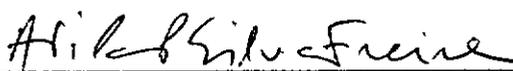


# A CAMADA LIMITE TÉRMICA TURBULENTA COM TRANSPIRAÇÃO

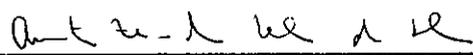
*Marcello Augusto Faraco Medeiros*

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

**Aprovada por :**

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Atila Pantaleão Silva Freire, PhD

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Alcir de Faro Orlando, PhD

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Antônio Fernando Teles da Silva, PhD

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

*outubro de 1990*

MEDEIROS, MARCELLO A. FARACO

A Camada Limite Térmica Turbulenta com Transpiração [Rio de Janeiro], 1990.

X, 73 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Mecânica, 1990)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Transferência de Calor I. COPPE/UFRJ II. Título (série).



Aos amigos

*Atila P. Silva Freire,*

cuja orientação foi muito mais voltada para a formação do que para a mera e cômoda informação;

*Cláudio Pellegrini,*

que, como companheiro de trabalho, contribuiu de forma importante em todas as etapas deste trabalho; e

*André da Costa Barros,*

pelo indispensável suporte computacional que prestou sempre disponível, expresso meus efusivos agradecimentos, extensivos à

*CAPES,*

que sustentou financeiramente parte deste trabalho.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciência (M. Sc.)

A CAMADA LIMITE TÉRMICA TURBULENTA  
COM TRANSPIRAÇÃO

*Marcello Augusto Faraco Medeiros*

*outubro de 1990*

**Orientador:** Atila P. Silva Freire

**Programa:** Engenharia Mecânica

O presente trabalho analisa teoricamente a transferência de calor na camada limite térmica turbulenta com transpiração. A análise revela a existência de duas leis que, quando a taxa de transpiração tende a zero, recaem nas conhecidas *Lei Térmica da Parede* e *Lei Térmica da Esteira*. Uma abordagem alternativa conduz a duas outras leis ( da Parede e da Esteira) para escoamentos com ou sem transpiração, as quais desacoplam o problema térmico do problema dinâmico. A partir destas quatro leis, duas expressões para o perfil de temperatura e duas para o número de Stanton são propostas. Uma comparação com os dados experimentais mostra boa concordância.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

THE TURBULENT THERMAL BOUNDARY LAYER  
WITH TRANSPIRATION

*Marcello Augusto Faraco Medeiros*

*October, 1990*

**Supervisor:** Atila P. Silva Freire

**Department:** Mechanical Engineering

This work presents a theoretical analysis of the transfer of heat in thermal turbulent boundary layers with transpiration. The analysis reveals the existence of two laws which reduce to the classical *Thermal Law of the Wall* and *Thermal Law of the Wake* as the transpiration velocity tends to zero. An alternative approach leads to two other laws (of the wall and of the wake) for flows with and without transpiration which uncouple the thermal problem from the dynamic problem. From these four laws, two expressions to the temperature profile and two to the Stanton number are proposed. A comparison with the experimental data shows good agreement.

## NOMENCLATURA

$A$	constante na expressão do perfil de velocidade para o caso sem transpiração — Eq.(2.18)
$A'$	parâmetro na Eq.(2.17)
$B$	constante na expressão do perfil de temperatura para o caso sem transpiração — abordagem clássica - Eq.(2.19)
$B'$	constante na expressão do perfil de temperatura para o caso sem transpiração — abordagem alternativa - Eq.(2.25)
$C_f$	coeficiente de arraste
$c_p$	calor específico à pressão constante
$e_m$	viscosidade turbulenta
$e_t$	condutividade turbulenta
$k$	condutividade térmica
$k_m$	constante do comprimento de mistura aplicado à velocidade — Eq.(2.15)
$k_t$	constante do comprimento de mistura aplicado à temperatura — abordagem clássica - Eq.(2.16)
$k'_t$	constante do comprimento de mistura aplicado à temperatura — abordagem alternativa - Eq.(2.26)
$Pr$	número de Prandtl
$Pr_t$	número de Prandtl turbulento — $\frac{e_m}{e_t}$
$\dot{Q}''$	fluxo de calor
$\dot{Q}''_w$	fluxo de calor na parede
$\dot{q}''$	fluxo de calor adimensional — $\frac{\dot{Q}''}{\rho c_p (T_w - T_\infty) U_\infty}$
$Re_\Delta$	número de Reynolds baseado na espessura de entalpia
$Re_\theta$	número de Reynolds baseado na espessura de quantidade de movimento
$St$	número de Stanton
$St_o$	número de Stanton em escoamentos sem transpiração

$T$	temperatura
$T_w$	temperatura da parede
$T_\infty$	temperatura do escoamento livre
$t$	temperatura adimensional — $\frac{T-T_w}{T_\infty-T_w}$
$t_r$	temperatura de fricção na parede — Eq.(2.4)
$t^+$	temperatura adimensional — Eq.(2.14)
$t_s^+$	constante na expressão para o perfil de temperatura no caso com transpiração — abordagem clássica - Eq.(3.20)
$t^*$	temperatura adimensional — Eq.(2.22)
$t_s^*$	constante na expressão para o perfil de temperatura no caso com transpiração — abordagem alternativa - Eq.(3.22)
$U$	velocidade na direção paralela à parede
$U_\infty$	velocidade do escoamento livre
$u$	velocidade adimensional na direção paralela à parede — $\frac{u}{U_\infty}$
$u_r$	velocidade de fricção na parede — Eq.(2.2)
$u^+$	velocidade adimensional — Eq.(2.13)
$u_s^+$	constante na expressão para o perfil de velocidade no caso com transpiração — Eq.(3.3)
$V_w$	velocidade normal na parede — $\frac{V_w}{U_\infty}$
$v_w$	velocidade normal adimensional na parede — $\frac{V_w}{U_\infty}$
$v_w^+$	velocidade normal adimensional na parede — $\frac{V_w}{u_r}$
$v_w^*$	velocidade normal adimensional na parede — $\frac{V_w}{U_\infty \sqrt{St}}$
$w$	função de Coles
$y$	distância ao longo de uma linha perpendicular à parede
$y^+$	distância adimensional ao longo de uma linha perpendicular à parede — Eq.(2.13)
$y_s^+$	parâmetro na expressão para o perfil de velocidade no caso com transpiração — Eq.(3.7)
$y_s^*$	parâmetro na expressão para o perfil de temperatura no caso com transpiração — abordagem clássica - Eq.(3.25)
$y^*$	distância adimensional ao longo de uma linha perpendicular à parede — Eq.(2.23)

$y_b^*$	parâmetro na expressão para o perfil de temperatura no caso com transpiração — abordagem alternativa - Eq.(3.26)
$\Delta$	espessura de entalpia
$\delta_m$	espessura da camada limite cinética
$\delta_t$	espessura da camada limite térmica
$\theta$	espessura de quantidade de movimento
$\mu$	viscosidade dinâmica
$\nu$	viscosidade cinemática
$\Pi_m$	fator de escala da função de Coles aplicado ao perfil de velocidade
$\Pi_t$	fator de escala da função de Coles aplicado ao perfil de temperatura — abordagem clássica
$\Pi_t'$	fator de escala da função de Coles aplicado ao perfil de temperatura — abordagem alternativa
$\rho$	massa específica
$\tau$	atrito viscoso
$\tau_w$	atrito viscoso na parede
$\tau$	atrito viscoso adimensional — $\frac{\tau}{\rho u_\tau^2}$

# ÍNDICE

## *Capítulo 1*

INTRODUÇÃO .....	1
------------------	---

## *Capítulo 2*

A ESTRUTURA DA CAMADA LIMITE .....	5
------------------------------------	---

## *Capítulo 3*

O EFEITO DA TRANSPIRAÇÃO .....	26
--------------------------------	----

## *Capítulo 4*

ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	53
------------------------------	----

## *Capítulo 5*

CONCLUSÃO .....	66
-----------------	----

## *Capítulo 6*

BIBLIOGRAFIA .....	69
--------------------	----

## Capítulo 1

# INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, um grande esforço tem sido empreendido na busca de materiais que resistam a temperaturas cada vez mais altas, esforço este cujos resultados se vêem em diversos setores de alta tecnologia. No entanto, as dificuldades inerentes à pesquisa de materiais impedem que os avanços ocorram no ritmo que se poderia almejar. Desta sorte, em muitas aplicações estas superfícies resistem apenas por um curto período, necessitando frequente substituição. Esta solução tem se mostrado cara pelo volume de recursos alocado à pesquisa e pelos custos envolvidos na utilização de materiais nobres — multiplicados em muito devido às reposições — tudo isto agravado pelo fato de que esta jamais será uma solução definitiva pois a descoberta de um material que resista a uma certa temperatura é pouco depois superada pela necessidade de um material resistente à temperaturas mais altas. Fomenta-se dessa forma uma corrida sem fim que pode ascender a custos proibitivos.

Uma maneira de escapar a esta situação desfavorável é minimizar tanto quanto possível o contato de superfícies com tais temperaturas. Desde a década de 50 [9,26,31], mas principalmente durante os anos 60 e 70 [4,5,16,17,18,28,30,35,45,46,47], muitos estudos mostraram que a injeção de fluido, mesmo em pequenas taxas, através de uma superfície porosa é uma forma eficiente de isolá-la termicamente de um escoamento. Utilizando-se injeção de fluido frio obtém-se, além do isolamento, um resfriamento ativo da superfície que potencializa o efeito protetor contra as altas temperaturas. O profundo conhecimento deste fenômeno aliado a uma tecnologia apropriada beneficiará áreas de aplicações diversas, desde turbinas a gás até veículos espaciais, estes últimos sujeitos a

altas temperaturas quando da reentrada na atmosfera.

Dada uma camada limite turbulenta de um escoamento com uma dada temperatura, a previsão da taxa de calor transferido para uma superfície porosa, a outra temperatura, em presença de injeção de fluido, representa um formidável desafio à engenharia, justificando o grande número de artigos científicos publicados nesta área. O presente trabalho se insere neste contexto com dois objetivos principais:

- determinar uma expressão para o coeficiente de transferência de calor,
- determinar uma expressão para o perfil de temperatura,

contemplando também o caso com sucção de fluido, que juntamente com o caso de injeção compõe os chamados escoamentos com transpiração.

O estudo da camada limite possui raízes em pelo menos três ramos distintos da ciência: a aerodinâmica, a engenharia química e a termociência. A camada limite turbulenta com transpiração foi largamente estudada em seu caso mais simples, abrangendo apenas o problema dinâmico e visando à aplicação em controle de *descolamento de camada limite*, com utilização na aeronáutica. Porém, complicações surgem pela adição de calor, pela ocorrência de mudança de fase na superfície, pela injeção de fluidos diferentes do escoamento principal, pela ocorrência de reações químicas, etc. Diferentes áreas de conhecimento com interesses diversos produziram uma gama de trabalhos de amplo espectro com algumas características semelhantes e outras bem distintas, o que torna penoso um trabalho exaustivo de revisão dos resultados obtidos .

A proposta apresentada neste estudo é de fato muito mais simples de vez que se procura colher avanços nas diferentes áreas e conjugá-los de forma adequada para propor uma nova abordagem. Diante do eterno dilema entre perfeição e rapidez, optou-se por uma revisão bibliográfica seletiva a partir de [38] da qual se concluiu que o estado da arte neste assunto se apresenta da seguinte forma:

- no campo experimental os últimos e mais extensos trabalhos são do grupo de transferência de calor de Stanford, por volta dos anos 70 [5,16,17,28,30,46,47],
- no campo teórico os últimos trabalhos remontam aos anos 60 com Spalding [35], Torii [45], etc.

Um quadro como este por si só já sugeria a possibilidade de novos e relevantes avanços visto que, em camada limite turbulenta, os progressos teóricos normalmente são fortemente amparados em trabalhos experimentais.

As metodologias aplicadas para cálculo do coeficiente de filme em tais esco-

mentos possuem em comum resultar em expressões para determinação do número de Stanton ( $=St$ ), mas podem ser divididas em dois tipos de abordagem:

- aquelas que fornecem diretamente o  $St$ ,
- aquelas que fornecem uma relação entre os  $St$ 's do caso com e sem injeção ( $St/St_0$ ).

A primeira abordagem passa normalmente pela determinação de uma expressão para o perfil de temperatura de onde se infere uma expressão pela qual o  $St$  é dado por uma correção no fator de atrito ( $=Cf$ ). A segunda não inclui a obtenção do perfil de temperatura e possui o inconveniente de necessitar do  $St_0$ , quando, em geral, se recorre a uma correlação experimental. Nos casos com injeção ocorre uma sensível redução do  $St$  e do  $Cf$  que diminui drasticamente a precisão das suas medidas. Segundo Torii [45], nestas circunstâncias uma teoria não pode ser validada apenas pela verificação dos valores preditos para  $St$ , sendo necessária concordância com outros parâmetros do escoamento. No entanto, de acordo com Kays [17], a segunda abordagem concorda melhor com os dados experimentais coletados em Stanford.

Neste trabalho são apresentadas duas soluções para este problema, as quais se inserem no primeiro grupo (na forma como este foi definido), mas apresentam concordância com os dados experimentais comparável à obtida por Kays. A metodologia empregada para a obtenção de expressões para o perfil de temperatura baseia-se na divisão da camada limite em regiões — uma interna e outra externa — e na formulação de uma lei para cada uma, similares às bem conhecidas *Lei da Parede* e *Lei da Esteira* [11,13,19,23], mas adaptadas ao caso com transpiração, obtidas, parte experimentalmente e parte teoricamente, a partir de simplificações nas equações de conservação, válidas em certas regiões da camada limite. A combinação destas leis fornece uma expressão para o perfil de temperatura válida em ambas as regiões, bem como uma equação para cálculo de Stanton.

A solução obtida por este método depende fundamentalmente do modelo de turbulência adotado. A primeira solução baseia-se no modelo clássico de comprimento de mistura aplicado a problemas térmicos, o qual acopla a equação de conservação de energia à de Navier-Stokes e fornece uma solução para o perfil de temperatura dependente da solução do problema dinâmico, de forma que a equação para  $St$  que se obtém por este caminho requer o conhecimento do  $Cf$ . Uma rápida olhada pode sugerir que esta seja uma equação pela qual o Stanton é dado por uma correção no coeficiente de

atrito, no entanto, esta consideração consiste numa drástica simplificação dos fatos.

Apesar de útil esta solução apresenta como inconveniente o fato de que todo o cálculo de  $St$  incorporará também as imprecisões decorrentes do cálculo do  $Cf$ , o que se torna ainda mais indesejável se levarmos em conta que as medições experimentais do coeficiente de atrito são mais difíceis que as de Stanton e, devido a isto, mais imprecisas [17], prejudicando a verificação dos resultados teóricos.

Os pequenos valores de  $Cf$  e  $St$  verificados nos casos com injeção, de forma incontestável mostram a necessidade de uma grande precisão. Por isso no contexto deste trabalho novo esforço foi empreendido na busca de uma segunda solução que não apresentasse tal inconveniente, resultando em uma nova abordagem para o problema térmico que prescindia da solução para o perfil de velocidade, mostrando resultados excelentes para escoamento de ar, com pequenas e moderadas taxas de transpiração.

Apesar de ambas as soluções serem inéditas, o autor considera que a segunda representa uma inovação muito maior e, na sua opinião, consiste na principal contribuição deste trabalho. Além disso, em comparação com a primeira, propicia uma grande redução nos custos computacionais.

## *Capítulo 2*

# **A ESTRUTURA DA CAMADA LIMITE**

Antes de estudar o efeito da transpiração se prosseguirá a uma análise da camada limite turbulenta sobre placa sólida visando fixar idéias e procedimentos já consagrados, bem como estabelecer alguns conceitos originados no âmbito deste trabalho. A camada limite é facilmente reconhecida como sendo uma exígua região do escoamento onde os efeitos viscosos ganham importância diante dos efeitos de inércia. No entanto, uma análise aprofundada revela que esta região, mesmo exígua, apresenta sub-regiões com aspectos bem distintos entre si, as quais podem ser caracterizadas por seus fenômenos dominantes. De fato a divisão da camada limite turbulenta em regiões onde certos fenômenos são dominantes é um procedimento já bem estabelecido [11,13,14,23,25,27,34,48], o qual suporta simplificações nas equações que regem o fenômeno permitindo o tratamento analítico dos problemas.

### **A Região Interna**

Pode-se intuir da compreensão do fenômeno de camada limite que, muito próximo da parede, onde a velocidade é quase nula devido às condições de impermeabilidade e de não deslizamento, e onde os gradientes de velocidade e de temperatura

são muito elevados, os efeitos de inércia e de convecção perdem importância diante dos efeitos viscosos, de condução e turbulentos. Na ausência de velocidades elevadas e de gradientes de pressão no escoamento livre, as equações de conservação nas proximidades da parede podem ser escritas, segundo uma nomenclatura clássica em sua forma dimensional, onde  $\mathcal{T}$  reúne as tensões tanto laminares quanto turbulentas e  $\dot{Q}''$ , representa o calor transmitido por condução e condução turbulenta, como:

a) *conservação da quantidade de movimento na direção  $x$*

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} = 0 \quad , \quad (2.1)$$

com

$$\mathcal{T}(0) = \tau_w = \rho u_\tau^2 \quad , \quad \text{por definição,} \quad (2.2)$$

e;

b) *conservação da energia*

$$\frac{\partial \dot{Q}''}{\partial y} = 0 \quad , \quad (2.3)$$

com

$$\dot{Q}''(0) = \dot{Q}''_w = u_\tau t_\tau c_p \rho \quad , \quad \text{por definição,} \quad (2.4)$$

logo:

$$\mathcal{T} = \tau_w \quad , \quad (2.5)$$

$$\dot{Q}'' = \dot{Q}_w'' \quad . \quad (2.6)$$

Dividindo as Eqs.(2.5) e (2.6) por  $\rho U_\infty^2$  e  $\rho c_p U_\infty (T_w - T_\infty)$  respectivamente, obtêm-se as formas adimensionais

$$\tau = \sqrt{Cf/2} \quad , \quad (2.7)$$

$$\dot{q}'' = St \quad . \quad (2.8)$$

Com efeito, estas equações não informam nada acerca dos perfis de velocidade e temperatura, mas deixam claro que calor e tensões, independente de sua origem — se turbulenta ou não — mantêm constantes ao longo desta região suas quantidades globais. No entanto, a medida que o observador se aproxima ainda mais da parede, as flutuações vão se reduzindo, passando as tensões laminares e a condução de calor a dominar sobre os fenômenos turbulentos. Aplicando então às Eqs.(2.5) e (2.6) o modelo de Newton para tensões laminares e de Fourier para condução de calor e ainda condições de contorno para  $U$  e  $T$  obtêm-se:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \quad , \quad (2.9)$$

com

$$U(0) = 0 \quad ; \quad (2.10)$$

e

$$\dot{Q}_w'' = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad , \quad (2.11)$$

com

$$T(0) = T_w \quad , \quad (2.12)$$

cujas soluções são

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{y u_\tau}{\nu} \quad \Rightarrow \quad u^+ = y^+ \quad , \quad (2.13)$$

$$\frac{T - T_w}{t_\tau} = \frac{y u_\tau}{\nu} Pr \quad \Rightarrow \quad t^+ = y^+ Pr \quad , \quad (2.14)$$

através das quais são apresentadas as variáveis de similaridade do problema, considerando suas condições de contorno para  $T$  e  $Q$ .

As Figs.1 e 2 sugerem que as variáveis de similaridade assim propostas estendem sua validade para além da subcamada laminar, abrangendo uma região intermediária da camada limite que possui perfil logarítmico. Isto pode ser confirmado com base no fato de que, a medida que o observador se afasta da parede, as flutuações de velocidade e de temperatura vão aumentando em relação às médias [1,30,32] fazendo com que os efeitos de turbulência ganhem importância e passem a dominar sobre as tensões laminares e sobre a condução de calor antes que os efeitos de inércia e convecção o façam. Estes fatos levam a supor a existência de uma região da camada limite onde a turbulência seja o fenômeno dominante. Aplicando o modelo de comprimento de mistura [21] (neste caso utilizam-se variáveis adimensionais que são comumente empregadas nas equações para a região completamente turbulenta),

a) *conservação da quantidade de movimento na direção x*

$$\tau = k_m^2 y^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad , \quad (2.15)$$

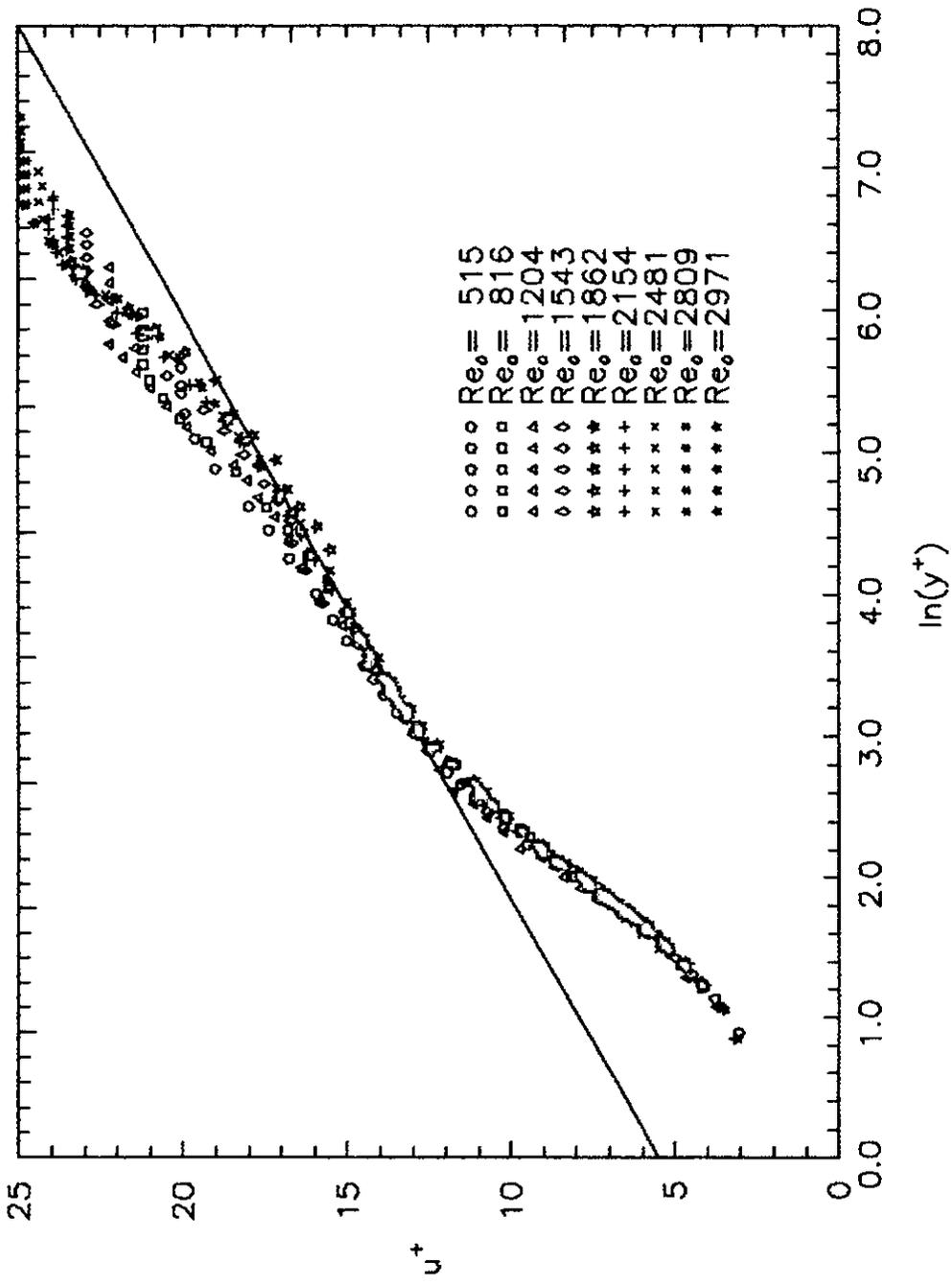


Fig.1. A Lei da Parede.  
 Dados de Blackwell [5].

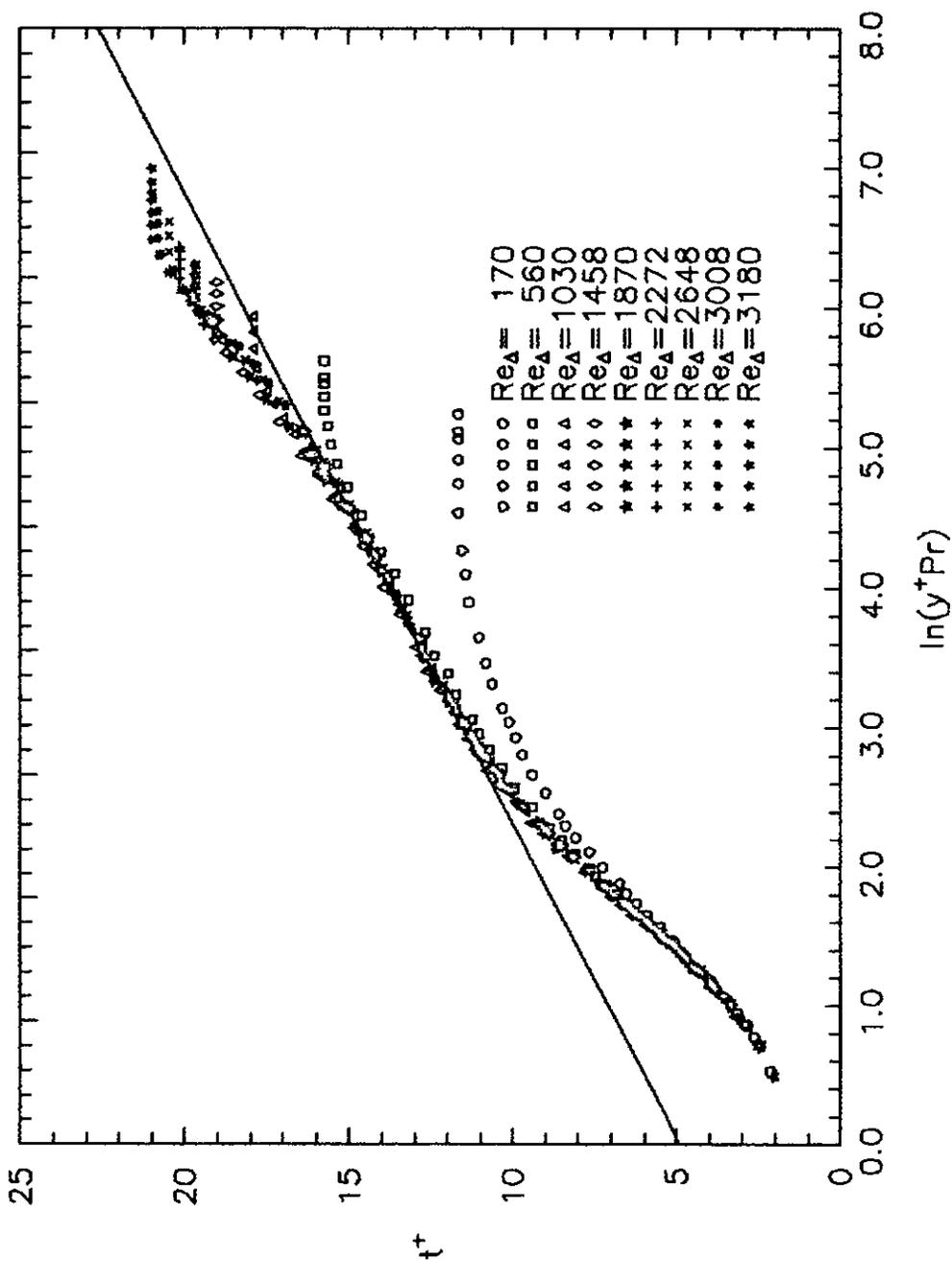


Fig.2. A Lei Térmica Clássica da Parede.  
 Dados de Blackwell [5].

e,

b) conservação da energia

$$q'' = k_m k_t y^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial t}{\partial y} \quad , \quad (2.16)$$

às Eqs.(2.7) e (2.8) obtêm-se as seguintes soluções:

$$u^+ = \frac{1}{k_m} \ln y + A' \quad , \quad (2.17)$$

ou por conveniência,

$$u^+ = \frac{1}{k_m} \ln y^+ + A \quad ; \quad (2.18)$$

e, analogamente,

$$t^+ = \frac{1}{k_t} \ln y^+ Pr + B \quad , \quad (2.19)$$

a partir da substituição de  $u$  — Eq.(2.18) — na Eq.(2.16). As Eqs.(2.18) e (2.19) confirmam as previsões experimentais de um perfil logarítmico e por conseguinte sustentam a hipótese da existência de uma região completamente turbulenta.

A completa definição das Eqs.(2.18) e (2.19) necessita ainda da determinação dos valores de  $k_m$ ,  $A$ ,  $k_t$  e  $B$ , a qual é feita mediante a análise dos dados experimentais. Para o perfil de velocidade existe uma disponibilidade muito grande de resultados experimentais, de sorte que,  $k_m = 0,41$  e  $A = 5,5$  são valores bem estabelecidos [3,19,36]. Para a temperatura, vários estudos foram feitos acerca do número de Prandtl turbulento ( $= Pr_t$ ) [11,13,42], o qual é definido como

$$Pr_t = \frac{e_m}{e_t} \quad ,$$

que, aplicando o modelo de comprimento de mistura, assume a forma

$$Pr_t = \frac{k_m}{k_t} \quad .$$

Estes estudos atribuem a  $Pr_t$  uma fraca ou nula dependência em relação ao  $Pr$ , sendo 0,9 um valor comumente adotado [3], o que é confirmado neste trabalho pelo valor de  $k_t = 0,45$  encontrado. De modo contrário, para  $B$  verifica-se uma forte dependência com  $Pr$  [11,13,23,49], sendo que para ar o valor de 4,5 [14] é típico. Neste trabalho o valor de 4,9 é empregado para  $B$  pois concorda melhor com os dados experimentais utilizados.

Estes resultados estão vastamente publicados na literatura [29] e o acima exposto consiste apenas em uma revisão sumária de conceitos. Todavia, uma abordagem alternativa pode ser empregada, com vantagens, ao problema térmico se adotarmos outras variáveis de similaridade, quais sejam:

$$t^* = \frac{T - T_w}{(T_\infty - T_w)\sqrt{St}} \quad \text{ou} \quad t^* = \frac{t}{\sqrt{St}} \quad . \quad (2.22)$$

e

$$y^* = \frac{yU_\infty\sqrt{St}}{\nu} \quad . \quad (2.23)$$

que também se justificam a partir da subcamada laminar. De fato, estas decorrem diretamente da equação adimensional de energia aplicada a esta região — Eq.(2.8) — cuja solução é

$$t^* = y^* Pr \quad . \quad (2.24)$$

A Fig.3 mostra que também neste caso estas variáveis são válidas na região logarítmica para a qual se pode escrever

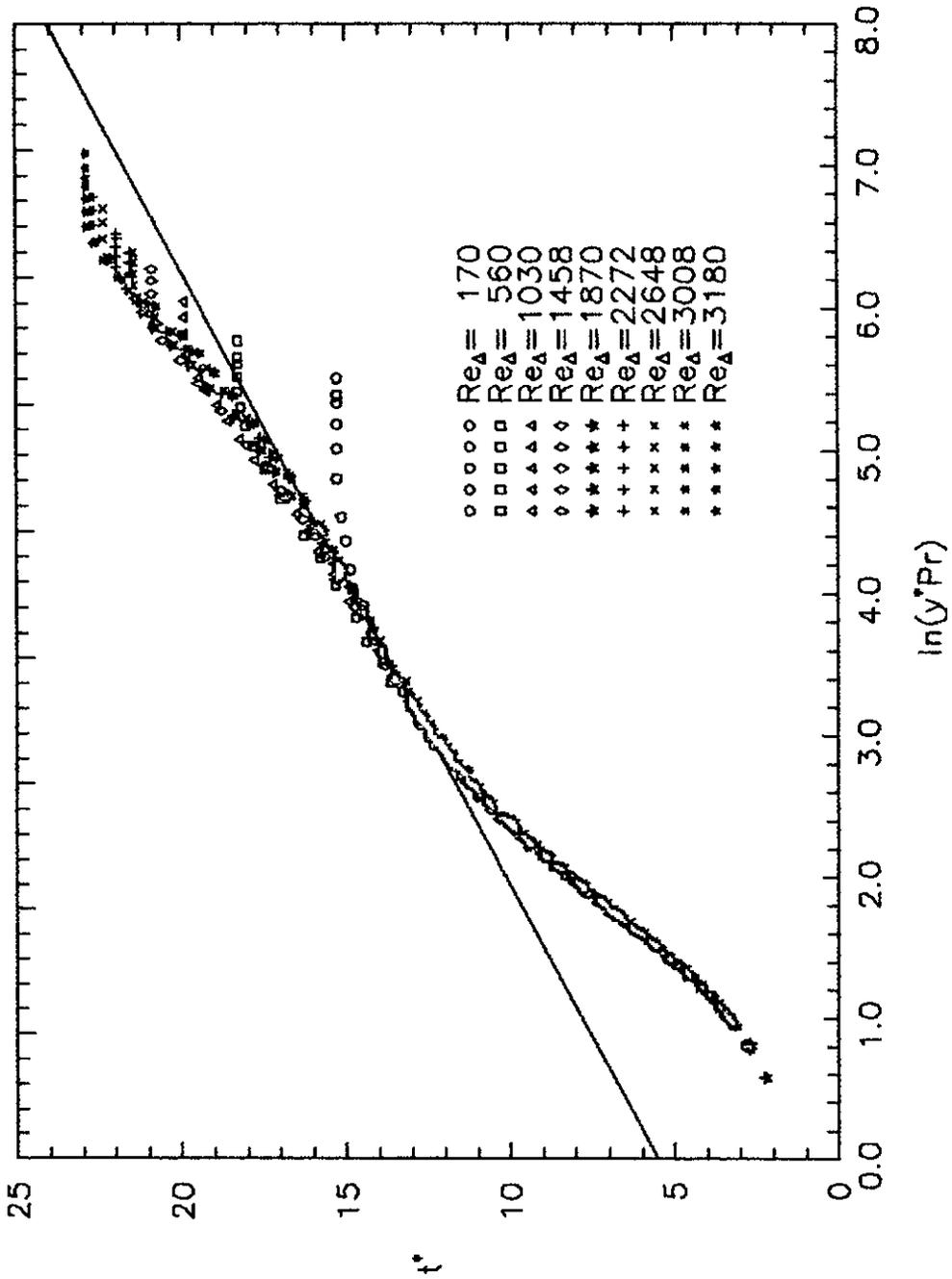


Fig.3. A Lei Térmica Alternativa da Parede.  
 Dados de Blackwell [5].

$$t^* = \frac{1}{k'_t} \ln y^* Pr + B' \quad . \quad (2.25)$$

Apenas em [5] encontra-se referência a estas variáveis, mas ainda assim a exploração não avança além deste ponto. No entanto, as variáveis de similaridade assim propostas são o alicerce sobre o qual se construirá uma solução que desvincula o problema térmico do problema dinâmico, como ficará claro nas sessões seguintes. Afim de confirmar a Eq.(2.25) lançada com base em resultados experimentais, serão apresentadas também as justificativas teóricas que a sustentam.

A Eq.(2.25) é na verdade solução da Eq.(2.8) onde foi adotado o seguinte modelo para a turbulência:

$$\dot{q}'' = k'_t{}^2 y^2 \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 \quad . \quad (2.26)$$

Este modelo por sua vez decorre de uma hipótese de proporcionalidade entre as flutuações de velocidade e de temperatura donde vem a substituição de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  por  $\frac{\partial t}{\partial y}$  e de  $k_t k_m$  por  $k'_t{}^2$  na Eq.(2.16). Verifica-se que esta hipótese é válida a partir das soluções logarítmicas encontradas — Eqs.(2.18) e (2.19) — e desde que  $Cf$  seja proporcional a  $St$ , o que, segundo [10], é razoável, e, para o ar, fica patente das medidas experimentais de Blackwell [5], Simpson [44] e Whitten [46].

A propósito da solução alternativa, cabe ressaltar que existem fortes razões para se suspeitar que tais hipóteses também se apliquem a fluidos diferentes do ar. No entanto, a verificação deste fato, bem como o conseqüente estudo da dependência de  $k'_t$  e  $B'$  com relação ao  $Pr$ , fogem ao escopo deste trabalho. Para o ar, a partir dos dados experimentais de [5] obteve-se  $k'_t = 0,43$  e  $B' = 5,5$ . A solução para o perfil de velocidade e as soluções clássica e alternativa do problema térmico podem ter sua validade avaliada através das Figs.1, 2 e 3, onde a linha reta representa o perfil logarítmico.

## A Região Externa

A região externa da camada limite é aquela em que os efeitos de inércia passam a ser relevantes, todavia, até que se alcance o escoamento livre, estes não poderão ser considerados como dominantes. De fato, a região externa da camada limite é tal que ambos os efeitos — inércia e convecção, e efeitos de turbulência — são relevantes e simplificações como as propostas para a região interna são ilícitas. Além disto a adoção de um modelo de turbulência para esta região não se faz trivialmente lançando mão de uma ferramenta simples como a teoria do comprimento de mistura [6,7]. Por conseguinte, o estudo da região externa da camada limite turbulenta tem sido feito através de uma abordagem experimental que, entretanto, se mostra bem sucedida. Desta forma para o perfil de velocidade são propostas expressões como

$$\frac{U - U_{\infty}}{u_r} = g_m \left( \frac{y}{\delta_m} \right) \quad , \quad (2.27)$$

que deixam claro as variáveis de similaridade selecionadas, enquanto que para o perfil de temperatura a abordagem clássica apresenta

$$\frac{T - T_{\infty}}{t_r} = g_t \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \quad , \quad (2.28)$$

onde destaca-se a independência com relação ao número de Prandtl.

Por analogia, para a solução alternativa se propôs a seguinte solução

$$\frac{t}{\sqrt{St}} = g'_t \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \quad . \quad (2.29)$$

As Figs.4, 5 e 6 demonstram a validade destas expressões e chama-se a atenção para o fato de que nenhuma distinção de qualidade se pode fazer entre as duas propostas, a clássica e a alternativa, para o problema térmico, tanto para a região externa quanto

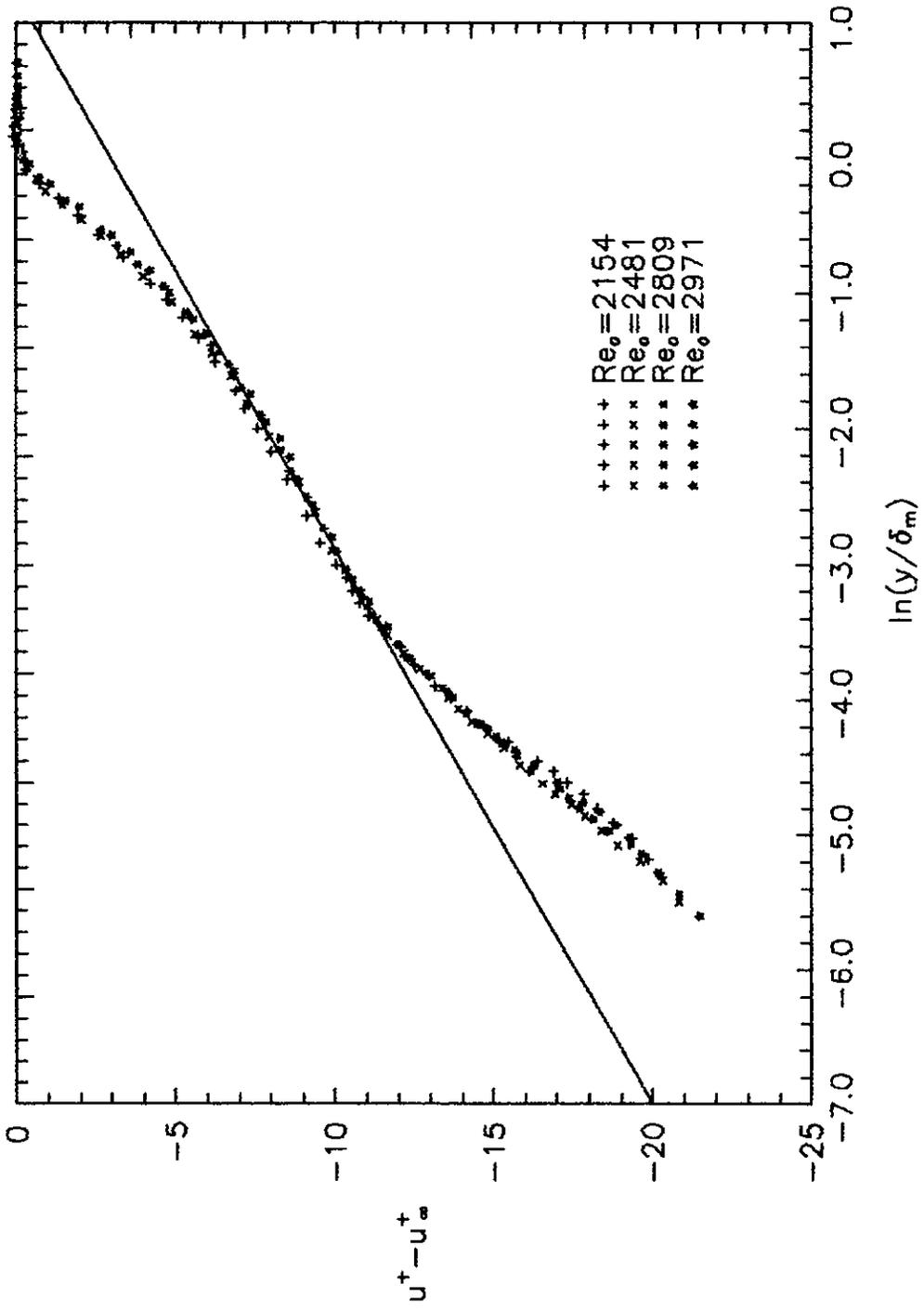


Fig.4. A Lei da Esteira.  
 Dados de Blackwell [5].

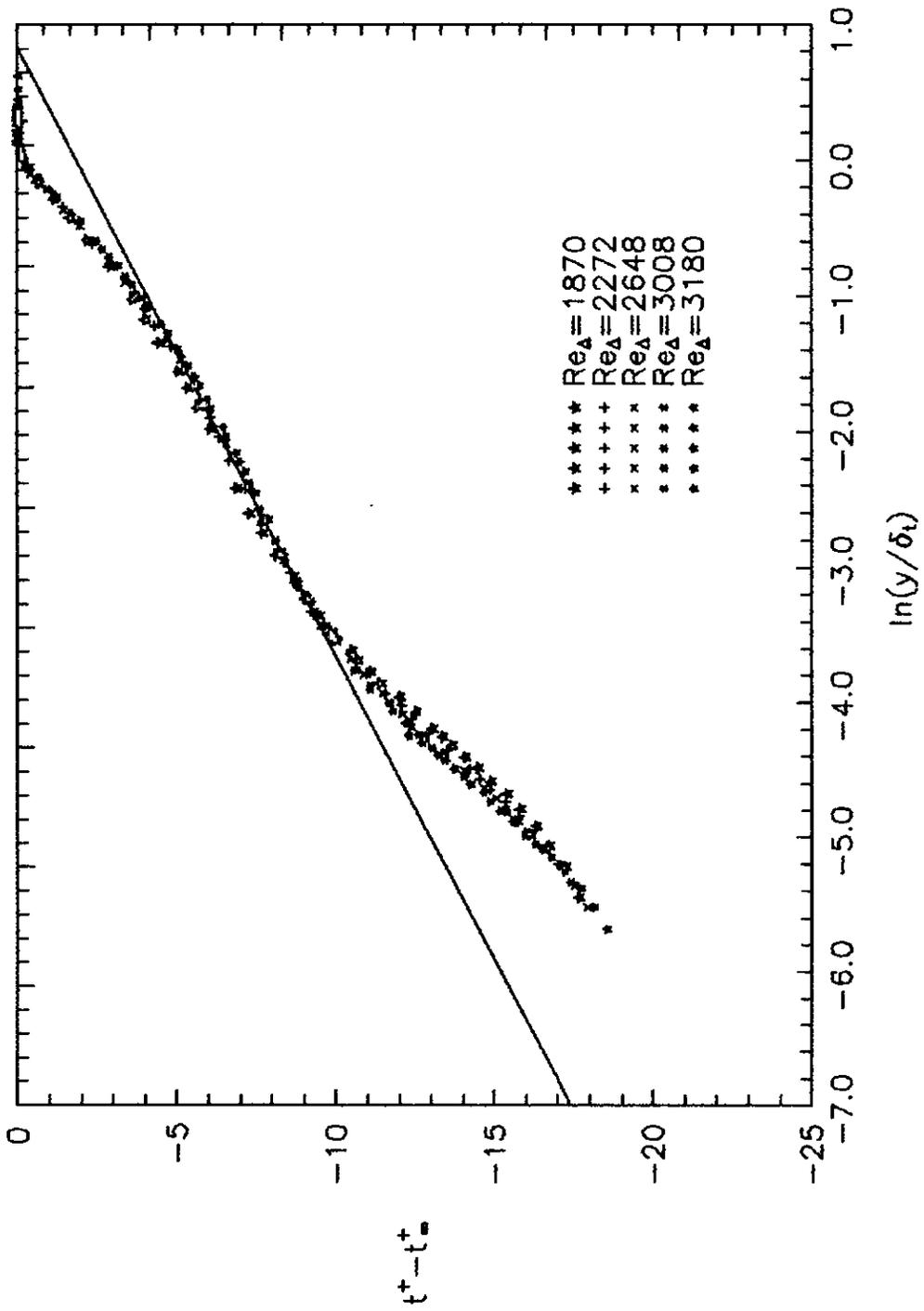


Fig.5. A Lei Térmica Clássica da Esteira.  
 Dados de Blackwell [5].

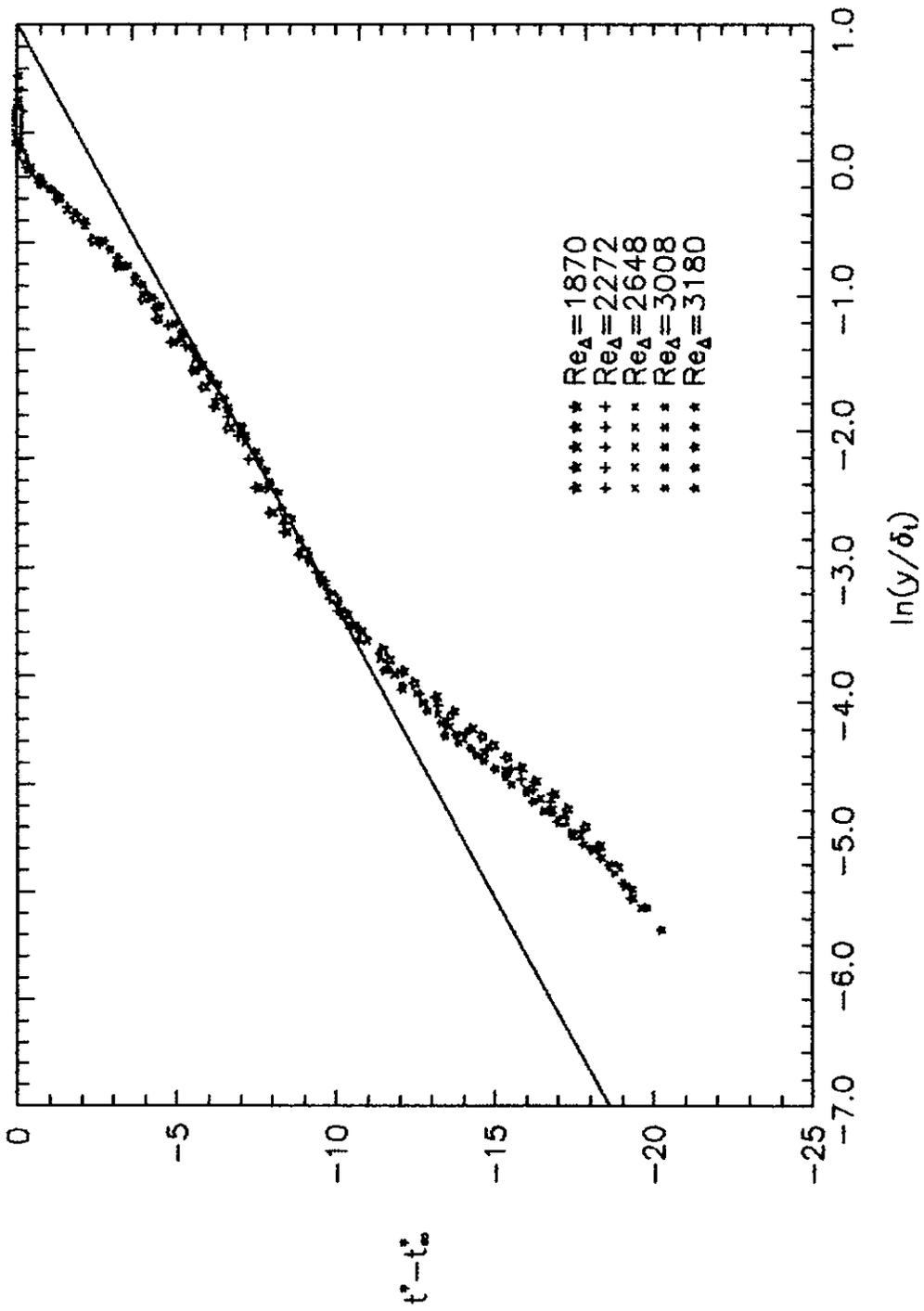


Fig.6. A Lei Térmica Alternativa da Esteira.  
 Dados de Blackwell [5].

para a interna. Ambas apresentam o mesmo grau de concordância com os dados experimentais.

A rigor, as variáveis de similaridade propostas para a região externa são válidas, num ponto em que a camada limite já possa ser considerada bem desenvolvida. O mesmo se pode dizer a respeito da região interna, a partir de um ponto muito mais a montante do escoamento. Os dados experimentais utilizados neste trabalho [5,44,46] apresentam um perfil bem desenvolvido para a região interna. Para a região externa, porém, em alguns casos, isto pode ser questionado em face do surgimento de algumas discordâncias. Apesar disto, para efeito de apresentação da teoria, estas discordâncias não se mostram relevantes.

### Os Perfis de Velocidade e Temperatura e os Coeficientes de Atrito e de Transferência de Calor

As expressões logarítmicas — Eqs.(2.18) e (2.19) — que descrevem a região completamente turbulenta são conhecidas como as *Lei da Parede* cinética e térmica; e, da mesma forma, a solução alternativa — Eq.(2.25) — pode também ser considerada como tal. Por outro lado, as Eqs.(2.27) e (2.28) são chamadas *Lei da Esteira* cinética e térmica. A Eq.(2.29) é a *Lei da Esteira* térmica alternativa.

A descrição do perfil de velocidade baseada nestas leis pode ser resumida na fórmula

$$\frac{U}{u_r} = f_m \left( \frac{y u_r}{\nu} \right) + h_m \left( \frac{y}{\delta_m} \right) \quad , \quad (2.30)$$

onde  $h_m$  é uma função arbitrária que se torna desprezível na vizinhança da parede, ou seja, no domínio de validade da *Lei da Parede*. A variação logarítmica de  $f_m$  é a chave para que  $u$  satisfaça também a *Lei da Esteira* e, em vista disto, a Eq.(2.27) verifica-se imediatamente. A função  $h_m$  está bem determinada a partir do trabalho de Coles [8] e assume a forma

$$h_m = \frac{\Pi_m}{k_m} w \left( \frac{y}{\delta_m} \right) \quad , \quad (2.31)$$

onde  $w$  é uma função universal dada por pontos variando entre 0 e 2, e  $\Pi_m$ , um fator de escala . Na área térmica não se encontram trabalhos nesta mesma linha. De fato, a referência mais atual, fora do âmbito deste trabalho é a [14] que mesmo baseando-se nas duas leis fundamentais não descreve o perfil de temperatura como

$$\frac{T - T_\infty}{t_r} = f_t \left( \frac{yu_r}{\nu} \right) + h_t \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \quad . \quad (2.32)$$

É pois, também, uma das contribuições deste trabalho a proposição de uma função

$$h_t = \frac{\Pi_t}{k_t} w \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \quad , \quad (2.33)$$

em que  $w$  é a mesma que para o perfil de velocidade, a qual se mostrou adequada a partir de uma escolha conveniente de  $\Pi_t$  [23].

Desta forma, é possível escrever os perfis de velocidade e temperatura para a camada limite turbulenta de forma semelhante, os quais, desconsiderando a região laminar, tomam a forma

$$\frac{U}{u_r} = \frac{1}{k_m} \ln \frac{yu_r}{\nu} + A + \frac{\Pi_m}{k_m} w \left( \frac{y}{\delta_m} \right) \quad , \quad (2.34)$$

$$\frac{T - T_w}{t_r} = \frac{1}{k_t} \ln \frac{yu_r}{\nu} Pr + B + \frac{\Pi_t}{k_t} w \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \quad , \quad (2.35)$$

o que se mostrará conveniente nas seções que se seguem.

Pelos mesmos passos pode-se deduzir a expressão

$$\frac{T - T_w}{(T_\infty - T_w)\sqrt{St}} = \frac{1}{k'_t} \ln \frac{y U_\infty \sqrt{St}}{\nu} Pr + B' + \frac{\Pi'_t}{k'_t} w \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \quad , \quad (2.36)$$

baseada nas Eqs.(2.25) e (2.29).

A análise de perfis de velocidade tem mostrado que  $\Pi_m$  apresenta valores crescentes com  $Re_\theta$  ( $\theta$  = espessura de quantidade de movimento), atingindo assintoticamente o valor 0,55 †. Os valores de  $\Pi_t$  e  $\Pi'_t$  obtidos a partir dos dados experimentais de [5] apresentam tendência semelhante em relação ao  $Re_\Delta$  ( $\Delta$  = espessura de entalpia), mas não são em número suficiente para uma determinação fidedigna dos valores das assíntotas, e além disso, aparentemente seria necessário uma análise numa faixa de  $Re_\Delta$  mais elevados, o que não foi possível com os dados disponíveis.

As Figs.7, 8 e 9 mostram uma comparação entre os resultados teóricos e os experimentais. Os valores de  $\Pi_m$ ,  $\Pi_t$  e  $\Pi'_t$  adotados para as curvas teóricas foram respectivamente .55, .44 e .48, que para o caso térmico, mesmo sendo valores médios servem para validar as expressões propostas. O capítulo " Análise dos Resultados " traçará maiores comentários a este respeito.

Aplicando-se as expressões para  $u$  e  $t$  à extremidade externa da camada limite, isto é, para  $y = \delta_m, \delta_t; U = U_\infty, T = T_\infty$ , obter-se-á

$$\frac{U_\infty}{u_r} = \frac{1}{k_m} \ln \frac{\delta_m u_r}{\nu} + A + \frac{2\Pi_m}{k_m} \quad , \quad (2.37)$$

$$\frac{T_\infty - T_w}{t_r} = \frac{1}{k'_t} \ln \frac{\delta_t u_r}{\nu} Pr + B + \frac{2\Pi_t}{k'_t} \quad , \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{\sqrt{St}} = \frac{1}{k'_t} \ln \frac{\delta_t U_\infty \sqrt{St}}{\nu} Pr + B' + \frac{2\Pi'_t}{k'_t} \quad , \quad (2.39)$$

---

† Coles [8] apresenta um procedimento para cálculo de  $\Pi_m$ , porém do ponto de vista prático, é suficiente obtê-lo do gráfico a partir da maior distância entre o perfil e a função logarítmica.

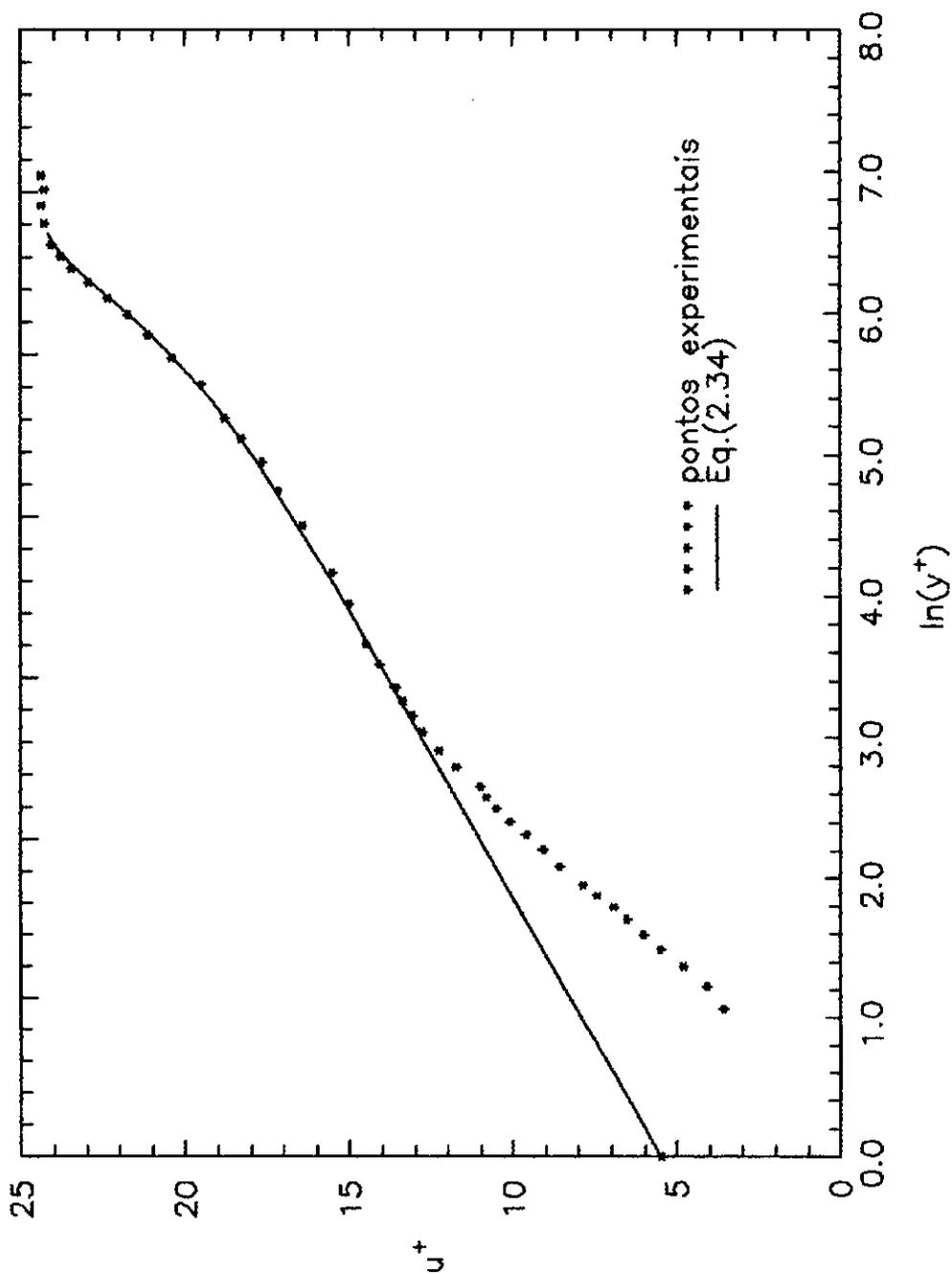


Fig.7. Comparação entre os dados experimentais e a Eq.(2.34).  
Re. 2809.  
Dados de Blackwell [5].

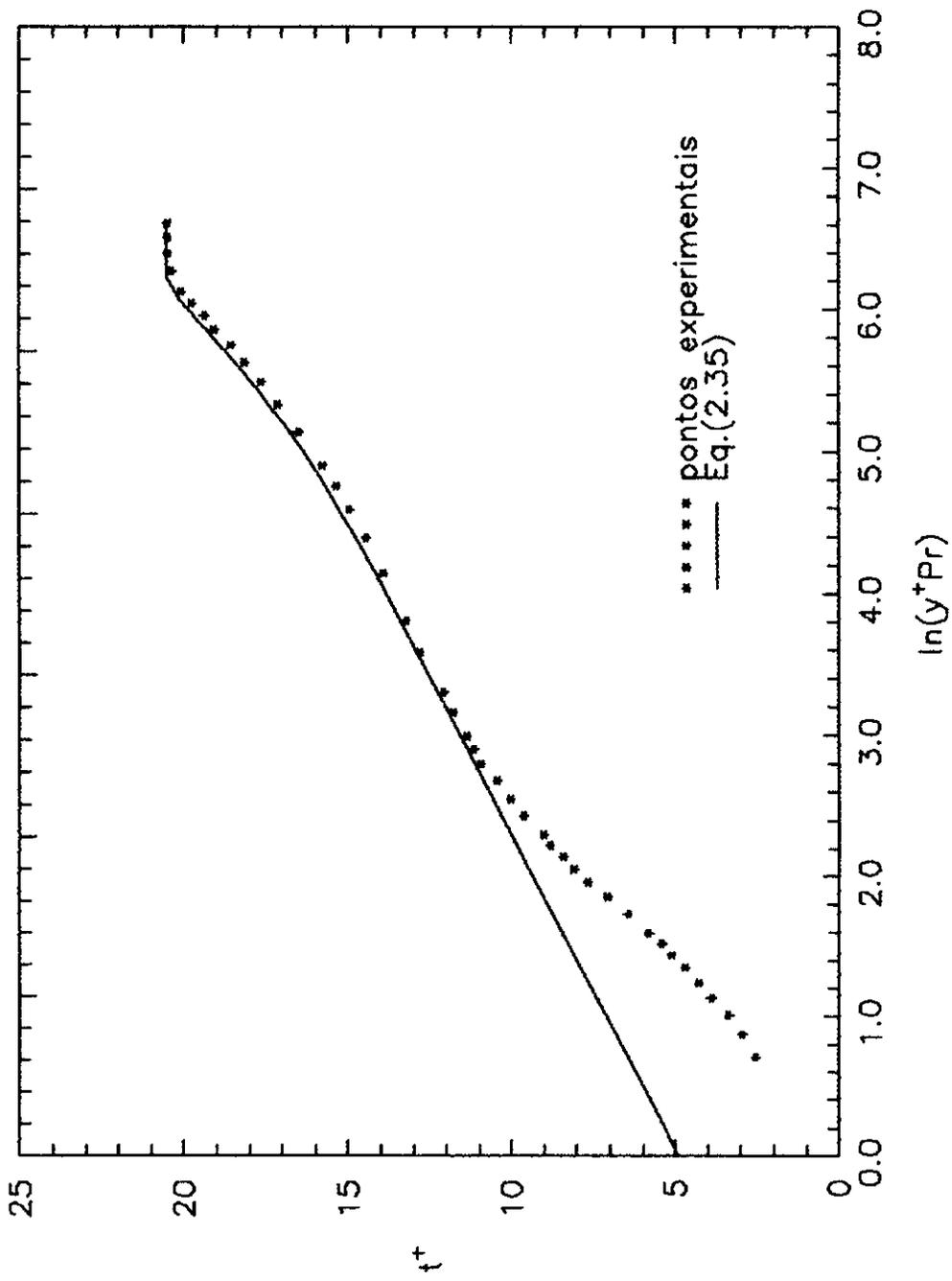


Fig.8. Comparação entre os dados experimentais e a Eq.(2.35).  
 Re<sub>A</sub> 3008.  
 Dados de Blackwell.

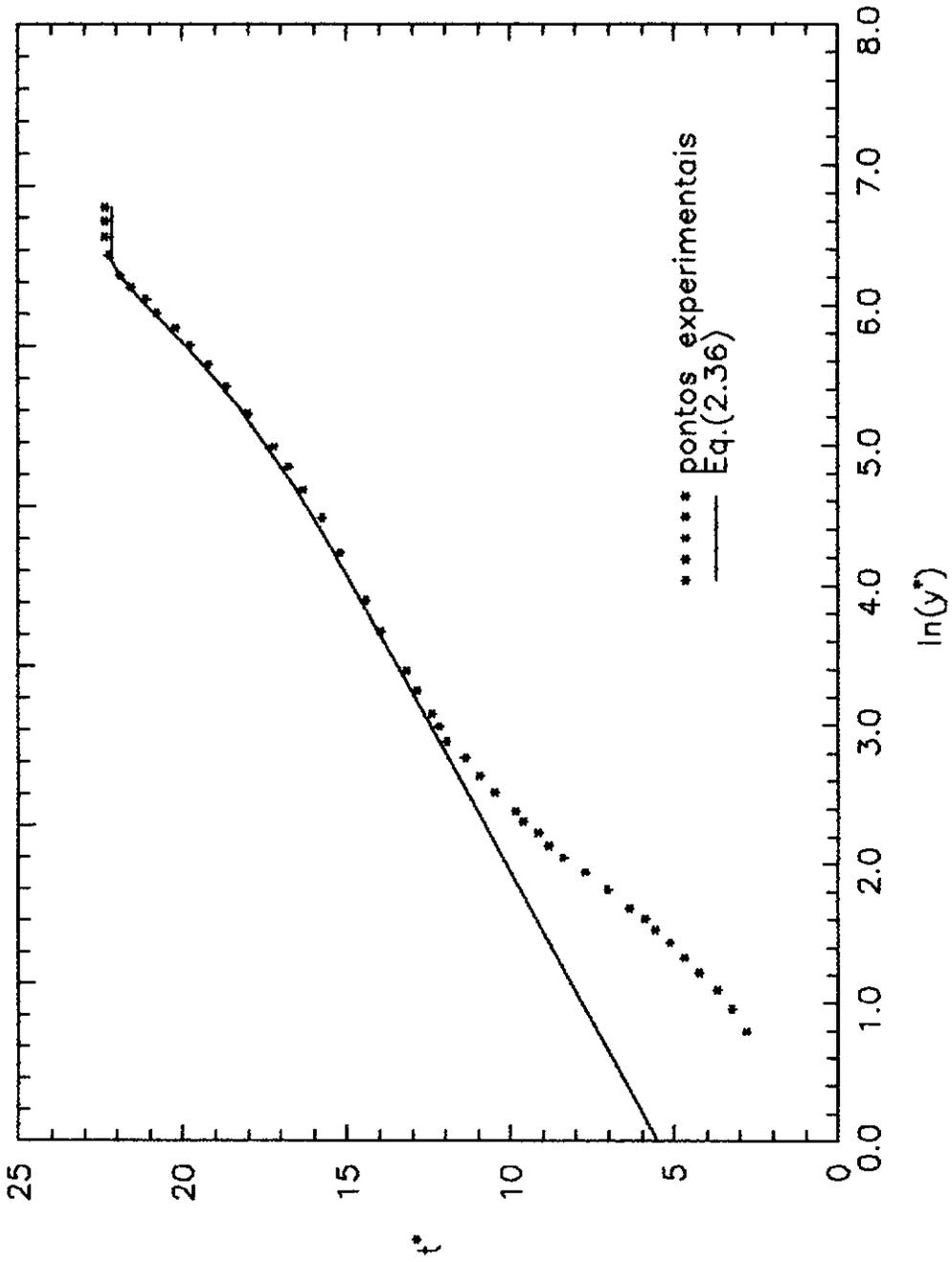


Fig.9. Comparação entre os dados experimentais e a Eq.(2.36).  
 $Re_A$  3008.  
 Dados de Blackwell [5].

que em cada caso são equações para  $Cf$  ou  $St$  em função dos demais parâmetros do escoamento.

A Eq.(2.37) é conhecida como a *equação do atrito superficial*. Por analogia chamou-se a Eq.(2.38) de *equação do calor superficial* e a Eq.(2.39) de *equação do número de Stanton*. A aplicação destas equações em conjunto com as de conservação da quantidade de movimento e de energia na forma integral — na solução das quais pode-se utilizar os perfis de velocidade e temperatura propostos — é uma maneira precisa de se obter os valores locais de  $Cf$  e  $St$ . A contraposição das soluções clássica e alternativa do problema térmico apresenta duas vantagens para esta última:

- evita a propagação de erro decorrente do cálculo de  $Cf$  para o cálculo de  $St$ ,
- sendo essas soluções de natureza numérica, a necessidade da obtenção do  $Cf$  exigirá, da primeira, um dispêndio de recursos computacionais algo como duas vezes maior.

## Capítulo 3

# O EFEITO DA TRANSPIRAÇÃO

Introduzidos os conceitos fundamentais de camada limite turbulenta pode-se agora voltar a atenção para o principal objetivo deste trabalho, a *camada limite turbulenta com transpiração*. A maneira pela qual se fará esta abordagem é similar à apresentada na seção anterior: serão deduzidas as *Lei da Parede* e *Lei da Esteira* aplicadas ao problema e se fará a combinação das mesmas através das propriedades logarítmicas da região completamente turbulenta. Em outras palavras, o que se buscará são transformações que façam os perfis do caso com transpiração recaírem sobre os perfis para escoamento sobre parede sólida e, desta forma, utilizar expressões como as Eqs.(2.34), (2.35) e (2.36) para descrever os perfis transformados.

A fim de evitar sessões muito longas, neste capítulo serão abordados em separado o problema dinâmico e o térmico.

## A Dinâmica do Problema

Antes de apresentar a abordagem do problema, faz-se necessário neste ponto uma análise crítica dos dados experimentais. No capítulo anterior, o estudo foi baseado nos dados experimentais de Blackwell [5], os quais apresentam uma excelente qualidade

— como atesta o pequeno espalhamento encontrado nas figuras — e concordam muito bem com os parâmetros  $A$  e  $k_m$  comumente citados na literatura ( $A = 5,5$  e  $k_m = 0,41$ ). Por estas razões foram empregados neste trabalho na abordagem do escoamento sobre placa impermeável.

Para a análise do caso com transpiração ter-se-á que recorrer aos experimentos de Simpson [44] e Whitten [46] os quais apresentam valores de  $Cf$  medidos que diferem em até 15% dos valores mais aceitos atualmente. Além disso apresentam um espalhamento consideravelmente maior que os de Blackwell, como atesta a Fig.10. Segundo Simpson [42], os valores de  $k_m$  e  $A$  que melhor se ajustam aos seus dados são 0,44 e 6,1, respectivamente, e será necessário considerar na análise estes mesmos valores para verificação da teoria proposta.

### A Região Interna

Ao apresentar as equações simplificadas para a região interna do caso com placa sólida, sob a argumentação de que devido as condições de não deslizamento e de impermeabilidade a velocidade tende a se anular nas proximidades da parede, foram desconsiderados os termos de inércia das equações da quantidade de movimento e da energia. Nos casos de camada limite sobre placa porosa esta consideração perde validade em se tratando da componente da velocidade perpendicular à parede e portanto, as equações da região interna neste caso devem contemplar os termos de inércia e convecção referentes a esta componente. À luz do que foi exposto, e desconsiderando variações de  $V$  na direção  $y$ , que são de segunda ordem, dizemos que

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = v_w \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad (3.1)$$

que integrando com a condição de contorno Eq.(2.2) e dividindo por  $\rho u_\tau^2$  fornece

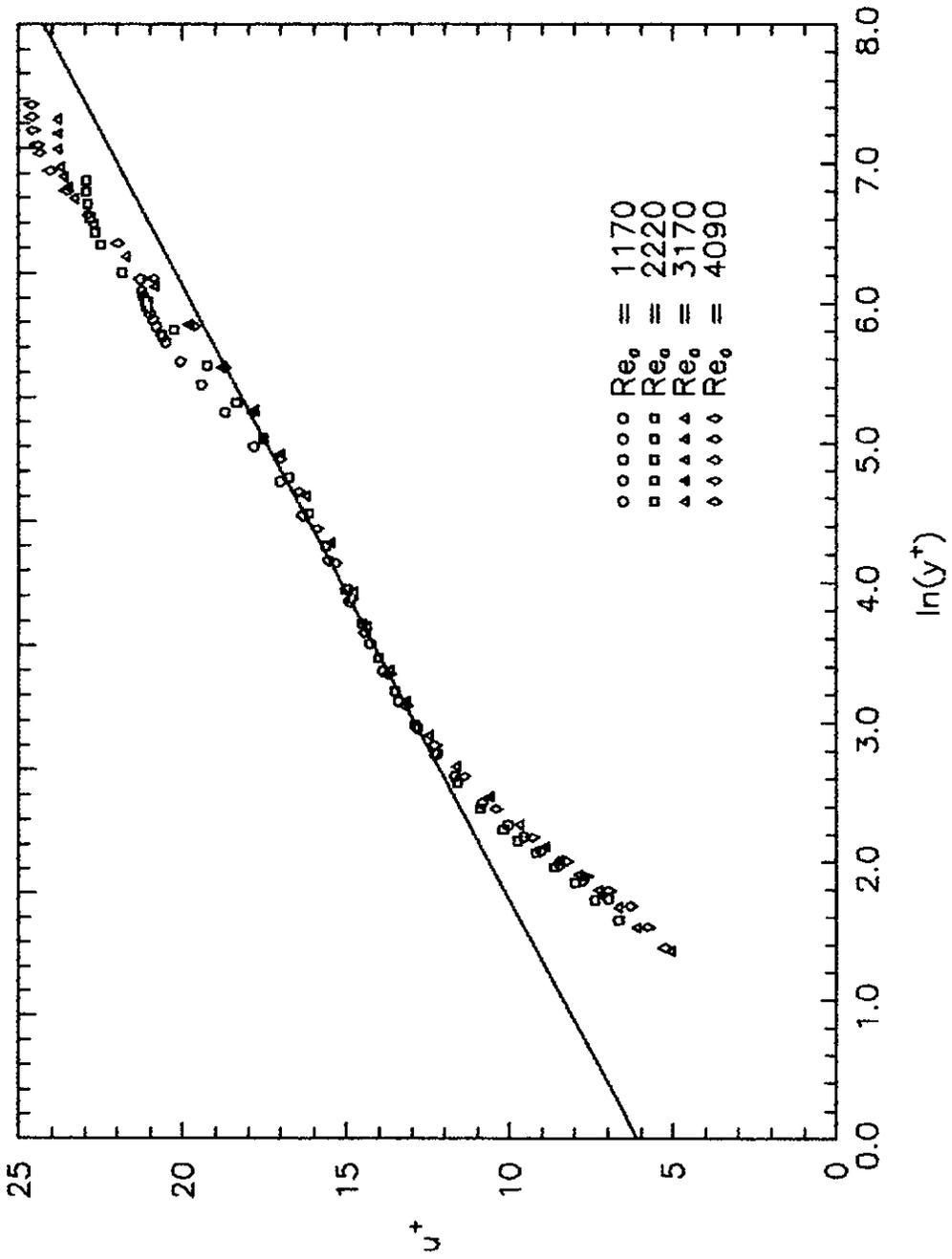


Fig.10. Lei da Parede.  
 Dados de Simpson a partir de Whitten [46].

$$\tau = v_w^+ u_w^+ + 1 \quad . \quad (3.2)$$

Aplicando o modelo de comprimento de mistura — Eq.(2.15) — e integrando novamente obtém-se

$$\frac{2}{u_w^+} \left[ \sqrt{1 + u^+ v_w^+} - \sqrt{1 + u_a^+ v_w^+} \right] = \frac{1}{k_m} \ln \frac{y^+}{y_a^+} \quad , \quad (3.3)$$

na qual já se encontra substituída uma condição de contorno genérica: para  $y^+ = y_a^+$ ,  $u^+ = u_a^+$ . Verifica-se experimentalmente que  $k_m$  não varia com a taxa de transpiração [20,33,39,41,43].

A determinação do termo independente da Eq.(3.3) carece de uma boa concordância entre os autores. As referências [4,33,39,43] contêm propostas diversas, as quais apresentam valores sensivelmente diferentes entre si. Estas diferenças devem ser decorrentes dos diferentes valores experimentais de  $Cf$  utilizados em cada uma. No entanto, como se verá a seguir, para solução do problema térmico esta discussão é irrelevante. Simpson obteve muito bons resultados adotando  $y_a^+ = u_a^+ = 11$ , independentemente do valor de  $v_w^+$ , Fig.11. A seguir, apresenta-se também a proposta de Black & Sarnecki [4] que servirá de base para a solução do perfil de temperatura.

Observando os perfis de velocidade Fig.12, verifica-se que a transição da subcamada laminar para a região completamente turbulenta se dá numa faixa determinada e restrita de valores de  $u^+$ , a qual é tomada como sendo um valor único. Este valor é determinado a partir do caso sem transpiração, por meio do cálculo da interseção entre as expressões dos perfis destas regiões, quais sejam,

$$u^+ = y^+ \quad (3.4)$$

$$u^+ = \frac{1}{k_m} \ln y^+ + A \quad . \quad (3.5)$$

O valor de  $u^+$  que satisfaz ambas as equações é 11,7, que se adota como  $u_a^+$ .

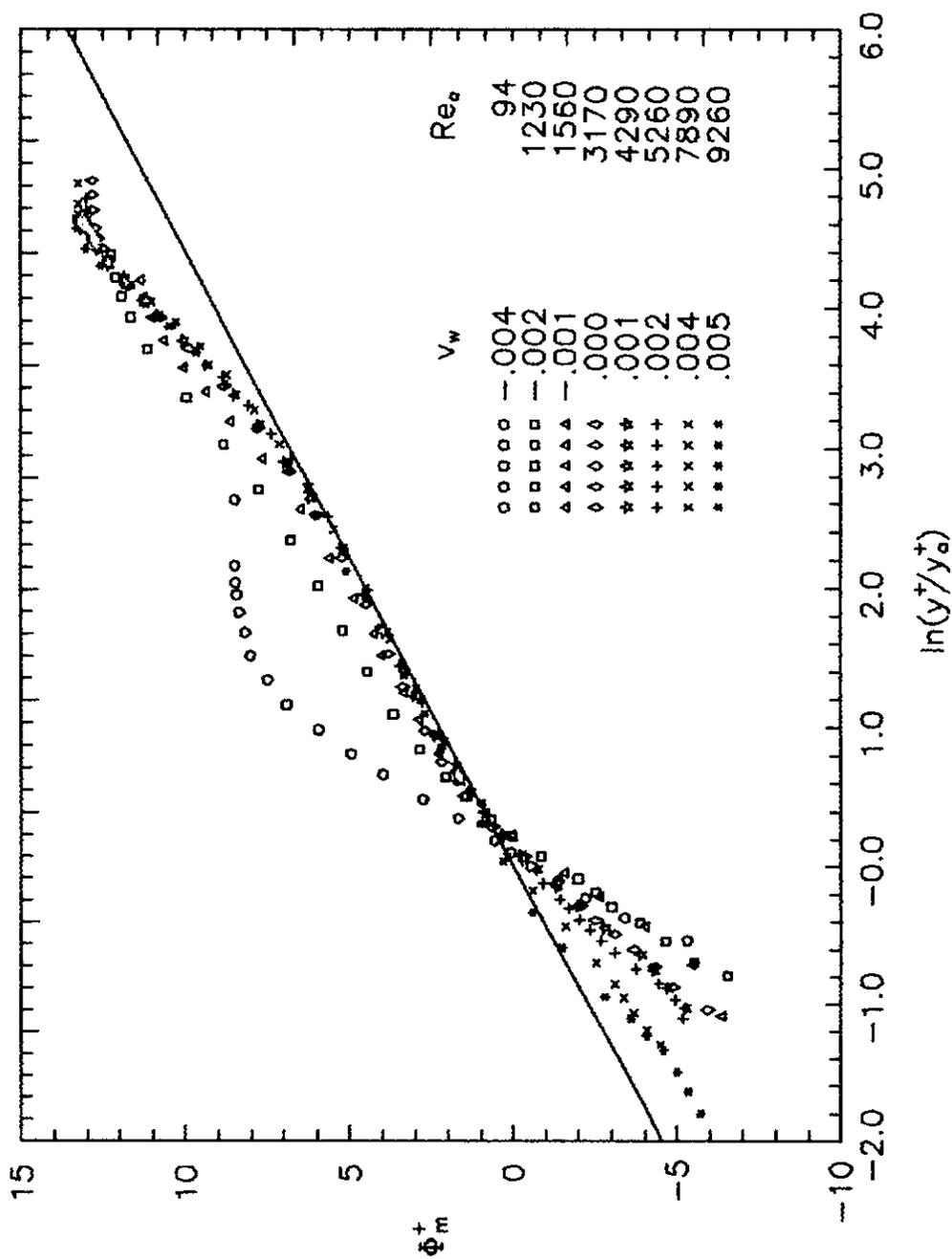


Fig.11. A Lei da Parede para escoamentos com transpiração.  
Proposta de Simpson.  
Dados de Simpson a partir de Whitten [46].

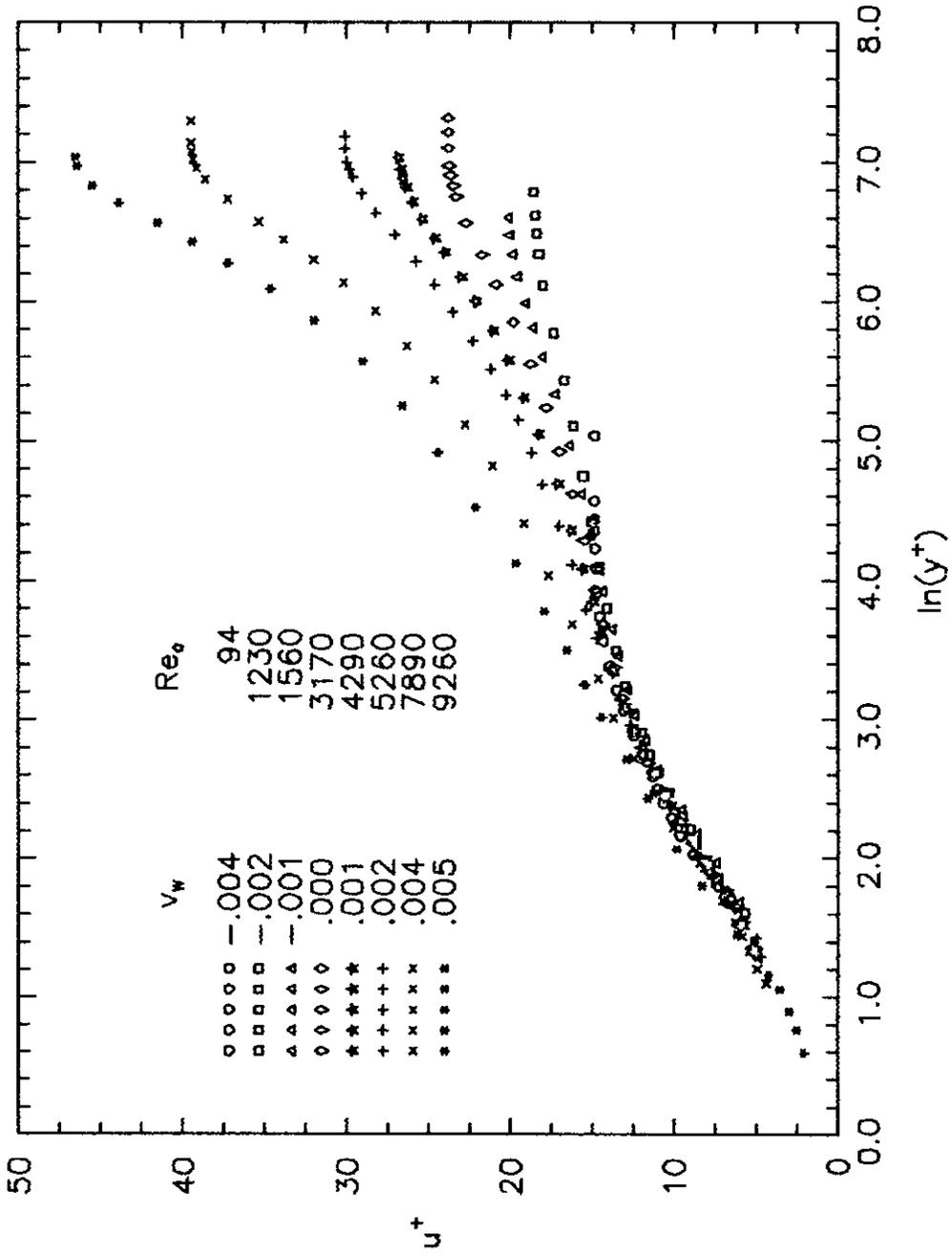


Fig.12. Perfis de velocidade para diferentes taxas de transpiração.  
 Dados de Simpson a partir de Whitten [46].

O valor de  $y_a^+$  é obtido então através da subcamada laminar pela aplicação do modelo de tensões laminares à Eq.(3.2), com a condição de contorno  $u^+(0) = 0$ , donde vem:

$$u^+ = \frac{1}{v_w^+} \left( \epsilon v_w^+ y^+ - 1 \right) \quad , \quad (3.6)$$

e portanto  $y_a^+$  assume a forma

$$y_a^+ = \frac{\ln v_w^+ u_a^+ + 1}{v_w^+} \quad . \quad (3.7)$$

A referência [43] apresenta um excelente sumário das expressões propostas para o perfil de velocidades em camada limite turbulenta com transpiração. Um aprofundamento nesta área vai além do interesse deste trabalho. Para o que segue é suficiente mostrar que para a região interna existe uma transformação  $F$  tal que

$$F_m(V_w, U, u_\tau) = f_m \left( \frac{y u_\tau}{\nu} \right) \quad . \quad (3.8)$$

onde  $f_m$  assume formato logarítmico conforme foi mencionado no início da seção. A Eq.(3.7) é conhecida como a *Lei da Parede* aplicada aos casos com injeção e sucção, e uma verificação de sua validade é mostrada na Fig.13.

### A Região Externa

Como uma extensão lógica da região interna, para a *camada externa* buscou-se uma transformação que fizesse os perfis para diferentes taxas de transpiração colap-

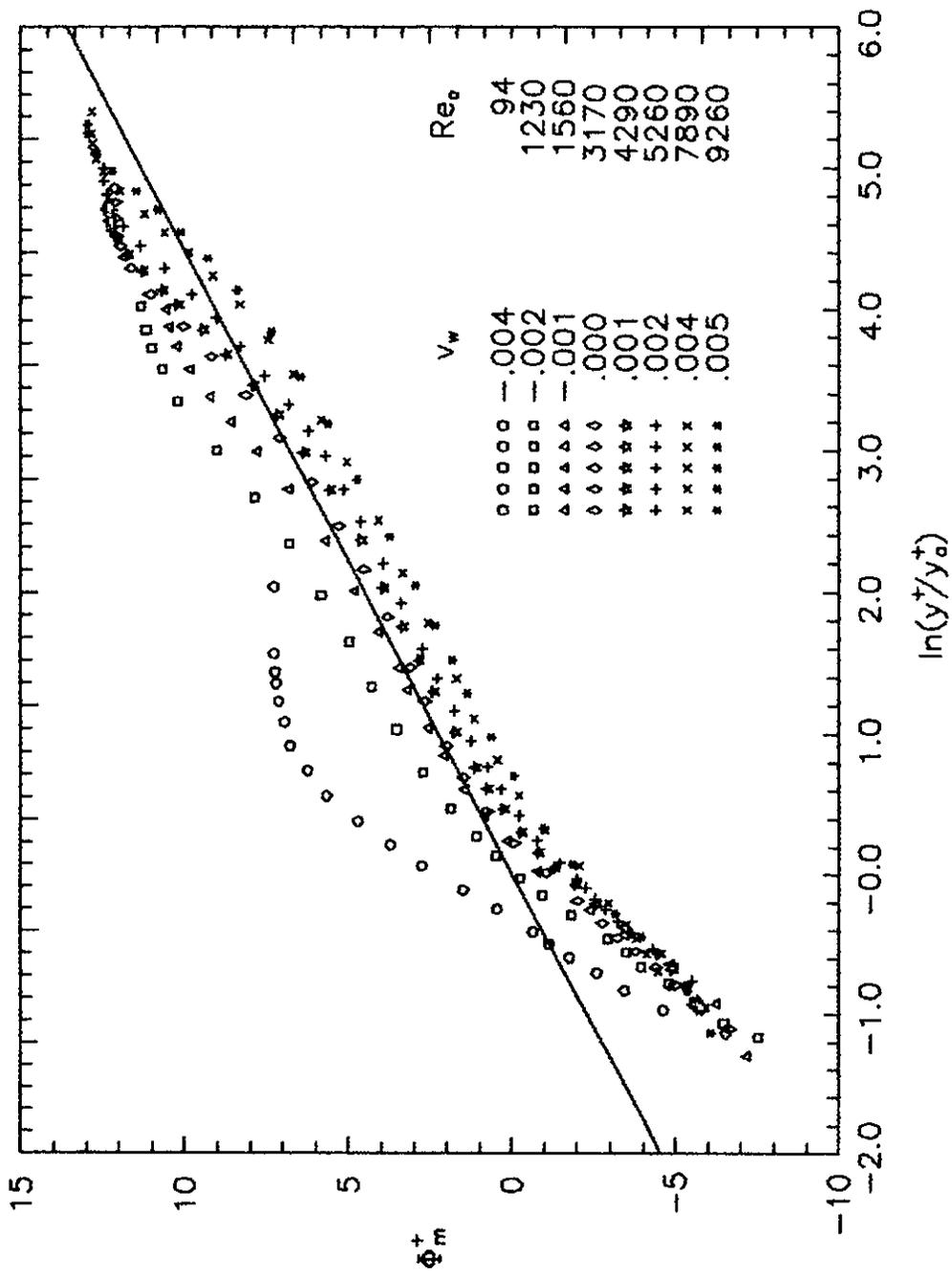


Fig.13. A Lei da Parede para escoamentos com transpiração.  
Proposta de Black and Sarnecki.  
Dados de Simpson a partir de Whitten [46].

sarem com o do caso de parede impermeável; por hipótese:

$$G_m(V_w, U, U_\infty, u_r) = g_m \left( \frac{y}{\delta_m} \right) \quad . \quad (3.9)$$

As primeiras abordagens visando a obtenção de perfis de velocidade começaram por desconsiderar a influência da transpiração sobre esta região incorrendo em grandes imprecisões [31]. A partir de então, esta influência passou a ser considerada e alguns trabalhos se seguiram discorrendo sobre a região externa de escoamentos com injeção [33,40,45]. Dentre estes, o de Stevenson [40] foi muito bem sucedido ao propor que  $G_m$  pudesse ser escrita como:

$$F_m(V_w, U, u_r) - F_m(V_w, U_\infty, u_r) = g_m \left( \frac{y}{\delta_m} \right) \quad , \quad (3.10)$$

ou seja, a transformação aplicada à região externa pode ser escrita em termos da transformação obtida para a região interna.

Substituindo Eq.(3.3) em Eq.(3.10) obtém-se

$$\frac{2}{v_w^+} \left[ \sqrt{1 + u_\infty^+ v_w^+} - \sqrt{1 + u^+ v_w^+} \right] = g_m \left( \frac{y}{\delta_m} \right) \quad , \quad (3.11)$$

a qual se denominou *Lei da Esteira* aplicada aos escoamentos com injeção e sucção. A Fig.14 demonstra a validade da Eq.(3.11).

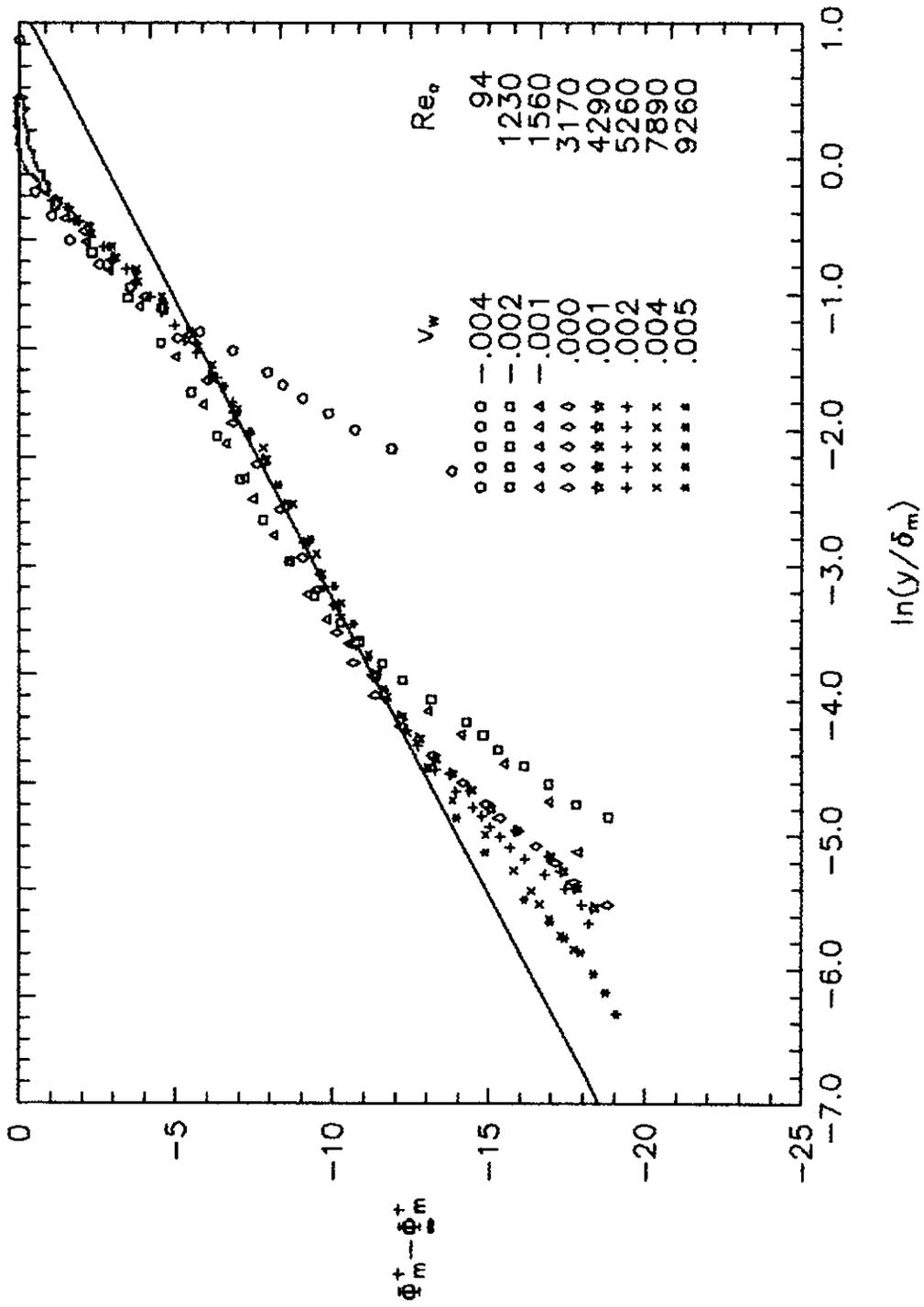


Fig.14. A Lei da Esteira para escoamentos com transpiração. Dados de Simpson a partir de Whitten [46].

## O Perfil de Velocidade e o Coeficiente de Atrito

Encontradas as *Lei da Parede* e *Lei da Esteira* para escoamentos com transpiração, pode-se combiná-las através das propriedades logarítmicas da função  $f_m$ , nos moldes do que foi feito para escoamentos sobre superfície impermeável, encontrando:

$$F(V_w, U, u_r) = f_m \left( \frac{y u_r}{\nu} \right) + h_m \left( \frac{y}{\delta_m} \right) \quad , \quad (3.12)$$

ou de forma detalhada

$$\frac{2}{v_w^+} \left[ \sqrt{1 + u^+ v_w^+} - \sqrt{1 + u_a^+ v_w^+} \right] = \frac{1}{k_m} \ln \frac{y^+}{y_a^+} + \frac{\Pi_m}{k_m} w \left( \frac{y}{\delta_m} \right) \quad . \quad (3.13)$$

Pode-se ainda isolar  $u$  e obter a expressão

$$u^+ = \left[ \frac{1}{k_m} \ln \frac{y^+}{y_a^+} + \frac{\Pi_m}{k_m} w \left( \frac{y}{\delta_m} \right) \right]^2 \frac{v_w^+}{4} + \left[ \frac{1}{k_m} \ln \frac{y^+}{y_a^+} + \frac{\Pi_m}{k_m} w \left( \frac{y}{\delta_m} \right) \right] \sqrt{1 + u_a^+ v_w^+} + u_a^+ \quad . \quad (3.14)$$

A expressão (3.13) fornece uma equação para  $u_r$  pela simples substituição do par ordenado  $y = \delta_m$  e  $u = U_\infty$ :

$$1 = u_r \left[ \left( \frac{1}{k_m} \ln \frac{\delta_m u_r}{\nu y_a^+} + \frac{2\Pi_m}{k_m} \right)^2 \frac{v_w^+}{4} + \left( \frac{1}{k_m} \ln \frac{\delta_m u_r}{\nu y_a^+} + \frac{2\Pi_m}{k_m} \right) \sqrt{1 + u_a^+ v_w^+} + u_a^+ \right] \quad , \quad (3.15)$$

que é a equação do atrito superficial aplicada aos casos com injeção e sucção de fluido.

### O Problema Térmico

Diferentemente do problema cinético, o caminho clássico é abordar o problema térmico em escoamentos com transpiração com vistas a obter diretamente o número de Stanton através de uma correção no coeficiente de atrito. É neste ponto que o presente trabalho toma uma direção bem distinta dos trabalhos anteriores. Ao invés de obter  $St$  a partir de um certo fator de analogia de Reynolds, optou-se por aplicar o modelo de duas regiões para a camada limite térmica turbulenta com transpiração, motivados pelos excelentes resultados mostrados nas seções anteriores.

### A Região Interna

Partindo da equação de conservação da energia, apresenta-se para a região interna da camada limite a equação:

$$\frac{\partial \dot{Q}''}{\partial y} = -\rho c_p V_w \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.16)$$

com a condição de contorno

$$\dot{Q}''(0) = \dot{Q}_w'' \quad , \quad (3.17)$$

que integrando e transformando convenientemente resulta em

$$\dot{q}'' = t^+ v_w^+ + 1 \quad . \quad (3.18)$$

Utilizando o modelo de comprimento de mistura, Eq.(2.16) obtém-se a equação

$$k_m k_t y^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial t}{\partial y} = v_w \frac{\partial t}{\partial y} \quad . \quad (3.19)$$

Substituindo a expressão obtida para o perfil de velocidade, Eq.(3.14), tem-se como solução

$$\frac{k_m}{k_t} \frac{2}{v_w^+} \left\{ \left( \frac{v_w^+ t^+ + 1}{v_w^+ t_b^+ + 1} \right)^{\frac{k_t}{2k_m}} \left[ \frac{v_w^+}{2} \left( \frac{1}{k_m} \ln \frac{y_a^+}{y_b^+ Pr} \right) + \sqrt{1 + v_w^+ u_a^+} \right] - \sqrt{1 + v_w^+ u_a^+} \right\} = \frac{1}{k_t} \ln \frac{y^+ Pr}{y_b^+ Pr} \quad , \quad (3.20)$$

na qual já se encontra substituída uma condição de contorno genérica ( $y_b^+, t_b^+$ ).

Note-se que esta expressão se reduz a Eq.(2.18) quando  $v_w$  tende a zero. A Eq.(3.20) além de complexa, possui o mesmo inconveniente da Eq.(2.19), ou seja, a dependência com relação a  $u_r$  ou  $Cf$ . Este inconveniente pode ser evitado através da solução alternativa apresentada na seção II e representada pela Eq.(2.25). De fato, a hipótese de que as flutuações de velocidade e temperatura sejam proporcionais não possui respaldo nas equações de perfil. No entanto, face às pequenas taxas de transpiração, pode-se considerar esta aproximação bastante razoável ainda mais diante do fato de que os valores de  $k_m$  e  $k_t$  não se alteram com a injeção ou sucção de fluido. Ademais, para esta hipótese a avaliação será deixada a cargo dos resultados finais.

A Eq.(3.18) pode ser escrita como

$$\dot{q}'' = t^* v_w^* + 1 \quad (3.21)$$

mediante os resultados obtidos através da abordagem alternativa. Considerando então a Eq.(2.26) e resolvendo a Eq.(3.21) se obtém

$$\frac{2}{v_w^*} \left[ \sqrt{1 + t^* v_w^*} - \sqrt{1 + t_b^* v_w^*} \right] = \frac{1}{k_t^*} \ln \frac{y^* Pr}{y_b^* Pr} \quad (3.22)$$

que é muito mais simples que a Eq.(3.20) — apresentando correspondência com os termos da Eq.(3.3) — e independe da solução do problema dinâmico.

Os perfis de temperatura nas variáveis  $y^+$ ,  $t^+$  e  $y^*$ ,  $t^*$  são mostrados nas Figs.15 e 16 e pode-se observar que a transição entre a subcamada laminar — onde domina a transferência de calor por condução — e a região completamente turbulenta ocorre numa faixa estreita de valores de  $t^+$  e  $t^*$ . Adotar-se-á como valores de  $t^+$  e  $t^*$  característicos da transição os que decorrem da interseção, nos caso sem transpiração, entre os perfis lineares e logarítmicos da região interna — Eqs.(2.14), (2.19), (2.24) e (2.25) respectivamente. Os valores de  $t^+$  e  $t^*$  que satisfazem estas equações são:

$$t^+ = 10,0$$

$$t^* = 11,1$$

os quais serão empregados como  $t_b^+$  e  $t_b^*$ .

As expressões para  $y_b^+$  e  $y_b^*$  são obtidas então a partir da solução para a região adjacente à parede obtida pela aplicação do modelo de Fourier às Eqs.(3.18) e (3.21):

$$t^+ = \frac{1}{v_w^+} \left( e^{v_w^+ y^+ Pr} - 1 \right) \quad (3.23)$$

e

$$t^* = \frac{1}{v_w^*} \left( e^{v_w^* y^* Pr} - 1 \right) \quad (3.24)$$

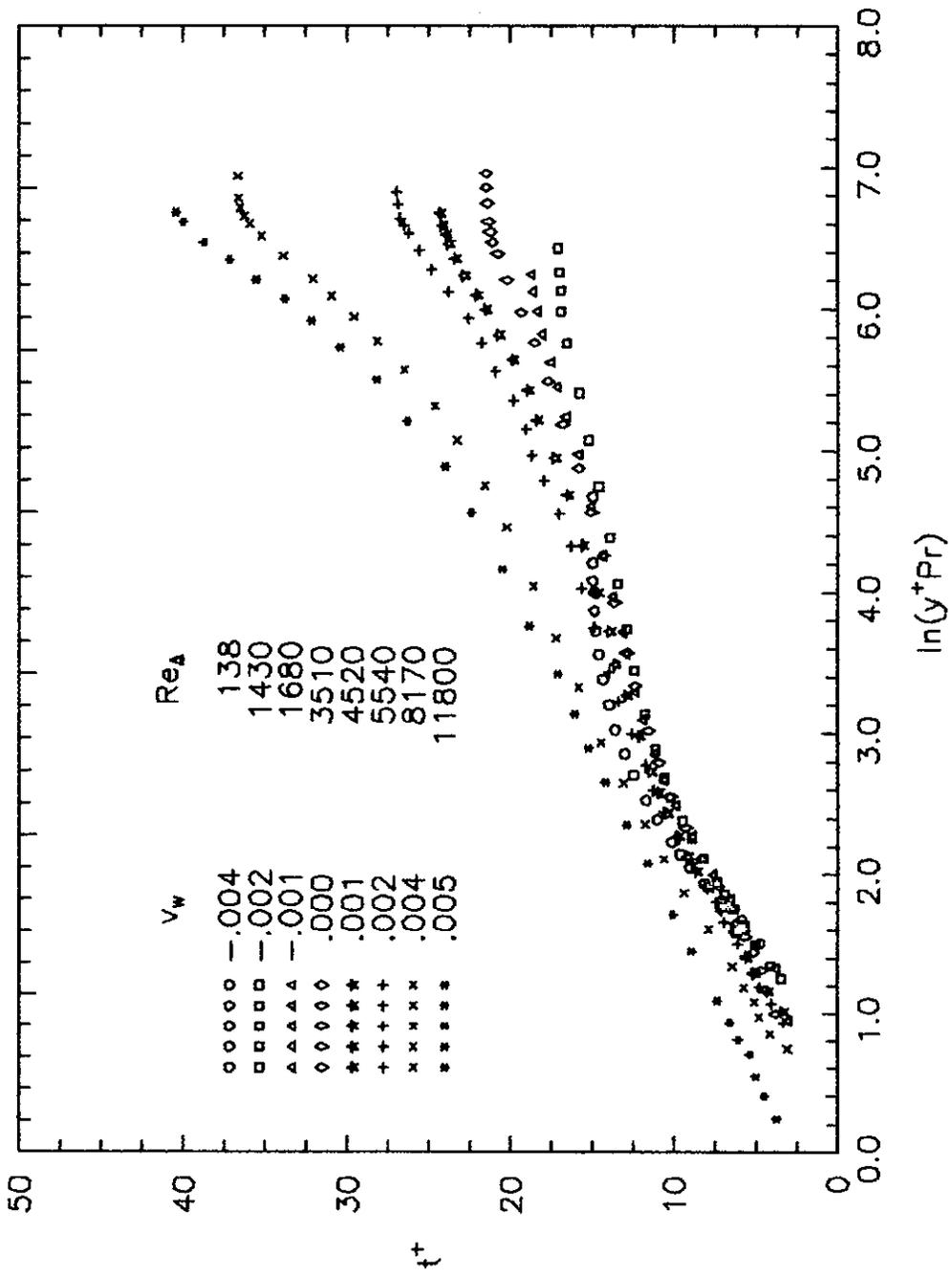


Fig.15. Perfis de temperatura para diferentes taxas de transpiração.  
 Variáveis da abordagem clássica.  
 Dados de Whitten [46].

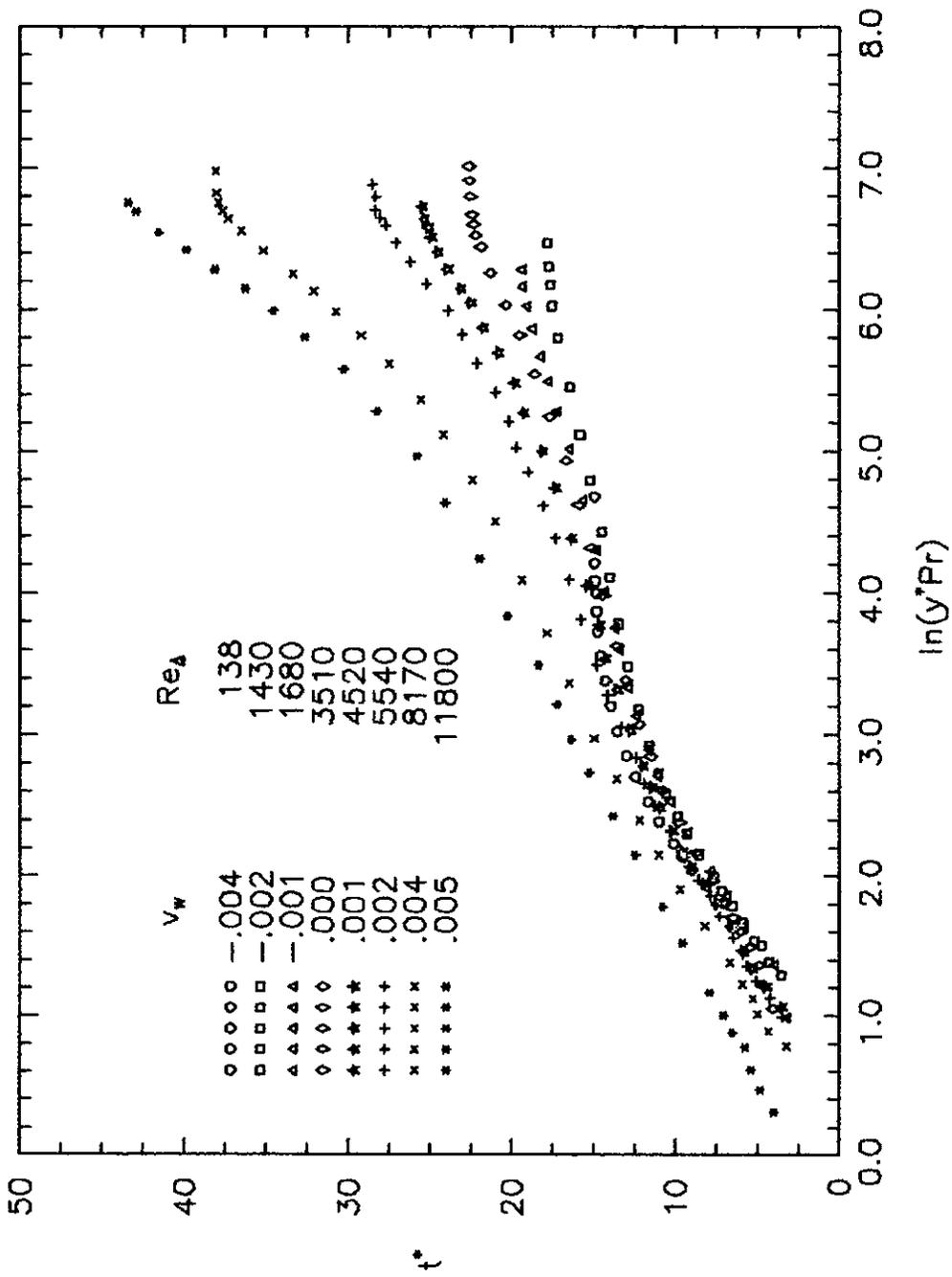


Fig.16. Perfis de temperatura para diferentes taxas de transpiração.  
 Variáveis da abordagem alternativa.  
 Dados de Whitten [46].

logo

$$y_b^+ Pr = \frac{1}{v_w^+} \ln(v_w^+ t_b^+ + 1) \quad , \quad (3.25)$$

e

$$y_b^* Pr = \frac{1}{v_w^*} \ln(v_w^* t_b^* + 1) \quad . \quad (3.26)$$

Considere-se então na Eq.(3.20) o termo

$$\log \frac{y_a^+}{y_b^+ Pr}.$$

Pelas Eqs.(3.7) e (3.25) ou pelas Figs.12 e 15 podemos observar que para ar o valor de  $y_b^+ Pr$  é muito próximo de  $y_a^+$ , levando este termo logaritmo a um valor muito pequeno. Diante deste fato, para o perfil de temperatura, a discussão acerca da melhor expressão para  $y_a^+$  perde significado.

Chamou-se o lado direito das Eqs.(3.20) e (3.22) de  $\Phi^+$  e  $\Phi^*$  respectivamente e comparou-se os seus valores teóricos com os experimentais para  $y^+ Pr$  e  $y^* Pr$  iguais a 50 — que é um valor situado mais ou menos no meio da região completamente turbulenta — nas Figs.17 e 18. Verificou-se um grande espalhamento dos pontos experimentais, no entanto as Eqs.(3.25) e (3.26) podem ser tomadas como aproximações razoáveis destes pontos posto que apresentam a mesma tendência.

O teste final é feito através das Figs.19 e 20 onde se vê que  $\Phi^+$  e  $\Phi^*$  assumem formato logarítmico na região completamente turbulenta e se agrupam para diferentes valores de  $v_w$ . Com isso então se consideram válidas as Eqs.(3.20) e (3.22) como formas de descrever o perfil de temperatura para a região interna, e pode-se afirmar que, diante do espalhamento dos pontos experimentais, ambas as soluções apresentam o mesmo padrão de qualidade.

Antes de se passar para a região externa, algumas considerações devem ser feitas com relação às soluções apresentadas nesta seção. Estas soluções se baseiam na divisão da região interna em duas sub-regiões, uma laminar (condutiva) e outra turbulenta, sem considerar uma região intermediária. Com efeito, vários autores [11,19] têm

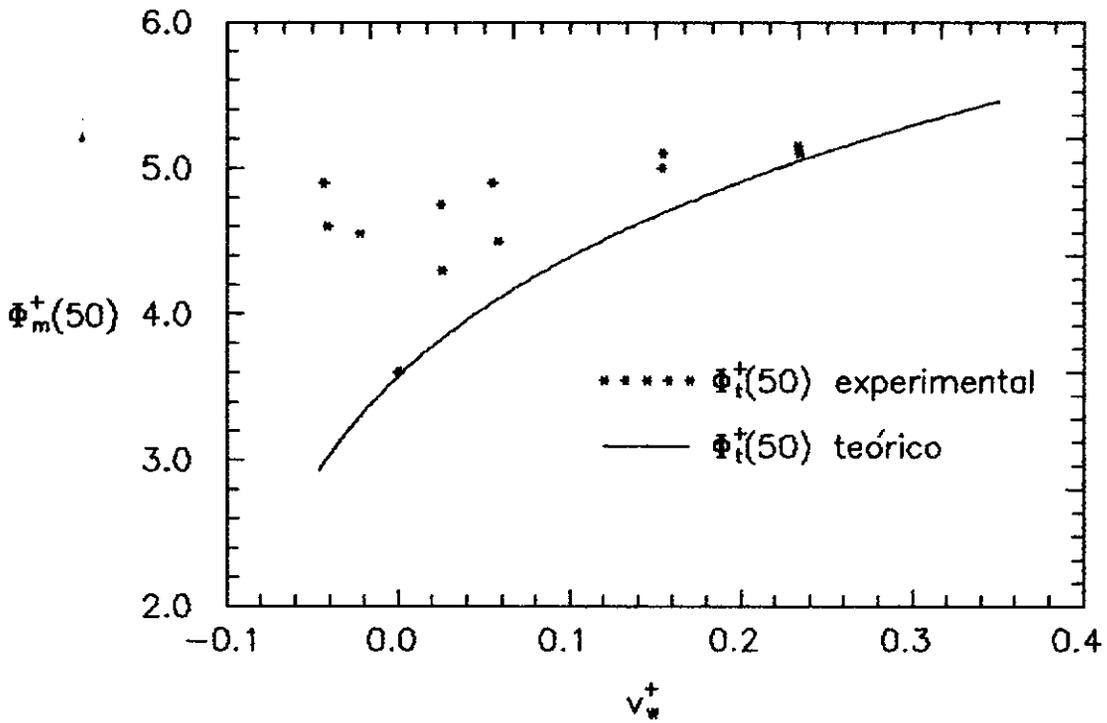


Fig.17. Análise da expressão para  $y_b^+$  - Eq.(3.25).  
Dados de Whitten [46].

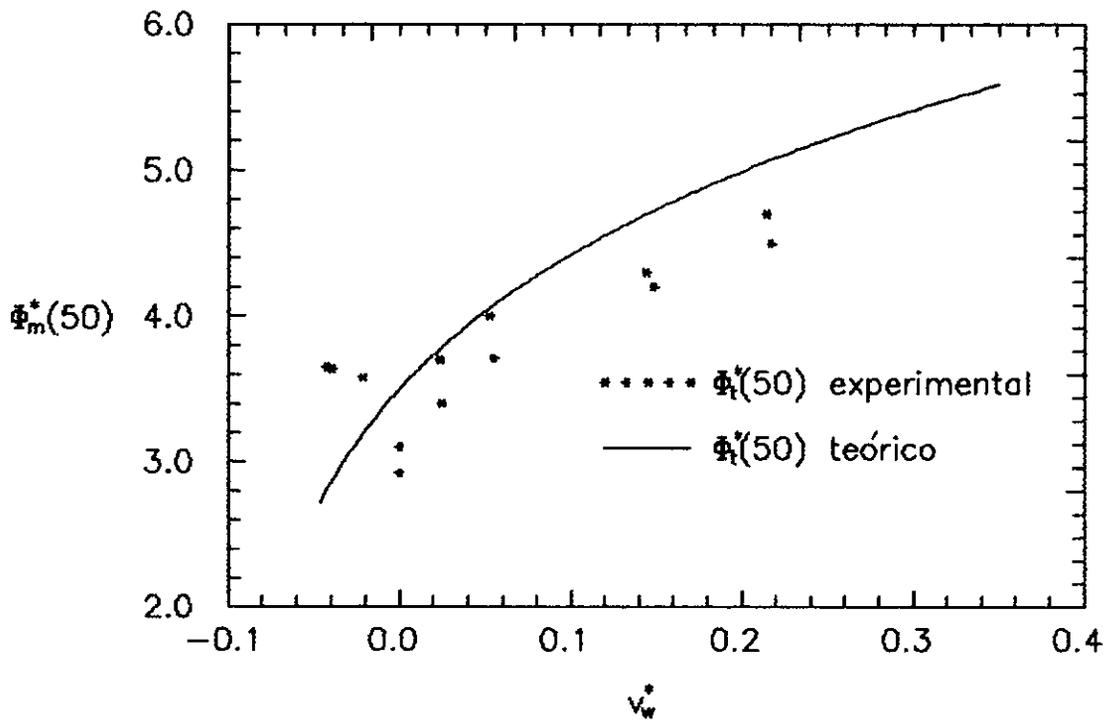


Fig.18. Análise da expressão para  $y_b^*$  - Eq.(3.26).  
Dados de Whitten [46].

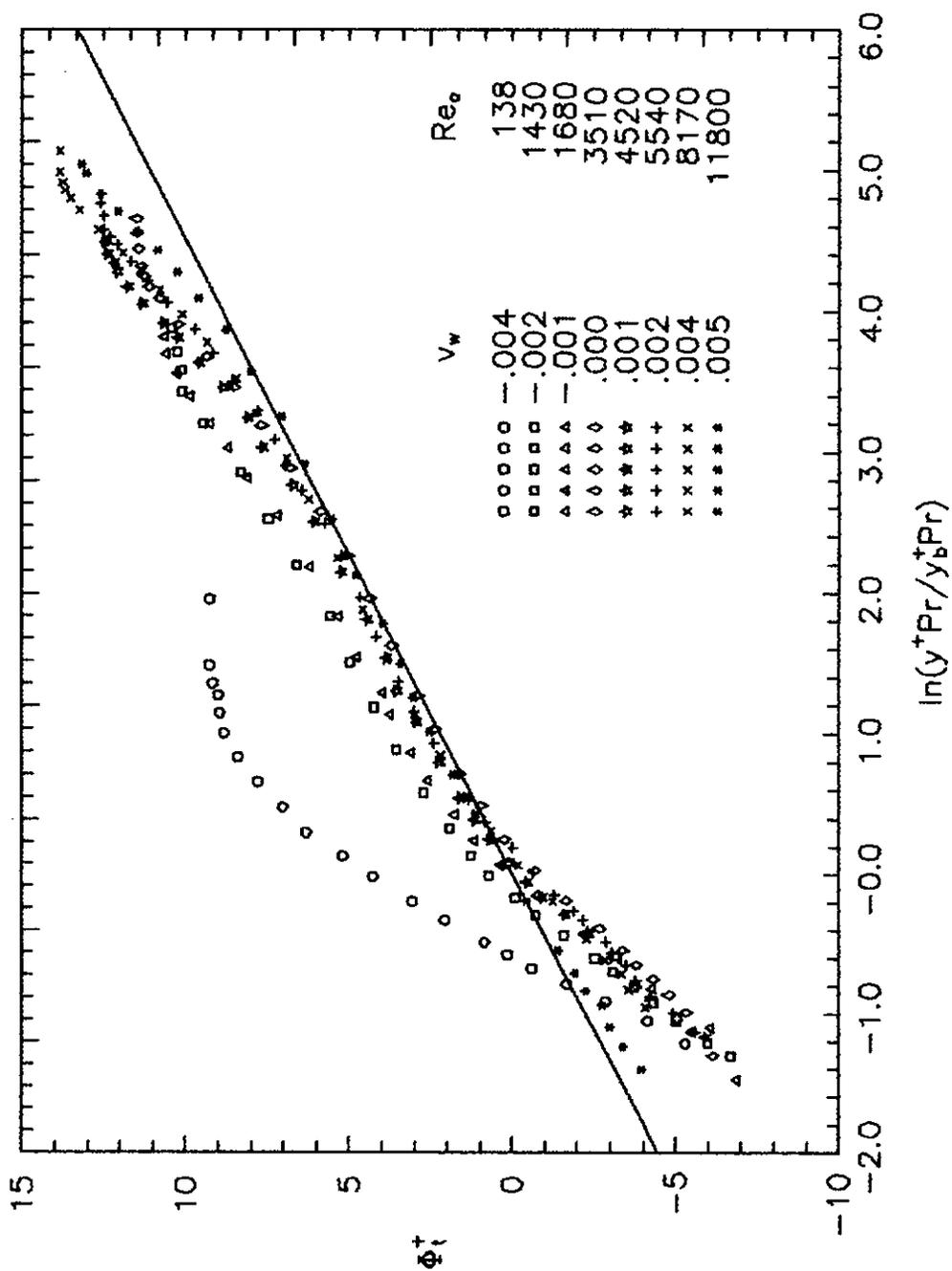


Fig.19. A Lei Térmica Clássica da Parede para escoamentos com transpiração. Dados de Whitten [46].

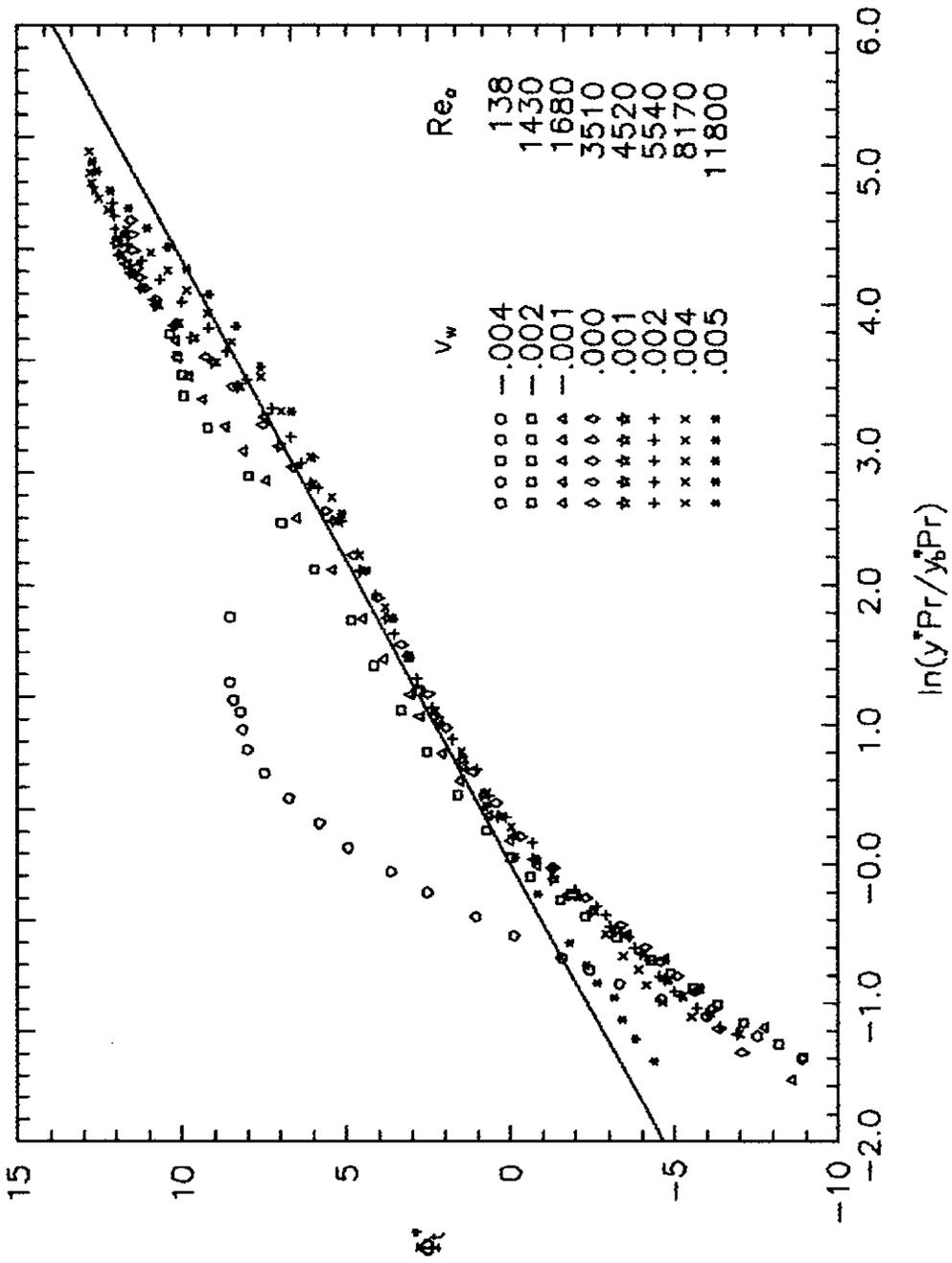


Fig.20. A Lei Térmica Alternativa da Parede para escoamentos com transpiração. Dados de Whitten [46].

afirmado que o perfil de temperatura fica melhor retratado pela adoção de uma região intermediária, conhecida como *camada de mistura*. Este trabalho não questiona esta afirmação mesmo porque para seu objetivo considerou-se desnecessário um refinamento numa região mais interna do que a completamente turbulenta, visto que corresponde a cerca de 1 ou 2 por cento de toda a camada limite. Aliás, a própria adoção de uma subcamada laminar é feita apenas como forma de propor as variáveis de similaridade, e posteriormente é empregada na determinação do termo independente das expressões logarítmicas com bons resultados. De fato, nas expressões do perfil de temperatura, nem a subcamada laminar nem a *camada de mistura* são contempladas, ficando a opção por um refinamento das mesmas a critério do leitor.

Já para as equações do coeficiente de transferência de calor, as quais se baseiam na aplicação das expressões para o perfil a um ponto externo da camada limite, fica claro que os perfis das regiões mais próximas da parede não são necessários.

### A Região Externa

Tendo encontrado uma função  $F_t$  tal que,

$$F_t(V_w, T, T_w, u_r, t_r) = f_t\left(\frac{yu_r}{\nu}, Pr\right) \quad (3.27)$$

e uma  $F'_t$  tal que

$$F'_t(V_w, T, T_w, St) = f'_t\left(\frac{yU_\infty\sqrt{St}}{\nu}, Pr\right) \quad (3.28)$$

pode-se, através dos passos descritos em [40], concluir que

$$F_t(V_w, T_\infty, T_w, u_r, t_r) - F_t(V_w, T, T_w, u_r, t_r) = g_t \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \quad , \quad (3.29)$$

e

$$F'_t(V_w, T_\infty, T_w, St) - F'_t(V_w, T, T_w, St) = g'_t \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \quad . \quad (3.30)$$

Substituindo Eqs.(3.20) e (3.22) nas Eqs.(3.29) e (3.30) respectivamente, obtém-se

$$\frac{2}{v_w^+} \left\{ \left[ \left( \frac{v_w^+ t^+ + 1}{v_w^+ t_b^+ + 1} \right)^{\frac{k_f}{2k_m}} - \left( \frac{v_w^+ t_\infty^+ + 1}{v_w^+ t_b^+ + 1} \right)^{\frac{k_f}{2k_m}} \right] \left[ \frac{v_w^+}{2} \left( \frac{1}{k_m} \ln \frac{y_a^+}{y_b^+ Pr} \right) + \sqrt{1 + v_w^+ u_a^+} \right] \right\} = g_t \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \quad (3.31)$$

e

$$\frac{2}{v_w^*} \left[ \sqrt{1 + t^* v_w^*} - \sqrt{1 + t_\infty^* v_w^*} \right] = g'_t \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \quad , \quad (3.32)$$

que se contituem nas *Lei da Esteira clássica e alternativa* aplicadas a problemas térmicos com injeção ou sucção de fluido. As Eqs.(3.31) e (3.32) são testadas nas Figs.21 e 22.

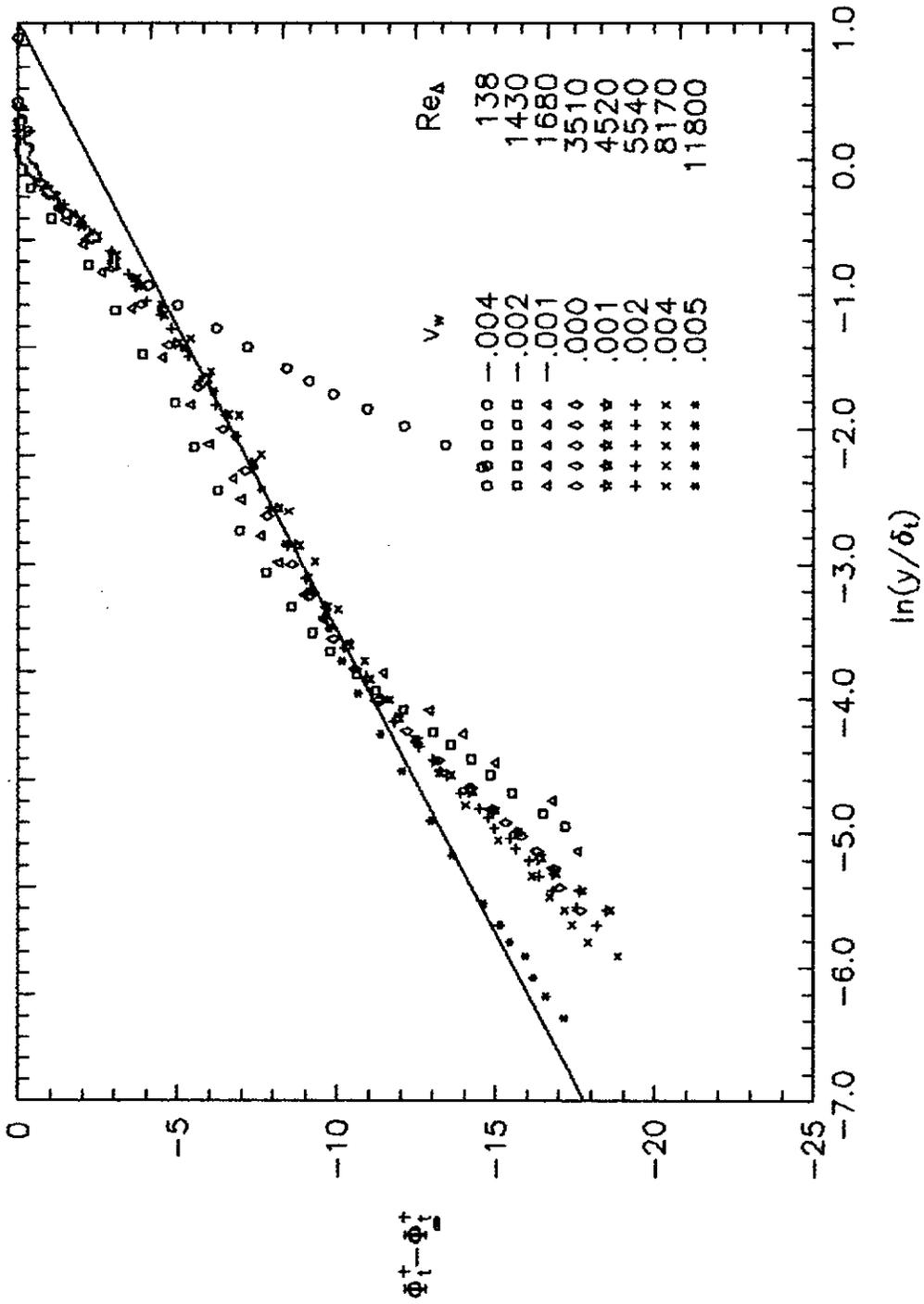


Fig.21. A Lei Térmica Clássica da Esteira para escoamentos com transpiração. Dados de Whitten [46].

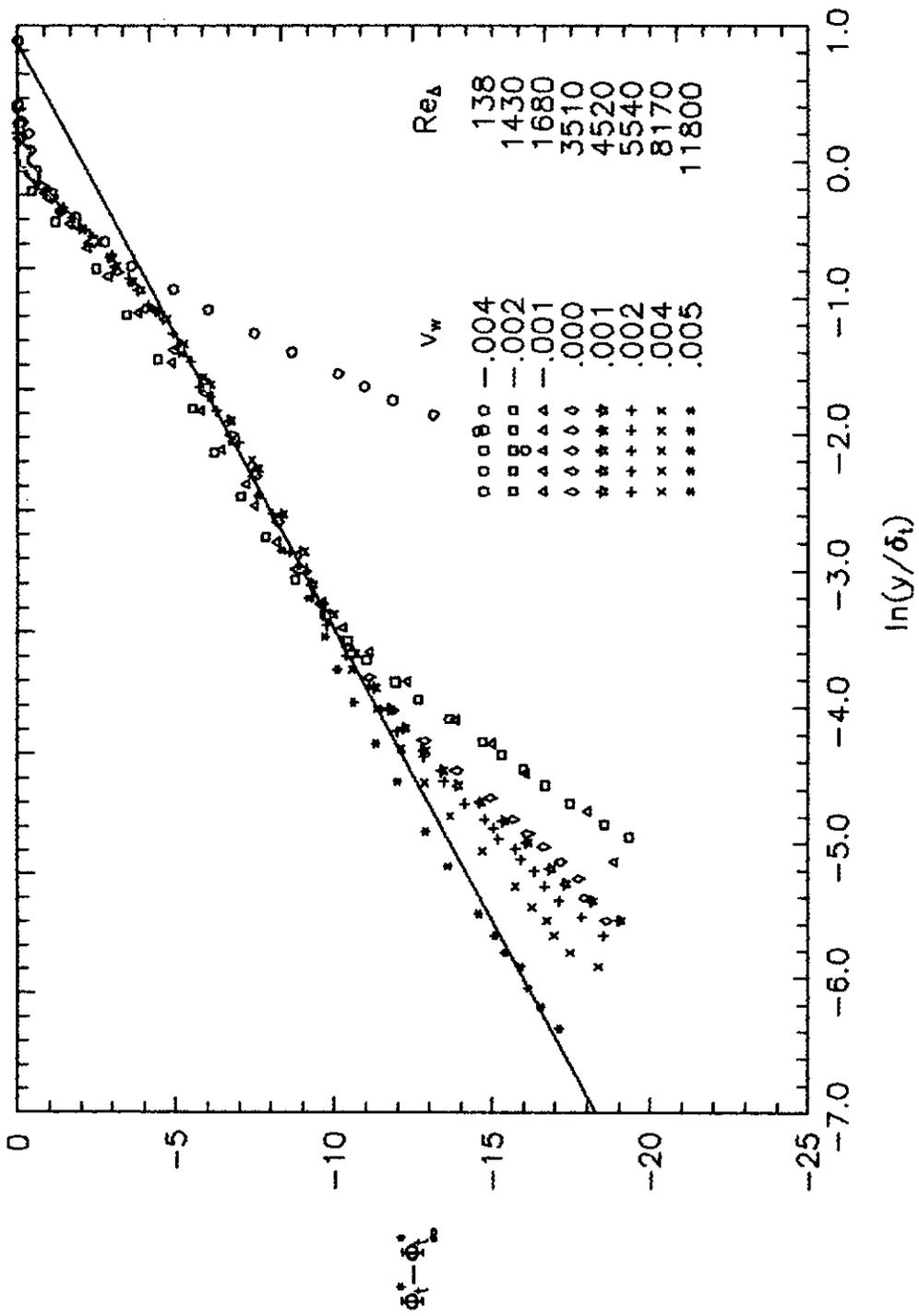


Fig.22. A Lei Térmica Alternativa da Esteira para escoamentos com transpiração. Dados de Whitten [46].

## O Perfil de Temperatura e o Coeficiente de Transferência de Calor

Pode-se então apresentar as leis fundamentais da camada limite térmica turbulenta com transpiração através de expressões como:

$$F_t(V_w, t, T_w, u_\tau, t_\tau) = f_t \left( \frac{y u_\tau}{\nu} Pr \right) + h_t \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \quad , \quad (3.33)$$

e

$$F'_t(V_w, t, T_w, St) = f'_t \left( \frac{y U_\infty \sqrt{St}}{\nu} Pr \right) + h'_t \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \quad , \quad (3.34)$$

respectivamente para as soluções clássica e alternativa, sendo  $f_t$  e  $f'_t$  logarítmicas e  $h_t$  e  $h'_t$  funções que se anulam nas proximidades da parede. As Eqs.(3.33) e (3.34) em detalhes ficam:

$$\frac{2}{v_w^+} \left\{ \left( \frac{v_w^+ t^+ + 1}{v_w^+ t_b^+ + 1} \right)^{\frac{k_t}{2k_m}} \left[ \frac{v_w^+}{2} \left( \frac{1}{k_m} \ln \frac{y_a^+}{y_b^+ Pr} \right) + \sqrt{1 + v_w^+ u_a^+} \right] - \sqrt{1 + v_w^+ u_a^+} \right\} = \frac{1}{k_m} \ln \frac{y^+ Pr}{y_b^+ Pr} + \frac{\Pi_t}{k_m} w \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \quad , \quad (3.35)$$

e

$$\frac{2}{v_w^*} \left[ \sqrt{1 + t^* v_w^*} - \sqrt{1 + t_b^* v_w^*} \right] = \frac{1}{k'_t} \ln \frac{y^* Pr}{y_b^* Pr} + \frac{\Pi'_t}{k'_t} w \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \quad . \quad (3.36)$$

Pode-se isolar  $t$  nas Eqs.(3.35) e (3.36) e então visualizar a influência de  $v_w$  no perfil de temperatura:

$$t = -\frac{t_r}{T_w - T_\infty} \frac{1}{v_w^+} + \left\{ \frac{\frac{2}{v_w^+} \left[ \frac{1}{k_m} \ln \frac{y^+ Pr}{y_b^+ Pr} + \frac{\Pi_t}{k_t} w \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \right] + \sqrt{1 + v_w^+ u_a^+}}{\frac{v_w^+}{2} \left( \frac{1}{k_m} \ln \frac{y_a^+}{y_b^+ Pr} \right) + \sqrt{1 + v_w^+ u_a^+}} \right\}^{\frac{2k_m}{k_t}} (v_w^+ t_b^+ + 1) \frac{t_r}{T_w - T_\infty} \frac{1}{v_w^+} \quad (3.37)$$

e

$$t = \sqrt{St} \left\{ \left[ \frac{1}{k_t'} \ln \frac{y^* Pr}{y_b^* Pr} + \frac{\Pi_t'}{k_t'} w \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \right]^2 \frac{v_w^*}{4} + \left[ \frac{1}{k_t'} \ln \frac{y^* Pr}{y_b^* Pr} + \frac{\Pi_t'}{k_t'} w \left( \frac{y}{\delta_t} \right) \right] \sqrt{1 + t_b^* v_w^*} + t_b^* \right\} \quad (3.38)$$

Substituindo o par ordenado  $\delta_t$  e  $T_\infty$  nas expressões acima obtêm-se as expressões para  $St$ :

equação do calor superficial

$$1 = -\frac{t_r}{T_w - T_\infty} \frac{1}{v_w^+} + \left\{ \frac{\frac{2}{v_w^+} \left[ \frac{1}{k_m} \ln \frac{\delta_t u_r Pr}{\nu y_b^+ Pr} + \frac{2\Pi_t}{k_t} \right] + \sqrt{1 + v_w^+ u_a^+}}{\left[ \frac{v_w^+}{2} \left( \frac{1}{k_m} \ln \frac{y_a^+}{y_b^+ Pr} \right) + \sqrt{1 + v_w^+ u_a^+} \right]} \right\}^{\frac{2k_m}{k_t}} (v_w^+ t_b^+ + 1) \frac{t_r}{T_w - T_\infty} \frac{1}{v_w^+} \quad (3.39)$$

e

equação do número de Stanton

$$1 = \sqrt{St} \left( \frac{1}{k_t'} \ln \frac{\delta_t U_\infty \sqrt{St} Pr}{\nu y_b^* Pr} + \frac{2\Pi_t'}{k_t'} \right)^2 \frac{v_w^*}{4} + \sqrt{St} \left[ \left( \frac{1}{k_t'} \ln \frac{\delta_t U_\infty \sqrt{St} Pr}{\nu y_b^* Pr} + \frac{2\Pi_t'}{k_t'} \right) \sqrt{1 + t_b^* v_w^*} + t_b^* \right] \quad (3.40)$$

## Capítulo 4

# ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo é dedicado a uma análise mais profunda das expressões obtidas para o perfil de temperatura, bem como, à avaliação das equações para coeficiente de transferência de calor.

Os capítulos anteriores deixaram claro a validade de se considerar a existência de uma região completamente turbulenta, e os parâmetros obtidos experimentalmente gozam de uma excelente concordância com os dados experimentais, para o caso de placa impermeável, exceto nas proximidades do bordo de ataque. Para a região externa no entanto, o ponto crítico consiste na determinação do fator de escala aplicado à função de Coles "*w*". Com efeito, para uma melhor acurácia das correlações apresentadas torna-se necessária uma análise criteriosa dos valores de  $\Pi_t$  e  $\Pi'_t$ , ou melhor, de sua dependência com relação ao  $Re_\Delta$ .

As Figs.23 e 24 mostram o desenvolvimento dos perfis de temperatura ao longo da camada limite sobre uma placa plana impermeável. Verifica-se primeiramente a formação da subcamada laminar, posteriormente, da região completamente turbulenta e por último forma-se uma distorção no perfil logaritmo que tende a aumentar a medida que a camada limite se desenvolve. As expressões propostas são válidas a partir de um certo número de  $Re_\Delta$  em que já se possa considerar a existência de uma região completamente turbulenta. As figuras sugerem que em se tratando da análise alternativa, isto ocorre para  $Re_\Delta$  mais baixos do que se verifica para a análise clássica. Esta característica é bastante interessante, e, condicionada a uma gama maior de dados experimentais, é merecedora de estudos mais detalhados. A faixa de  $Re_\Delta$  dos dados experimentais de escoamentos sobre placa impermeável empregados neste trabalho não

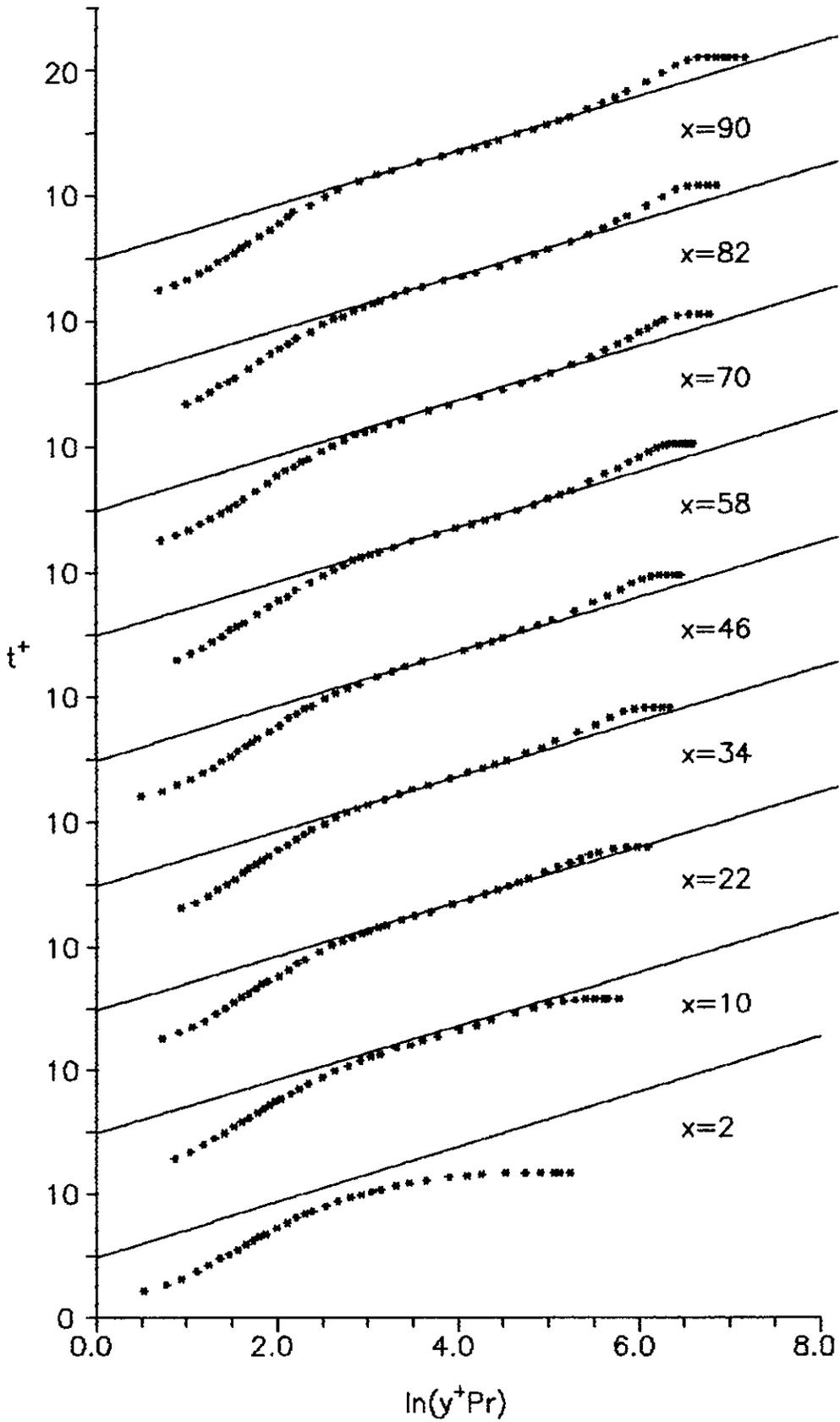


Fig.23. O desenvolvimento da camada limite térmica. Variáveis da abordagem clássica. Dados de Blackwell [5].

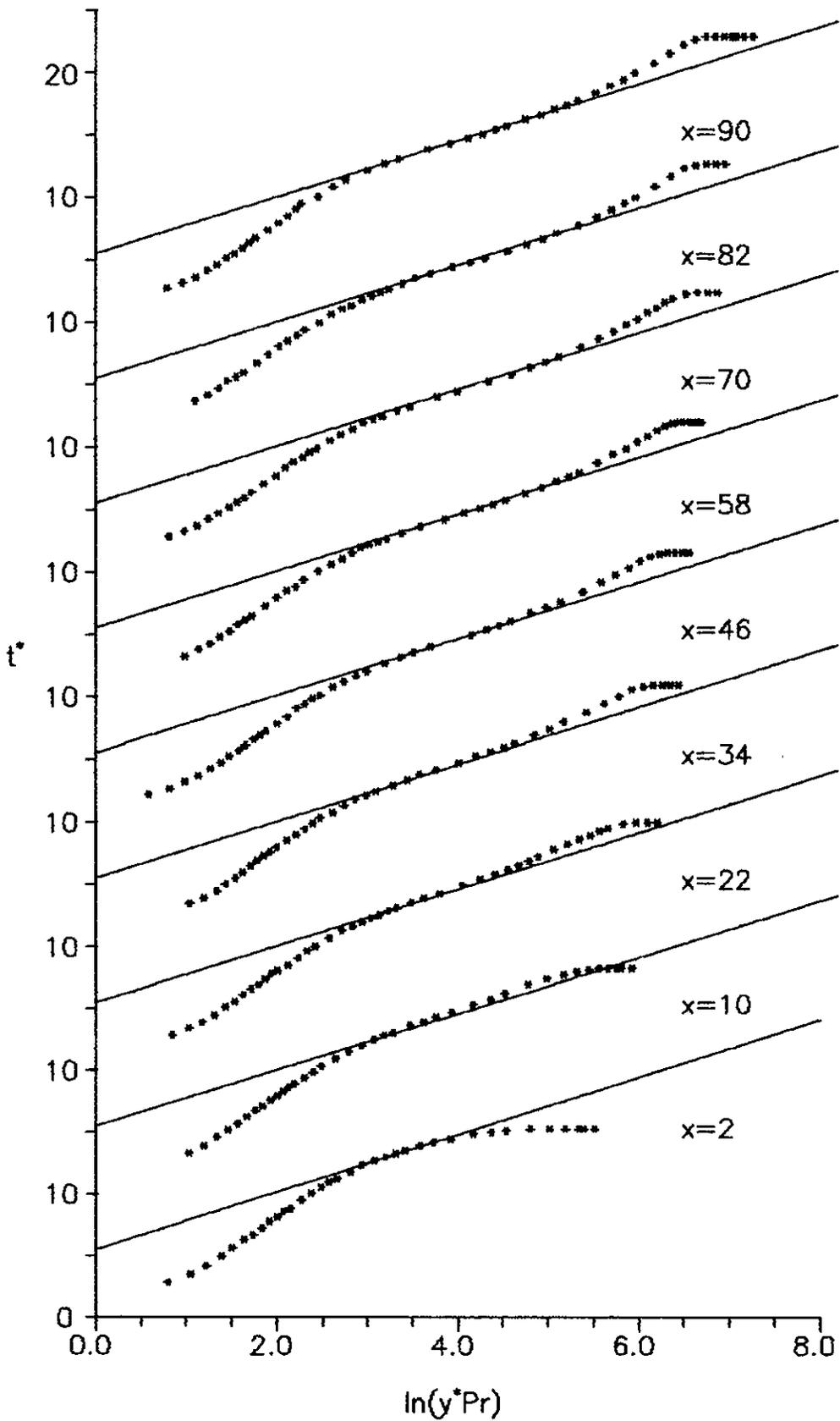


Fig.24. O desenvolvimento da camada limite térmica.  
Variáveis da abordagem alternativa.  
Dados de blackwell [5].

é bastante extensa para a análise da tendência de  $\Pi_t$  e  $\Pi'_t$  com a aumento de  $Re_\Delta$ , no entanto, a injeção de fluido tem como um de seus efeitos o aumento de  $Re_\Delta$ . Uma das vantagens da metodologia aqui apresentada é que os casos com injeção permitiram a coleta de valores de  $\Pi_t$  e  $\Pi'_t$  em camada limite bem desenvolvida.

As Figs.25 e 26 mostram que os valores de  $\Pi_t$  e  $\Pi'_t$  tem um comportamento assintótico semelhante ao apresentado por  $\Pi_m$ , conforme esperado. As curvas sugerem os valores das assíntotas, mas o número de pontos experimentais não é suficiente para a determinação fidedigna dos mesmos. Verifica-se ainda que, para a abordagem alternativa, os valores de  $\Pi'_t$  tendem a se reduzir para casos de injeção alta. Este fato denuncia que, para altas taxas de injeção, a hipótese de proporcionalidade entre as flutuações de velocidade e temperatura, possivelmente, não é mais válida.

Centrando a atenção nos casos de placa impermeável, as Figs.27 e 28 revelam uma concordância excelente entre as Eqs.(2.35) e (2.36) e os dados experimentais de Blackwell [5]. Os valores de  $\Pi_t$  e  $\Pi'_t$  utilizados foram obtidos a partir das curvas das Figs.25 e 26. Sendo  $\Pi_t$  e  $\Pi'_t$  valores pequenos se comparados a  $t_{\infty}^+$  e  $t_{\infty}^*$ , o espalhamento apresentado nas Figs.25 e 26 não compromete os resultados quando visualizamos o perfil de temperatura como um todo.

Para os casos com transpiração, fica claro que a estratégia da abordagem baseia-se em três pontos fundamentais:

- a transformação que leva os perfis para casos com transpiração a assumirem um formato logarítmico,
- a expressão para o termo independente das Eqs.(3.27) e (3.28), em resumo, as expressões para  $y_i^+$  e  $y_i^*$ , e, por último,
- a extensão da teoria para a camada externa, a qual permite adotar os valores de  $\Pi_t$  e  $\Pi'_t$  de casos sem transpiração para os perfis de escoamentos sobre placa porosa.

É digno de nota o fato de que a teoria ora apresentada não lança mão de constantes experimentais obtidas especialmente para os casos com transpiração. Os três pontos fundamentais são analisados em detalhes nas Figs.17 e 28, 19 e 20 e 27 e 28. Através desta análise em separado pode-se notar que o ponto mais frágil localiza-se de fato nas expressões para  $y_i^+$  e  $y_i^*$ , com vantagem para a solução alternativa. Quanto ao formato logarítmico e aos valores de  $\Pi_t$  e  $\Pi'_t$ , a metodologia apresentada obtém resultados muito bons. Para os valores de  $y_i^+$  e  $y_i^*$  poder-se-ia adotar facilmente uma correlação experi-

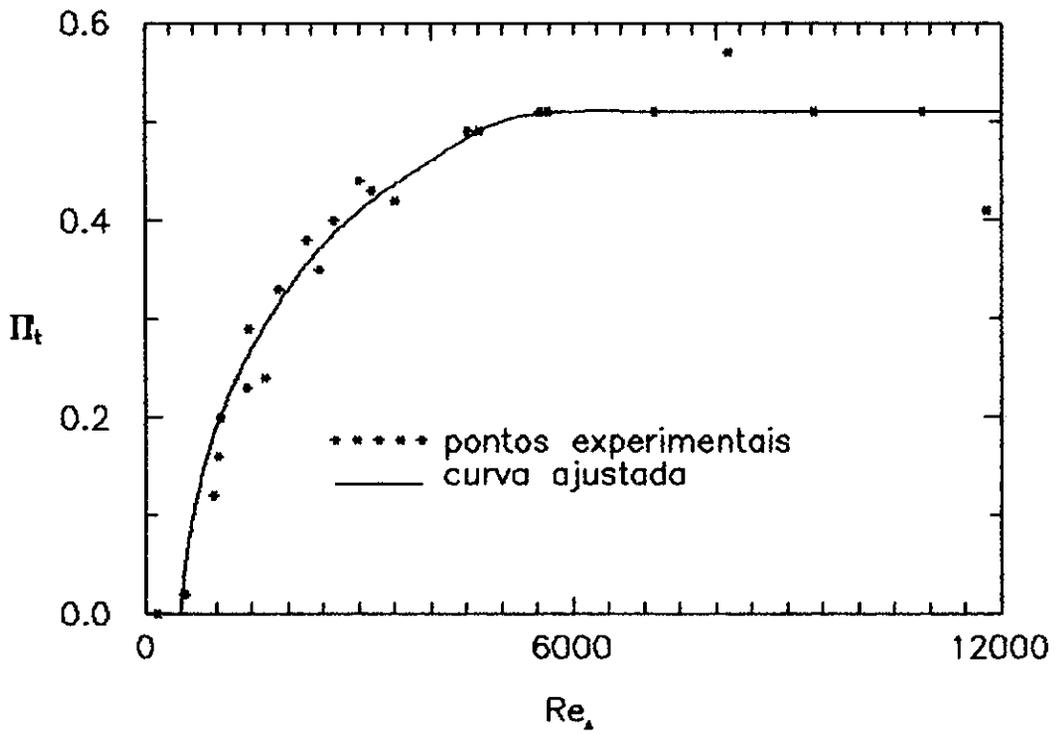


Fig.25. Variação de  $\Pi_t$  com  $Re_A$   
Dados de blackwell [5] e Whitten [46].

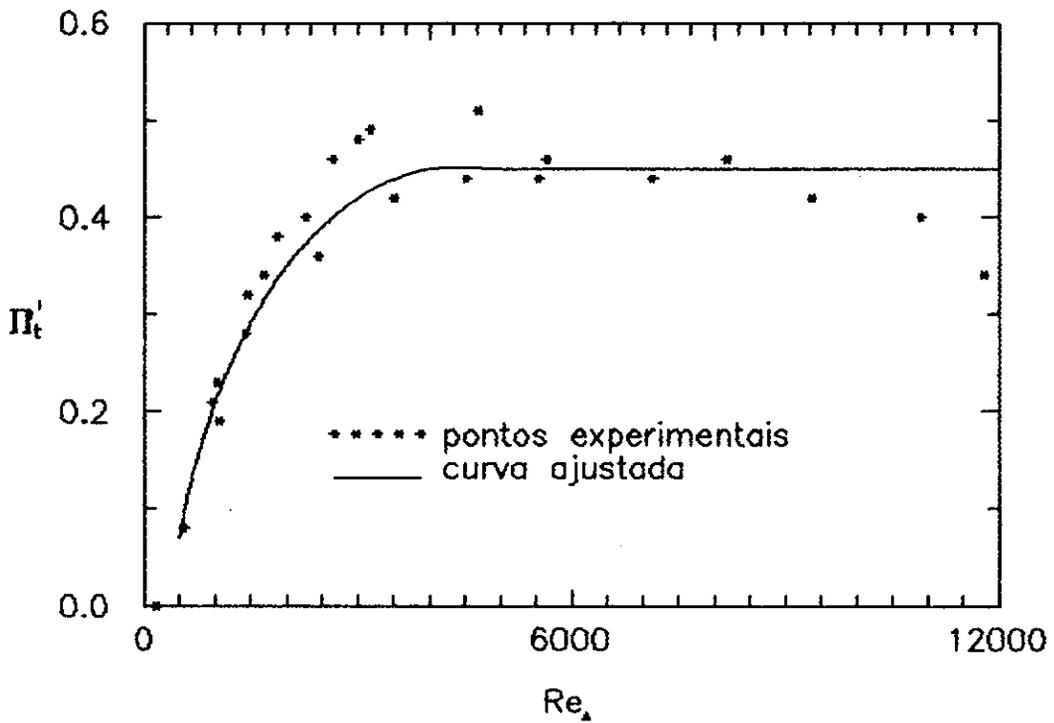


Fig.26. Variação de  $\Pi'_t$  com  $Re_A$ .  
Dados de Blackwell [5] e Whitten [46].

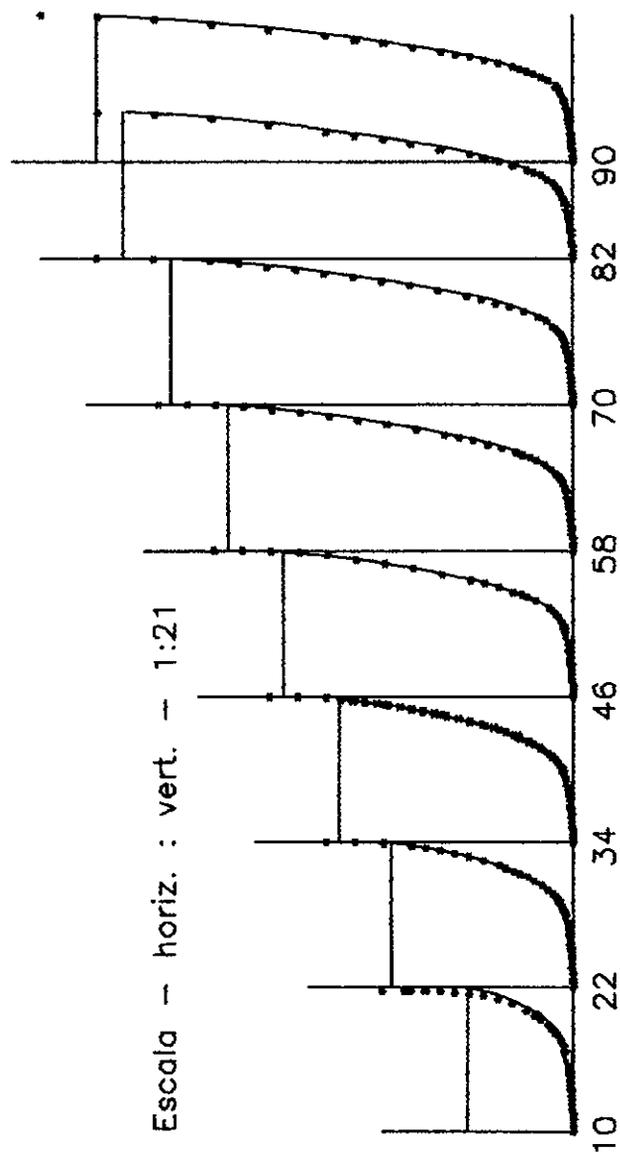


Fig.27. O desenvolvimento da camada limite térmica - Comparação da abordagem clássica com os dados experimentais. Dados de Blackwell [5].

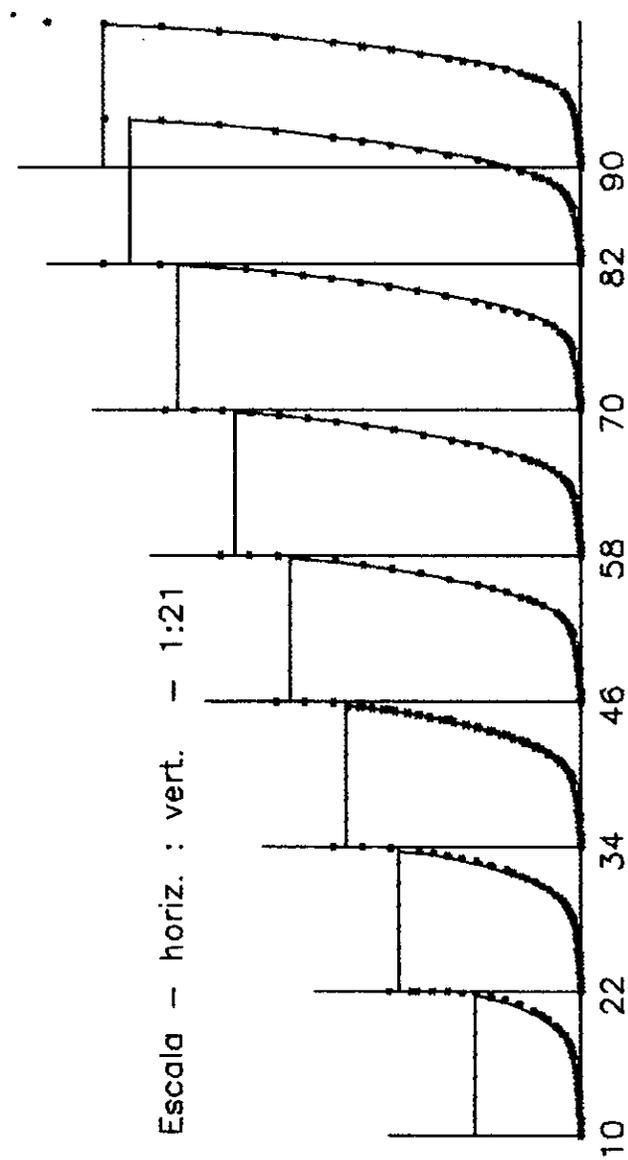


Fig.28. O desenvolvimento da camada limite térmica - Comparação da abordagem alternativa com os dados experimentais. Dados de Blackwell [5].

mental a partir da análise aqui apresentada e utilizando a metodologia empregada nas Figs.17 e 18. No entanto, este trabalho não visa uma simples descrição do perfil de temperatura, mas sim a compreensão do fenômeno e neste sentido as Eqs.(3.25) e (3.26) desempenham um papel importante. Quanto aos valores de  $\Pi_1$  e  $\Pi'_1$  preditos, apenas os últimos apresentam erros que comprometem os resultados e somente para injeções muito altas. Para aplicações em engenharia, este problema pode ser satisfatoriamente resolvido pela adoção de valores de  $\Pi'_1$  mais adequados. A análise feita baseada nestes três pontos fundamentais é criteriosa, permitindo uma boa compreensão do fenômeno além de propiciar a descoberta das discordâncias em sua origem possibilitando correções. Neste ponto reside uma das características mais poderosas do método. Para uma compreensão geral faz-se necessário ainda a visualização global dos resultados obtidos. As Figs.29 e 30 comparam as Eqs.(3.27) e (3.28) com os dados experimentais de Whitten [46] e confirmam as conclusões apresentadas acima de que, devido às melhores previsões de  $y_b^*$  do que de  $y_b^+$ , a abordagem alternativa apresenta resultados melhores do que a clássica, exceto para valores de injeção muito alta quando, devido às pouco satisfatórias previsões de  $\Pi'_1$ , a abordagem clássica é melhor.

Completa-se a análise dos resultados através das tabelas 1 e 2. Na primeira comparam-se os valores preditos de  $S_t$  com os resultados experimentais de Blackwell [5], para casos sem transpiração, obtendo resultados excelentes. As discrepâncias encontradas devem-se principalmente aos valores de  $\Pi'_1$  visto que, neste caso, como mostra a Fig.26, os valores preditos se afastam um pouco dos valores experimentais. De fato, seria possível traçar, na Fig.26, uma curva mais próxima dos pontos relativos aos casos sem transpiração e, neste caso, os resultados obtidos pela abordagem alternativa seriam comparáveis aos obtidos pela clássica. No entanto, qualquer das abordagens na forma como estão apresentadas prevêm resultados melhores ou, pelo menos, tão bons quanto às correlações experimentais normalmente utilizadas.

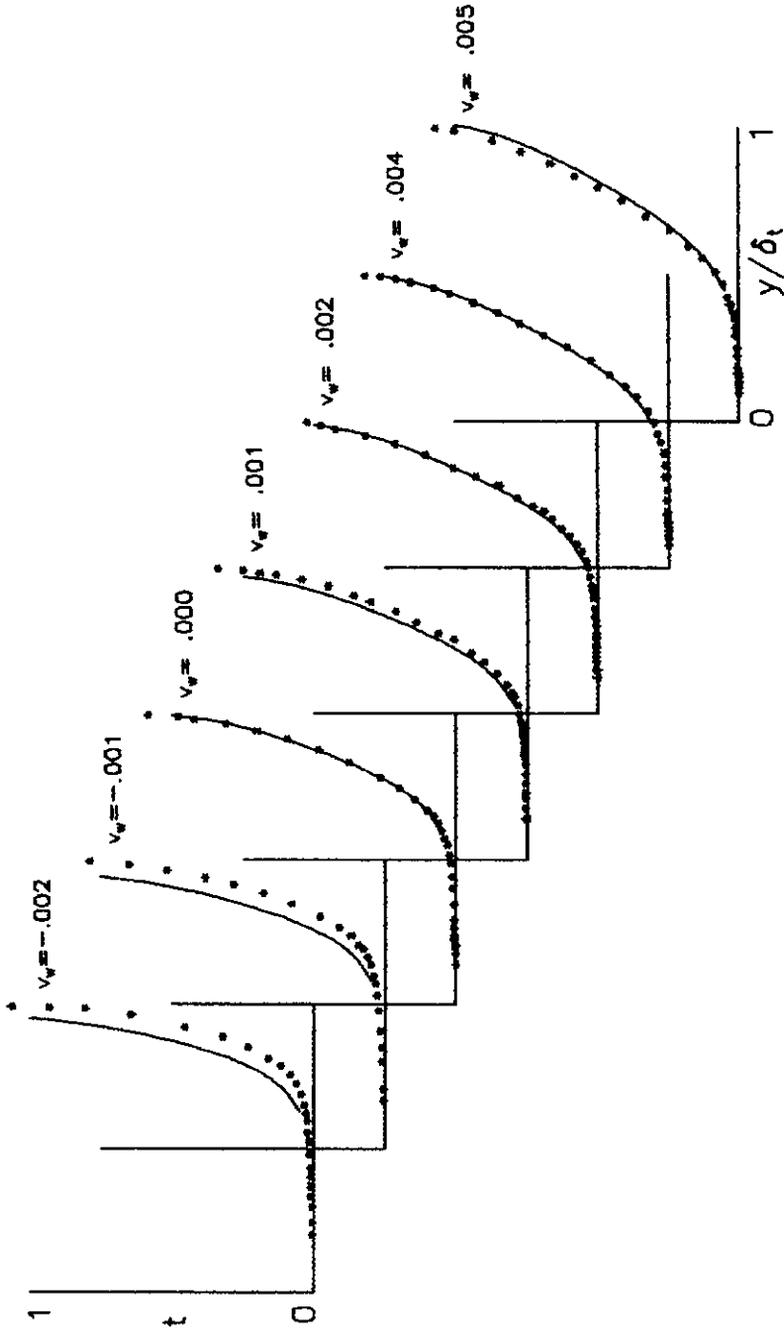


Fig.29. A camada limite térmica com transpiração - Comparação da abordagem clássica com os dados experimentais. Dados de Whitten [46].

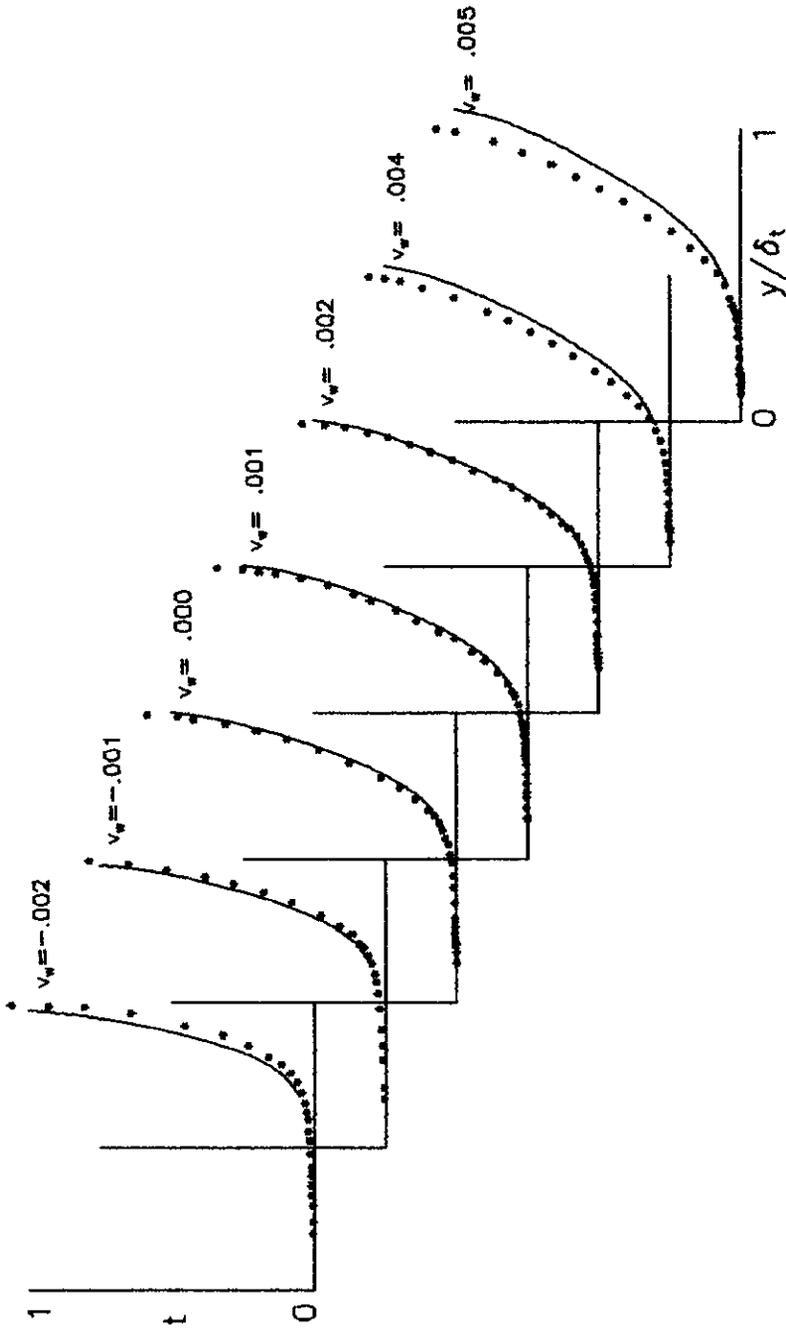


Fig.30. A camada limite térmica com transpiração - Comparação da abordagem alternativa com os dados experimentais. Dados de Whitten [46].

Tabela 1

$Re_{\Delta}$	$St_{exp}$ [6]	St Eq.(2.38)	St Eq.(2.39)
$5.60 \cdot 10^2$	$2.99 \cdot 10^{-3}$	$2.913 \cdot 10^{-3}$	$3.186 \cdot 10^{-3}$
$1.03 \cdot 10^3$	2.51	2.514	2.656
1.46	2.29	2.326	2.433
1.87	2.16	2.184	2.264
2.27	2.07	2.086	2.154
2.65	2.00	2.006	2.067
3.01	1.94	1.943	2.001
3.18	1.91	1.916	1.972

Na tabela 2 comparam-se os  $St$ 's preditos e experimentais obtidos por Whitten [46]. Nesta tabela também são apresentados os resultados obtidos pela expressão

$$\frac{St}{St_0} = \frac{\ln(1 + \frac{v_w}{St})}{\frac{v_w}{St}}, \quad (4.1)$$

deduzida por Spalding [35] e apresentada por Kays [17] como sendo aquela que apresenta os melhores resultados. Conforme assinalamos anteriormente, a expressão [4.1] apresenta como inconveniente a necessidade do conhecimento do número de Stanton do correspondente caso sem transpiração. Se fosse utilizada uma correlação experimental, como normalmente se faz, mesmo a proposta pelos trabalhos de Stanford, prejudicar-se-ia em muito os resultados obtidos pela Eq.(4.1). Por este motivo aplicou-se no cálculo de  $St$  valores de  $St_0$  experimentais. Note-se que os resultados obtidos por ambas as abordagens para escoamentos com sucção discordam bastante dos dados experimentais sendo que a Eq.(4.1) apresenta melhores resultados nestes casos. Se, no entanto, tivessem sido empregados valores de  $y_b^+$  e  $y_b^*$  mais adequados — obtidos por exemplo através de uma correlação experimental — se poderia obter resultados melhores do que os da Eq.(4.1). Isto fica claro ao se considerar os casos de injeção de fluido. Para pequenas taxas de injeção, apesar dos erros na previsão de  $y_b^+$  e  $y_b^*$  os resultados obtidos pelas três expressões são comparáveis. Melhores previsões de  $y_b^+$  e  $y_b^*$  conduzirão a re-

sultados que favorecerão as expressões ora apresentadas. Para as altas taxas de injeção, quando a previsão destes parâmetros é satisfatória, a abordagem clássica é sem dúvida mais precisa, enquanto as discrepâncias apresentadas pela abordagem alternativa são devidas às previsões de  $\Pi'_1$ . Chama a atenção a grande precisão apresentada nos casos de alta injeção pela abordagem clássica. Considerando-se os pequenos valores de  $St$  nestes casos, a precisão obtida é de fato excelente.

Tabela 2

$v_w$	$Re_\Delta$	$St_{exp.}$ [46]	$St$ Eq.(3.39)	$St$ Eq.(3.40)	$St$ Eq.(4.1)
$-2.5 \cdot 10^{-3}$	$9.6 \cdot 10^2$	$3.46 \cdot 10^{-3}$	$3.730 \cdot 10^{-3}$	$3.683 \cdot 10^{-3}$	$3.417 \cdot 10^{-3}$
-2.2	$1.4 \cdot 10^3$	3.14	3.303	3.296	3.260
-1.1	$1.7 \cdot 10^3$	2.63	2.791	2.744	2.656
0.0	$3.5 \cdot 10^3$	1.95	1.955	1.903	
0.0	$4.7 \cdot 10^3$	1.82	1.831	1.783	
0.9	$5.7 \cdot 10^3$	1.43	1.472	1.398	1.411
1.0	$4.5 \cdot 10^3$	1.52	1.565	1.475	1.512
1.8	$7.1 \cdot 10^3$	1.12	1.167	1.072	1.094
1.9	$5.5 \cdot 10^3$	1.23	1.238	1.124	1.172
3.7	$1.1 \cdot 10^4$	0.66	0.658	0.560	0.613
3.9	$8.2 \cdot 10^3$	0.69	0.720	0.604	0.657
4.8	$1.2 \cdot 10^4$	0.50	0.476	0.380	0.450
5.0	$9.4 \cdot 10^3$	0.53	0.518	0.412	0.483

Como conclusão da análise das tabelas e considerando que foram empregados valores experimentais de  $St_0$ , nas Eq.(4.1) pode-se dizer que os resultados obtidos são comparáveis, quando não melhores que os apresentados pela abordagem devida a Spalding acrescentando-se ainda o fato de que para uma utilização em engenharia tais resultados poderão ser melhorados. Tais fatos podem ser comprovados pelos resultados obtidos para os casos de injeção alta que são bem melhores do que os apresentados pela Eq.(4.1).

## Capítulo 5

# CONCLUSÃO

### A. Sumário

A.1. A camada limite térmica turbulenta é estudada e nova expressão para o perfil de temperatura é proposta para a região externa, baseada na *Lei da Parede* e na *Lei da Esteira*. Esta expressão, além de mais simples que as anteriores guarda correspondência com a metodologia aplicada a perfis de velocidade. Combinada com a expressão logarítmica, aplicada à região completamente turbulenta, permite a obtenção de uma expressão para o perfil de temperatura e uma equação para o número de  $St$ , as quais apresentam uma excelente concordância com os dados experimentais.

A.2. Apesar de útil e simples a expressão a que se refere o item A.1 apresenta como inconveniente a dependência com relação ao  $Cf$ . Para sanar este inconveniente, nova *Lei da Parede* e nova *Lei da Esteira* foram propostas, as quais baseadas na hipótese de proporcionalidade entre as flutuações de velocidade e de temperatura, desacoplam o problema térmico do problema dinâmico, e permitem a obtenção de uma expressão para o perfil de temperatura e uma equação para o número de  $St$  as quais independem de  $Cf$ . A comparação com dados experimentais mostra que os resultados obtidos pela

abordagem alternativa são também excelentes, com o mesmo grau de qualidade da abordagem clássica.

A.3. Mesmo sendo inéditos fora do âmbito deste trabalho, os resultados mencionados em A.1 e A.2 não são seu objetivo central. Estes apenas lançam bases para a análise da transferência de calor em escoamentos com transpiração. A abordagem deste problema é feita através da obtenção de transformações que façam os perfis de casos com transpiração recaírem sobre os perfis de casos sem transpiração. Desta forma os resultados obtidos em A.1 e A.2 podem ser aplicados de forma a obter em cada caso uma expressão para o perfil de temperatura e uma equação para o número de  $St$  para escoamentos com transpiração.

A comparação dos resultados obtidos pela análises clássica e alternativa mostram que, para casos de sucção, a segunda apresenta melhores resultados, enquanto que para altas taxas de injeção, a primeira mostra-se mais satisfatória. Em taxas de injeção moderadas, ambas apresentam bons resultados. Note-se que em cada taxa de transpiração pelo menos uma das abordagens apresenta bons resultados. Destacam-se os resultados obtidos para altas taxas de injeção quando o número de  $St$  é muito pequeno. Mesmo nesta situação desfavorável, a abordagem clássica apresenta muito bons resultados.

A.4. Sendo o objetivo principal deste estudo uma compreensão da interação da transpiração com a camada limite, e não a simples predição dos resultados, a análise é baseada principalmente em conclusões teóricas, buscando uma explicação a cada passo. Somente em pontos específicos requer a utilização dos resultados experimentais na obtenção de parâmetros. Nestes casos, uma análise aprofundada de tais parâmetros é levada a cabo com vista à consolidação da metodologia. Apesar de muito bons, os resultados aqui apresentados podem ser ainda melhorados se pequenos ajustes com base experimental forem feitos em algumas expressões deduzidas. A metodologia adotada determina claramente estes pontos frágeis e permite facilmente tais ajustes para uma aplicação em engenharia. Apresentamos como pontos candidatos a estes ajustes as expressões para  $y_b^+$  e  $y_b^*$  e os valores de  $\Pi'_i$  para altas taxas de injeção.

## **B. Recomendações para trabalho futuros**

B.1 Visando à aplicação a veículos espaciais e turbinas à gás, a teoria apresentada deve ser estendida para escoamentos a altas velocidades. Estudos preliminares mostram que esta extensão pode ser feita facilmente e deve ser executada.

B.2 No campo de escoamentos de ar a baixas velocidades esta metodologia permite extensão para escoamentos sujeitos a gradientes de pressão e sobre superfícies rugosas a qual merece ser tentada. Para escoamentos com gradientes de pressão, a abordagem alternativa parece mais eficaz [5].

B.3 No âmbito desta pesquisa nenhum estudo foi feito considerando variações de temperatura ao longo da superfície. Um estudo nesta área ampliará sem dúvida em muito o potencial do método.

B.4 Fora das aplicações a escoamentos de ar, a abordagem alternativa deve ser considerada para a análise da transferência de calor. Tendo sucesso, este estudo pode significar um progresso sensível e de amplo alcance na área de transferência de calor, podendo simplificar em muito os problemas de engenharia.

*Nota do autor* : os estudos mencionados em B.1 e B.2 já foram iniciados.

## Capítulo 6

### BIBLIOGRAFIA

- [1] ALP, E. and STRONG, A. B., "Measurements of Characteristic Time Scales of Turbulent Boundary Layer with Mass Transfer", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 24, pp. 521-531 (1981).
- [2] ANTONIA, R. A., KRISHNAMOORTHY, L. Y. and FULACHIER, L., "Correlation Between the Longitudinal Velocity Fluctuation and Temperature Fluctuation in the Near-Wall Region of a Turbulent Boundary Layer", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 31, pp. 723-730 (1988).
- [3] BEJAN, A., *Convection Heat Transfer*, Wiley-Interscience, New York (1984).
- [4] BLACK, T. J. and SARNECKI, A. J., "The Turbulent Boundary Layer with Suction or Injection", *A. R. C. R. & M.* 3389 (1965).
- [5] BLACKWELL, B. F., KAYS, W. M., MOFFAT, R. J., "The Turbulent Boundary Layer on a Porous Plate: an Experimental Study of the Heat Transfer Behavior with Adverse Pressure Gradients", *Stanford University Report No. HMT-16* (1972).
- [6] BLAIR, M. F., "Influence of Free-Stream Turbulence in Turbulent Boundary Layer Heat Transfer and Mean Profile Development, Part I - Experimental Data", *ASME Journal of Heat Transfer*, vol. 105, pp. 33-40 (1983).
- [7] BLAIR, M. F., "Influence of Free-Stream Turbulence in Turbulent Boundary Layer Heat Transfer and Mean Profile Development, Part II - Analysis of Results", *ASME Journal of Heat Transfer*, vol. 105, pp. 41-47 (1983).

- [8] COLES. D., "The Law of The Wake in the Turbulent Boundary Layer", *J. Fluid Mech.*, vol. 1, pp. 191-226 (1956).
- [9] DORRANCE, W. H. and DORE. F. J., "The Effect of Mass Transfer on Compressible Turbulent Boundary Layer Skin Friction and Heat Transfer", *J. Aero. Sci.*, vol. 21, pp. 404-410 (1954).
- [10] FERNHOLZ. H. H. and FINLEY, P. J., "A Critical Commentary on Flow Data for Two-dimensional Compressible Turbulent Boundary Layers", *AGARDograph* N° 253 - London, (1980).
- [11] GOWEN. R. A. and SMITH, J. W., "The Effect of the Prandtl Number on Temperature Profiles for Heat Transfer in Turbulent Pipe Flows", *Chem. Engng. Sci.*, vol. 22, pp. 1701-1711 (1967).
- [12] GOWEN. R. A. and SMITH, J. W., "Turbulent Heat Transfer From Smooth and Rough Surfaces", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 11, pp. 1656-1673 (1968).
- [13] KADER, B. A. and YAGLOM, A. M., "Heat and Mass Transfer Laws for Fully Turbulent Wall Flows", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, pp. 2329-2351 (1972).
- [14] KADER, B. A., "Temperature and Concentration Profiles in Fully Turbulent Boundary Layers", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 24, pp. 1541-1544 (1981).
- [15] KASAGI, N., KURODA, A. HIRATA, M., "Numerical Investigation of Near-Wall Turbulent Heat Transfer Taking into Account the Unsteady Heat Conduction in Solid Surface", *ASME Journal of Heat Transfer*, vol. 111, pp. 385-392 (1989).
- [16] KAYS, W. M., "Heat Transfer to the Transpired Turbulent Boundary Layer", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, pp. 1023-1044 (1972).
- [17] KAYS, W. M. and MOFFAT, R. J., "The Behavior of Transpired Turbulent Boundary Layers", *Stanford University Report* No. HMT-20 (1975).
- [18] KENDALL, R. M., RUBESIN, M. W., DAHM, T. J. and MENDENHALL, M. R., "Mass, Momentum and Heat Transfer within a Turbulent Boundary Layer with Foreign Gas Mass Transfer at The Surface, Part I - Constant Fluid Properties", *Rep. No 111, Vidya Research and Development, Palo Alto, California* (1964).

- [19] KESTIN, J. and RICHARDSON, P. D., "Heat Transfer Across Turbulent, Incompressible Boundary Layers", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 6, pp. 147-189 (1963).
- [20] KINNEY, R. B., "Skin Friction Drag of a Constant Property Turbulent Boundary Layer with Uniform Injection", *ALAA Journal*, vol. 5, pp. 624-630 (1967).
- [21] LAUNDER, B. E. and SPALDING, D. B., *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press - London and New York (1972).
- [22] MCLEAN, J. D. and MELLOR, G. L., "The Transpired Turbulent Boundary Layer in an Adverse Pressure Gradient", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, pp. 2353-2369 (1972).
- [23] MEDEIROS, M. A. F. and SILVA-FREIRE, A. P., "The Thermal Turbulent Boundary Layer in an Incompressible Flow", *Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, vol. 2, pp. 65-68, Rio de Janeiro (1989).
- [24] MEDEIROS, M. A. F., PELLEGRINI, C. C. and SILVA-FREIRE, A.P., "The Turbulent Boundary Layer with Addition of Mass and Heat", *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*, vol. 1, pp. 779-788, Elsevier, N. Y. (1990).
- [25] MELLOR, G. L., "The Large Reynolds Number Asymptotic Theory of Turbulent Boundary Layers", *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 10, pp. 851-873 (1972).
- [26] MICKLEY, H., ROSS, R. C., SQUYERS, A. L., STEWART, W. E., "Heat, Mass and Momentum Transfer for Flow over a Flat Porous Plate with Blowing or Suction", *NACA TN 3208* (1954).
- [27] MILLIKAN, C. B., "A Critical Discussion of Turbulent Flows in Channels and Circular Tubes", *Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge, U.S.A pp. 386-392 (1939).
- [28] MOFFAT, R. J. and KAYS, W. M., "The Turbulent Boundary Layer on a Porous Plate: Experimental Heat Transfer with Uniform Blowing and Suction", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 11, pp. 1547-1566 (1968).
- [29] PLECTHER, R. H., "Progress in Turbulent Forced Convection", *ASME Journal of Heat Transfer*, vol. 110, pp. 1129-1144 (1988).

- [30] ORLANDO, A. F., MOFFAT, R. J. and KAYS, W. M., "Turbulent Transport of Heat and Momentum in a Boundary Layer Subject to Deceleration, Suction and Variable Wall Temperature", *Stanford University Report No. HMT-17* (1974).
- [31] RUBESIN, M. W., "An Analytical Estimation of the Effect of Transpiration Cooling on the Heat Transfer and Skin Friction Characteristics of a Compressible Turbulent Boundary Layer", *NACA TN 3341* (1954).
- [32] SCHLICHTING, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw Hill, New York (1979).
- [33] SILVA-FREIRE, A. P., "An Asymptotic Solution for Transpired Incompressible Turbulent Boundary Layers", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 31, pp. 1011-1021 (1988).
- [34] SILVA-FREIRE, A. P. and HIRATA, M. H., "Aproximate Solutions to Singular Perturbation Problems: the Intermediate Variable Technique", *J. Math. Analysis and Applications*, vol. 145, pp. 241-253 (1990).
- [35] SPALDING, D. B., "A Standard Formulation of the Steady Convective Mass Transfer Problems", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 1, pp. 192-207 (1960).
- [36] SPALDING, D. B., "A Single Formula for the Law of the Wall", *ASME J. Appl. Mech.*, vol. 28, pp. 455-457 (1961).
- [37] SPALDING, D. B., "A New Analytical Expression for the Drag of Flat Plate Valid for Both Turbulent and Laminar Regimes", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 5, pp. 1133-1138 (1962).
- [38] SQUIRE, L. C., "Turbulent Boundary Layer with Suction or Injection", *Conference on Data and Computation for Complex Turbulent Flows*, Report of Evaluator (1980).
- [39] STEVENSON, T. N., "A Law of the Wall for Turbulent Boundary Layers with Suction or Injection", *Cranfield College of Aero. Rep. No.166* (1963).
- [40] STEVENSON, T. N., "A Modified Velocity Defect Law for Turbulent Boundary Layers with Injection", *Cranfield College of Aero. Rep. No.170* (1963).
- [41] STEVENSON, T. N., "Inner Region of Transpired Turbulent Boundary Layers", *AIAA Journal*, vol. 6, pp. 553-554 (1968).

- [42] SIMPSON, R. L., WHITTEN, D.G. and MOFFAT, R.J., "An Experimental Study of the Turbulent Prandtl Number of Air with Injection and Suction", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 13, pp. 125-143 (1970).
- [43] SIMPSON, R. L., "Characteristics of Turbulent Boundary Layers at Low Reynolds Number with and without Transpiration", *J. Fluid Mech.*, vol. 42, pp. 769-802 (1970).
- [44] SIMPSON, R. L., MOFFAT, R. J., "The Turbulent Boundary Layer on a Porous Plate: Experimental Skin Friction with Variable Injection and Suction", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 12, pp. 771-789 (1971).
- [45] TORII, K., NISHIWAKI, N. and HIRATA, M., "Heat Transfer and Skin Friction in Turbulent Boundary Layer with Mass Injection", *Proceedings of Third International Heat Transfer Conference*, vol. 3, pp. 34-48, Chicago (1966).
- [46] WHITTEN, D. G., KAYS, W. M., MOFFAT, R. J., "The Turbulent Boundary Layer on a Porous Plate: Experimental Heat Transfer With Variable Suction, Blowing and Surface Temperature", *Stanford University Report No. HMT-3* (1967).
- [47] WHITTEN, D. G., MOFFAT, R. J. and KAYS, W. M., "Heat Transfer to a Turbulent Boundary Layer with Non-Uniform Blowing and Surface Temperature", *Stanford University Report No. HMT-8* (1969).
- [48] YAJNIK, K. S., "Asymptotic Theory of Turbulent Shear Flows", *J. Fluid Mech.*, vol. 42, pp. 411-427 (1970).
- [49] YAKHOT, V., ORSZAG, S. A., YAKHOT, A., "Heat Transfer in Turbulent Fluids - I. Pipe Flow", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 30, pp. 15-22 (1987).