FERNHOLZ, H., H. e FINLEY, P. J., 'A critical compilation of compressible turbulent boundary layer data', *Advisory Group for Aerospace Research & Development (AGARD)-North Atlantic Treaty Organization*, No. **223**, (1977).

- [36] SIMPSON, R. L., 'Characteristics of Turbulent Boundary Layers at Low Reynolds Number with and without Transpiration', *J. Fluid Mech.*, vol. **42**, pp. 769-802 (1970).
- [37] MEDEIROS, M. A. F., PELLEGRINI, C. C. e SILVA-FREIRE, A.P., 'The Turbulent Boundary Layer with Addition of Mass and Heat', *Engineering Turbulence Modelling and Experiments* pp.779-788, Elsevier, N.Y., (1990)
- [38] MEDEIROS, M. A. F., 'A Camada Limite Térmica com Transpiração', *Anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, vol. **I**, pp. 323-328, Itapema (1990).