

UMA INVESTIGAÇÃO DO ESCOAMENTO EM UM
HIDROCICLONE OPERANDO SEM NÚCLEO GASOSO

Carlos Alberto Capela Moraes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
MECÂNICA.

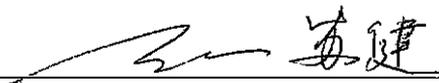
Aprovada por:



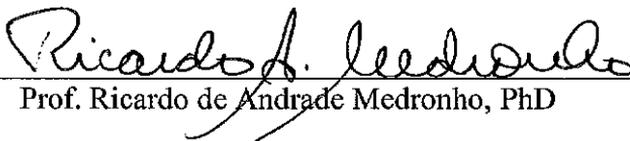
Prof. Atila Pantaleão da Silva Freire, PhD



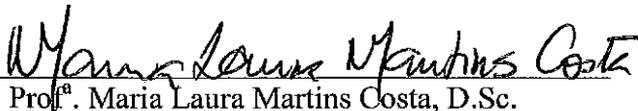
Prof. Gustavo César Rachid Bodstein, PhD



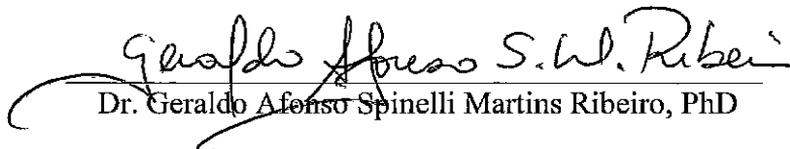
Prof. Su Jian, D.Sc.



Prof. Ricardo de Andrade Medronho, PhD



Prof.^a. Maria Laura Martins Costa, D.Sc.



Dr. Geraldo Afonso Spinelli Martins Ribeiro, PhD

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
NOVEMBRO DE 2003

MORAES, CARLOS ALBERTO CAPELA

Uma Investigação do Escoamento em um Hidrociclone Operando sem Núcleo Gasoso [Rio de Janeiro] 2003.

IX, 320 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Mecânica, 2003)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Fluidodinâmica em Hidrociclone

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

À minha mulher Denise
e aos meus filhos Eduardo e Débora

Agradecimentos

Gostaria de manifestar meu reconhecimento, ao meu orientador, não somente pela orientação nos trabalhos, mas também pela revisão do texto, à PETROBRAS, pela oportunidade proporcionada para o desenvolvimento deste trabalho e ainda agradecer à empresa ESSS, particularmente ao Eng. Daniel Ribeiro, pelo apoio na utilização do simulador de escoamentos CFX.

Não posso deixar de expressar também o meu reconhecimento especial à minha mulher Denise e aos meus filhos Eduardo e Débora, pelo incentivo e apoio proporcionados e pela paciência com que enfrentaram meu aprisionamento a este trabalho, mesmo nos fins de semana.

CACM

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

UMA INVESTIGAÇÃO DO ESCOAMENTO EM UM HIDROCICLONE OPERANDO SEM NÚCLEO GASOSO

Carlos Alberto Capela Moraes

Novembro/2003

Orientador: Atila Pantaleão da Silva Freire

Programa: Engenharia Mecânica

Este trabalho faz uma análise do escoamento no interior de um hidrociclone que opera sem núcleo gasoso. É realizada uma investigação das características desse escoamento partindo-se de uma análise de fluido ideal, passando-se, subseqüentemente, à consideração da viscosidade e à análise comparativa do desempenho de diversos modelos de turbulência, sobre os quais é feita revisão detalhada, com vistas ao seu emprego no problema em questão. É proposta uma modificação no modelo de turbulência de duas equações (k - ϵ) que resulta numa melhora do desempenho desse modelo em descrever o escoamento no hidrociclone, fazendo com que os resultados obtidos com esse modelo modificado se aproximem dos resultados obtidos com o modelo completo do tensor de Reynolds, numericamente mais oneroso, ao fazer uso de sete equações diferenciais de transporte de grandezas turbulentas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

AN INVESTIGATION OF THE FLOW IN A HYDROCYCLONE OPERATING
WITHOUT A GAS CORE

Carlos Alberto Capela Moraes

November/2003

Advisor: Atila Pantaleão da Silva Freire

Department: Engenharia Mecânica

This work presents an analysis of the flow in a hydrocyclone operating without gas core. It is performed an investigation of the characteristics of the flow starting with a ideal flow analysis and comprising the consideration of viscosity and comparative performance of several turbulence models, which are reviewed in detail concerning their use for this particular flow. It is also proposed a modification in two-equation k - ϵ turbulence model that results in better performance of the model in describing the flow in hydrocyclones. The results obtained with this modified two-equation model are approximately the same obtained using Reynolds Stress Model – which requires more computer resources since it is a seven differential equation model.

Índice

Ficha Catalográfica	ii
Dedicatória	iii
Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Índice	vii
1. Introdução	
1.1 Características gerais dos ciclones e hidrociclones	1
1.2 Motivação para o presente trabalho	7
1.3 Objetivos do presente trabalho	12
1.4 Contribuições do presente trabalho	13
1.5 Estrutura do presente relato	14
1.6 Métodos de investigação utilizados nas simulações numéricas	17
1.7 Discussão sumária dos resultados e conclusões	17
1.8 Recomendações para trabalhos futuros	18
2. Uma revisão dos conceitos da dinâmica de fluidos ideais na presença de vorticidade, com vistas ao estudo do escoamento em hidrociclones	

2.1	Preliminares	19
2.2	Estudo de Caso 1 – Efeito da mudança do diâmetro da seção transversal de um tubo sobre a corrente de fluido em rotação	31
2.3	Estudo de Caso 2 – Efeito da mudança da velocidade externa sobre um vórtice isolado	48
2.4	Estudo de Caso 3 – O escoamento no interior de um hidrociclone: o modelo de Bloor e Ingham ([1973-1983])	59
2.5	Estudo de Caso 4 – O escoamento no interior de um hidrociclone: extensão do modelo de Bloor e Ingham	63
3.	Escoamento viscoso e turbulência	
3.1	Introdução	73
3.2	Modelos com base no conceito de viscosidade turbulenta	75
3.3	Modelos de fechamento de ordem superior	128
3.4	Modificação proposta para o modelo $k-\varepsilon$	154
3.5	Simulação de grandes escalas	161
4.	Simulações numéricas do escoamento em um hidrociclone	
4.1	Introdução	168
4.2	Características do hidrociclone modelado	169
4.3	Modelos utilizados	171
4.4	Descrição do método numérico	175
4.5	Malha e condições de contorno	187
4.6	Comparação entre resultados experimentais e resultados da simulação numérica	190
4.7	Comparação numérica dos modelos de turbulência	199
4.8	Discussão das simplificações adotadas e algumas	

considerações sobre o problema bifásico	221
4.9 Simulação com o modelo de equações diferenciais de transporte para o Tensor de Reynolds	241
4.10 Simulação com o modelo k-ϵ modificado proposto neste trabalho	249
4.11 Alguns resultados da Simulação de Grandes Escalas	258
5. Conclusões e Recomendações	266
6. Referências Bibliográficas	269
Apêndice A	277
Apêndice B	311

1. INTRODUÇÃO

1.1 Características Gerais dos Ciclones e Hidrociclones

Separadores ciclônicos têm sido extensamente empregados, como classificadores de partículas dispersas em correntes fluidas, em muitas aplicações industriais, sempre que exista uma diferença de massa específica entre as partículas dispersas e a fase fluida. A fase dispersa é normalmente constituída por um sólido ou líquido, enquanto que a fase contínua é um fluido (vapor ou líquido). Se a fase contínua é um gás ou vapor, o dispositivo é denominado ciclone, se a fase contínua for um líquido, o dispositivo é denominado de hidrociclone, mas as principais características de ambos, bem como o princípio de funcionamento são, em grande extensão, muito semelhantes.

A separação da fase dispersa nos separadores ciclônicos é realizada pela ação do campo centrífugo que se estabelece no interior do dispositivo devido às condições impostas à corrente de fluido que escoia através dele.

Em oposição às centrífugas, as quais geram um campo centrífugo pelo uso de um corpo rotativo (com a necessidade de um motor e equipamento de transmissão), os dispositivos ciclônicos (ciclones e hidrociclones) não têm quaisquer partes móveis, sendo, comparativamente às centrífugas, mais simples e demandando menores custos de investimento, operação e manutenção.

Os separadores ciclônicos nada mais são do que equipamentos tubulares, constituídos de partes cilíndricas e cônicas justapostas, nos quais a dispersão é alimentada por um tubo de entrada cujo eixo é normal ao eixo do equipamento, e que é posicionado tangencialmente à parede lateral do equipamento. O separador tem duas aberturas para saída da dispersão classificada, posicionadas axialmente ao equipamento, uma delas situada próxima da seção de alimentação, e a outra situada numa seção afastada da seção de alimentação, próxima ao vértice do corpo cônico do hidrociclone. A figura 1.1-1, abaixo, mostra um esquema de um ciclone típico.

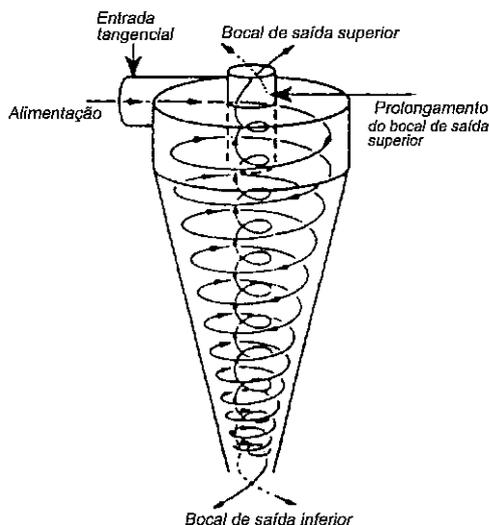


Figura 1.1-1 – Principais Características Geométricas do Ciclone.

Cumpra ainda preliminarmente, descrever as principais diferenças entre os hidrociclones para separação de sólidos de correntes de fluidos, daqueles destinados à separação de dois líquidos, que são empregados no processamento primário de fluidos na indústria do petróleo.

Muitas características geométricas são substancialmente diferentes nesses dois tipos de dispositivos ciclônicos. Essas diferenças se mostraram necessárias no desenvolvimento empírico dos respectivos protótipos industriais. É apresentada abaixo uma breve descrição das principais diferenças, bem como as razões qualitativas para elas.

Nos ciclones ou hidrociclones que operam com fluido/sólido não existe qualquer preocupação com a ruptura das partículas, pois mesmo as elevadas tensões cisalhantes, resultantes do escoamento no dispositivo, não são capazes de causar esse efeito. Entretanto, na separação de uma fase líquida dispersa sob a forma de gotas, a ruptura destas deve ser levada em conta, uma vez que gotas de menores diâmetros têm uma menor velocidade de escorregamento em relação à fase contínua (a chamada velocidade de migração) sob a ação do campo centrífugo e, em conseqüência, são mais difíceis de separar.

Levando esses fatos em conta, o hidrociclone para águas oleosas apresenta um cabeçote que permite uma alimentação da dispersão numa forma mais suave. Esse cabeçote é composto de uma seção cilíndrica, seguido de uma seção cônica para

aceleração do vórtice gerado na seção anterior. O objetivo desse cabeçote composto é minimizar o impacto da corrente de fluido e as perdas de carga localizadas na entrada, que aumentariam a turbulência, as tensões cisalhantes e a ruptura de gotas. Além disso, os cabeçotes desse tipo de hidrociclone têm, normalmente, duas entradas situadas diametralmente opostas na seção transversal, as quais contribuem para aumentar a simetria axial. Os hidrociclones para sólidos, comparativamente, não são dotados de seção de aceleração, situando-se a seção cônica de separação logo a jusante do cabeçote cilíndrico de alimentação. Além disso, esses hidrociclones têm somente uma abertura de alimentação.

Outra diferença entre um hidrociclone para a separação de um líquido leve disperso, em relação ao destinado à remoção de sólido disperso, são as diferentes vazões que são drenadas pelas aberturas de *saída de fluido próxima à alimentação* e a *saída de fluido próxima ao vértice do trecho cônico* nesses dois equipamentos. No hidrociclone para águas oleosas, a fase dispersa sendo mais leve que a contínua e apresentando-se numa concentração muito baixa (usualmente menos de 0,2%), migra para a região do eixo do equipamento e é removida pela abertura de *saída de fluido próxima à alimentação*. Naturalmente, é interessante obter-se essa corrente com o menor teor de água possível. Assim, a maior parte da corrente de alimentação deve deixar o equipamento pela abertura de *saída de fluido próxima ao vértice do trecho cônico*, como uma corrente de água tratada (livre do óleo disperso). Nos ciclones para separação de sólidos, que deixam o equipamento pela abertura de *saída de fluido próxima ao vértice do trecho cônico*, é interessante que os mesmos sejam retirados agregando o menor teor de líquido possível e, portanto, a maior parte do líquido deve deixar o equipamento pela abertura de *saída de fluido próxima à alimentação*.

A menor diferença de densidade normalmente existente entre o óleo e a água, relativamente à essa diferença em relação aos sólidos e líquidos (este último, normalmente a água), torna necessário que o tempo de residência da dispersão no interior do equipamento, sob a ação do campo centrífugo, seja maior para os hidrociclones líquido/líquido, por esse motivo estes apresentam uma razão de aspecto mais longa relativamente aos hidrociclones líquido/sólido.

Outra diferença notável entre os hidrociclones líquido/líquido e os líquido/sólido é que estes últimos têm o tubo da abertura de *saída de fluido próxima à alimentação* prolongado para o interior do corpo do equipamento, enquanto isso não ocorre como os primeiros. A principal função desse prolongamento é minimizar a perda de dispersão que flui diretamente da alimentação para a *saída de fluido próxima à alimentação* (curto circuito para *saída de fluido próxima à alimentação*) sem percorrer a trajetória espiral descendente (externa) e ascendente (interna) – vide essas trajetórias na figura 1.1-1. Nos hidrociclones para águas oleosas, seus idealizadores, concluíram, com base em experimentos, que a existência do prolongamento mencionado era prejudicial à eficiência do equipamento. As diferenças aqui descritas podem ser observadas comparando-se a figura 1.1-1 (hidrociclone para sólidos) com as figura 1.1-2, 1.1-3 e 1.1-4 (hidrociclone para águas oleosas).

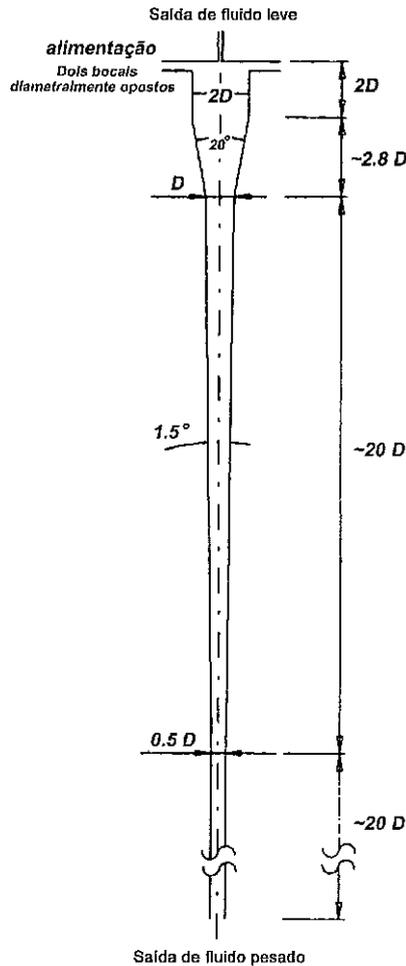


Figura 1.1-2 — Hidrociclone para Águas Oleosas (Corte Longitudinal).

As figuras 1.1-5 e 1.1-6 mostram modelo em acrílico do hidrociclone utilizado por Knowles et al. [1973].



Figura 1.1-3 – Fotografia de um hidrociclone para águas oleosas.



Figura 1.1-4 – Detalhe de conjunto de hidrociclones montados em um vaso de pressão.



Figura 1.1-5 – Protótipo do hidrociclone semelhante ao utilizado por Knowles et al [1973], construído em acrílico.

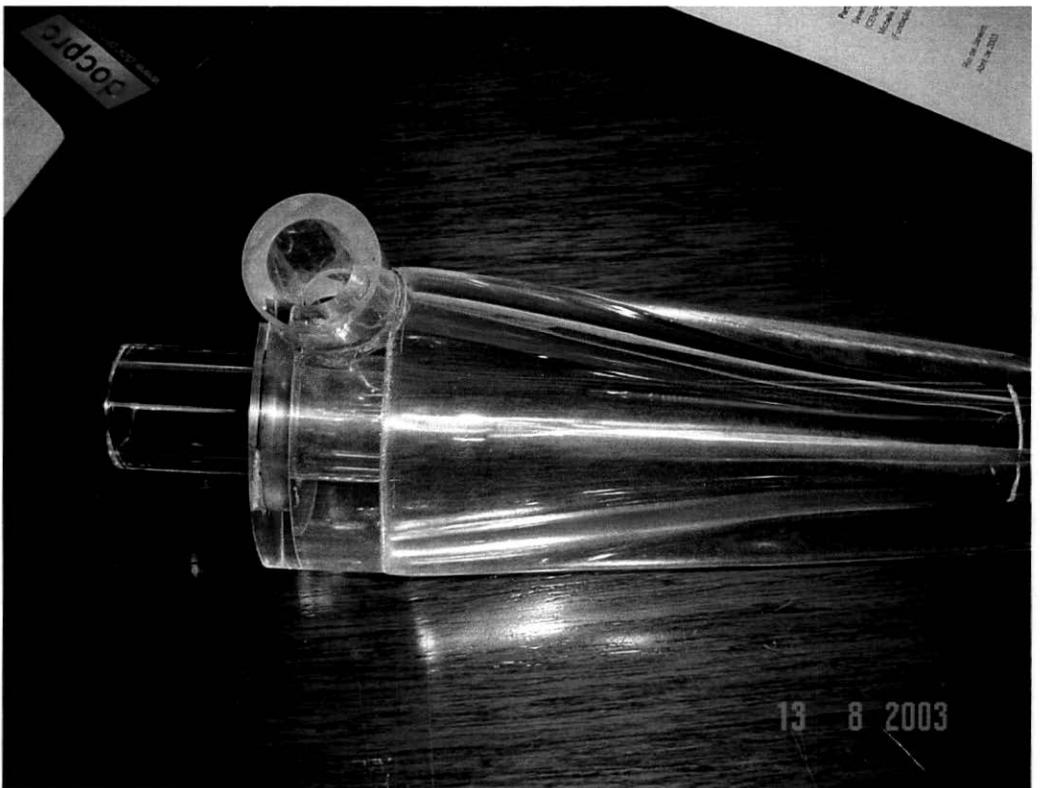


Figura 1.1-6 – Detalhe de hidrociclone semelhante ao utilizado por Knowles et al.

1.2 Motivação para o presente trabalho

1.2.1 Importância do equipamento para a indústria em geral e do petróleo em particular

A aplicação industrial de ciclones e hidrociclones como purificadores em correntes líquido/gás, sólido/gás e sólido/líquido tem sido uma prática corrente por muitas décadas. A existência de diversos fornecedores de equipamentos comerciais para uma grande faixa de aplicações constitui-se em prova irrefutável da solidez da tecnologia de separação ciclônica. Em qualquer situação industrial, onde haja uma corrente gasosa com pressão relativamente elevada carreando gotículas de líquido finamente dispersas ou partículas sólidas (poeira, por exemplo), o uso de ciclones como depuradores dessa corrente gasosa reúne simplicidade construtiva do equipamento e, conseqüentemente, um baixo custo de investimento e operacional, com uma eficiência de separação muito superior à obtida com decantadores gravitacionais. A mesma conclusão pode ser obtida ao se lidar com uma corrente de água (ou outro líquido) carreando sólidos finamente dispersos.

O uso de hidrociclones para separação líquido/líquido, embora objeto de pesquisas há bastante tempo (veja por exemplo, Simkin and Olney [1956]), somente recentemente (nas duas últimas décadas) tem sido objeto de aplicação industrial. A principal aplicação de hidrociclones líquido/líquido tem sido a indústria do petróleo. A remoção de pequenas gotículas de óleo dispersas na água salgada, que é produzida juntamente com os hidrocarbonetos provenientes de um poço petrolífero, é tradicionalmente uma empreitada difícil devido ao pequeno diâmetro dessas gotículas e, muitas vezes, à reduzida diferença de densidade entre o óleo e a água, que implicam numa velocidade de escorregamento, sob ação do campo gravitacional, muito reduzida. Como a corrente de água oleosa é normalmente disponível com pressão suficiente para tornar atrativa a utilização de hidrociclones, vários desses equipamentos têm sido instalados em plataformas marítimas de produção de petróleo ao redor do mundo, nos últimos 20 anos.

A grande vantagem da utilização de hidrociclones, para purificação da água produzida junto com o óleo em plataformas marítimas de produção, reside, não só na

maior eficiência relativamente aos separadores gravitacionais como citado, mas também na menor área de convés e menor carga sobre o mesmo, propiciada pelo emprego desses equipamentos muito mais compactos do que os decantadores gravitacionais.

Essas vantagens têm feito com que a utilização, na indústria do petróleo, de equipamentos de separação com base no efeito centrífugo venha se ampliando nos últimos anos. A PETROBRAS, particularmente, vem atuando em projetos de desenvolvimento de novos modelos destinados a aplicações particulares, como é o caso dos seguintes projetos:

- *Hidrociclone PETROBRAS para Águas Oleosas* — Desenvolvido para a remoção do óleo disperso na água produzida anteriormente ao descarte.
- *GLCC (Gas Liquid Cylindrical Cyclone)* — Ciclone cilíndrico para a remoção de gotículas de líquido (hidrocarboneto e água) de correntes de hidrocarboneto gasoso
- *Flotador ciclônico* — Equipamento para remoção do óleo disperso na água produzida, anteriormente ao descarte dessa água no ambiente, pela associação dos efeitos de floculação das gotículas, arraste por gás e campo centrífugo.

O uso de hidrociclones para remover partículas de água dispersas numa corrente de óleo tem sido objeto de intensa pesquisa acadêmica e mesmo industrial, devido às pressões da demanda da indústria do petróleo, que busca métodos eficientes e de baixo custo para a purificação do óleo produzido. Entretanto, infelizmente, protótipos industriais confiáveis para essa aplicação, ainda não estão disponíveis. Um dos problemas fundamentais, observados durante os experimentos de desenvolvimento de um hidrociclone para essa aplicação, é a ocorrência de ruptura das gotículas de água dispersas, o que, obviamente, é prejudicial à separação. Essa ruptura das gotículas de água é devida às elevadas tensões cisalhantes que se produzem na corrente da fase contínua (óleo) aliada ao fato de que a relação de viscosidades entre as fases dispersa e contínua é favorável à deformação e ruptura das gotas sujeitas ao campo cisalhante.

Têm sido objeto de pesquisa e desenvolvimento recente hidrociclones para altos teores de óleo (teores situados na faixa de poucas unidades percentuais até 50% de óleo). Esses equipamentos visam desafogar plantas de processamento primário

offshore, quando o campo de produção apresenta elevada produção de água. Nesse contexto, situa-se o projeto abaixo, que encontra-se em andamento.

- *CySep – Compact Cyclone Separation System* – Sistema compacto de remoção e condicionamento de água produzida, para utilização na plataforma ou instalação submarina. O objetivo é desafogar uma instalação de produção existente, cujo volume de água produzida é elevado. Trata-se de um projeto multicliente, desenvolvido na Noruega (liderado pelas empresa *Aker-Kvaerner*), com a participação da PETROBRAS.

1.2.2 Complexidade do escoamento em um hidrociclones

O escoamento no interior dos ciclones e hidrociclones é bastante complexo, apesar das características mecânicas bastante simples desses separadores, que, como já foi dito, nada mais são do que equipamentos tubulares estáticos, compostos de trechos cilíndricos e cônicos justapostos, onde o movimento de rotação do fluido é promovido unicamente pela alimentação normal ao eixo do equipamento e tangencial à parede curva (côncava) da seção transversal do equipamento.

Antes de abordarmos a formulação matemática do escoamento no interior do ciclone parece-nos útil a descrição qualitativa do padrão de escoamento observado no equipamento. Vamos considerar, na discussão que se segue, que a fase dispersa tenha uma concentração que não afete significativamente o escoamento da fase contínua¹.

Considerando-se somente um tubo de alimentação (como mostrado na figura 1.1-1) é obvio que o escoamento na seção de alimentação não é axissimétrico, mas considerando-se a geometria do equipamento, é razoável supor que o escoamento assume um padrão axissimétrico à medida que se desenvolve no interior do equipamento. Deve-se ressaltar ainda, como já mencionado, que alguns hidrociclones

¹ Isso não é estritamente verdade. O hidrociclone é um separador e, em conseqüência, há regiões no seu interior, onde a concentração da fase dispersa é bastante elevada. Nessas regiões, as propriedades reológicas da dispersão podem ser muito diferentes daquelas verificadas na fase contínua. No hidrociclone para águas oleosas, entretanto, esse efeito não é grande. Ver discussão sobre o assunto no capítulo 4, seção 4.8.

comerciais para a separação líquido/líquido (separação de gotículas de óleo disperso em água) são construídos com duas aberturas de alimentação situadas diametralmente opostas, na mesma seção transversal do equipamento. Esse arranjo tem por objetivo conduzir o escoamento mais rapidamente à condição de axissimetria.

Assim que deixa o bocal (ou bocais) de alimentação, a corrente fluida entrando no ciclone encontra uma parede côncava que impõe à ela um forte movimento de rotação ao redor do eixo. A corrente fluida descreve então uma trajetória espiral na direção da *saída de fluido próxima ao vértice do trecho cônico* e, se essa abertura não for suficientemente grande, a parte central da corrente fluida, após atingir a seção próxima à *saída de fluido próxima ao vértice do trecho cônico*, continua escoando em trajetória espiral (no mesmo sentido), porém voltando para a seção de alimentação sendo drenada pela abertura de *saída de fluido próxima à alimentação*. As causas desse escoamento reverso de parte do fluido podem ser “qualitativamente” entendidas ao se observar o diagrama esquemático de distribuição de pressão ao longo do raio, em diversas seções do equipamento, mostrado na figura 1.2.2-1.

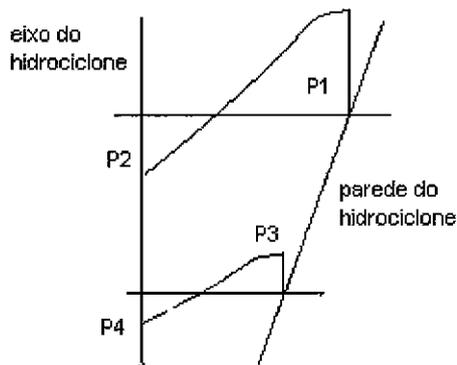


Figura 1.2.2-1 – Distribuição (qualitativa) radial de pressão no interior de um hidrociclone.

Na seção transversal próxima à alimentação do hidrociclone, a pressão P_1 é maior que P_2 devido à aceleração centrífuga (o fluido é empurrado contra a parede pelo efeito do campo centrífugo). O mesmo acontece em relação às pressões P_3 e P_4 na seção mais afastada da entrada. A baixa pressão produzida na região próxima ao eixo na primeira seção pode ser forte o suficiente para tornar P_2 menor que P_4 , o que resulta

num escoamento reverso junto ao eixo (ou seja, o fluido tenderia a escoar em direção à seção de alimentação). Obviamente, as vazões nas aberturas de *saída de fluido próxima à alimentação* e de *saída de fluido próxima ao vértice do trecho cônico* são funções das diferenças de pressão envolvidas que por sua vez são funções dos diâmetros dessas duas aberturas e da vazão de alimentação do hidrociclone, sendo esta última a responsável pela geração do efeito centrífugo.

Com relação aos campos de velocidade, algumas observações qualitativas também podem ser realizadas. O componente axial da velocidade, conforme já foi mencionado, está dirigido da seção onde se situa a *saída de fluido próxima à alimentação* para a seção de *saída de fluido próxima ao vértice do trecho cônico*, na região junto às paredes do equipamento e assume sentido oposto na região próxima ao eixo (fluxo reverso). Com relação ao componente radial da velocidade, parece óbvio que o fluido deve se deslocar na direção do eixo do equipamento, pois a entrada de fluido está localizada na parede e as duas saídas localizam-se axialmente (em menores distâncias radiais do eixo). Alguma idéia da magnitude relativa dos componentes de velocidade também pode ser inferida. Como a área através da qual se realiza a escoamento radial (paredes laterais de superfície cônica) é maior que a seção transversal do equipamento e ainda maior que a área transversal do orifício de alimentação, parece razoável que a ordem de grandeza do componente radial de velocidade seja inferior às dos outros componentes.

Pode-se também fazer uma descrição qualitativa sobre o componente azimutal (ou tangencial) da velocidade. Uma partícula de fluido entrando no equipamento tem que descrever uma trajetória espiral descendente, a qual tem raio decrescente, aproximando-se do eixo, como acima descrito. Durante esse movimento a partícula tem uma tendência (escoamento ideal) de conservar seu momento angular e, portanto, a velocidade azimutal deve aumentar. Entretanto, esse aumento da velocidade azimutal não pode conduzir aos valores extremamente elevados correspondentes ao vórtice livre teórico do escoamento não viscoso, pois eventualmente a viscosidade reduzirá a velocidade azimutal, à medida que o raio diminui. Desse modo o perfil de velocidade azimutal deverá se comportar como um vórtice livre na região externa (em relação ao eixo) e um perfil linear de rotação de corpo rígido junto ao eixo.

Uma abordagem com os fundamentos teóricos para o entendimento do fluxo reverso, entre outras características, essencialmente não viscosas, do escoamento em um hidrociclone, encontra-se detalhada no próximo capítulo. Entretanto, a apresentação qualitativa do escoamento num hidrociclone, vista acima, pode ainda ser complementada.

Considerando-se que o gradiente radial de pressão muito elevado causado pela aceleração centrífuga produz valores reduzidos de pressão junto ao eixo do equipamento, poderá ocorrer, nessa região, dependendo das condições operacionais (principalmente do balanço de diferenças de pressão *alimentação-saída de fluido próxima à alimentação* e *alimentação-saída de fluido próxima ao vértice do trecho cônico*), a formação de um núcleo de ar (ou de vapor de fluido). Na verdade, muitos hidrociclones sólido/líquido são projetados e operados considerando a presença de um núcleo gasoso.

Além do escoamento principal, acima descrito, existem outros fluxos secundários no interior dos ciclones e hidrociclones. A importância desses fluxos para a correta descrição do escoamento e desempenho do hidrociclone depende da característica particular que está sendo considerada, mas na maioria dos casos, esses fluxos secundários afetam o desempenho do equipamento e portanto têm que ser levados em consideração. Esse é o caso das camadas limite junto às paredes do equipamento e das zonas de recirculação com linhas de corrente fechadas.

Da descrição feita acima, pode-se concluir que o escoamento no interior dos ciclones e hidrociclones apresenta ao pesquisador características bastante complexas e desafiadoras, entre as quais podemos citar: linhas de corrente com curvatura acentuada, forças de campo intensas – campo centrífugo –, interação entre fluxos principais e secundários, turbulência anisotrópica e ainda a presença de duas ou mais fases. Não se constitui em surpresa que a pesquisa por melhores modelos fluidodinâmicos para a descrição do escoamento nesses equipamentos tenha crescido consideravelmente nas últimas décadas.

1.3 Objetivos do presente trabalho

Como foi visto acima, existem diversas aplicações atuais, e em perspectiva, para os hidrociclones na indústria do petróleo. Além disso, foi destacada, embora de forma apenas qualitativa, a complexidade dos fenômenos envolvidos no escoamento dos fluidos no interior desses equipamentos.

Os projetos em desenvolvimento acima descritos, em função dessa complexidade de escoamento, são empiricamente conduzidos, ou seja, protótipos – normalmente em escala industrial – são construídos e testados, tanto em laboratório como em campo. Com o desenvolvimento de simuladores computacionais de escoamento, configura-se como bastante útil um estudo comparativo de modelos de escoamento, visando a disponibilização de modelos simplificados que sirvam de suporte a esses projetos experimentais. Essa modelagem numérica permite também, para as unidades industriais em operação, um estudo mais abrangente do comportamento para diferentes condições operacionais, estudo esse, que nem sempre é factível com os modelos físicos testados em laboratório e, menos ainda, em condições de campo.

Este trabalho tem, portanto, o objetivo fazer uma análise teórica abrangente (incluindo simulações numéricas) do escoamento em hidrociclones que operam sem núcleo gasoso, que são aqueles utilizados no processamento primário de petróleo, notadamente no tratamento de águas oleosas e na separação primária.

Especificamente, as atividades deste projeto de pesquisa abrangem as seguintes etapas:

- Análise teórica do escoamento não viscoso, com vorticidade prescrita, e suas implicações nas características principais do escoamento em um hidrociclone.
- Simulação do escoamento em hidrociclones: Discussão e revisão bibliográfica.
- Simulação da turbulência levando em consideração linhas de corrente curvas e rotação: Discussão e revisão bibliográfica.
- Análise comparativa dos modelos de turbulência e dos resultados experimentais.
- Implementação e análise comparativa de modelo de turbulência k - ϵ modificado para emprego no escoamento em hidrociclones.

- Simulação com o modelo de equações diferenciais de transporte para cada um dos componentes do tensor de Reynolds
- Simulação do problema utilizando o procedimento de Simulação de Grandes Escalas.

1.4 Contribuições do presente trabalho

O presente trabalho apresenta as seguintes contribuições:

1. Pela primeira vez é realizado um estudo do escoamento, no hidrociclone destinado ao processamento primário do óleo e da água produzida na indústria do petróleo, com a abrangência da análise aqui apresentada. Discutem-se as características desse complexo escoamento e comparam-se os modelos disponíveis como ferramenta de projeto do hidrociclone.
2. Proposta e avaliação comparativa de desempenho de um modelo $k-\varepsilon$ modificado, de modo a adequá-lo à descrição do escoamento em hidrociclones, aproximando o seu desempenho daquele obtido com o modelo completo do tensor de Reynolds.
3. Discussão e análise dos resultados obtidos e recomendações para o projeto de sistemas de hidrociclones para o processamento primário de fluidos.

1.5 Estrutura do presente trabalho

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

Faz-se, no próximo capítulo (*Capítulo 2*), uma revisão bibliográfica dos conceitos teóricos do escoamento de fluido ideal com campo de vorticidade não nula. Esse estudo considera hipóteses simplificadoras, de forma a tornar possível o tratamento analítico. Nesse capítulo são apresentados alguns estudos de caso, simplificados, desenvolvidos na literatura, que apresentam alguns aspectos característicos do escoamento em hidrociclones, aspectos esses que são reforçados na análise realizada.

- O primeiro desses estudos de caso analisa o efeito de um escoamento axial superposto a uma rotação, quando o diâmetro do tubo sofre uma variação. Observa-se nesse caso que, para determinadas condições, ocorre reversão do sentido do escoamento, de forma semelhante ao que se verifica num hidrociclone.
- O segundo caso aborda o efeito do escoamento irrotacional externo sobre um vórtice isolado, quando a velocidade desse escoamento externo varia. Esse problema também tem semelhança com o escoamento em hidrociclone, se considerarmos que nesse equipamento, o fluido junto ao eixo sofre rotação de corpo rígido, enquanto que a parte externa desse núcleo comporta-se próximo de um vórtice livre (escoamento irrotacional).
- O terceiro caso é o desenvolvimento de um modelo de fluido ideal com campo de vorticidade não nulo, que descreve o escoamento no plano axial de de um hidrociclone, onde a saída de fluido pela abertura próxima ao vértice cônico é considerada nula (todo o fluxo sofre reversão).
- Finalmente, o último estudo de caso aborda a extensão do modelo acima para qualquer partição de fluxo entre as duas saídas de fluido do hidrociclone.

Os estudos descritos neste capítulo mostram que algumas das características essenciais do escoamento em hidrociclones decorrem da geometria do escoamento e são determinadas pelos termos inerciais e convectivos das equações de Navier-Stokes, sendo pouco sensíveis aos termos difusivos.

No *Capítulo 3*, na sequência de abordagem do problema em complexidade crescente, analisa-se o fluido viscoso e a turbulência. Aqui, descrevem-se os diversos modelos de turbulência empregados em problemas de engenharia. Em sequência ao desenvolvimento teórico de cada modelo, faz-se uma análise e discussão de resultados de artigos técnicos, disponíveis na literatura, que abordam o emprego de cada modelo específico ou de uma eventual variante, para o estudo do escoamento em hidrociclones.

A seguinte sequência de modelos de turbulência é abordada:

- Modelos algébricos
- Modelos diferenciais de duas equações

Inclui-se aqui uma seção (3.2.3) que discute amplamente os problemas decorrentes da curvatura das linhas de corrente e do escoamento em rotação e as tentativas de adaptação dos modelos de duas equações para esses problemas. Faz-se a proposta de uma correção do modelo $k-\epsilon$ para simulação do escoamento em hidrociclones.

- Modelos diferenciais de quatro equações ($k-\epsilon$)

Inclui-se aqui uma análise das potencialidades desse modelo para o estudo do escoamento em hidrociclones

- Modelos que não utilizam o conceito de viscosidade turbulenta (modelo completo do tensor de Reynolds).
- Simulação de Grandes Escalas

O Capítulo 4 trata das simulações computacionais com os modelos de turbulência descritos no capítulo anterior.

Inicia-se o Capítulo 4 com uma descrição do problema a ser simulado, definindo-se os seguintes parâmetros:

- características geométricas do hidrociclone,
- simplificações adotadas na modelagem ,
- modelos utilizados incluindo suas constantes e parâmetros
- malha utilizada
- condições de contorno e iniciais.

Apresentam-se os resultados das simulações considerando as condições do artigo que disponibiliza dados experimentais de velocidade média (Knowles, Woods & Feuerstein [1973]), comparando-se os resultados da simulação com os resultados experimentais. As simulações foram realizadas considerando-se os diversos modelos de turbulência abordados no capítulo 3, aí incluído o modelo de equações de transporte para cada um dos componentes do tensor de Reynolds.

Fez-se ainda uma investigação numérica da influência da fase dispersa no escoamento, considerando-se as alterações na densidade e viscosidade do fluido. São consideradas duas condições distintas de obtenção da viscosidade. Na primeira delas a

viscosidade da mistura é obtida da simples ponderação com a fração volumétrica de cada fase. Na segunda, mais realista, considera o fato de que as emulsões têm geralmente uma viscosidade ordens de grandeza acima da viscosidade dos fluidos constituintes puros.

Foram ainda apresentados e discutidos, de forma comparativa com os demais modelos, os resultados da utilização de modelo de turbulência k - ϵ modificado proposto neste trabalho para a descrição do escoamento no hidrociclone.

Apresentam-se, ainda, alguns resultados qualitativos obtidos com a Simulação de Grandes Escalas para o problema em pauta.

Fechas-se este trabalho, comentando-se os resultados obtidos, e recomendando estudos adicionais que deverão ser realizados para aprofundar o conhecimento sobre os hidrociclones para separação óleo/água.

1.6 Métodos de investigação utilizados nas simulações numéricas

Foram utilizados, dois pacotes computacionais nas simulações aqui apresentadas. Numa primeira análise, com malha grosseira e com hipótese de simetria axial, foi utilizado o *PHOENICS* versão 3.3. Para as simulações com o modelagem completa do tensor de Reynolds e comparação com o modelo k - ϵ modificado, foi utilizado o pacote *CFX*, nas versões 5.5.1 e 5.6. O primeiro desses simuladores foi desenvolvido pela empresa *CHAM* sendo comercializado para utilização em aplicações acadêmicas e em projetos de engenharia. O *CFX*, do grupo *AEA Technology*, apresenta mais facilidade de implementação de problemas tridimensionais, além de ambiente mais amigável para implementação de rotinas de usuário.

Os simuladores baseiam-se no método numérico de volumes finitos para proceder a solução das equações diferenciais que governam o escoamento. Nesse método, as equações diferenciais são transformadas – por um processo de integração simplificada nos volumes finitos – em equações algébricas relacionando as grandezas do escoamento, em cada um dos volumes finitos em que o domínio de escoamento é dividido, com os seus vizinhos.

A descrição sucinta do método numérico empregado nesses simuladores será feita no Capítulo 4.

1.7 Discussão sumária dos resultados e conclusões

Foi feito um estudo bastante abrangente do complexo escoamento no interior de um hidrociclone que opera sem núcleo gasoso, visando subsidiar o projeto e a análise da operação desses equipamentos que vêm sendo muito utilizados na indústria do petróleo, principalmente no processamento primário de fluidos, na separação óleo/água.

Os resultados obtidos, com as simulações numéricas indicaram que, com os modelos de turbulência mais simples e com o modelo $k-\epsilon$, somente os perfis de velocidade axial e radial foram razoavelmente captados nas simulações. Entretanto, nenhum desses modelos de foi capaz de capturar o perfil do componente azimutal da velocidade. Isso somente foi possível com o modelo de equações de transporte para cada componente do tensor de Reynolds.

Foi proposta, entretanto, uma correção no modelo $k-\epsilon$ que permitiu um desempenho mais adequado desse modelo para descrever o escoamento em análise. Foram realizadas comparações entre os resultados desse modelo modificado e os resultados com o modelo do tensor de Reynolds.

1.8 Recomendações para trabalhos futuros

Recomenda-se que sejam realizadas medições, com Anemometria a Laser, das flutuações de velocidade em tempo real em protótipo operando em laboratório. Dessas medições obter-se-ão não só as velocidades médias, mas também as grandezas turbulentas. Para esse intento, foi adquirido um modelo em acrílico, em escala real, mostrado na figura 1.1-8, que pretende-se seja utilizado tão logo esteja operacional o laboratório de velocimetria de fluidos, atualmente em obras, no Centro de Pesquisas e Desenvolvimento da PETROBRAS.

2. UMA REVISÃO DOS CONCEITOS FLUIDODINÂMICOS DE ESCOAMENTOS IDEAIS NA PRESENÇA DE VORTICIDADE, COM VISTAS AO ESTUDO DO ESCOAMENTO EM UM CICLONE

2.1 Preliminares

Este capítulo contém um desenvolvimento analítico detalhado dos conceitos clássicos² do escoamento de fluidos ideais sujeitos a uma condição prescrita de vorticidade. Contém assim, as bases para o entendimento dos fenômenos, essencialmente não viscosos, que ocorrem na presença de vorticidade e que definem algumas das principais características do escoamento num hidrociclone.

Detalhou-se o desenvolvimento das equações utilizadas e procurou-se exemplificar, por meio de rotinas numéricas as discussões mais complexas sobre as variações das grandezas avaliadas, principalmente os perfis de velocidade.

Além da discussão dos exemplos de escoamentos axissimétricos, invíscidos, com vorticidade e com rotação ao redor do eixo, abordados na literatura clássica da mecânica dos fluidos, acrescentou-se uma revisão bibliográfica e discussão de artigos técnicos, que empregam os conceitos aqui desenvolvidos, para a modelagem do escoamento em hidrociclones. (Bloor e Ingham [1973-1985] e Capela Moraes et al. [1996]).

Estuda-se, a seguir, um escoamento axissimétrico com circulação do fluido ao redor do eixo de simetria. Faz-se o desenvolvimento analítico do equacionamento para o problema do escoamento de um fluido suposto ideal. A vorticidade é não nula, pelo menos em parte do domínio de escoamento. O escoamento apresenta ainda as

² Vide Batchelor [1967]

características de que o fluido está em rotação ao redor de um eixo, e, com relação a este, apresenta simetria axial.

Considera-se a seguinte simbologia:

- Coordenadas cilíndricas: (x, σ, ϕ)
- Componentes da velocidade: (u, v, w)
- Componentes da vorticidade: $(\omega_x, \omega_\sigma, \omega_\phi)$

Os componentes da vorticidade em coordenadas cilíndricas são dados pelas relações 2.1-2 a 2.1-4 (vide Batchelor [1967]).

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \quad (2.1-1)$$

$$\omega_x = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial(\sigma w)}{\partial \sigma} - \frac{1}{\sigma} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \phi}}_{=0} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial(\sigma w)}{\partial \sigma} \quad (2.1-2)$$

(axissim)

$$\omega_\sigma = \frac{1}{\sigma} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \phi}}_{=0} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.1-3)$$

(axissim)

$$\omega_\phi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \sigma} \quad (2.1-4)$$

O escoamento pode ser considerado “bidimensional”, pois é axissimétrico, ou seja, conhecendo-se o escoamento num plano que contem o eixo e $w = w(x, \sigma)$, conhece-se todo o escoamento.

Podemos então fazer uso da função corrente de Stokes para descrever o escoamento no plano axial. A função corrente, ψ , é tal que:

$$u = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \quad v = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.1-5)$$

Como, $\omega_\phi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \sigma}$, $u = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}$ e $v = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\omega_\phi &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right) = \\ &= -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} = \\ &= -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right)\end{aligned}\quad (2.1-6)$$

A equação dinâmica para fluido incompressível e não viscoso (Euler) assume a forma:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \bar{g} \quad (2.1-7)$$

Mas,
$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u}$$

Temos ainda que
$$\frac{1}{2} \nabla(\bar{u} \cdot \bar{u}) = \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} + \bar{u} \times \bar{\omega} \therefore$$

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} q^2 \right) - \bar{u} \times \bar{\omega} \quad \text{onde } \bar{u} \cdot \bar{u} = q^2$$

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} q^2 \right) - \bar{u} \times \bar{\omega} \right] = -\nabla p + \rho \bar{g} \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \bar{u} \times \bar{\omega} = -\nabla \left(\frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \bar{g}$$

Como o campo gravitacional é uniforme no domínio do escoamento (por hipótese) segue que:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times \vec{\omega} = -\nabla \left(\underbrace{\frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} - \vec{g} \cdot \vec{x}}_H \right)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times \vec{\omega} = -\nabla H \quad (2.1-8)$$

$$\vec{u} \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & v & w \\ \omega_x & \omega_\sigma & \omega_\phi \end{vmatrix} = (v\omega_\phi - w\omega_\sigma)\vec{i} + (u\omega_\phi - w\omega_x)\vec{j} + (u\omega_\sigma - v\omega_x)\vec{k}$$

A equação (2.1-8) conduz às seguintes equações escalares:

$$v\omega_\phi - w\omega_\sigma - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.1-9)$$

$$u\omega_\phi - w\omega_x - \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \sigma} \quad (2.1-10)$$

$$u\omega_\sigma - v\omega_x - \frac{\partial w}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial \phi}}_{=0} \quad (2.1-11)$$

(axissim)

Esta última relação (2.1-11) pode ser escrita da seguinte forma equivalente:.

$$\frac{D(\sigma w)}{Dt} = 0$$

Vejamos porque:

$$\frac{D(\sigma w)}{Dt} = \frac{\partial(\sigma w)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla(\sigma w) = \sigma \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla(\sigma w)$$

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$\nabla(\sigma w) = \frac{\partial(\sigma w)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(\sigma w)}{\partial \sigma} \vec{j} + \underbrace{\frac{\partial(\sigma w)}{\partial \phi}}_{=0} \vec{k}$$

(axissim)

$$\frac{\partial(\sigma w)}{\partial x} = \sigma \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\nabla(\sigma w) = \sigma \frac{\partial w}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(\sigma w)}{\partial \sigma} \vec{j} + 0 \vec{k}$$

$$\vec{u} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot \nabla(\sigma w) = u \sigma \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial(\sigma w)}{\partial \sigma}$$

$$\therefore \frac{D(\sigma w)}{Dt} = \sigma \frac{\partial w}{\partial t} + u \sigma \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial(\sigma w)}{\partial \sigma}$$

Mas:

$$e \quad \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{\sigma} \frac{\partial(\sigma w)}{\partial \sigma} \\ \omega_\sigma &= -\frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{D(\sigma w)}{Dt} = \sigma \frac{\partial w}{\partial t} + u \sigma \omega_\sigma + v \sigma \omega_x$$

Mas de (2.1-11), $u \omega_\sigma - v \omega_x - \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ ou $\sigma \frac{\partial w}{\partial t} - u \sigma \omega_\sigma + v \sigma \omega_x = 0$

Portanto (2.1-11) é equivalente a $\frac{D(\sigma w)}{Dt} = 0$.

Ou seja, a circulação ao redor de uma linha material, na forma de um círculo centrado no eixo e normal ao mesmo, é constante. Ou ainda, o momento angular de uma partícula material de fluido, permanece constante quando essa partícula se move (ao longo da linha de corrente).

No regime permanente, um elemento material de fluido ao se mover ao longo de uma linha de corrente move-se sobre a superfície de revolução formada rodando a curva $\psi = \text{constante}$, ao redor do eixo de simetria.

$$\text{Pelo teorema de Bernoulli, } \frac{1}{2} q^2 + \frac{\rho}{\rho} = H(\psi) \quad (2.1-12)$$

e como o produto σw é constante para uma partícula material de fluido segue que

$$\sigma w = C(\psi) \quad (2.1-13)$$

onde H e C são funções arbitrárias de ψ .

$$\text{De (2.1-2), } \omega_x = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial(\sigma w)}{\partial x}, \text{ segue que: } \omega_x = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dC}{d\psi} \therefore \omega_x = \underbrace{u}_{=v} \frac{dC}{d\psi}$$

$$\text{De (2.1-3), temos } \omega_\sigma = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C}{\sigma} \right) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dC}{d\psi} \therefore \omega_\sigma = \underbrace{v}_{=v} \frac{dC}{d\psi}$$

$$\text{De (2.1-9), temos } v\omega_\phi - w\omega_\sigma = \frac{\partial H}{\partial x} \text{ (lembrando que é regime permanente)}$$

$$\frac{\omega_\phi}{\sigma} - \frac{w\omega_\sigma}{\sigma v} = \frac{1}{\sigma v} \frac{dH}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \text{ ou ainda: } \frac{\omega_\phi}{\sigma} = \frac{w\omega_\sigma}{\sigma v} + \frac{1}{\sigma v} \frac{dH}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

portanto:

$$\frac{\omega_\phi}{\sigma} = \frac{w}{\sigma} \frac{dC}{c\psi} - \left(-\frac{1}{\sigma} \frac{d\psi}{dx} \right) \frac{1}{v} \frac{dH}{d\psi}$$

mas $-\frac{1}{\sigma} \frac{d\psi}{dx} = v$, portanto a equação acima fica:

$$\frac{\omega_\phi}{\sigma} = \frac{w}{\sigma} \frac{dC}{c\psi} - \frac{dH}{d\psi} \quad (2.1-14)$$

No caso de velocidade de rotação do fluido ao redor do eixo nula, ou seja, para $w = 0$, tem-se que ω_ϕ / σ é função somente de ψ .

$$\text{Como de (2.1-6) } \omega_\phi = -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right)$$

$$\text{De (2.1-12), } -\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right) = \frac{w}{\sigma} \frac{dC}{d\psi} - \frac{dH}{d\psi}$$

$$\text{ou } \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right) = \sigma^2 \frac{dH}{d\psi} - \sigma w \frac{dC}{d\psi}$$

mas como $\sigma w = C$ (2.1-13), tem-se

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \sigma^2 \frac{dH}{d\psi} - C \frac{dC}{d\psi} \quad (2.1-15)$$

Essa é a equação que descreve o escoamento de um fluido ideal sujeito à um campo de vorticidade. Com base nessa equação, Batchelor analisa os casos em que o escoamento é totalmente desenvolvido ou seja $d(\)/dx = 0$ e velocidade radial nula ($v = 0$).

Esses escoamentos são chamados de escoamentos cilíndricos (as superfícies de Bernouilli são cilindros circulares). Com essas hipóteses, desenvolvem-se alguns estudos analíticos com aplicação no escoamento de fluidos em tubulações.

A equação do componente radial da equação da quantidade de movimento para esse caso fica:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{w}{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{w^2}{\sigma} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \sigma} +$$

$$v \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\sigma v) \right) + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} - \frac{2}{\sigma^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \rho f_\sigma$$

Que com as simplificações decorrentes de:

- regime permanente ($d(\)/dt = 0$),
- velocidade radial nula ($v = 0$),
- axissimetria ($d(\)/d\phi = 0$),
- escoamento totalmente desenvolvido ($d(\)/dx = 0$),
- fluido invíscido ($\nu = 0$),

fica reduzida a :

$$\frac{w^2}{\sigma} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\sigma} \quad (2.1-16)$$

que nada mais é que a igualdade entre a força centrífuga e a força de pressão no sentido radial. Ou seja, ocorre um gradiente radial de pressão devido ao efeito centrífugo proporcionado pela rotação do fluido ao redor do eixo com velocidade w .

Como de (2.1-13), $C(\psi) = \sigma w$, de (2.1-16), $\frac{w^2}{\sigma} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\sigma} = \frac{C^2}{\sigma^3}$

temos também que de (2.1-13), $H(\psi) = \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho}$, (lembrando que $v = 0$),

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\sigma} = \frac{C^2}{\sigma^3} \text{ implica } p = \rho \int \frac{C^2}{\sigma^3} d\sigma \text{ e, portanto:}$$

$$H(\psi) = \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \int \frac{C^2}{\sigma^3} d\sigma \quad (2.1-17)$$

Temos ainda que, (2.1-13), $w = C/\sigma$ e assim $\frac{1}{2}w^2 = \frac{1}{2}\frac{C^2}{\sigma^2}$

portanto:
$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{2}\frac{C^2}{\sigma^2}\right) = \frac{C}{\sigma^2}\frac{dC}{d\sigma} - \frac{C^2}{\sigma^3}$$

ou ainda
$$d\left(\frac{1}{2}w^2\right) = d\left(\frac{1}{2}\frac{C^2}{\sigma^2}\right) = \left(\frac{C}{\sigma^2}\frac{dC}{d\sigma} - \frac{C^2}{\sigma^3}\right)d\sigma$$

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \int \left[\frac{C^2}{\sigma^3} + \left(\frac{C}{\sigma^2}\frac{dC}{d\sigma} - \frac{C^2}{\sigma^3} \right) \right] d\sigma$$

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \int \left(\frac{C}{\sigma^2}\frac{dC}{d\sigma} \right) d\sigma \quad (2.1-18)$$

Na análise dos problemas em regime permanente, quando todas as linhas de corrente vêm de uma região, mesmo que situada hipoteticamente no infinito, sendo conhecidos ou prescritos os valores de H e C para diferentes linhas de corrente (ou seja, conhecidas as funções $H(\psi)$ e $C(\psi)$), a equação (2.15) presta-se, em princípio, à determinação da função corrente de Stokes ψ , como uma função de x e σ em todo o domínio do escoamento, que, uma vez determinada, produz o campo de velocidades.

A solução de (2.1-15) para ψ é, entretanto, somente possível para os casos em que H e C são funções simples de ψ .

Batchelor aborda um caso relativamente simples, no qual o fluido a montante tem uma velocidade axial uniforme U e roda como um corpo rígido com velocidade angular Ω constante.

É interessante, ao estudo do escoamento num hidrociclone, considerar-se esse problema, uma vez que, como descrito na seção 1.0, no escoamento na região central (próxima ao eixo) de um hidrociclone o fluido roda ao redor do eixo com rotação de corpo rígido. A velocidade axial não é uniforme, como no exemplo aqui considerado,

ocorrendo inclusive reversão do sentido do escoamento axial. Esse efeito de reversão do sentido do escoamento axial também é previsto, pela teoria, na análise do problema aqui apresentado, como será visto adiante.

Considerando então o caso estudado por Batchelor, temos que as condições à montante são dadas por:

$$\psi = \frac{1}{2} U \sigma^2$$

$$C = \sigma w = \Omega \sigma^2$$

Nessa região de montante o escoamento é cilíndrico e, portanto, de (2.1-17):

$$H(\psi) = \frac{1}{2} (u^2 + w^2) + \int \frac{C^2}{\sigma^3} d\sigma$$

Substituindo-se os valores de w e C , resulta em:

$$H(\psi) = \frac{1}{2} (U^2 + \Omega^2 \sigma^2) + \int \frac{\Omega^2 \sigma^4}{\sigma^3} d\sigma = \frac{1}{2} U^2 + \frac{1}{2} \Omega^2 \sigma^2 + \Omega^2 \frac{\sigma^2}{2}$$

e finalmente $H = \frac{1}{2} U^2 + \Omega^2 \sigma^2$

As condições de montante podem ser rescritas para H e C em função de ψ :

$$\text{De } \psi = \frac{1}{2} U \sigma^2 \quad \text{e} \quad C = \Omega \sigma^2 \quad \text{tal que} \quad C = \frac{2\Omega}{U} \psi \quad (2.1-19)$$

e ainda de $H = \frac{1}{2} U^2 + \Omega^2 \sigma^2$, $C = \Omega \sigma^2$ e $C = \frac{2\Omega}{U} \psi$, segue que:

$$H = \frac{1}{2}U^2 + \frac{2\Omega^2}{U}\psi \quad (2.1-20)$$

As expressões (2.1-19) e (2.1-20), para C e H em função de ψ , podem ser derivadas em relação a essa variável, para dar:

$$\frac{dC}{d\psi} = \frac{2\Omega}{U} \quad \text{e} \quad \frac{dH}{d\psi} = \frac{2\Omega^2}{U}$$

Portanto a equação (2.1-15) fica:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \frac{2\Omega^2}{U} \sigma^2 - \frac{4\Omega^2}{U^2} \psi \quad (2.1-21)$$

(Observar que σ^2 no primeiro termo do segundo membro da equação (2.1-21) não pode ser substituído por $\frac{2\psi}{U}$, pois isso só vale à montante).

A equação (2.1-21) pode ser resolvida para a determinação de ψ .

Um ponto de partida para a solução do escoamento, consiste em propor-se uma forma para a função ψ derivada de sua condição a montante, que seja válida para a região de interesse.

A forma proposta por Batchelor é:

$$\psi(x, \sigma) = \frac{1}{2}U\sigma^2 + \sigma F(x, \sigma) \quad (2.1-22)$$

Essa forma para a função corrente de Stokes pode ser substituída na equação (2.1-21), para a obtenção da função F .

Da forma proposta por (2.1-22):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} = U + 2 \frac{\partial F}{\partial \sigma} + \sigma \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2}, \text{ que substituídas em (2.1-21),}$$

conduzem a:

$$\sigma \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + U + 2 \frac{\partial F}{\partial \sigma} + \sigma \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \left(\sigma U + F + \sigma \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) = \frac{2\Omega^2 \sigma^2}{U} - \frac{4\Omega^2}{U^2} \psi$$

$$\sigma \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{F}{\sigma} + \sigma \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} = \frac{2\Omega^2 \sigma^2}{U} - \frac{4\Omega^2}{U^2} \left(\frac{1}{2} U \sigma^2 + \sigma F \right)$$

($\div \sigma$), tem-se:
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{F}{\sigma^2} + \frac{2\Omega^2 \sigma}{U} - \frac{2\Omega^2 \sigma}{U} - \frac{4\Omega^2}{U^2} F$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{4\Omega^2}{U^2} \right) F$$

ou ainda, fazendo $k = 2\Omega/U$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left(\frac{1}{\sigma^2} - k^2 \right) F \quad (2.1-23)$$

Tendo por base essa equação diferencial de segunda ordem, Batchelor [1967] descreve alguns problemas de escoamento ideal com vorticidade para os quais podem ser razoavelmente formuladas hipóteses adicionais simplificadoras, de forma a que a equação resultante possa ser resolvida. Esses exemplos serão, a seguir, analisados em detalhe, com a inclusão de rotinas numéricas.

2.2 ESTUDO DE CASO 1 – O efeito da mudança do diâmetro da seção transversal de um tubo sobre a corrente de fluido em rotação

Este estudo de caso corresponde a um escoamento de fluido em regime permanente passando por uma transição tubular cônica para outro tubo de seção transversal diferente. O fluido tem, à montante dessa transição, velocidade axial U e rotação de corpo rígido ao redor do eixo com velocidade angular constante Ω .

O escoamento é axissimétrico. A transição pode ser com aumento ou diminuição do diâmetro do tubo.

A transição genérica é apresentada na figura 2.2-1 abaixo, adaptada de Batchelor [1967]:

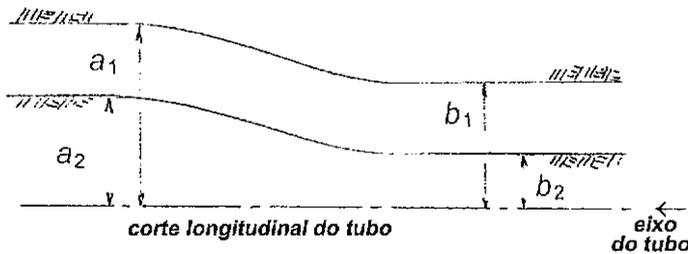


Figura 2.2-1 - Esquema geral da transição tubular

O escoamento é, por hipótese, considerado cilíndrico a montante e a jusante da transição. O problema é a determinação das velocidades axial e azimutal no escoamento cilíndrico a jusante.

A equação (2.1-23):
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left(\frac{1}{\sigma^2} - k^2 \right) F,$$
 para escoamento cilíndrico ($d(\)/dx = 0$) transforma-se em:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial F}{\partial \sigma} + \left(k^2 - \frac{1}{\sigma^2} \right) F = 0 \quad (2.2-1)$$

A equação acima é a chamada equação de Bessel de primeira ordem, cuja solução geral é dada por:

$$F = A J_1(k\sigma) + B Y_1(k\sigma), \quad (2.2-2)$$

onde $J_1(k\sigma)$ e $Y_1(k\sigma)$ são as funções de Bessel de primeira e segunda classe. As constantes A e B são determinadas de valores conhecidos de ψ para os dois valores de raio.

Batchelor propõe abordar todos os casos de transição possíveis, conforme o esquema genérico da figura 2.2-1, onde a_2 e b_2 poderiam assumir valor nulo.

Genericamente: Montante: $a_1 \geq \sigma \geq a_2$

Jusante: $b_1 \geq \sigma \geq b_2$

As linhas de corrente, para as quais $\psi = \frac{1}{2} U a_1^2$ e $\psi = \frac{1}{2} U a_2^2$ na seção cilíndrica à montante, estão nas posições radiais $\sigma = b_1$ e $\sigma = b_2$, respectivamente, na região cilíndrica à jusante.

Portanto para $\sigma = b_1$ temos: $\psi = \frac{1}{2} U a_1^2 = \frac{1}{2} U b_1^2 + b_1 F$, fazendo-se uso da forma proposta por Batchelor para a função corrente, dada pela equação (2.1-22).

Portanto
$$F = \frac{1}{2} U \left(\frac{a_1^2 - b_1^2}{b_1} \right).$$

Analogamente para $\sigma = b_2$ tem-se:
$$F = \frac{1}{2} U \left(\frac{a_2^2 - b_2^2}{b_2} \right)$$

Substituindo esses valores em $F = AJ_1(k\sigma) + BY_1(k\sigma)$, obtém-se duas equações para as constantes A e B , que resultam em:

$$A = \frac{U}{2b_1b_2} \frac{b_2(a_1^2 - b_1^2)Y_1(kb_2) - b_1(a_2^2 - b_2^2)Y(kb_1)}{J_1(kb_1)Y_1(kb_2) - J_1(kb_2)Y_1(kb_1)} \quad (2.2-3)$$

$$B = \frac{U}{2b_1b_2} \frac{b_2(a_1^2 - b_1^2)J_1(kb_2) - b_1(a_2^2 - b_2^2)J(kb_1)}{Y_1(kb_1)J_1(kb_2) - Y_1(kb_2)J_1(kb_1)} \quad (2.2-4)$$

Com os valores de A e B determinados, a expressão para F está determinada e, portanto, tem-se a expressão para a função corrente à jusante. Dessa expressão para a função corrente podemos determinar as velocidades axial (u) e azimutal (w) no escoamento a jusante:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = U + \frac{1}{\sigma} \frac{d}{d\sigma} [A\sigma J_1(k\sigma) + B\sigma Y_1(k\sigma)] = \\ &= U + AkJ_0(k\sigma) + B\sigma Y_0(k\sigma) \end{aligned}$$

e como $C(\psi) = \sigma w$ e $C = \frac{2\Omega}{U} \psi$, então $w = \frac{2\Omega}{U\sigma} \psi$, ou seja:

$$\begin{aligned} w &= \frac{2\Omega}{U\sigma} \left\{ \frac{1}{2} U\sigma^2 + \sigma [AJ_1(k\sigma) + BY_1(k\sigma)] \right\} = \\ &= \Omega\sigma + \frac{2\Omega}{U} [AJ_1(k\sigma) + BY_1(k\sigma)] \end{aligned}$$

mas $2\Omega/U = k$, portanto:

$$w = \Omega\sigma + k[AJ_1(k\sigma) + BY_1(k\sigma)]$$

Os casos de maior interesse são a expansão e contração de tubulação cilíndrica. Nesse caso $a_2 = 0$, $b_2 \rightarrow 0$ e, fazendo-se $a_1 = a$ e $b_1 = b$, e sabendo-se que,

Quando $z \rightarrow 0$ temos que $J_1(z) \rightarrow 0$ e $zY_1(z) \rightarrow -\frac{2}{\pi}$

obtemos das expressões para A e B :

$$A = \frac{U - \frac{2}{\pi}(a^2 - b^2) - 0}{2b - \frac{2}{\pi}J_1(kb) - 0} \quad \text{ou} \quad A = \frac{1}{2} \frac{U(a^2 - b^2)}{J_1(kb)}$$

$$\text{e} \quad B = \frac{0 - 0}{\frac{2}{\pi}} = 0$$

Assim, as velocidades u e w podem ser obtidas das expressões acima considerando B nulo e o valor de A acima obtido, resultando em:

$$\frac{u}{U} = 1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{1/2 kb J_0(k\sigma)}{J_1(kb)} \quad (2.2-5)$$

$$\frac{w}{\Omega\sigma} = 1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{b J_0(k\sigma)}{\sigma J_1(kb)} \quad (2.2-6)$$

Batchelor observa que para $kb \ll 1$ as frações na extrema direita das duas expressões acima tem como limite a unidade (isso pode ser visto fazendo-se o limite da fração para $kb \rightarrow 0$ e aplicando-se l'Hopital, lembrando que $\frac{dJ_1(kb)}{d(kb)} = J_0(kb)$).

Nesse caso obtêm-se:

$$\frac{u}{U} \approx \frac{a^2}{b^2} \quad \text{e} \quad \frac{w}{\Omega\sigma} \approx \frac{a^2}{b^2}$$

correspondendo às alterações de velocidade esperadas para um tubo combinado de corrente e de vorticidade de pequena seção transversal, sobre a qual a velocidade e a vorticidade são uniformes. A primeira expressão indica a conservação da massa (velocidade \times área de escoamento = constante) e a segunda correspondendo à conservação da intensidade de vorticidade.

Para valores maiores de kb , Batchelor discute as variações previstas para os perfis das velocidades u e w , com base nos zeros das funções de Bessel $J_0(z)$ e $J_1(z)$:

As conclusões descritas por Batchelor estão visualizadas em exemplos (em que os dados foram arbitrados) produzidos numericamente em rotinas com o MathCad. Esses exemplos encontram-se ao final desta discussão sobre o Estudo de Caso 1, sob o título Estudo de Caso 1 – Rotinas Numéricas.

Esse conjunto de rotinas no MathCad calcula os perfis de velocidade para uma contração e para uma expansão do tubo. O tubo maior tem raio de 10 cm e o menor de 5 cm. A velocidade axial a montante é mantida em 1 m/s e as variações no valor de kb são provocadas por alterações no valor da velocidade angular de corpo rígido a montante Ω . Essas alterações vão permitir uma visualização do comportamento dos perfis de velocidade.

Para $kb < 2.4$, u e w/σ crescem para uma contração do tubo ($b < a$) e decrescem para uma expansão da tubulação ($b > a$). Além disso, essas variáveis são máximas no eixo do tubo e variam monotonicamente com o raio (σ). Esse comportamento pode ser visualizado observando-se os primeiros gráficos dos perfis de velocidade para a contração do tubo, onde $kb = 0.6$. Deve-se notar, que u e w/σ são máximos no eixo, mas o comportamento de w é oposto; nota-se ainda, que ao contrário do que ocorre a montante da contração, a variação de w com σ não é linear (o reticulado do gráfico de w permite visualizar isso).

Batchelor afirma também que, tomando-se o limite para $\sigma \rightarrow 0$ das expressões (2.2-5) e (2.2-6), respectivamente para u/U e para $w/(\Omega\sigma)$, obtém-se a igualdade entre os dois valores e essa igualdade é devida ao fato de que o eixo está

numa posição em que se situam um tubo de corrente e também um tubo de vorticidade ambos de pequena seção transversal. Ao final desta discussão sobre o Estudo de Caso 1, apresenta-se também uma rotina numérica em que os valores de u/U e $w/(\Omega\sigma)$ foram estimados para um valor muito pequeno de σ (10^{-6}), também para o caso de $kb = 0.6$ numa contração tubular, mostrando que os valores das velocidades axial e azimutal adimensionais são iguais até a décima casa decimal.

A natureza qualitativa das mudanças em u e w devido a uma alteração no diâmetro da tubulação (contração ou expansão) pode ser explicada por meio da forma das linhas de vórtice. A montante as linhas de vorticidade são linhas retas, paralelas entre si e ao eixo, e rodam ao redor do eixo junto com o fluido. Quando uma dessas linhas passa através da variação do diâmetro do tubo, um ponto material da mesma move-se radialmente, para dentro (contração do tubo) ou para fora (expansão do tubo), e tem sua velocidade azimutal w variando de acordo com $w\sigma = cte$.

Desse modo, quando uma linha de vorticidade, depois de passar por exemplo por uma contração, move-se radialmente para dentro, um ponto material sobre a mesma vai se mover mais rapidamente ao redor do eixo (maior w) do que o faz a mesma linha de vorticidade na região cilíndrica a montante e assim essa linha, ao atravessar a região de contração do tubo é deformada numa espiral ao redor do eixo, com um valor positivo do componente azimutal da vorticidade (supondo-se que a vorticidade a montante tinha o mesmo sentido do eixo x). Para que o componente azimutal da vorticidade, criado pela variação do diâmetro, seja positivo, e lembrando que esse componente é dado por (2.1-4):

$$\omega_{\phi} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \sigma}, \quad \text{que, com } v \equiv 0, \quad \text{reduz-se a:} \quad \omega_{\phi} = -\frac{\partial u}{\partial \sigma}$$

então $\partial u/\partial \sigma$ tem de ser negativo, o que confirma também que a velocidade axial máxima tem de ser no eixo. Isso confirma o que foi discutido acima e mostrado na rotina numérica.

Um raciocínio análogo mostraria o resultado contrário para uma expansão do tubo, ou seja, $\partial u/\partial \sigma$ é positivo e portanto a velocidade axial na região cilíndrica a jusante é mínima no eixo e cresce com o aumento do raio.

Outra característica interessante dos perfis de velocidade axial e azimutal após a passagem por uma variação do diâmetro, destacada por Batchelor, é a possibilidade de ocorrência de valores negativos de u e w , quando a rotação inicial do fluido (à montante) é suficientemente forte.

Para uma expansão do tubo, altos valores de kb produzem velocidades negativas primeiramente junto ao eixo. No caso de contração de diâmetro do tubo as velocidades negativas surgem primeiramente junto à parede do tubo.

Como se verá na discussão dos estudos de caso 3 e 4, esse resultado é oposto ao verificado no hidrociclone. Essa diferença é devida às condições iniciais do escoamento considerado no caso do hidrociclone relativamente ao exemplo aqui descrito. Aqui admite-se que o fluido comporta-se com rotação de corpo rígido ao redor do eixo. No caso do hidrociclone, a condição inicial é a de vórtice livre.

Na análise deste problema, Batchelor destaca ainda que esses casos onde velocidades u negativas ocorrem não são descritos adequadamente pela equação (2.1-23) uma vez que a mesma se baseou na hipótese de que *todas* as linhas de corrente vêm de uma região onde as funções H e C atendem a uma dependência prescrita com as mesmas e, essa relação de dependência dificilmente poderia ser mantida para as linhas de corrente provenientes de grandes valores de x , ou seja, de regiões a jusante. Assim Batchelor descarta a significação quantitativa dos resultados obtidos.

É interessante comparar-se essa discussão com os já citados estudos de caso 3 e 4, que serão abordados adiante. Particularmente no estudo de caso 4, a região de montante (com condições de contorno prescritas - H e C definidos), corresponde a apenas uma parte da seção transversal do tubo, havendo ainda duas "regiões de jusante", como descrito na seção 1. Para esse caso, portanto, o escoamento é caracterizado por valores negativos da velocidade axial u .

No problema aqui considerado, as conclusões de Batchelor sobre as regiões de surgimento das velocidades negativas, na contração e na expansão tubular, quando kb cresce, podem ser visualizadas em rotinas numéricas anexas. Para o caso da contração, verifica-se, nas rotinas numéricas, mostradas à frente, que para um kb de 3.0, começam os valores negativos de u a jusante, junto à parede do tubo em $\sigma \approx 4.2$ cm (o tubo tem 5 cm de raio). Para o caso da expansão, verifica-se que para kb de 2.4, os valores negativos de u a jusante estão situados junto ao eixo do tubo até $\sigma \approx 5.0$ e a parte externa permanece com velocidade axial positiva (nesse caso o tubo tem 10 cm de raio).

Batchelor afirma ainda que para kb se aproximando de 3.83 (onde $J_1(kb) = 0$), as velocidades u e w/σ se tornam infinitamente grandes independente da relação a/b . O autor sugere que essa anomalia deve-se ao fato de que na verdade a hipótese de escoamento cilíndrico, à jusante da transição de diâmetro, não é mais válida. Afirma que para essa magnitude de kb é possível a existência de um movimento ondulatório axissimétrico e, por essa razão, o efeito de mudança de diâmetro do tubo parece ser o de provocar o surgimento desse trem de ondas, de modo similar ao que pode ser provocado num escoamento em canal, com superfície livre, a jusante de um objeto submerso.

As rotinas numéricas citadas, mostram a tendência de aumento explosivo das velocidades quando $kb \rightarrow 3.83$.

ESTUDO DE CASO 1 – Rotinas Numéricas

Escoamento axissimétrico, com rotação de rotação de corpo rígido, através de uma transição (contração e expansão) tubular cilíndrica

a) contração do diâmetro do tubo

raio a montante: $a := 0.1$ [m]

raio a jusante:: $b := 0.05$ [m]

velocidade do fluido à montante: $U := 1$ [m/s]

rotação a montante: $\Omega := 6$ [rd/s]

$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U}$ $k = 12$ $k \cdot b = 0.6$ $\sigma := 0.001, 0.002, \dots, 0.05$

$$u(\sigma) := U \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{0.5 \cdot k \cdot b \cdot J_0(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b)} \right]$$

$$w(\sigma) := \Omega \cdot \sigma \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{b \cdot J_1(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b) \cdot \sigma} \right]$$

Perfis de velocidade axial $u(\sigma)$ e azimutal $w(\sigma)$ após a contração:

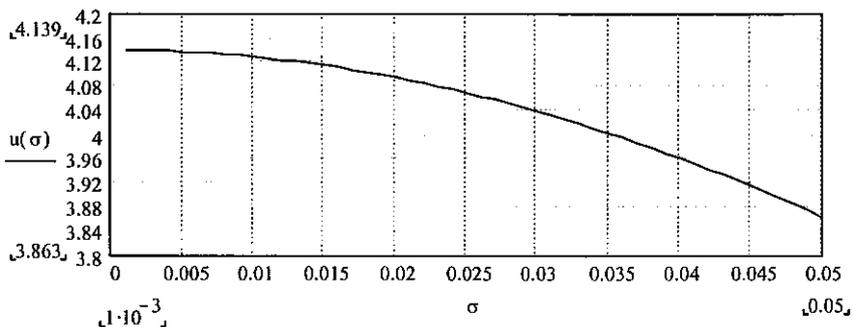


Figura EC1-1 – Perfil de velocidade axial a jusante da contração

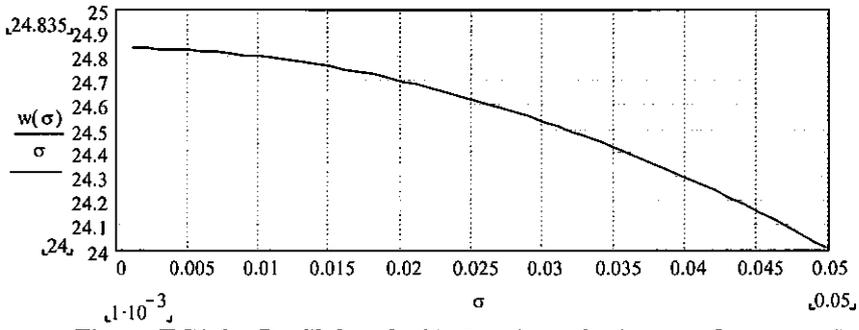


Figura EC1-2 – Perfil de velocidade azimutal a jusante da contração

Verificação da igualdade entre $u(\sigma)/U$ e $w(\sigma)/(\Omega\sigma)$ à jusante, para σ tendendo a zero:

raio a montante: $a := 0.1$ [m]

raio a jusante: $b := 0.05$ [m]

velocidade do fluido à montante: $U := 1$ [m/s]

rotação a montante: $\Omega := 6$ [rd/s]

$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U}$ portanto: $k = 12$ e $k \cdot b = 0.6$

Arbitrando-se:

$\sigma := 0.000001$

$$w(\sigma) := \Omega \cdot \sigma \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{b \cdot J_1(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b) \cdot \sigma} \right] \quad u(\sigma) := U \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{0.5 \cdot k \cdot b \cdot J_0(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b)} \right]$$

As velocidades resultam, respectivamente, em:

$u(\sigma) = 4.139$

$w(\sigma) = 2.483 \cdot 10^{-5}$

Confirmando a igualdade citada, como pode-se constatar dos resultados abaixo:

$\frac{u(\sigma)}{U} = 4.1391590453$

$\frac{w(\sigma)}{\Omega \cdot \sigma} = 4.1391590453$

Aumentando-se a rotação

raio a montante: $a := 0.1$ [m]

raio a jusante: $b := 0.05$ [m]

velocidade do fluido à montante: $U := 1$ [m/s]

rotação a montante: $\Omega := 24$ [rd/s]

$$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U}$$

$$k = 48$$

$$k \cdot b = 2.4$$

$\sigma := 0.001, 0.002, \dots, 0.05$

$$u(\sigma) := U \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{0.5 \cdot k \cdot b \cdot J_0(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b)} \right] \quad w(\sigma) := \Omega \cdot \sigma \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{b \cdot J_1(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b) \cdot \sigma} \right]$$

Obtêm-se os seguintes perfis de velocidade axial e azimutal, a jusante:

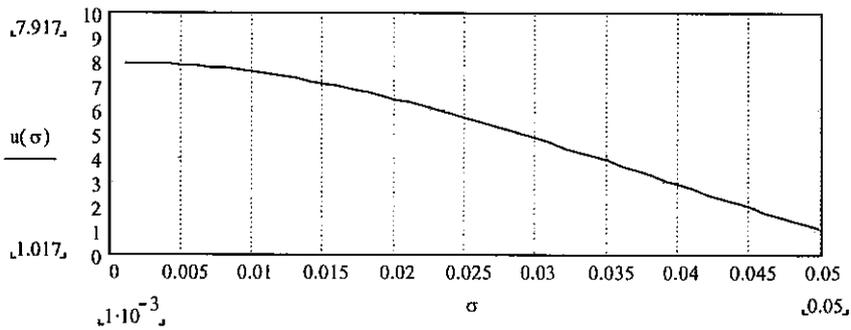


Figura EC1-3 – Perfil de velocidade axial a jusante da contração

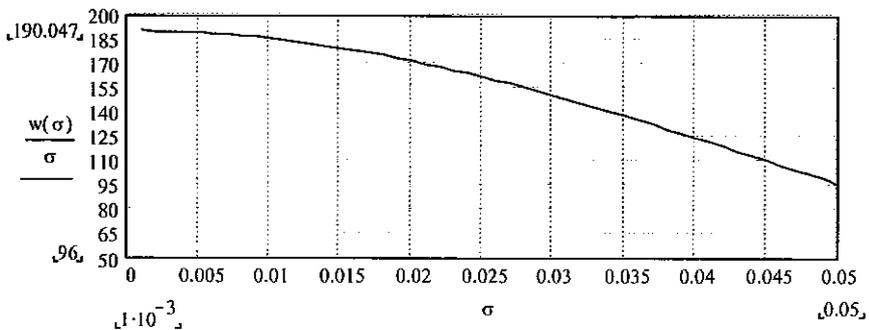


Figura EC1-4 – Perfil de velocidade azimutal a jusante da contração

Aumentando-se ainda mais a rotação:

raio a montante: $a := 0.1$ [m]

raio a jusante: $b := 0.05$ [m]

velocidade do fluido à montante: $U := 1$ [m/s]

rotação a montante: $\Omega := 30$ [rd/s]

$$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U} \quad k = 60$$

$$k \cdot b = 3$$

$\sigma := 0.001, 0.002, \dots, 0.05$

$$u(\sigma) := U \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{0.5 \cdot k \cdot b \cdot J_0(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b)} \right] \quad w(\sigma) := \Omega \cdot \sigma \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{b \cdot J_1(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b) \cdot \sigma} \right]$$

Obtêm-se os seguintes perfis de velocidade axial e azimutal, a jusante:

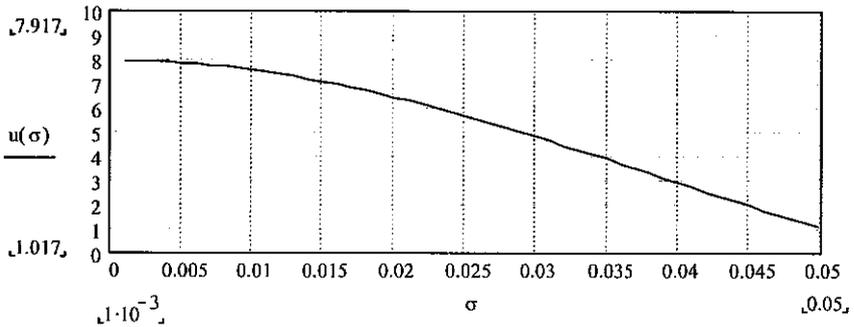


Figura EC1-5 – Perfil de velocidade axial a jusante da contração

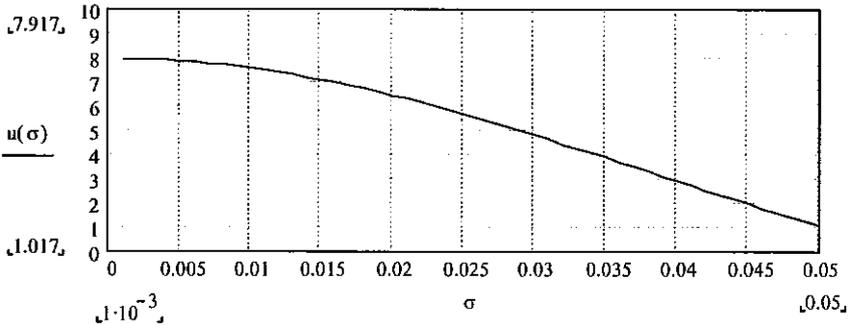


Figura EC1-6 – Perfil de velocidade azimutal a jusante da contração

Aumentando-se a rotação até que kb aproxime-se do valor limite 3.83:

raio a montante: $a := 0.1$ [m]

raio a jusante: $b := 0.05$ [m]

velocidade do fluido à montante: $U := 1$ [m/s]

rotação a montante: $\Omega := 38.2$ [rd/s]

$$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U}$$

$$k = 76.4$$

$$k \cdot b = 3.82$$

$\sigma := 0.001, 0.002, \dots, 0.05$

$$u(\sigma) := U \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{0.5 \cdot k \cdot b \cdot J_0(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b)} \right] \quad w(\sigma) := \Omega \cdot \sigma \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{b \cdot J_1(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b) \cdot \sigma} \right]$$

Obtêm-se os seguintes perfis de velocidade axial e azimutal a jusante da contração:

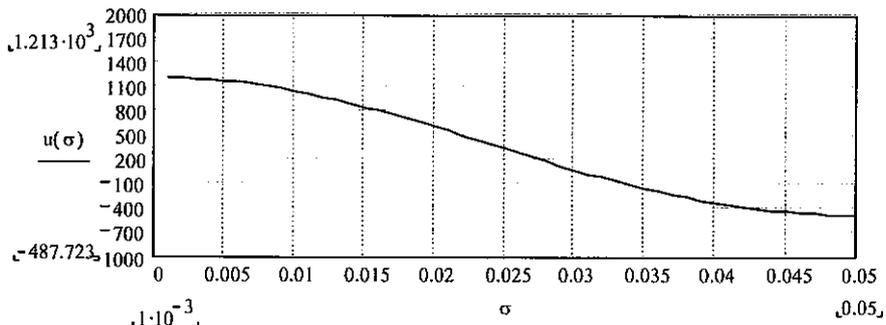


Figura EC1-7 – Perfil de velocidade axial a jusante da contração

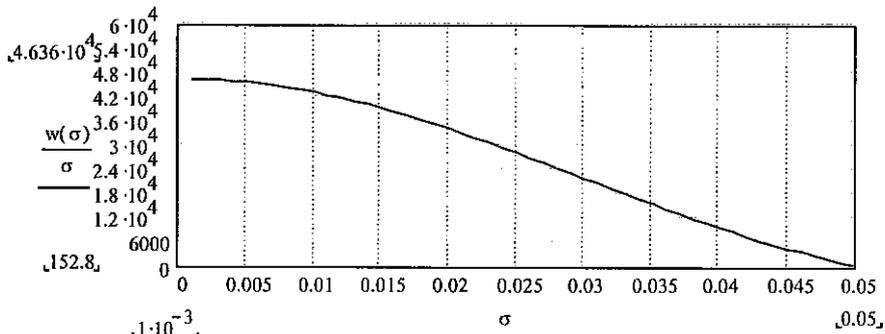


Figura EC1-8 – Perfil de velocidade azimutal a jusante da contração

Verifica-se que os valores de $u(\sigma)$ e $w(\sigma)/\sigma$ tendem a valores cada vez maiores.

b) expansão do diâmetro do tubo

raio a montante: $a := 0.05$ [m]

raio a jusante: $b := 0.1$ [m]

velocidade do fluido à montante: $U := 1$ [m/s]

rotação a montante: $\Omega := 6$ [rd/s]

$$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U} \quad k = 12$$

$$k \cdot b = 1.2$$

$\sigma := 0.001, 0.002, \dots, 0.1$

$$u(\sigma) := U \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{0.5 \cdot k \cdot b \cdot J_0(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b)} \right] \quad w(\sigma) := \Omega \cdot \sigma \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{b \cdot J_1(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b) \cdot \sigma} \right]$$

Obtêm-se os seguintes perfis de velocidade axial e azimutal a jusante da expansão:

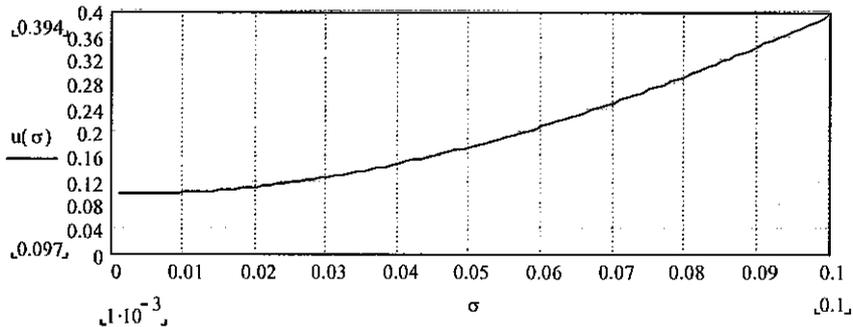


Figura EC1-9 – Perfil de velocidade axial a jusante da expansão

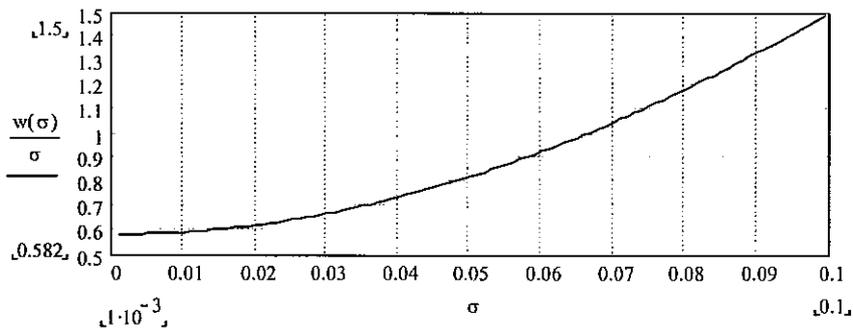


Figura EC1-10 – Perfil de velocidade azimutal a jusante da expansão

Aumentando-se a rotação do fluido a montante:

raio a montante: $a := 0.05$ [m]

raio a jusante:: $b := 0.1$ [m]

velocidade do fluido à montante: $U := 1$ [m/s]

rotação a montante: $\Omega := 12$ [rd/s]

$$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U} \quad k = 24$$

$$k \cdot b = 2.4$$

$\sigma := 0.001, 0.002, 0.1$

$$u(\sigma) := U \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{0.5 \cdot k \cdot b \cdot J_0(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b)} \right] \quad w(\sigma) := \Omega \cdot \sigma \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{b \cdot J_1(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b) \cdot \sigma} \right]$$

Obtêm-se os seguintes perfis de velocidade axial e azimutal a jusante da expansão:

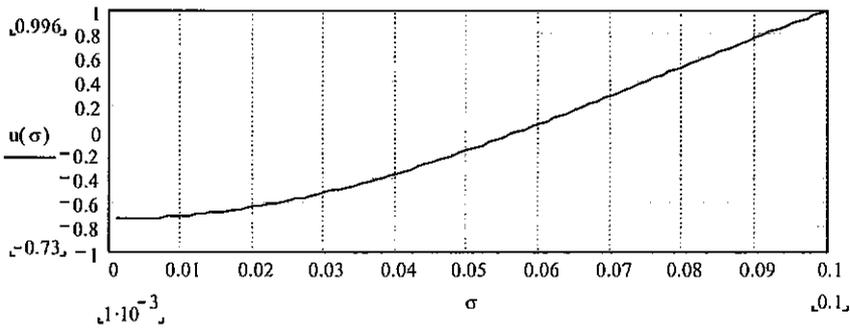


Figura EC1-11 – Perfil de velocidade axial a jusante da expansão

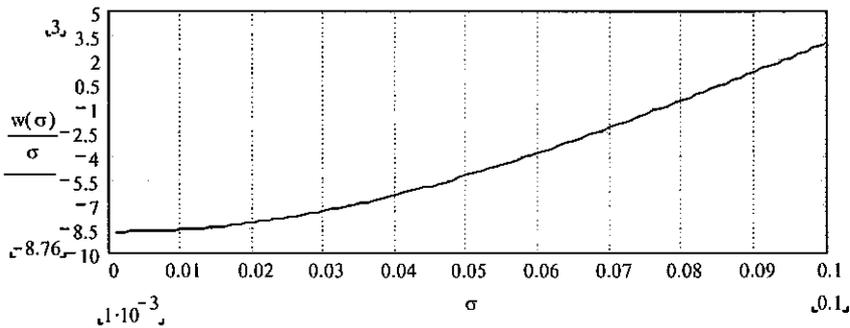


Figura EC1-12 – Perfil de velocidade azimutal a jusante da expansão

Aumentando-se a rotação do fluido:

raio a montante: $a := 0.05$ [m]

raio a jusante: $b := 0.1$ [m]

velocidade do fluido à montante: $U := 1$ [m/s]

rotação a montante: $\Omega := 19$ [rd/s]

$$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U} \quad k = 38$$

$$k \cdot b = 3.8$$

$\sigma := 0.001, 0.002, \dots, 0.1$

$$u(\sigma) := U \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{0.5 \cdot k \cdot b \cdot J_0(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b)} \right] \quad w(\sigma) := \Omega \cdot \sigma \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{b \cdot J_1(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b) \cdot \sigma} \right]$$

Obtêm-se os seguintes perfis de velocidade axial e azimutal a jusante da expansão:

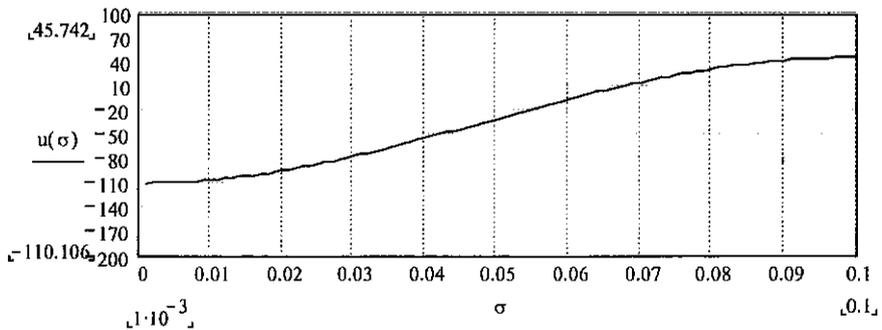


Figura EC1-13 – Perfil da velocidade axial a jusante da expansão

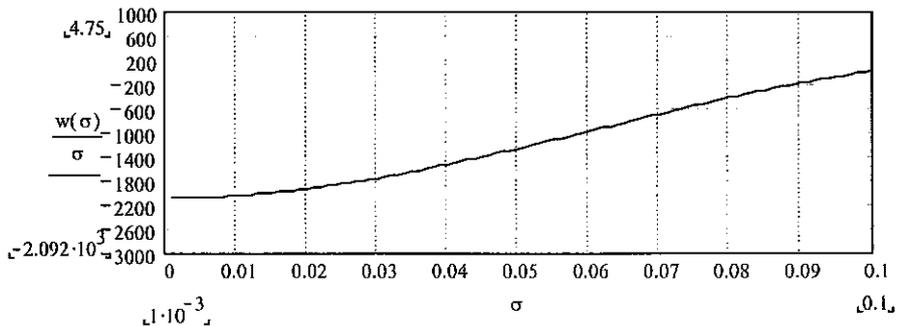


Figura EC1-14 – Perfil da velocidade azimutal a jusante da expansão

Aumentando-se a rotação do fluido até que kb se aproxime do valor limite de 3.83

raio a montante: $a := 0.05$ [m]

raio a jusante: $b := 0.1$ [m]

velocidade do fluido à montante: $U := 1$ [m/s]

rotação a montante: $\Omega := 19.1$ [rd/s]

$$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U} \quad k = 38.2 \quad k \cdot b = 3.82$$

$\sigma := 0.001, 0.002, 0.1$

$$u(\sigma) := U \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \cdot \frac{0.5 \cdot k \cdot b \cdot J_0(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b)} \right] \quad w(\sigma) := \Omega \cdot \sigma \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \cdot \frac{b \cdot J_1(k \cdot \sigma)}{J_1(k \cdot b)} \right]$$

Obtêm-se os seguintes perfis de velocidade axial e azimutal a jusante da expansão:

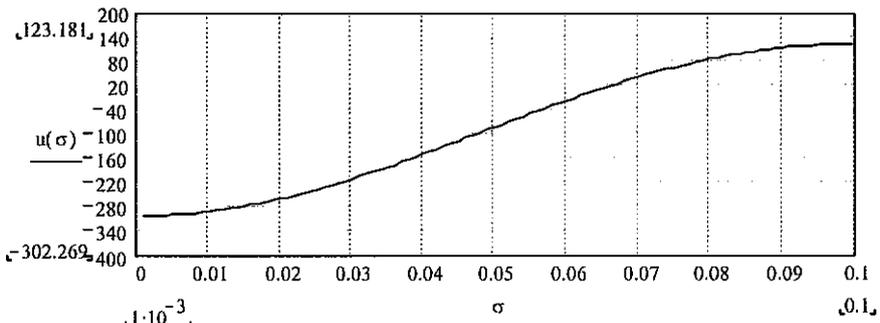


Figura EC1-15 – Perfil da velocidade axial a jusante da expansão

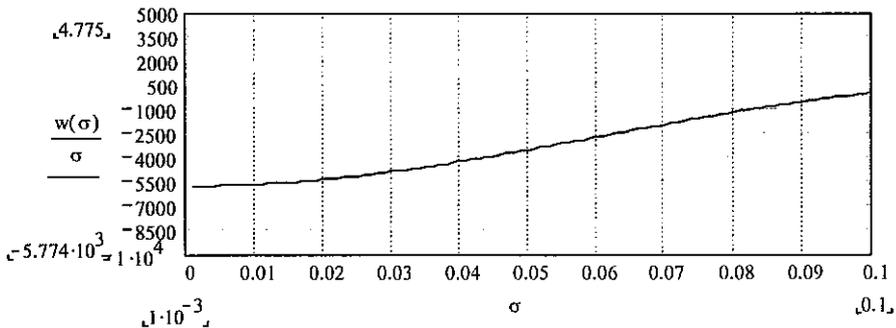


Figura EC1-16 – Perfil da velocidade azimutal a jusante da expansão

Verifica-se que os valores absolutos de $u(\sigma)$ e $w(\sigma)/\sigma$ tendem a valores cada vez maiores.

2.3 ESTUDO DE CASO 2 – O efeito da mudança da velocidade externa sobre um vórtice isolado

Outro caso clássico de escoamento ideal, com rotação ao redor do eixo de simetria, também estudado por Batchelor, e que apresenta relação com o escoamento em um hidrociclone é o estudo do comportamento de um vórtice livre ou vórtice isolado imerso em um escoamento irrotacional, ou seja, um tubo de vorticidade situado no seio de um escoamento irrotacional.

Num hidrociclone, como já descrito (por exemplo, no capítulo 1), o núcleo central sofre rotação de corpo rígido enquanto que a região externa, relativamente a esse núcleo, é essencialmente irrotacional. Assim, esse escoamento apresenta algumas semelhanças com as hipóteses do problema aqui discutido.

Visto de uma grande distância, um vórtice isolado aparece como um vórtice de linha que é especificado pela circulação ao redor de qualquer caminho fechado que passe ao redor desse vórtice de linha apenas uma vez, mas, numa visão mais próxima constata-se que o vórtice tem uma estrutura interna própria, com uma certa distribuição de vorticidade dentro do tubo de vorticidade.

Discute-se aqui o caso em que, numa região denominada de *montante*, o escoamento externo é irrotacional, cilíndrico, no sentido anteriormente definido, ou seja, se desenvolve ao longo do eixo x , sem quaisquer variações ao longo dessa coordenada e não há componente de velocidade normal a esse eixo, na direção radial, mas há componente da velocidade normal ao eixo x na direção transversal (ou azimutal). Na região chamada de *jusante*, o escoamento também é cilíndrico, mas o componente axial (ao longo de x) da velocidade é diferente daquele à montante. Obviamente, para que essa situação seja factível esse escoamento ao sair da região de montante para a região de jusante terá de passar por uma região de escoamento não cilíndrico, região essa, que não será estudada.

O objetivo é determinar o que acontece com um vórtice cilíndrico imerso na região de montante ao passar para a região de jusante. Não será examinado o que ocorre com o vórtice na região de transição entre montante e jusante devido à

complexidade do equacionamento, pois seria necessário considerar-se as derivadas em relação à coordenada x e o componente radial da velocidade v , que seriam não nulos, nessa região.

Para esse estudo será considerado um vórtice que, como dito acima, pelo menos em uma parte do seu comprimento, é cilíndrico e apresenta uma distribuição simples de H e C com respeito a ψ . Admite-se ainda que esse vórtice permanece cilíndrico na região de jusante.

As distribuições de velocidade e vorticidade na região de montante, são as mais simples possíveis:

Dentro do tubo de vorticidade ($\sigma \leq a$): $u = U1$, $v = 0$ e $w = \Omega\sigma$

Isso dá uma distribuição uniforme da vorticidade dentro do vórtice, pois Ω é constante e portanto a velocidade azimutal é proporcional ao raio (rotação de corpo rígido).

Fora do tubo de vorticidade ($\sigma \geq a$): $u = U1$, $v = 0$ e $w = \Omega a^2 / \sigma$

Ou seja, fora do tubo de vorticidade o escoamento é aquele irrotacional induzido por um tubo de vorticidade de intensidade $\Gamma = 2\pi w a = 2\pi \Omega a^2$, pois essa velocidade de circulação no plano normal ao tubo (correspondendo portanto ao componente w) é dada por:

$w = \Gamma / (2\pi\sigma)$ e portanto $w = \Omega a^2 / \sigma$ que corresponde ao chamado escoamento de vórtice livre.

Assim, a combinação da condição dentro do tubo de vorticidade de w proporcional ao raio e fora do tubo de vorticidade de w inversamente proporcional ao raio, constitui-se no chamado vórtice de Rankine, em que a vorticidade está uniformemente distribuída dentro do tubo de vorticidade e é nula fora dele.

Na região de jusante, por hipótese, o vórtice (ou pelo menos parte do seu comprimento) é novamente cilíndrico e as condições do escoamento irrotacional externo são as dadas abaixo:

$$\text{Fora do tubo de vorticidade } (\sigma \geq b): u = U2, v = 0 \text{ e } w = \Omega a^2 / \sigma$$

onde b é o novo raio do tubo de vorticidade (a jusante) que dessa forma é dado pela equação (2.1-23):

$$\frac{d^2 F}{d\sigma^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{dF}{d\sigma} + \left(k^2 - \frac{1}{\sigma^2} \right) F = 0$$

que é a mesma equação utilizada para o escoamento axissimétrico dentro de um tubo que varia de diâmetro, vista anteriormente.

Vê-se que essa condição obedece à conservação da intensidade do vórtice pois, mesmo tendo ocorrido mudança do seu diâmetro na região de jusante, a sua intensidade permanece a mesma e portanto a velocidade induzida permanece a mesma que a montante.

Na parede do tubo de vorticidade a jusante, deve haver continuidade de velocidade axial com o fluxo externo ao tubo e, evidentemente deve haver conservação da massa. Essas condições estão expressas abaixo:

$u = U2$ em $\sigma = b$, onde $\psi = (1/2)U1a^2$. Além disso, u deve evidentemente ser finito no eixo do tubo e portanto o termo em $Y_1(k\sigma)$ da solução da equação de Bessel acima citada, que diverge para $\sigma \rightarrow 0$, deve ser desconsiderado.

Desse modo, a solução é idêntica àquela já determinada para a região de jusante do escoamento cilíndrico de um tubo de raio b , ou seja é dada pela expressão:

$$\frac{U_2}{U_1} = 1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{(1/2)kbJ_0(kb)}{J_1(kb)} \quad (2.3-1)$$

onde $k = 2\Omega/U_1$ e U_2 é prescrito pelo escoamento externo e portanto o raio do tubo de vorticidade a jusante (b) pode ser determinado da equação acima. Alguns resultados numéricos obtidos em rotinas com o MathCad, se encontram anexas ao final da discussão do Estudo de Caso 2, sob o título Estudo de Caso 2 – Rotinas Numéricas.

Batchelor ressalta que para o caso de um vórtice de linha, ou seja $a \rightarrow 0$, b também forçosamente tende a zero e portanto a equação acima resulta em:

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{U_1}{U_2} \right)^{1/2}$$

que é a condição requerida pela conservação de massa ($\rho U_1 \pi a^2 = \rho U_2 \pi b^2$) e que seria obtida mesmo na ausência do movimento de rotação ao redor do eixo.

Além de um estudo do comportamento do valor do novo raio do tubo de vorticidade em função do parâmetro $ka = 2\Omega a/U_1$, que caracteriza as condições de montante, Batchelor também discute os valores da velocidade no eixo do tubo a jusante, em função desse mesmo fator. Esses estudos são feitos para duas variações distintas da velocidade externa: velocidade externa a jusante o dobro da velocidade externa a montante (escoamento externo acelerado) e velocidade externa a jusante igual à metade da velocidade externa a montante (escoamento externo retardado).

A figura 2.3-1, reproduzida de Batchelor [1967], mostra o comportamento de diâmetro do tubo de vorticidade a jusante, relativamente ao diâmetro que seria obtido para o caso de um tubo de vorticidade de diâmetro muito pequeno à montante, ou seja, relativamente a $b_0 = a(U_1/U_2)^{1/2}$. As velocidades no eixo também estão

“plotadas” em valores relativos, em relação à velocidade na borda do tubo de vorticidade na região de jusante.

Serão discutidos qualitativamente alguns resultados obtidos dessa figura, particularmente referentes às acentuadas variações da velocidade axial para vórtices onde ka está em torno da unidade e $U_2 < U_1$ (escoamento externo retardado).

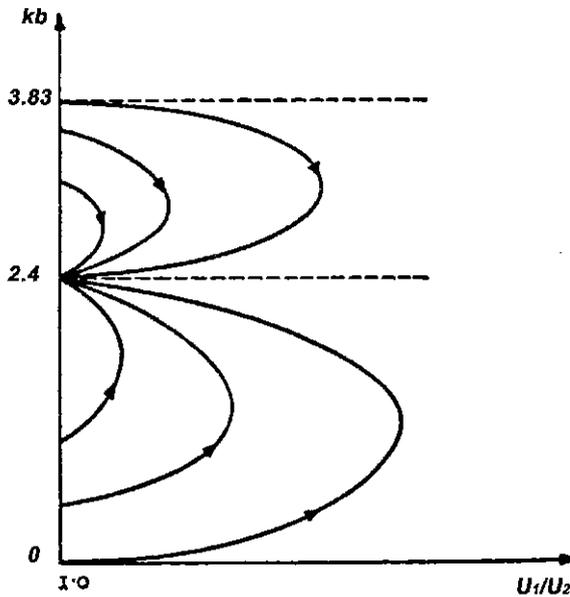


Figura 2.3-1 – A dependência do raio do tubo de vorticidade b com a velocidade axial externa U_2 . (Adaptada de Batchelor [1967])

O caráter geral das curvas da figura 2.3-1 pode ser explicado qualitativamente ao se analisar as implicações da expressão para o gradiente de pressão radial:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\sigma} = \frac{w^2}{\sigma} = \frac{C^2}{\sigma^3}$$

que nada mais é que o estabelecimento do equilíbrio entre a força centrífuga e a força de pressão.

A circulação de um tubo de vorticidade é, analisando a região de jusante, constante fora desse tubo ($b \leq \sigma \leq \infty$) e decresce a zero quando σ varia de b a zero (dentro do tubo de vorticidade). A diferença de pressão entre um ponto, por exemplo

no eixo do tubo de vorticidade, e um ponto situado no mesmo plano transversal, porém fora do tubo e bem afastado desse tubo, é fortemente dependente do valor de b , ou seja do raio do tubo. Um aumento em b corresponde a um decréscimo nessa diferença de pressão e vice-versa.

O descrito no parágrafo anterior pode ser verificado se integrarmos a equação:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\sigma} = \frac{C^2}{\sigma^3}$$

o que está feito numericamente numa rotina em MathCad que se encontra na ao final desta seção, logo após as rotinas que analisam o efeito da mudança da velocidade externa. Nessa rotina foi “plotada” para um exemplo arbitrado, a variação $\Delta p \times b$, confirmando Batchelor de que Δp e b variam inversamente.

Desse modo, quando o fluido fora do vórtice é desacelerado ($U_2 < U_1$) e o raio do vórtice cresce com o aumento de x , haverá um gradiente de pressão adicional dentro do vórtice que sendo positivo leva a uma desaceleração adicional e portanto a um aumento adicional do raio do vórtice. Ou seja, uma aceleração ou uma desaceleração do fluido fora do vórtice leva assim a uma variação da velocidade do fluido dentro do tubo de vorticidade que tem o mesmo sentido que a variação externa, mas tem maior magnitude e a uma mudança no raio do vórtice que é maior do que a que seria esperada caso a velocidade axial fosse uniforme sobre o plano lateral.

Batchelor chama à atenção ainda para duas outras características das curvas que fornecem u e b em função de ka . Em primeiro lugar existe um valor de ka para o qual a velocidade no centro se torna nula (e a partir daí, negativa, o que, segundo o autor, não teria significado físico, pois o fluido vindo de jusante não atenderia as condições prescritas de H e C a montante). A segunda característica é que antes mesmo de se chegar a esse valor crítico de ka há um valor de ka , ligeiramente maior que esse, para o qual não é possível achar um valor para b satisfazendo a expressão (2.2-1). Essas ocorrências podem ser visualizadas, para um exemplo particular com

condições arbitradas, numa rotina numérica também anexada ao final da discussão deste Estudo de Caso.

Batchelor chama ainda à atenção para o fato de que características similares do escoamento são reveladas quando se analisa as variações no escoamento de jusante fazendo-se ka fixo e decrescendo $U2/U1$ continuamente a partir da unidade. Deve-se ter em mente, entretanto, que a direção das mudanças depende do valor de ka .

A equação (2.3-1) mostra que os sinais das quantidades:

$$\frac{U1 - U2}{b^2 - a^2} \quad \text{e} \quad \frac{J0(kb)}{J1(kb)}$$

são os mesmos.

Assim, quando $U2/U1$ está próximo da unidade, evidentemente há pouca variação no raio do tubo de vorticidade devido à mudança de velocidade externa, ou seja, $a \approx b$ e portanto o sinal de $J0(kb)/J1(kb)$ determina a direção inicial nas variações do raio do vórtice e da velocidade. Para $0 \leq ka \leq 2.4$, que segundo Batchelor constitui a faixa onde os valores de ka normalmente se situam nos casos práticos, ocorre o comportamento “naturalmente esperado”: um crescimento do raio do vórtice quando $U2/U1$ decresce e uma descontinuidade na variação da velocidade com σ , no eixo, ou seja, em $\sigma = 0$.

No intervalo $2.4 \leq ka \leq 3.83$, porém, onde $J0(ka)$ e $J1(ka)$ apresentam sinais distintos, uma desaceleração no escoamento externo ($U2 < U1$), produz uma redução no diâmetro do vórtice e um aumento na velocidade axial em $\sigma = 0$.

O crescimento no raio do vórtice que ocorre quando o escoamento externo é desacelerado ($0 \leq ka \leq 2.4$), pode eventualmente produzir uma instabilidade do vórtice para valores de $U2/U1$ abaixo de um certo valor crítico. Esse fenômeno é chamado de quebra ou ruptura do vórtice e acaba produzindo um escoamento bem mais complexo de uma classe diferente da aqui abordada.

Uma explicação mais atraente desse fenômeno foi fornecida por Benjamin (vide ref. em Batchelor [1967]), em que essa quebra no vórtice é na realidade o salto de um escoamento cilíndrico para outro escoamento cilíndrico do vórtice para a mesma condição de velocidade axial externa. Essa súbita transição seria um fenômeno semelhante ao do ressalto hidráulico para uma corrente de água em canal aberto.

Estudo de Caso 2 – Rotinas Numéricas

Efeito da mudança da velocidade axial externa, sobre um vórtice isolado

a) Velocidade externa diminui

$$U1 := 1 \quad [\text{m/s}] \qquad U2 := 0.5 \quad [\text{m/s}] \qquad \Omega := 3.0 \quad [\text{rd/s}]$$

$$a := 0.1 \quad [\text{m}] \qquad b := 0.2 \quad [\text{m}]$$

$$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U1} \qquad k \cdot a = 0.6$$

$$br := \text{root} \left[1 - \frac{U2}{U1} + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot b \cdot J0(k \cdot b)}{J1(k \cdot b)}, b \right]$$

$$b0 := a \cdot \left(\frac{U1}{U2} \right)^{0.5}$$

$$br = 0.151$$

$$b0 = 0.141$$

$$\frac{br}{b0} = 1.066$$

$$u := U2 \cdot \left(\frac{U1}{U2} + \frac{U2 - U1}{U2 \cdot J0(k \cdot b)} \right)$$

$$\frac{u}{U2} = 0.51$$

$$U1 := 1 \quad [\text{m/s}] \qquad U2 := 0.5 \quad [\text{m/s}] \qquad \Omega := 3.9575 \quad [\text{rd/s}]$$

$$a := 0.1 \quad [\text{m}] \qquad b := 0.2 \quad [\text{m}]$$

$$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U1} \qquad k \cdot a = 0.7915$$

$$br := \text{root} \left[1 - \frac{U2}{U1} + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot b \cdot J0(k \cdot b)}{J1(k \cdot b)}, b \right]$$

$$b0 := a \cdot \left(\frac{U1}{U2} \right)^{0.5}$$

$$br = 0.182$$

$$b0 = 0.141$$

$$\frac{br}{b0} = 1.283$$

$$u := U2 \cdot \left(\frac{U1}{U2} + \frac{U2 - U1}{U2 \cdot J0(k \cdot b)} \right)$$

$$\frac{u}{U2} = -0.15$$

Aumentando-se a rotação a montante:

$$U1 := 1 \quad [\text{m/s}]$$

$$U2 := 0.5 \quad [\text{m/s}]$$

$$\Omega := 3.80286 \quad [\text{rd/s}]$$

$$a := 0.1 \quad [\text{m}]$$

$$b := 0.2 \quad [\text{m}]$$

$$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U1}$$

$$k \cdot a = 0.760572$$

$$br := \text{root} \left[1 - \frac{U2}{U1} + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot b \cdot J0(k \cdot b)}{J1(k \cdot b)}, b \right]$$

$$b0 := a \cdot \left(\frac{U1}{U2} \right)^{0.5}$$

$$br = 0.207$$

$$b0 = 0.141$$

$$\frac{br}{b0} = 1.462$$

$$u := U2 \cdot \left(\frac{U1}{U2} + \frac{U2 - U1}{U2 \cdot J0(k \cdot b)} \right)$$

$$\frac{u}{U2} = 1.29410^{-7}$$

b) velocidade axial externa aumenta

$$U1 := 0.5 \quad [\text{m/s}]$$

$$U2 := 1.0 \quad [\text{m/s}]$$

$$\Omega := 3.9575 \quad [\text{rd/s}]$$

$$a := 0.1 \quad [\text{m}]$$

$$b := 0.005 \quad [\text{m}]$$

$$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U1}$$

$$k \cdot a = 1.583$$

$$br := \text{root} \left[1 - \frac{U2}{U1} + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot b \cdot J0(k \cdot b)}{J1(k \cdot b)}, b \right]$$

$$b0 := a \cdot \left(\frac{U1}{U2} \right)^{0.5}$$

$$br = 0.068$$

$$b0 = 0.071$$

$$\frac{br}{b0} = 0.958$$

$$u := U2 \cdot \left(\frac{U1}{U2} + \frac{U2 - U1}{U2 \cdot J0(k \cdot b)} \right)$$

$$\frac{u}{U2} = 1.001$$

Aumentando-se a rotação a montante:

$$U1 := 0.5 \quad [\text{m/s}]$$

$$U2 := 1.0 \quad [\text{m/s}]$$

$$\Omega := 6.0 \quad [\text{rd/s}]$$

$$a := 0.1 \quad [\text{m}]$$

$$b := 0.05 \quad [\text{m}]$$

$$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U1} \quad k \cdot a = 2.4$$

$$br := \text{root} \left[1 - \frac{U2}{U1} + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot b \cdot J0(k \cdot b)}{J1(k \cdot b)}, b \right]$$

$$b0 := a \cdot \left(\frac{U1}{U2} \right)^{0.5}$$

$$br = 0.064$$

$$b0 = 0.071$$

$$\frac{br}{b0} = 0.898$$

$$u := U2 \cdot \left(\frac{U1}{U2} + \frac{U2 - U1}{U2 \cdot J0(k \cdot b)} \right)$$

$$\frac{u}{U2} = 1.245$$

Aumentando-se ainda mais a rotação a montante:

$$U1 := 0.5 \quad [\text{m/s}]$$

$$U2 := 1.0 \quad [\text{m/s}]$$

$$\Omega := 7.0 \quad [\text{rd/s}]$$

$$a := 0.1 \quad [\text{m}]$$

$$b := 0.005 \quad [\text{m}]$$

$$k := \frac{2 \cdot \Omega}{U1} \quad k \cdot a = 2.8$$

$$br := \text{root} \left[1 - \frac{U2}{U1} + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot b \cdot J0(k \cdot b)}{J1(k \cdot b)}, b \right]$$

$$b0 := a \cdot \left(\frac{U1}{U2} \right)^{0.5}$$

$$br = 0.061$$

$$b0 = 0.071$$

$$\frac{br}{b0} = 0.859$$

$$u := U2 \cdot \left(\frac{U1}{U2} + \frac{U2 - U1}{U2 \cdot J0(k \cdot b)} \right)$$

$$\frac{u}{U2} = 1.002$$

2.4 ESTUDO DE CASO 3 – O escoamento no interior de um hidrociclone.

Modelo de Bloor and Ingham ([1973-1983])

Esses autores realizaram um estudo teórico bastante extenso sobre o escoamento num hidrociclone. Seu trabalho, em sua maior parte analítico, merece ser o primeiro a ser aqui considerado e discutido, não só porque se estendeu por mais de 15 anos (os primeiros artigos desses autores sobre o assunto datam de 1973 e a última publicação disponível é datada de 1989), mas também porque esse trabalho oferece uma ampla visão da física do escoamento num hidrociclone e assim constitui-se num ponto de partida adequado para o estudo dessa classe de problemas. Vamos resumir a seguir, o desenvolvimento do estudo realizado pelos citados autores.

Uma longa série de artigos desses autores aborda o estudo do escoamento num hidrociclone buscando obter uma solução analítica para o campo de velocidades. Devido à complexidade do campo de fluxo, entretanto, esses autores consideraram o escoamento como axissimétrico e decidiram dividir o problema no estudo do escoamento sobre o plano axial (para o qual fizeram a hipótese adicional de escoamento não viscoso) e, no estudo do componente azimutal da velocidade, utilizaram um modelo viscoso. Para a primeira parte do estudo, aplicam-se os conceitos já discutidos nesta seção.

Portanto, o modelo sobre o plano axial pertence à classe de problemas tratados nesta seção, ou seja, escoamentos para os quais os efeitos viscosos podem ser desprezados (devido ao alto número de Reynolds), mas onde o campo de velocidades tem que ser considerado rotacional, ou seja, existe uma distribuição de vorticidade não uniformemente nula, num escoamento não viscoso.

O complemento da análise para a obtenção do campo de velocidades está na determinação da velocidade de rotação, ou seja, do componente azimutal do vetor velocidade. A viscosidade e os efeitos turbulentos são levados em conta na determinação desse componente e também no estudo das camadas limite sobre as paredes do hidrociclone. Essa abordagem não será considerada nesta seção por fugir ao escopo da mesma.

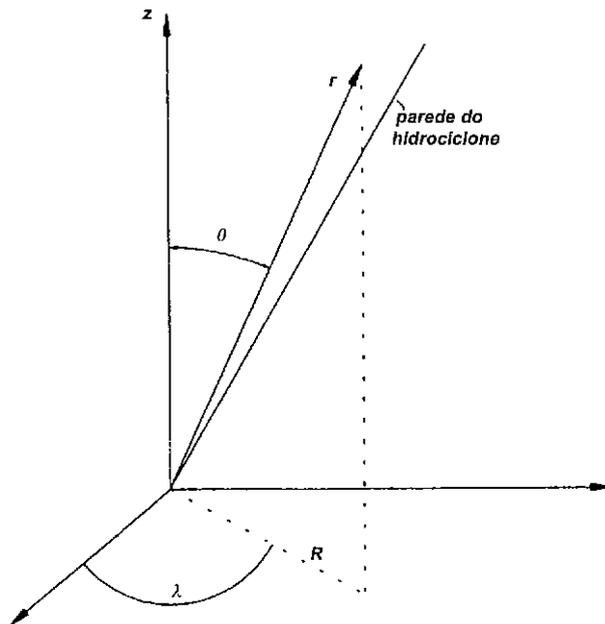
Inicia-se, portanto, a análise do modelo analítico simplificado desenvolvido por B&I, pois, como foi dito acima, esse modelo permite uma melhor compreensão da física do escoamento num hidrociclone.

Devido às necessidades de simplificação para a abordagem analítica do problema, somente é modelado o trecho do hidrociclone que consiste de um tronco de cone.

Os autores partem da equação da vorticidade para um escoamento invíscido (como em Batchelor [1967]), descrita em termos da função corrente de Stokes, para escoamento axissimétricos, que descreve as linhas de corrente no plano axial. Em coordenadas esféricas, vide figura 2.4-1, é a seguinte::

$$-\frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] = f(\psi) \quad (2.4-1)$$

onde (r,θ) é o sistema de coordenadas esférico polar, cuja origem está no vértice da peça cônica modelada, figura (2.4-1), e $f(\psi)$ é uma função arbitrária que representa a distribuição de vorticidade no fluido.



Sistema Esférico (r,θ,λ)
 Sistema Cilíndrico (R,z,λ)
 Figura 2.4-1 – Sistema de Coordenadas.

Como o semi-ângulo do cone do hidrociclone (α^*) é pequeno então θ é pequeno e assim utiliza-se a aproximação $\sin\theta \approx \theta$ e considera-se também que as taxas de variação em relação a θ são muito maiores que as com respeito a r , ou seja, $(\partial(\)/\partial\theta \gg \partial(\)/\partial r)$. Com essas hipóteses adicionais, a equação (2.4-1) torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{1}{\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) = -r^4 \theta f(\psi) \quad (2.4-2)$$

Considerando para $f(\psi)$ a forma: $f(\psi) = F\psi^\delta$, onde F e δ são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno, os autores integram a equação (2.4-2) acima e obtêm:

$$\psi = B(r\theta)^{3/2} (\alpha^* - \theta) \quad (2.4-3)$$

onde: $B^{3/3} = \frac{4}{3} F (\alpha^*)^{-3/3}$.

Dessa expressão para a função corrente, podem ser derivados os componentes do vetor velocidade no plano axial, que são os seguintes:

$$q_r = \frac{1}{2} B (r\theta)^{-1/2} (3\alpha^* - 5\theta) \quad (2.4-4)$$

e

$$q_\theta = -\frac{3}{2} B r^{-1/2} \theta^{1/2} (\alpha^* - \theta) \quad (2.4-5)$$

ou, em coordenadas cilíndricas ($R = r \sin\theta \approx r\theta$ e $z = r \cos\theta \approx r$):

$$q_z = \frac{1}{2} B R^{-1/2} \left(3\alpha^* - \frac{5R}{z} \right) \quad (2.4-6)$$

e

$$q_R = -\frac{BR^{3/2}}{z^2} \quad (2.4-7)$$

O modelo acima proposto, devido à distribuição de vorticidade assumida ($f(\psi) = F\psi^\delta$), resulta numa expressão para a função corrente de Stokes que não é adequada para hidrociclones em que a vazão de fluido pelo *underflow* é significativa. Nesse modelo, a expressão da função corrente (2.4-3) assume valor nulo para $\theta = \alpha^*$, ou seja, para qualquer seção transversal do trecho de cone modelado, a vazão total é nula, o que implica que todo o fluido deixa o hidrociclone pelo *overflow*. No caso dos hidrociclones para remoção de sólidos pesados, a consideração de que a vazão que deixa o hidrociclone pelo bocal de *underflow* é desprezível é uma aproximação razoável. Nos hidrociclones empregados para a separação de fluidos na indústria do petróleo, entretanto, essa restrição é inaceitável.

Uma modelagem analítica com base nos trabalhos de Bloor e Ingham, acima referidos, porém com modificações que permitem a consideração de qualquer partição da vazão de alimentação entre os bocais de *overflow* e *underflow*, será apresentada a seguir (Estudo de Caso 4).

2.5 ESTUDO DE CASO 4 – O escoamento no interior de um hidrociclone, extensão do modelo de Bloor & Ingham

Trata-se do desenvolvimento teórico, com base nos conceitos desenvolvidos nesta seção, de um modelo (de fluido ideal com vorticidade) para a descrição do escoamento no plano axial do corpo cônico de um hidrociclone (vide Capela Moraes et al. [1996]).

O escoamento é considerado axissimétrico, não viscoso, incompressível e rotacional, ou seja, possui uma distribuição de vorticidade não uniformemente nula.

O hidrociclone é um tubo cuja forma é a de um tronco de cone, onde a alimentação de fluido se dá junto à parede externa da base maior do tronco, com componentes de velocidade azimutal e axial. Na prática, a alimentação é feita por um tubo, de diâmetro pequeno relativamente ao diâmetro da base maior do tronco de cone, cujo eixo é normal ao eixo do tronco de cone e está conectado ao tronco na posição acima descrita. Como essa situação não é rigorosamente axissimétrica, a alimentação considerada no modelo se faz, na base maior do tronco cônico, por uma coroa circular cujo raio maior é o raio da base maior (R_c) e cujo raio interno R_1 é *a priori* desconhecido.

A descrição matemática do escoamento no trecho cônico é mais convenientemente realizada utilizando-se o sistema de coordenadas esférico polar, visto no problema anterior, com origem no vértice do cone (que está situado obviamente fora do domínio), uma vez que a parede do cone pode ser descrita por um único valor da coordenada θ , que corresponde à latitude do sistema de coordenadas. A visualização dos perfis de velocidade, entretanto, é mais convenientemente realizada quando utilizamos o sistema cilíndrico de coordenadas.

Temos assim os mesmos sistemas de coordenadas descritos na figura 2.4.1.

Vamos partir da equação (2.1-14), onde em virtude da alimentação puntual faremos a hipótese de que H é o mesmo para todas as linhas de corrente e portanto $\frac{dH}{d\psi} = 0$, resultando em (lembrando $r \text{ sen}(\theta) = R$):

$$\frac{\omega_\lambda}{r \text{ sen}(\theta)} = \frac{1}{r^2 \text{ sen}^2(\theta)} C \frac{dC}{d\psi} \quad (2.5-1)$$

A função C na coroa circular onde se processa a alimentação do hidrociclone é dada por:

$$C = r \text{ sen}(\theta) W_0$$

onde W_0 é a velocidade azimutal na alimentação, suposta uniforme. Essa equação, lembrando que $r \text{ sen}(\theta) = R$, nada mais é que a equação (2.1-13), ou seja, $\sigma w = C(\psi)$.

A função corrente na alimentação é dada por:

$$\psi = cte - \frac{1}{2} U r^2 \text{ sen}^2(\theta)$$

onde U é a velocidade axial na alimentação, também suposta uniforme sobre toda a coroa circular acima citada.

Diferenciando em relação a $r \text{ sen}(\theta)$ as expressões para C e para ψ acima, obtemos:

$$C \frac{dC}{d\psi} = -\frac{W_0^2}{U}$$

Considerando essa expressão e também que o componente azimutal da vorticidade expressa em termo da função corrente e em coordenadas esféricas é dado por:

$$\omega_{\lambda} = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right]$$

A equação (2.5-1) pode ser rescrita como:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin(\theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = -\frac{W0^2}{U}$$

A equação acima pode ser adimensionalizada utilizando-se para escala de comprimentos o raio da base maior do tronco de cone Rc , que é chamado de raio do hidrociclone, e para as vazões, ou seja para adimensionalização da função corrente é utilizado o fator $Q/(2\pi)$, onde Q é a vazão total de alimentação do hidrociclone.

A equação acima fica então na forma adimensionalizada:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin(\theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = \xi \quad (2.5-2)$$

onde $\xi = -\frac{\pi Rc^2 W0}{QU}$

Bloor & Ingham [1983] acharam uma solução para essa equação na forma:

$$\psi = r^2 F(\theta)$$

onde $F(\theta)$ é determinado para satisfazer a equação diferencial ordinária:

$$2F + \sin(\theta) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d\psi}{d\theta} \right) = -2\xi$$

cuja solução é dada por:

$$F(\theta) = -\xi + A \sin^2(\theta) + B \{ \sin^2(\theta) \ln[\tan(\theta/2)] - \cos(\theta) \}$$

onde A e B são constantes de integração a serem determinadas pelas condições de contorno. Bloor & Ingham utilizaram como condições de contorno $F(\theta) = 0$ para $\theta = 0$ (eixo do hidrociclone) e para $\theta = \alpha$ (parede do hidrociclone). Ou seja todo o fluxo que entra pela coroa circular acima descrita sai pelo tubo central do hidrociclone, situado axialmente na mesma seção de alimentação (cujo raio é definido pelo segmento que une os pontos 1 e 2 da figura 2.5-1 abaixo).

Examinando a equação para ψ acima, proposta pelos autores, verifica-se que a mesma não pode satisfazer as condições de contorno de um hidrociclone onde parte do fluxo que entra pela coroa circular (Q) sai pelo tubo axial central (digamos βQ) e parte (no caso $(1 - \beta)Q$) sai pela base menor do tronco cônico, onde β varia entre 0 e 1. A figura abaixo mostra as condições de contorno que se pretende atender:

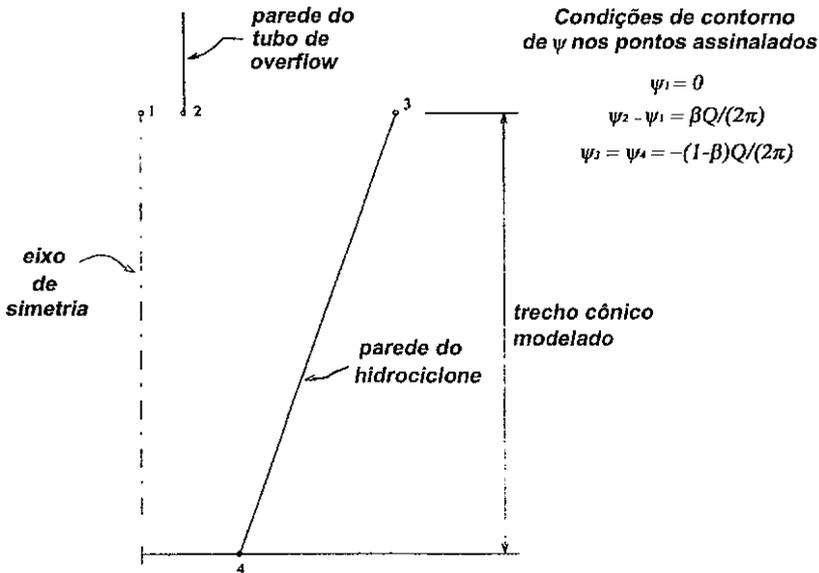


Figura 2.5-1 - Condições de Contorno no Hidrociclone.

Propõe-se então a seguinte forma alternativa para ψ :

$$\psi = r^2 F(\theta) + G(\theta)$$

Para que essa expressão seja solução de (2.5-2), para a mesma expressão de $F(\theta)$ acima, temos que:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{dG}{d\theta} \right) = 0$$

e portanto:
$$G(\theta) = D \cos(\theta) + E ,$$

onde D e E são constantes de integração. Essas constantes, juntamente com as constantes A e B da expressão para F , são determinadas para satisfazer as condições de contorno aqui propostas:

$$\psi(r,0) = 0 \quad \text{e} \quad \psi(r,\alpha) = -(1 - \beta)$$

Assim resultam:

$$B = -\xi , \quad E = -D$$

$$A = \xi \left\{ \frac{1}{\text{sen}^2(\theta)} + \ln \left[\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] - \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} \right\} \quad \text{e} \quad D = \frac{1 - \beta}{1 - \cos(\alpha)}$$

Conseqüentemente a expressão para a função corrente adimensional, em coordenadas esféricas, resulta em:

$$\psi = \left\{ A \text{sen}(\theta) - \xi \left[1 + \text{sen}^2(\theta) \ln(\tan(\theta/2)) \right] \right\} r^2 + D \cos(\theta) - D$$

com A e D dados pelas expressões acima.

Analisando agora as condições de velocidade na coroa circular que alimenta o hidrociclone, vemos que a velocidade azimutal W_0 pode ser prescrita como uma fração da velocidade média do fluido no tubo de alimentação (evidentemente considerando um fator de perda pela expansão ao entrar no corpo do hidrociclone). Já

a velocidade axial U é difícil de ser estimada pois não sabemos o tamanho da coroa circular que alimentará o hidrociclone, pois lembramos que o raio interno que define a cora circular, pela qual se dá a alimentação do trecho cônico modelado, não é *a priori* conhecido, dessa forma como não conhecemos U também não conhecemos ξ .

Lembramos entretanto que somente utilizamos duas condições de contorno para determinar as constantes na expressão para ψ , que foram: $\psi(r,0) = 0$, no eixo do hidrociclone e $\psi(r,\alpha) = -(1 - \beta)$, na parede do hidrociclone. Resta ainda a condição de contorno para o tubo axial de saída (ponto 2 da figura 2.5-1 acima), onde $\psi = \beta$.

Essa condição de contorno substituída na expressão para ψ permite determinar o valor de ξ :

$$\xi = \frac{\beta - \frac{1-\beta}{1-\cos(\alpha)} \cos(\theta_2) + \frac{1-\beta}{1-\cos(\alpha)}}{r_2^2 / RC \left\{ K \sin^2(\theta_2) + \cos(\theta_2) - \sin^2(\theta_2) \ln[\tan(\theta_2/2)] - 1 \right\}}$$

onde:

$$K = \left\{ \frac{1}{\sin^2(\alpha)} + \ln[\tan(\alpha/2)] - \frac{\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \right\} \quad e$$

(r_2, θ_2) são as coordenadas esféricas do ponto 2 da figura 2.5-1.

Derivando-se a expressão da função corrente ψ , obtém-se as expressões para as velocidades no plano axial, ou seja o componente q_θ e o componente q_r , no sistema de coordenadas esféricas, ou seja:

$$q_r = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 2A \cos(\theta) + 2B \cos(\theta) \ln[\tan(\theta/2)] + 2B - \frac{D}{r^2}$$

e

$$q_{\theta} = -\frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 2 \left\{ \frac{\xi}{\operatorname{sen}(\theta)} - A \operatorname{sen}(\theta) - B \operatorname{sen}(\theta) \ln[\tan(\theta/2)] + \frac{B}{\tan(\theta)} \right\}$$

Esses componentes podem ser transformados nos componentes em coordenadas cilíndricas por meio das relações geométricas abaixo, onde u e v representam respectivamente os componentes axial e radial da velocidade em coordenadas cilíndricas:

$$v = q_r(R, z) \operatorname{sen}[\tan^{-1}(R/z)] + q_{\theta}(R, z) \cos[\tan^{-1}(R/z)]$$

e

$$u = q_r(R, z) \cos[\tan^{-1}(R/z)] - q_{\theta}(R, z) \operatorname{sen}[\tan^{-1}(R/z)]$$

onde:

$$q_r(R, z) = q_r \left(r = \sqrt{(z^2 + R^2)}, \theta = \tan^{-1}(R/z) \right)$$

e

$$q_{\theta}(R, z) = q_{\theta} \left(r = \sqrt{(z^2 + R^2)}, \theta = \tan^{-1}(R/z) \right)$$

Apresentam-se, a seguir, as rotinas numéricas em Mathcad[®] e resultados obtidos com o modelo descrito acima, para a modelagem do trecho cônico principal de um hidrociclone de tratamento de águas oleosas, utilizado na indústria do petróleo.

Estudo de Caso 4 – Rotinas Numéricas

Escoamento em Hidrociclone – Rotina para a determinação dos perfis de velocidade

- dados geométricos e de fluxo:

$$Re := 0.0175 \quad Q := \frac{0.1}{60} \quad a := 0.002 \quad \beta := 0.05 \quad L := 1.337$$

$$\alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{Re}{L}\right) \quad \alpha = 0.013088 \quad \phi := \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot Re^2} \quad \phi = 0.866149$$

$$rf := (L^2 + a^2)^{0.5} \quad \theta f := \operatorname{atan}\left(\frac{a}{L}\right) \quad rf = 1.337001 \\ \theta f = 1.49588510^{-3}$$

- cálculo dos parâmetros da função de corrente de Stokes:

$$D := \frac{(1 - \beta)}{1 - \cos(\alpha)} \quad D = 1.10916510^4$$

$$K := \ln\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)^2} + \frac{1}{\sin(\alpha)^2} \quad K = -4.529151$$

$$\xi := \frac{((\beta - D \cdot \cos(\theta f)) + D)}{\left(\frac{rf^2}{Re^2}\right) \cdot \left(\sin(\theta f)^2 \cdot K + \cos(\theta f) - \sin(\theta f)^2 \cdot \ln\left(\tan\left(\frac{\theta f}{2}\right)\right) - 1\right)} \quad \xi = 2.202939$$

$$A := \xi \cdot K$$

$$B := -\xi$$

$$A = -9.977442$$

Como $\theta = \operatorname{atan}(R/z)$ é um ângulo muito pequeno, considera-se $\sin \theta = \tan \theta = \theta = R/z$ e $\cos \theta$ definido por:

$$\operatorname{coss}(R, z) := \left[1 - \left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{0.5}$$

A expressão para a função de corrente é dada por:

$$\psi(R, z) := \left[-\xi + A \cdot \left(\frac{R}{z}\right)^2 + B \cdot \left(\frac{R}{z}\right)^2 \cdot \ln\left(\frac{R}{2 \cdot z}\right) - B \cdot \text{coss}(R, z) \right] \cdot \frac{(R^2 + z^2)}{Rc^2} + D \cdot \text{coss}(R, z) - D$$

- checagem das condições de contorno:

$$\psi(0.002, 1.337) = 0.05$$

$$\psi(0.00875, 0.6685) = -0.95$$

- perfis de velocidade:

$$qr(R, z) := \left[2 \cdot A \cdot \text{coss}(R, z) + 2 \cdot B \cdot \text{coss}(R, z) \cdot \ln\left(\frac{R}{2 \cdot z}\right) + 2 \cdot B \cdot \frac{D}{\frac{(R^2 + z^2)}{Rc^2}} \right] \cdot \phi$$

$$q\theta(R, z) := -2 \cdot \left[B \cdot \left(\frac{R}{z}\right) \cdot \ln\left(\frac{R}{2 \cdot z}\right) + A \cdot \left(\frac{R}{z}\right) \right] \cdot \phi$$

$$\theta(R, z) := \frac{R}{z}$$

$$v(R, z) := qr(R, z) \cdot \theta(R, z) + q\theta(R, z) \cdot \text{coss}(R, z)$$

$$u(R, z) := qr(R, z) \cdot \text{coss}(R, z) - q\theta(R, z) \cdot \theta(R, z)$$

Os perfis de velocidade podem ser assim mostrados nas figuras abaixo:

$$R := 0.001, 0.002, 0.0175$$

$$z := 1.337 \quad [\text{m}]$$

Topo do trecho cônico modelado:

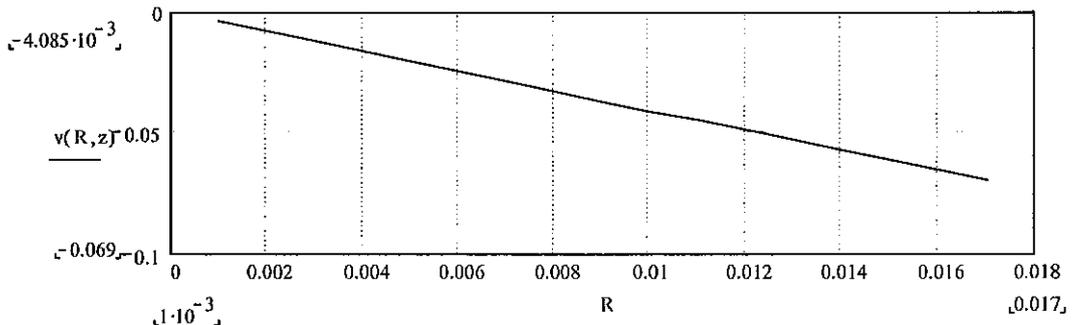


Figura EC4-1 – Perfil do componente radial de velocidade no topo do trecho cônico modelado

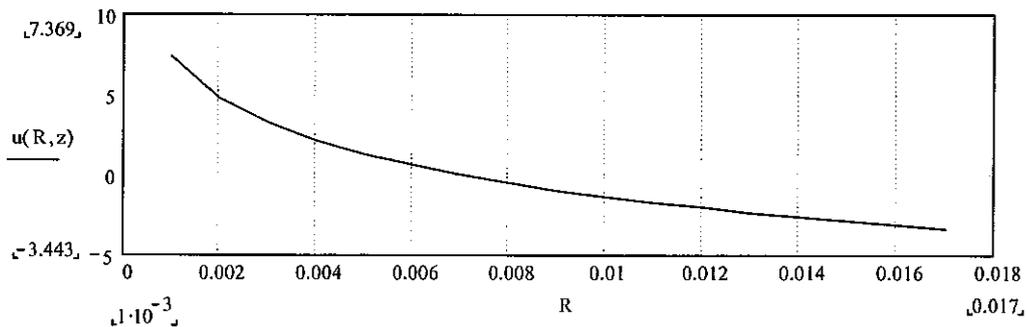


Figura EC4-2 – Perfil do componente axial da velocidade no topo do trecho cônico modelado

Base do trecho cônico modelado:

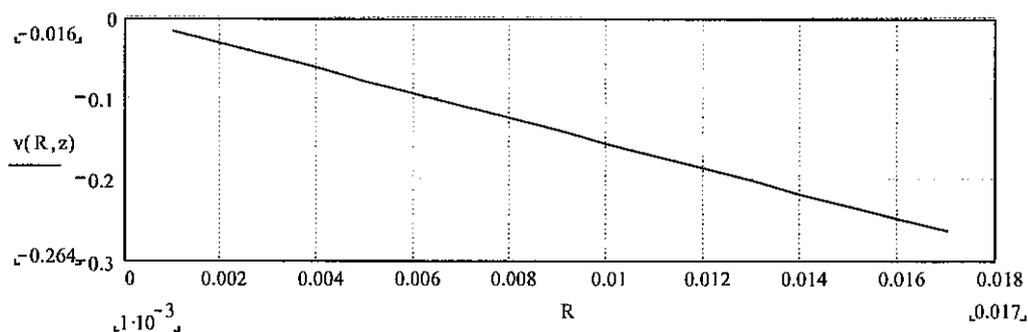


Figura EC4-3 – Perfil do componente radial da velocidade na base do trecho cônico modelado

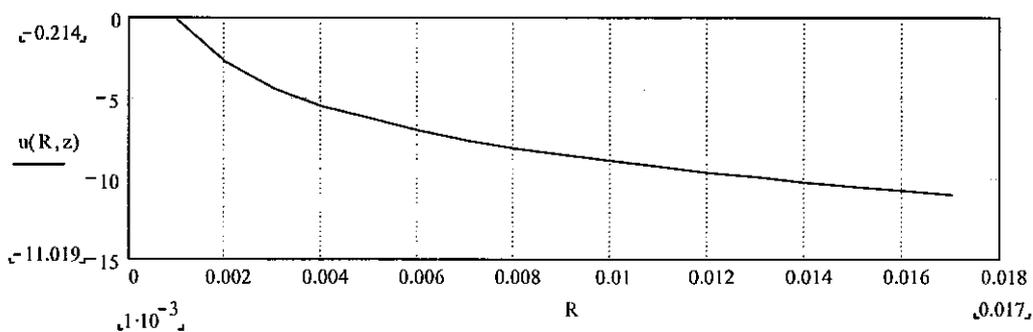


Figura EC4-4 – Perfil do componente axial da velocidade na base do trecho cônico modelado

3. ESCOAMENTO VISCOZO E TURBULÊNCIA

3.1 Introdução

Como visto na seção 2, algumas das características importantes do escoamento num hidrociclone são determinadas pelas equações dinâmicas do escoamento de fluidos, sem consideração dos termos viscosos. Essas características são, como discutido, determinadas por efeitos inerciais, basicamente pela força centrífuga que atua sobre a partícula de fluido que gira ao redor do eixo do hidrociclone, estabelecendo um gradiente radial de pressão. Mesmo com a hipótese simplificadora de escoamento ideal, a análise empreendida foi, entretanto, bastante limitada, e, em virtude da complexidade do equacionamento resultante, simplificações adicionais tiveram de ser consideradas.

A análise empreendida nas seções 2.4 e 2.5, do capítulo 2, limitou-se ao estudo do campo de escoamento sobre o plano axial, válido para qualquer desses planos, em virtude da axissimetria considerada. A utilização de um modelo não viscoso para a descrição do componente azimutal da velocidade leva, com as hipóteses vistas no capítulo 2, à obtenção do perfil de vórtice livre para esse componente da velocidade do fluido, e, em conseqüência, ao resultado não realista de velocidades azimutais tendendo a infinito junto ao eixo do equipamento.

Assim, com o objetivo de realizar-se uma abordagem mais rigorosa do estudo do escoamento no hidrociclone é necessário abandonar-se a idéia de escoamento ideal.

Muito embora as dimensões características dos hidrociclones sejam reduzidas, em função das elevadas velocidades reinantes no interior desse equipamento, a consideração da viscosidade importa na necessidade de se levar em conta a turbulência.

Esse aspecto será abordado no presente capítulo o qual está estruturado da seguinte forma.

Faz-se um estudo dos modelos de turbulência na sequência crescente de complexidade de cada um deles. Logo após o desenvolvimento teórico de cada modelo,

faz-se uma análise do emprego desse modelo específico, ou algum de seus variantes, para o estudo do escoamento em hidrociclones, com base em pesquisa bibliográfica empreendida pelo autor. Discutem-se assim, os resultados obtidos e as limitações verificadas no emprego desses modelos para simulação de escoamento em hidrociclones.

A sequência de modelos estuda é a seguinte:

- Modelos algébricos
- Modelos diferenciais de duas equações
(neste caso discute-se amplamente os problemas decorrentes da curvatura das linhas de corrente e do escoamento em rotação e as correções propostas para esses efeitos)
- Modelos diferenciais de quatro equações ($k-\epsilon$)
- Modelos que não utilizam o conceito de viscosidade turbulenta (modelo de tensão de Reynolds)

A abordagem utilizada para a consideração da turbulência em problemas de engenharia, conforme visto no capítulo I, tem por base modelos semi empíricos de turbulência. Esses modelos têm seu fundamento teórico no procedimento de média temporal aplicado às equações de Navier-Stokes para o regime transiente, conforme proposto por O. Reynolds [1895] e que será sumariamente desenvolvido abaixo.

Restringindo-se ao estudo do escoamento incompressível, que é o caso usual dos ciclones e hidrociclones, e considerando-se que o campo vetorial das velocidades instantâneas pode ser representado pela soma de um valor médio – ainda que variável numa escala de tempo superior à das flutuações turbulentas – e de um valor flutuante, na forma:

$$\tilde{U}_i = U_i + u_i \quad (3.1-1)$$

Além disso, supondo-se que o campo médio corresponde a um estado estacionário, as equações de Navier-Stokes escritas em termos das quantidades médias (que constituem as chamadas equações de Reynolds) são como se segue:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1-2)$$

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) + F_i \quad (3.1-3)$$

onde P representa o valor, no ponto, do campo escalar das pressões e F_i é o vetor que representa a somatória das forças de corpo que atuam no ponto considerado. As letras maiúsculas assim como a barra superposta indicam que as grandezas consideradas representam médias temporais.

Uma vez que essas equações são somente quatro, enquanto que as incógnitas ($P, U_i, \overline{u_i u_j}$) são em número de dez – lembrando que o tensor de Reynolds $\overline{u_i u_j}$ é simétrico – é necessário prover-se relações entre os seis elementos desse tensor e as variáveis do escoamento médio. Essa tarefa entretanto, mostras-se inexecutável quando se considera uma abordagem unicamente teórico-analítica, e constitui-se no denominado problema de fechamento do sistema de equações representado por (3.1-2) e (3.1-3). Esse problema é contornado, com a modelagem semi-empírica das tensões turbulentas.

Assim, o objetivo dos modelos de turbulência, que serão discutidos nas seções que se seguem, é o de fornecer as equações adicionais, que juntamente com as equações (3.1-2) e (3.1-3), formam um sistema fechado para a solução do escoamento turbulento.

3.2 Modelos com base no conceito de viscosidade turbulenta

A primeira idéia para a modelagem das tensões turbulentas, que aparecem nas equações (3.1-3) acima, foi sugerida por Boussinesq [1877] (ver referência em Hinze [1975]) que, para algumas classes específicas de escoamento, postulou uma relação entre as tensões de Reynolds e a taxa local de deformação do escoamento médio, similar à observada entre o tensor tensão e a taxa de deformação no escoamento laminar de um fluido Newtoniano. A expressão abaixo, proposta por Kolmogorov, é uma generalização da proposta de Boussinesq:

$$-\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + \nu_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2-1)$$

onde $k = \frac{1}{2} \left(\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2} \right)$ é a energia cinética da turbulência e, portanto, o primeiro termo no membro direito de (3.2-1) foi adicionado para evitar-se que, quando o termo entre parênteses tenda a zero, o tensor de Reynolds se anule, ou seja, que esse tensor tenha seu traço nulo, $\overline{u_i u_i} = 0$. Pois, mesmo em alguns escoamentos relativamente simples e usuais, como numa tubulação cilíndrica por exemplo, na região sobre o eixo, onde a deformação do escoamento médio é nula, não é razoável esperar-se que as tensões turbulentas se anulem.

O parâmetro ν_T é chamado de viscosidade turbulenta e, em contrapartida à viscosidade laminar que é uma propriedade do fluido, é uma propriedade do campo de escoamento.

A expressão (3.2-1) implica que os eixos principais do tensor turbulento têm a mesma direção dos eixos principais do tensor deformação do escoamento médio. Se considerarmos o caso tridimensional mais geral, essa hipótese é razoável apenas se a turbulência for isotrópica (isto é, independente da direção considerada), mas para algumas classes de escoamento, onde nem todos os elementos do tensor de Reynolds e do tensor de deformação do escoamento médio estão presentes, a hipótese da viscosidade turbulenta conduz a resultados satisfatórios.

No caso do escoamento em hidrociclones, as linhas de corrente espiraladas (com pequenos raios de curvatura e, portanto, com curvatura acentuada) implicam num alto grau de anisotropia. Nesses equipamentos, as taxas de deformação do escoamento médio têm diferentes valores para as direções azimutal, radial e axial. O mesmo pode ser dito das próprias flutuações turbulentas. Bradshaw [1973] mostrou que para escoamentos cisalhantes sobre superfícies que apresentam concavidade na direção do escoamento médio, a adoção do conceito de viscosidade turbulenta como modelado em (3.2-1) é inadequado, sugerindo, para o caso em questão um modelo na forma:

$$\overline{uv} = \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \alpha \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (3.2-2)$$

onde a direção do escoamento médio é dada por x com componente de velocidade média nessa direção U enquanto y é a direção do raio de curvatura e V o componente da velocidade nessa direção. O fator α assume um valor em torno de 10. Hoffmann et al. [1985] e Launder et al. [1977] analisaram experimentalmente o escoamento turbulento sobre superfícies côncavas e verificaram diferenças acentuadas tanto em relação aos mesmos escoamentos em superfícies planas como em superfícies convexas. Postula-se que, sobre as superfícies côncavas, a turbulência é diretamente modificada pela curvatura das linhas de corrente e indiretamente pelo surgimento de vórtices longitudinais sobre a superfície (vórtices de Görtler – ver Schlichting [1968]).

Apesar das limitações ressaltadas acima, os modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta, por se constituírem na classe mais simples de modelagem da turbulência, têm sido amplamente empregados, com algumas adaptações, mesmo a casos de escoamentos relativamente complexos, com sucesso razoável. Obviamente, nesses casos, embora com utilidade prática na engenharia, a generalidade desses modelos fica prejudicada.

3.2.1 Modelo do Comprimento de Mistura (Modelos Algébricos de Viscosidade Turbulenta)

Para utilizar-se os modelos que se baseiam na viscosidade turbulenta, é necessário encontrar alguma relação entre esse parâmetro (ν_T) e as grandezas do escoamento médio.

Prandtl (ver referência em Schlichting [1968]) propôs um modelo mecanicista para a determinação da viscosidade turbulenta. Sua hipótese foi desenvolvida para o caso do escoamento paralelo, ou seja, com velocidades médias do tipo:

$$U = U(y) \quad V = 0 \quad \text{and} \quad W = 0$$

Nesse caso, a única tensão turbulenta não nula é: $-\overline{\rho uv} = \mu_T \frac{\partial U}{\partial y}$

Do perfil de velocidades mostrado na figura 3.2.1-1, Prandtl considerou que uma porção de fluido passando de $y = y_1 - \ell$ para $y = y_1$ irá reter sua quantidade de movimento original. O mesmo acontece quando a partícula de fluido vem de $y = y_1 + \ell$ para $y = y_1$. Essas duas porções de fluido colidem em $y = y_1$ e divergem gerando, por hipótese, uma flutuação de velocidade da mesma ordem, na direção transversal, ou seja, essas flutuações seriam então expressas por:

$$|\overline{u}| = \ell \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=y_1} \quad \text{e} \quad |\overline{v}| = c \ell \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=y_1}$$

E, incorporando c a ℓ :

$$|\overline{uv}| = \ell^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \tag{3.2.1-1}$$

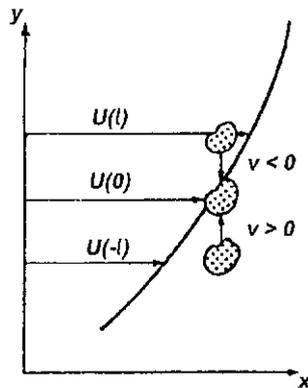


Figura 3.2.1-1 – Comprimento de Mistura.

Levando em conta o sinal da tensão (para valores negativos de $\frac{\partial U}{\partial y}$ a tensão deve ser negativa), equação (3.2.1-1) toma a forma:

$$\overline{|uv|} = \ell^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.2.1-2)$$

A tensão turbulenta fica então:

$$\tau_T = \rho \overline{|uv|} = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.2.1-3)$$

Como o modelo considera $\tau_T = \mu_T \frac{\partial U}{\partial y}$, segue que:

$$\mu_T = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad \text{ou} \quad \nu_T = \ell^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (3.2.1-4)$$

Até esse ponto, entretanto, o problema não foi resolvido ainda, uma vez que não se tem o valor do comprimento de mistura ℓ . O significado do comprimento de mistura, de acordo com Schlichting [1968] é: “a distância, na direção transversal, que deve ser coberta por um aglomerado de partículas de fluido ao viajar com sua velocidade média original, de modo a que a diferença entre sua velocidade (média) e a velocidade (média) na nova posição seja igual à flutuação transversal de velocidade no escoamento turbulento”. Prandtl [1952], escreveu: “Claramente é essencial obter-se um comprimento que possa ser interpretado como o diâmetro dos aglomerados de fluido que se movem como um todo e também como a trajetória coberta por esses aglomerados antes que eles percam novamente sua individualidade ao misturarem-se com o fluido que os cerca”.

O conceito de comprimento de mistura pode assim ser entendido como o equivalente “macro” ou “molar” ao conceito de *livre caminho médio* entre moléculas da Teoria Cinética dos Gases. Essa equivalência não é, entretanto, perfeita, uma vez que no *livre caminho médio* não ocorrem quaisquer interações entre as moléculas, ao passo que quando um aglomerado de fluido viaja a distância do comprimento de mistura, interage continuamente com o fluido que o cerca, até perder totalmente sua individualidade.

Prandtl, em sua análise do escoamento paralelo sobre uma parede, assumiu que o comprimento de mistura é proporcional à distância da parede ($\ell = \kappa y$), como uma forma de assegurar que as tensões turbulentas sejam menores ao se aproximar da parede e zero sobre ela. Essa hipótese, entretanto, não apresenta bons resultados na região muito próxima à parede e a formulação a seguir (proposta por van Driest – ver referência em Wilcox [2000]) assegura, nessa região, um decaimento mais adequado dos efeitos turbulentos:

$$\ell = \kappa y [1 - \exp(-y u_\tau / A \nu)]$$

onde a velocidade é dada por: $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$, $\tau_w = \frac{\mu U}{y}$ e $A = 26$ (constante).

Apesar disso, o modelo de turbulência proposto por Prandtl tem sido aplicado com sucesso para o estudo de escoamentos cisalhantes (ao longo de paredes) e de escoamentos turbulentos não parietais de camadas de mistura (de duas camadas de fluido se deslocando uma sobre a outra com velocidades diferentes – configurando escoamento turbulento livre). Nesse último caso, um outro modelo é considerado para o comprimento de mistura, que utiliza como variável a espessura da camada cisalhante.

Se chamarmos o produto $\ell \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$ de velocidade característica do escoamento turbulento (digamos u_c), então a equação (3.2.1-4) pode ser reescrita como:

$$\nu_T = \ell_c u_c$$

Isto é, a viscosidade turbulenta pode ser expressa como o produto de um comprimento característico e uma velocidade característica do escoamento turbulento. Preservando esse conceito, muitos autores têm proposto modelos adequados para classes específicas de escoamentos. A complexidade desses modelos é bastante variável, existindo desde modelos algébricos de validade bastante limitada, até modelos diferenciais, ou seja, modelos que consideram equações diferenciais de transporte

dessas duas grandezas características da turbulência, ou de outras a elas relacionadas. Esses modelos serão abordados nas próximas seções.

Bloor e Ingham [1983], ainda perseguindo um estudo analítico do escoamento num hidrociclone, após o desenvolvimento da modelagem para o escoamento no plano axial, descrita na seção 2.4, passaram ao estudo do componente azimutal da velocidade, levando em consideração a viscosidade e considerando esse parâmetro variável espacialmente, ou seja, tratando-o como uma característica do escoamento, de modo a considerar os efeitos da turbulência. Esse desenvolvimento será aqui discutido, enfatizando-se suas limitações.

Como mencionado na seção 2, o estudo do componente azimutal da velocidade (q_λ) considerando escoamento não viscoso conduz à obtenção da distribuição de velocidades corresponde ao vórtice livre, como pode ser visto do componente azimutal da equação de conservação da quantidade de movimento em coordenadas cilíndricas (R, z, λ) , como apresentamos a seguir:

$$q_R \frac{\partial q_\lambda}{\partial R} + q_z \frac{\partial q_\lambda}{\partial z} + \frac{q_R q_\lambda}{R} = 0 \quad (3.2.1-5)$$

cuja solução geral é $Rq_\lambda = g(\psi)$, onde $g(\psi)$ é uma função arbitrária. Essa relação estabelece a conservação da quantidade de movimento angular para uma partícula de fluido se movendo no interior de um hidrociclone. Se for considerado que, no bocal de entrada de fluido, todas as partículas de fluido têm aproximadamente a mesma quantidade de movimento angular (uma hipótese razoável para reduzida seção transversal do tubo de alimentação), então $g(\psi)$ pode ser considerada constante ($= A$), e assim, q_λ toma a forma da velocidade azimutal no vórtice livre: $q_\lambda = A/R$.

Naturalmente a velocidade azimutal infinita sobre o eixo ($R = 0$) não é observada experimentalmente e, portanto, um perfil realista para o componente azimutal deve exibir um comportamento de rotação de corpo rígido junto ao eixo, como consequência da ação da viscosidade. Objetivando a obtenção desse perfil os autores consideram a equação do componente azimutal da quantidade de movimento para um

escoamento viscoso em escoamento axissimétrico, no qual, admite-se a possibilidade de variação espacial da viscosidade efetiva, para levar em conta a turbulência.

Bloor & Ingham mostraram que essa abordagem para o estudo do componente azimutal da velocidade é compatível com a solução não viscosa para os componentes da velocidade sobre o plano axial (equações 2.4-6 e 2.4-7). Isso é comprovado baseado na hipótese de que q_λ é uma função de R somente, hipótese que, de acordo com esses autores, é verificada experimentalmente. Sendo válida essa hipótese, então as equações não viscosas para o movimento sobre o plano axial, incluindo $q_\lambda(R)$, podem ser reduzida à mesma forma das equações nas quais a velocidade azimutal está ausente, pelo uso da pressão modificada, na seguinte forma:

$$p^* = p - \int_R \frac{q_\lambda}{R} dR$$

A conclusão é que a solução para o escoamento não viscoso sobre o plano axial é independente e, portanto, compatível com qualquer solução para o componente azimutal da velocidade, desde que esse componente assuma a forma $q_\lambda = q_\lambda(R)$.

O componente azimutal da equação de conservação da quantidade de movimento, em coordenadas cilíndricas, para um escoamento axissimétrico viscoso, assumindo variação espacial da viscosidade, é dado pela seguinte expressão:

$$\rho \frac{q_R}{R} \frac{\partial}{\partial R} (q_\lambda R) + \rho q_z \frac{\partial q_\lambda}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{2}{R} \right) \left[\mu \left(\frac{\partial q_\lambda}{\partial R} - \frac{q_\lambda}{R} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial q_\lambda}{\partial z} \right) \quad (3.2.1-6)$$

Considerando que $q_\lambda = q_\lambda(R)$ e usando para q_R a equação (2.4-7), essa equação se reduz a:

$$-\rho B \frac{R^{1/2}}{z^2} \frac{d}{dR} (q_\lambda R) = \frac{\partial}{\partial R} \left[\mu \left(\frac{dq_\lambda}{dR} - \frac{q_\lambda}{R} \right) \right] + \frac{2\mu}{R} \left(\frac{dq_\lambda}{dR} - \frac{q_\lambda}{R} \right) \quad (3.2.1-7)$$

Analisando essa equação e considerando que q_λ é uma função somente de R , como já foi dito, Bloor & Ingham propõem para a distribuição espacial da viscosidade a seguinte forma funcional:

$$\mu = \frac{f(R)}{z^2} \quad (3.2.1-8)$$

onde $f(R)$ é uma função arbitrária.

Substituindo-se a equação (3.2.1-8) em (3.2.1-7), obtém-se:

$$-\rho BR^{1/2} \frac{d}{dR} (q_\lambda R) = \frac{d}{dR} \left[f(R) \left(\frac{dq_\lambda}{dR} - \frac{q_\lambda}{R} \right) \right] + \frac{2f(R)}{R} \left(\frac{dq_\lambda}{dR} - \frac{q_\lambda}{R} \right) \quad (3.2.1-9)$$

Uma vez que q_λ é independente da coordenada z , a integração da equação (3.2.1-9), para uma função conhecida $f(R)$, pode ser realizado em qualquer z , em especial em $z = L$, isto é, na seção de alimentação do trecho cônico modelado. Essa escolha resulta nas seguintes condições de contorno:

$$\text{Em } R = R_c \text{ tem-se } q_\lambda = V_i \quad (3.2.1-10)$$

onde R_c é o raio do hidrociclone nessa seção de topo do trecho cônico e V_i é a velocidade do fluido na alimentação, já consideradas as perdas de carga na entrada.

A outra condição de contorno é, obviamente:

$$\text{Em } R = 0 \text{ tem-se } q_\lambda = 0 \quad (3.2.1-11)$$

A equação (3.2.1-9) pode ser transformada numa equação adimensional tomando-se R_c e V_i para as escalas de comprimento e velocidade respectivamente. Essa equação torna-se então:

$$-CR^{1/2} \frac{d}{dR'}(q_\lambda R') = \frac{d}{dR'} \left[g(R') \left(\frac{dq'_\lambda}{dR'} - \frac{q'_\lambda}{R'} \right) \right] + \frac{2g(R')}{R'} \left(\frac{dq'_\lambda}{dR'} - \frac{q'_\lambda}{R'} \right) \quad (3.2.1-12)$$

onde:

$$R' = R/R_c,$$

$$q'_\lambda = q_\lambda/V_i,$$

C é um parâmetro adimensional que pode ser interpretado como o número de Reynolds baseado no componente radial da velocidade.

$$C = \frac{\rho B R_c^{5/2}}{\mu_c},$$

$$g(R') = \frac{f(R)}{\mu_c},$$

e μ_c é uma constante dimensional, cuja dimensão é tal que resulte em C e $g(R')$ adimensionais.

As condições de contorno para q'_λ são:

$$\text{em } R' = 0 \quad \text{tem-se } q'_\lambda = 0 \quad (3.2.1-13)$$

$$\text{em } R' = 1 \quad \text{tem-se } q'_\lambda = 1 \quad (3.2.1-14)$$

Visando a obtenção de uma solução analítica para a equação (3.2.1-12), B&I adotam $g(R') = 1$. Assim, essa equação assume a forma:

$$-CR^{1/2} \frac{d}{dR'}(q_\lambda R') = \frac{d}{dR'} \left[\frac{1}{R'} \frac{d}{dR'}(q'_\lambda R') \right] \quad (3.2.1-15)$$

Cuja solução, considerando-se as condições de contorno (3.2.1-13) e (3.2.1-14), é:

$$q'_\lambda = \frac{1}{R'} \frac{\gamma\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5} CR'^{5/2}\right)}{\gamma\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5} C\right)} \quad (3.2.1-16)$$

onde $\gamma(n, x) = \int_0^x t^{n-1} \exp(-t) dt$ é a função Gama incompleta.

Como pode ser visto da figura (3.2.1-2) a forma do perfil de dado pela expressão (3.2.1-16) é qualitativamente compatível com o perfil esperado (ver Capítulo 2). Os autores compararam essa solução com os resultados experimentais de Kensall (referência em Bloor & Ingham [1983]), mostrando uma concordância razoável.

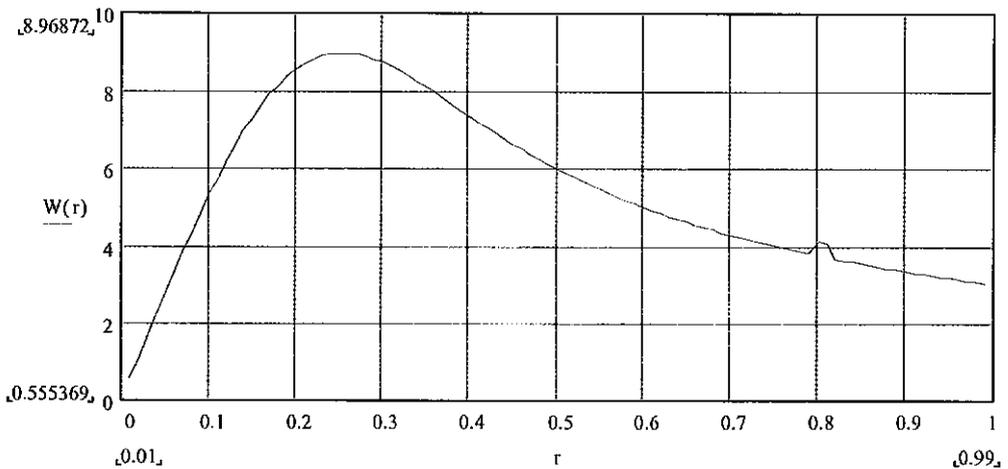


Figura (3.2.1-2) – Perfil do Componente Azimutal da Velocidade (equação 3.2.1-16).

Na tentativa de perseguir uma prescrição menos arbitrária para a variação espacial da viscosidade, B&I desenvolveram uma outra abordagem para determinar a viscosidade turbulenta, usando o modelo de comprimento de mistura.

A expressão original de Prandtl (3.2.1-4), desenvolvida para um escoamento cisalhante simples, é trazida para o escoamento em rotação num hidrociclone na seguinte forma – em coordenadas cilíndricas:

$$\mu_T = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial q_\lambda}{\partial R} - \frac{q_\lambda}{R} \right| \quad (3.2.1-17)$$

Essa expressão simples para a viscosidade turbulenta resulta em que essa grandeza é nula em algumas regiões do escoamento, em especial, na região em que o fluido assume rotação de corpo rígido (junto ao eixo do equipamento), pois nessas condições o termo tomado como valor absoluto na expressão 3.2.1-17 (entre as barras) anula-se. Para evitar esse problema B&I decidiram somar um termo constante à taxa de cisalhamento, adotando a seguinte expressão:

$$\mu_T = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial q_\lambda}{\partial R} - \frac{q_\lambda}{R} + K \right| \quad (3.2.1-18)$$

É necessário escolher-se um comprimento de mistura, ℓ na expressão (3.2.1-18). Os autores afirmam então, que a escala de comprimento deve estar associada com a espessura da camada limite sobre as paredes e utilizando um trabalho anterior de Rott e Lewellen (ver referência em Bloor e Ingham [1983]), apresentam o resultado obtido de que a espessura desse tipo de camada limite é dada por:

$$\delta \propto z^{1/2} (L - z)^{1/2} \quad (3.2.1-19)$$

onde L é o valor da coordenada z na seção de topo do trecho cônico, já mencionado.

Considerando a expressão (3.2.1-19) e a idéia de que a escala de comprimento é proporcional à espessura da camada limite, conclui-se que ℓ na equação (3.2.1-18) é proporcional a $z^{1/2} (L - z)^{1/2}$.

Como para obter-se uma forma mais simplificada para o componente azimutal da equação de conservação da quantidade de movimento – equação (3.2.1-6) – é conveniente que a viscosidade varie proporcionalmente a $1/z^2$, essa condição implica em que ℓ varia proporcionalmente a $1/z$.

B&I comentam que embora a variação com a coordenada z requerida para o comprimento de mistura ℓ , de acordo com Rott e Lewellen, seja diferente da adotada, ambas apresentam as mesmas características principais. Ambas as expressões fazem com que ℓ cresça quando z diminui, isto é, o comprimento de mistura cresce na direção da abertura de *saída de fluido próxima ao vértice da seção cônica*.

Verifica-se facilmente que as variações do comprimento de mistura com a coordenada z são bastante diferentes nas duas expressões, a proposta experimentalmente por Rott e Lewellen e a sugerida no desenvolvimento analítico de Bloor e Ingham. Essas expressões geram gradientes de ℓ na direção z bastante diferentes, principalmente para valores pequenos de z e para $z \rightarrow L$. Ambas as expressões apresentam taxas similares de variação de ℓ com a coordenada z apenas numa faixa relativamente pequena do domínio de escoamento.

Apesar desses problemas Bloor & Ingham prosseguem sua análise assumindo que o comprimento de mistura ℓ varia com $1/z$. Assim a viscosidade turbulenta assume a forma:

$$\mu_T = \frac{M}{z^2} \left| \frac{dq_\lambda}{dR} - \frac{q_\lambda}{R} + K \right| \quad \text{onde } M \text{ é uma constante.}$$

Fazendo uso, na expressão acima, das seguintes relações:

$$R' = R/R_c, \quad q'_\lambda = q_\lambda/V_i$$

$$\mu = \frac{f(R)}{z^2} \quad \text{e} \quad g(R') = \frac{f(R)}{\mu_c}$$

Os autores obtêm a seguinte expressão para $g(R')$:

$$g(R') = \left| \frac{dq'_\lambda}{dR'} - \frac{q'_\lambda}{R'} + S \right| \tag{3.2.1-20}$$

$$\text{onde } \mu_c = \frac{MV_i}{R_c} \text{ e } S = \frac{R_c K}{V_i}.$$

A expressão (3.2.1-20) é substituída na equação (3.2.1-12) conduzindo a uma equação diferencial linear de segunda ordem para q'_λ , sujeita às condições de contorno (3.2.1-13 e 14). Bloor e Ingham resolveram numericamente a equação resultante para vários valores arbitrários dos parâmetros C (ou equivalentemente μ_c) e S . Para detalhes vide Bloor e Ingham [1983].

Segundo os autores, para alguns valores desses parâmetros, o perfil para o componente azimutal adimensional da velocidade, ajusta-se razoavelmente às medições experimentais de Kensall (vide referência em Bloor e Ingham [1983]).

Somos entretanto levados a concluir, da discussão acima, que a escolha da forma funcional para a variação espacial do comprimento de mistura foi determinada muito mais por suas implicações simplificativas na solução da equação diferencial resultante para a determinação do componente azimutal da velocidade do propriamente por considerações da física do problema.

Rochino e Lavan [1969] os autores estudaram analiticamente o escoamento, com o fluido em rotação, em tubulações cilíndricas estacionárias, fazendo uso de teorias fenomenológicas. Não trataram propriamente do estudo do escoamento em hidrociclones, mas de um escoamento axial, com rotação do fluido ao redor de um eixo. Rochino e Lavan fizeram uso da equação de transporte da vorticidade (teoria do transporte de vorticidade de G.I. Taylor) e das hipóteses de similaridade de von Karman estendidas a um campo tridimensional flutuante de velocidades. Os autores determinaram um conjunto de condições de similaridade que relacionam as escalas de velocidade e comprimento turbulentos com a geometria do problema e com os transportes de vorticidade e de momento angular do escoamento médio.

Rochino e Lavan analisaram ainda o escoamento rotativo (*swirl flow*) com base na equação da vorticidade e considerando a hipótese de similaridade. Essa hipótese implica que somente o campo de velocidade nas vizinhanças de um ponto de referência

P é considerado, com o sistema de referência movendo-se com a velocidade média em P . O conceito de similaridade estabelece que nas vizinhanças do ponto o padrão de escoamento é similar, isto é, ele difere de ponto para ponto nas escalas de comprimento e velocidade e as flutuações turbulentas são transportadas pelo escoamento médio.

A equação da vorticidade, na forma vetorial, considerando-se desprezível a viscosidade molecular, assume a forma:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{V} = 0 \quad (3.2.1-21)$$

onde \vec{V} é o vetor velocidade instantânea e $\vec{\Omega}$ é o vetor vorticidade instantânea. Considerando coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , o vetor velocidade assume a forma $\vec{V} = (u, V + v, W + w)$, onde W é constante e V é expresso na forma $V = V(r)$. Considera-se $\vec{\Omega} = (\xi, \eta, \zeta)$, com a forma $\vec{\Omega} = \left(\xi', \eta', \zeta' + \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right)$, onde as “linhas” significam flutuação.

As expressões acima para \vec{V} e $\vec{\Omega}$ são avaliadas levando-se em conta a seguinte expansão em série de Taylor, ao redor do ponto P :

$$\frac{V}{r} = (r - r_0) \left[\frac{d(V/r)}{dr} \right]_0 \quad (3.2.1-22)$$

e

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{r - r_0}{r_0} + \dots \right) \quad (3.2.1-23)$$

A hipótese de similaridade implica nas seguintes relações envolvendo os parâmetros de similaridade:

$$r - r_0 = Lr^*; \quad r_0(\theta - \theta_0) = L\theta^*; \quad z - z_0 = Lz^*;$$

$$t = Lt^*/A; \quad u = Au^*; \quad v = Av^*; \quad w = Aw^*;$$

$$\xi' = A\xi^*/L; \quad \eta' = A\eta^*/L; \quad \zeta' = A\zeta^*/L$$

(3.2.1-24)

Considerando as formas assumidas para \vec{V} e $\vec{\Omega}$, as formas expandidas (3.2.1-22) e (3.2.1-23) e as relações (3.2.1-24), a equação (3.2.1-21) gera três equações (uma para cada componente). Dessas equações e da condição de que elas são independentes do ponto de referência P , é possível obter-se um conjunto de condições de similaridade relacionando a escala de velocidades turbulentas (A nas equações acima) e a escala de comprimento da turbulência (L nas equações acima) à geometria e ao transporte do momento angular, velocidade angular e vorticidade do escoamento médio (ver referência em Rochino e Lavan [1969]). De algumas dessas condições de similaridade Rochino e Lavan obtiveram a seguinte expressão para a viscosidade turbulenta, para o escoamento com rotação acima descrito:

$$v_r = K^2 r^2 \left(\frac{dV}{r} - \frac{V}{r} \right) \quad \text{for } 0 < r \leq 0.9R$$

e

(3.2.1-25)

$$v_r = K^2 (R - r)^2 \left(\frac{dV}{r} - \frac{V}{r} \right) \quad \text{for } 0.9R < r \leq R$$

onde $0.038 \leq K \leq 0.08$ para o escoamento com vórtice, R é o raio do tubo cilíndrico e V é o componente azimutal do vetor velocidade, ou seja, na direção θ .

Usando-se as expressões (3.2.1-25) acima, os autores, resolveram a equação adimensional para o escoamento em rotação e compararam seus resultados analíticos com os resultados de um experimento realizado com o escoamento em rotação de uma corrente de ar. A rotação foi produzida como resultado de pás ajustáveis montadas numa seção a montante de um trecho da tubulação. A corrente de ar ao deixar a seção de

geração da rotação entra num trecho cilíndrico reto de tubulação, onde as medições são realizadas. Da forma como o experimento foi realizado pode-se considerar que nesse trecho cilíndrico a corrente em escoamento apresenta uma velocidade axial essencialmente constante, superposta a um movimento de rotação ao redor do eixo.

A comparação entre os resultados da solução numérica da equação para o movimento de rotação do fluido com as medições do experimento mostram uma concordância razoável.

Comparativamente ao escoamento em hidrociclone, nesse experimento a intensidade de rotação é menor. Além disso, o perfil radial do componente azimutal da velocidade, obtido no experimento, é essencialmente o de vórtice forçado, ou seja, rotação de corpo rígido, não apresentando a região de escoamento irrotacional presente na maior parte desse perfil no escoamento em hidrociclone.

Além disso, para o caso de hidrociclones para sólidos - ou seja, aqueles para os quais a reversão do sentido do escoamento axial é bastante grande - abordagem analítica utilizada por Rochino e Lavan parece ser totalmente inadequada, já que essa reversão, sendo produto de grandes velocidades de rotação do fluido, não se verifica no experimento e no correspondente modelo de Rochino e Lavan. Já no caso dos hidrociclones para águas oleosas, as hipóteses desse modelo são mais apropriadas, pois nesse tipo de hidrociclone a reversão axial do escoamento é bastante reduzida e o semi-ângulo do corpo cônico é também muito pequeno, sendo que ambas as condições resultam num componente radial da velocidade reduzido, aproximando das condições consideradas no desenvolvimento empreendido por Rochino e Lavan. Entretanto, mesmo para os hidrociclones para águas oleosas, o perfil do componente azimutal da velocidade difere bastante do considerado no modelo.

Em que pesem as limitações dos modelos acima apresentados, deve-se ressaltar que mesmo com os recentes desenvolvimentos na área computacional atualmente amplamente disponibilizados, isso não significa que a abordagem da turbulência, aplicada ao estudo de um escoamento específico, utilizando modelos mais gerais, terá necessariamente melhor desempenho do que modelos mais simples desenvolvidos para essas condições específicas. Deve-se ter em mente que os modelos de turbulência que

empregam equacionamento mais geral apresentam alguns termos que precisam ser modelados. Essa modelagem é realizada com hipóteses nem sempre muito adequadas para situações particulares.

3.2.2 Modelos Diferenciais de Turbulência

Serão discutidos nesta seção os modelos de turbulência com duas equações diferenciais de transporte de grandezas turbulentas, em particular será analisado o modelo k - ε e suas adaptações e modificações para levar em conta os efeitos de curvatura e rotação do fluido (*swirl*) presentes no escoamento em hidrociclones.

Como mencionado na seção anterior, a viscosidade turbulenta pode ser expressa como o produto de uma velocidade e um comprimento ambos característicos do escoamento turbulento. Uma escolha possível para a velocidade característica é $u_c = k^{1/2}$, onde k é a energia cinética turbulenta do escoamento, ou seja, $k = \frac{1}{2} \overline{(u_i u_i)}$. O chamado modelo de turbulência a uma equação utiliza uma equação de transporte para a energia cinética turbulenta.

A expressão exata da equação de transporte para a energia cinética turbulenta pode ser obtida multiplicando-se cada componente da equação instantânea da quantidade de movimento por sua correspondente velocidade (u_i). As equações obtidas devem ser então somadas, tirando-se então a média temporal da equação resultante – como descrito em 3.1 – para se obter a expressão para a energia cinética total. Dessa expressão subtrai-se a energia cinética do escoamento médio. A expressão resultante é a equação para a energia cinética das flutuações turbulentas.

Outra forma de se obter uma equação para a energia cinética turbulenta é pela contração ($i = j$) da equação de transporte para as tensões de Reynolds, a qual será deduzida e discutida na seção 3.3.

A equação de transporte para a energia cinética turbulenta pode ser escrita como se segue:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + C_k = D_k + P_k + \varepsilon \quad (3.2.2-1)$$

onde C , D e P representam respectivamente os termos de convecção, difusão e produção, e ε representa a taxa de dissipação da energia cinética turbulenta. As expressões exatas para esses termos são as seguintes:

$$C_k = U_j \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad (3.2.2-2)$$

$$D_k = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_j \left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \quad (3.2.2-3)$$

$$P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad (3.2.2-4)$$

$$\varepsilon = -\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} \quad (3.2.2-5)$$

Os termos no lado esquerdo da equação (3.2.2-1) representam a variação local e a convecção (pelo escoamento médio) da energia turbulenta. A primeira parte do termo de difusão (lado direito da equação (3.2.2-3)) representa a difusão da energia turbulenta devido às flutuações de velocidade e a segunda parte é a difusão pelo transporte molecular, sendo importante apenas em regiões com baixa intensidade de turbulência. O termo de produção (3.2.2-4) representa a transferência de energia do escoamento médio para a turbulência. Finalmente o termo de dissipação (3.2.2-5) representa a destruição da energia cinética turbulenta pelos menores vórtices.

Para o fechamento do sistema de equações para o cálculo do escoamento turbulento é fácil perceber-se que somente os termos no membro esquerdo da equação (3.2.2-1) não necessitam qualquer modelagem. Já os termos de difusão, produção e dissipação necessitam ser modelados em termos das quantidades médias ou da própria energia turbulenta, uma vez que na forma em que se encontram, as equações (3.2.2-3),

(3.2.2-4) e (3.2.2-5) introduziriam outras incógnitas no sistema de equações do escoamento.

Quanto ao termo difusivo, é necessário modelar apenas a primeira parte (difusão turbulenta). Isso é feito utilizando-se novamente o conceito de viscosidade turbulenta, como segue:

$$-u_j \left(\frac{u_i u_j}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \approx \nu_T \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

O termo de produção também apresenta um problema uma vez que envolve o tensor de Reynolds $\overline{u_i u_j}$ em sua forma completa. Esse termo é modelado pela equação proposta por Kolmogorov, a equação (3.2-1) vista anteriormente, e assim o termo de produção fica:

$$-\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + \nu_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

O termo de dissipação toma a forma: $\epsilon \approx \frac{k^{3/2}}{L_e}$. O significado dessa aproximação pode ser explicado considerando-se que a taxa de transferência de energia dos maiores para os menores vórtices é, por hipótese, proporcional ao inverso da escala de tempo dos maiores vórtices.

Considerando L um comprimento característico para os maiores vórtices, a escala de tempo desses vórtices é: $T = L/u_c$ com $u_c = k^{1/2}$. Como a energia por unidade de massa de fluido nos maiores vórtices é proporcional a $u_c^2 = k$, então segue que:

$$\epsilon \approx \frac{1}{T} u_c^2 = \frac{k^{3/2}}{L_e}$$

Considerando-se os modelos acima, a equação para o transporte da energia cinética turbulenta toma a forma:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + v_T \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] - \frac{k^{3/2}}{L_s} \quad (3.2.2-6)$$

Obviamente, é ainda necessário modelar-se a viscosidade turbulenta e a escala de comprimento para o termo de dissipação.

A viscosidade turbulenta v_T vem da expressão semi empírica na forma $v_T \propto k^{1/2} L_\mu$, onde a constante de proporcionalidade e a nova escala de comprimento (L_μ) são empiricamente determinadas. A escala de comprimento da dissipação é determinada partindo-se da hipótese de equilíbrio local (energia produzida = energia dissipada), da lei da parede e considerando-se também a relação empírica entre a correlação longitudinal-transversal e a energia cinética turbulenta, $(\overline{uv}/k) \approx 0.3$, a qual foi determinada experimentalmente para escoamentos parietais (ver Wilcox [2000]).

O modelo de turbulência a uma equação, com os parâmetros empiricamente determinados como acima descrito, é adequado para as regiões completamente turbulentas nas classes de escoamentos para os quais esses parâmetros foram determinados. Nas regiões de baixa intensidade de turbulência, alguns autores propuseram fórmulas de correção dos parâmetros.

O problema fundamental do modelo de turbulência a uma equação reside na fixação, com alto grau de arbitrariedade, de uma escala de comprimento representativa da turbulência, na forma acima descrita. O valor desse parâmetro é muito sensível ao tipo de escoamento para cuja descrição o modelo será utilizado, comprometendo a generalidade do mesmo. A consideração de uma escala representativa da turbulência como variável de fluxo, sujeita portanto às condições de transporte das demais variáveis, analogamente ao que foi feito acima com a própria energia cinética turbulenta, constitui-se numa abordagem fisicamente mais consistente.

Nos modelos que utilizam duas equações de transporte, além da equação para a energia cinética turbulenta, que foi detalhada acima, é utilizada uma outra equação de transporte para a determinação de um parâmetro relacionado à escala de comprimento

do movimento turbulento. Em princípio, qualquer combinação das variáveis *energia cinética turbulenta e escala de comprimento* na forma do produto $k^a L^b$, onde a e b são expoentes arbitrários, atenderia aos objetivos pretendidos, mas a combinação mais usualmente empregada nos modelos em duas equações é dada por $k^{3/2} L^{-1}$ a qual expressa a taxa de dissipação da energia turbulenta ε , como discutido anteriormente.

A equação de transporte para a dissipação ε pode ser obtida por meio dos seguintes passos: subtrai-se a equação da quantidade de movimento do escoamento médio da equação para o transporte da quantidade de movimento total (ou seja, não submetida ao processo de tomada de média). A equação resultante é diferenciada com respeito a x_k e multiplicada por $v(\partial u_i / \partial x_j)$. A equação obtida é então submetida ao processo de tomada de média. (veja, por exemplo, Sloan et al. [1986]).

A expressão final obtida para a equação da taxa de dissipação assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + C_\varepsilon = D_\varepsilon + P_\varepsilon + d_\varepsilon \quad (3.2.2-7)$$

onde:

$$C_\varepsilon = U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \quad (3.2.2-8)$$

$$D_\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{v u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_m}} + \frac{2v}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} - v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right], \quad (3.2.2-9)$$

$$P_k = -2v \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m}} + \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) - 2v \overline{\frac{u_j \partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_m}} - 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m}}, \quad (3.2.2-$$

10)

$$d_\varepsilon = -2 \overline{\left(\nu \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_m} \right)^2} \quad (3.2.2-11)$$

O termo convectivo e o último termo da expressão para o termo difusivo D_ε são os únicos termos que não necessitam modelagem, pois apresentam somente variáveis do escoamento médio e a própria taxa de dissipação. Todos os outros termos envolvem médias de correlações de derivadas de quantidades flutuantes e, portanto, têm de ser modelados para a obtenção – juntamente com as equações do escoamento médio e a equação da energia cinética turbulenta – de um sistema fechado de equações para a solução do escoamento turbulento.

Levando-se em conta a necessidade de modelar os termos acima mencionados, a equação de transporte para a taxa de dissipação ε assume a forma:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.2.2-12)$$

onde P_k é o termo de produção de energia cinética turbulenta dado pela equação (3.2.2-4):

$$P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

E o tensor $-\overline{u_i u_j}$ é dado novamente pela equação (3.2-1):

$$-\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + \nu_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

O primeiro termo no lado direito da equação (3.2.2-12) utiliza a expressão de difusão de uma grandeza física, fazendo uso do gradiente da quantidade difundida e de um coeficiente de difusão. Os outros dois termos, de produção e de dissipação, merecem alguns comentários.

Considere-se inicialmente o termo de produção. Parece razoável supor-se que a produção da energia cinética deva ser balanceada pela produção de dissipação, em termos globais, para evitar-se um crescimento ilimitado, portanto irreal, da energia cinética turbulenta. Fazendo uso da análise dimensional é fácil observar que a taxa de produção da energia cinética turbulenta (por unidade de massa do fluido) tem unidades de L^2T^{-3} enquanto que a taxa de produção de dissipação (também por unidade de massa) tem unidades de L^2T^{-4} . A escala de tempo natural para relacionar ambas as grandezas é dada por $T = k/\varepsilon$. Dessa simples análise dimensional segue que:

$$P_\varepsilon \propto \frac{\varepsilon}{k} P_k$$

O outro termo, que pode ser entendido como a destruição da dissipação, deve ter uma forma que aniquile a dissipação, ou seja, impeça que ela se torne infinitamente grande, quando a energia cinética turbulenta se anula, de modo que o modelo não produza valores negativos – fisicamente irreais – dessa grandeza. Outra característica desejável para o termo de destruição de dissipação é que o mesmo deve aumentar se a própria dissipação aumentar. Com base nessas duas hipóteses e considerando-se uma análise dimensional similar à anterior, a relação mais simples que modela o termo de destruição de dissipação é dada por:

$$d_\varepsilon \propto \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon$$

Desse modo, as duas equações para o modelo k - ε , para altos números de Reynolds, são as seguintes:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_T \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_T \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] - \varepsilon \quad (3.2.2-13)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.2.2-14)$$

onde:

$$v_T = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.2.2-15)$$

O modelo k - ε acima descrito possui cinco constantes empíricas. A determinação dessas constantes, no modelo padrão (Launder e Spalding [1974]), foi baseada em experimentos realizados para algumas classes de escoamentos cisalhantes simples, o que evidentemente prejudica a generalidade do modelo.

Os valores dessas constantes para o modelo padrão são:

$$c_\mu = 0.09, \quad c_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad c_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1 \quad \text{e} \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

Além da limitação imposta pela consideração de escoamentos cisalhantes simples, o modelo padrão, como mencionado acima, foi desenvolvido para regiões completamente turbulentas (número de Reynolds elevado) e não pode ser aplicado, em sua forma padrão, para regiões próximas a paredes, onde os efeitos viscosos tornam-se significativos. Nesses casos é necessário utilizar-se funções de amortecimento que corrijam o modelo para as regiões próximas à parede.

Outros autores propuseram modelos k - ε modificados, apropriados para o emprego em escoamentos que apresentam regiões com baixo número de Reynolds (Launder e Sharma [1974]). Em regiões onde $k^2/\nu\varepsilon < 100$ os efeitos viscosos tornam-se significativos e portanto devem de ser levados em consideração e alguma correção no modelo padrão deve ser utilizada.

O modelo desenvolvido por Launder e Sharma [1974] para baixos números de Reynolds, levando em conta os efeitos de parede, apresenta-se da seguinte forma:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_T \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] \tilde{\varepsilon} - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3.2.2-16)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + f_1 c_{\varepsilon 1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k - f_2 c_{\varepsilon 2} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + 2\nu \nu_T \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_i} \right) \quad (3.2.2-17)$$

onde:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial y} \right)^2, \text{ sendo } y \text{ a distância normal à parede.} \quad (3.2.2-18)$$

Essa nova proposta para o termo de dissipação tem a vantagem de produzir $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow 0$, tornando o comportamento da taxa de dissipação compatível com o comportamento da energia cinética turbulenta junto à parede, ou seja, $k \rightarrow 0$, quando $y \rightarrow 0$.

A viscosidade turbulenta é dada por:

$$\nu_T = f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}}$$

E as funções que aparecem nas relações acima são dadas pelas seguintes expressões:

$$f_1 = 1.0 \quad f_2 = 1.0 - 0.3 \exp(-R_t^2) \quad \text{and} \quad f_\mu = \exp \left[\frac{-3.4}{(1.0 + R_t/50.0)^2} \right]$$

com

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}$$

(3.2.2-19)

Rodi e Mansour [1993] usaram dados de DNS – simulação numérica direta – para propor um modelo mais robusto k - ϵ para baixos números de Reynolds.

Apesar de seu desempenho superior relativamente aos modelos algébricos e mesmo aos modelos com uma única equação, o modelo k - ϵ apresenta ainda limitações. Nesse modelo a dificuldade, inerente ao modelo com uma equação, decorrente da necessidade de uma prescrição direta de uma escala de comprimento característica da turbulência, é evitada pela utilização de uma equação de transporte completa para o cálculo de uma grandeza relacionada a esse parâmetro, que é a taxa de dissipação da energia turbulenta. Essa abordagem obviamente conduz a uma maior generalidade do modelo com duas equações. Entretanto, condições de escoamento mais complexas não podem ser adequadamente modeladas sem a consideração da multiplicidade de escalas da turbulência. Entre as situações mais complexas em que o modelo k - ϵ apresenta resultados inadequados tem-se:

- Curvatura das linhas de corrente do escoamento médio
- Gradientes adversos de pressão
- Regiões de separação do escoamento
- Jatos
- Presença de forças de corpo de grande intensidade

Dessas condições, pelos menos a primeira e a última estão sempre presentes, de maneira significativa, nos escoamentos em ciclones e hidrociclones. Como discutido nas seções 1 e 2, a trajetória das partículas de fluido no interior de um hidrociclone tem uma forma espiralada com raio de curvatura muito reduzido. Além disso, essas partículas estão sujeitas a elevadas acelerações centrífugas, devido ao componente azimutal da velocidade. A velocidade azimutal por sua vez também possui uma flutuação turbulenta, o que acarreta uma flutuação turbulenta na força centrífuga, afetando o transporte das grandezas turbulentas.

Vamos discutir, com mais detalhe, acerca das limitações do emprego do modelo k - ϵ para a simulação do escoamento em hidrociclones.

Inicialmente, deve-se enfatizar que esse modelo, por ser baseado no conceito de viscosidade turbulenta (hipótese de Boussinesq) não tem capacidade para lidar com condições anisotrópicas de escoamento, como aquelas que têm lugar no interior do hidrociclone, que tampouco configuram um escoamento cisalhante simples, conforme já discutido na seção 3.2.

Bradshaw, em seu abrangente estudo sobre o efeito da curvatura da linhas de corrente sobre o escoamento turbulento [1973] – vide apêndice A, seção A-1 –, concluiu que essa curvatura tem um forte efeito sobre os processos pelos quais as tensões de Reynolds são geradas e mantidas ao longo do escoamento e que, portanto, modelos desenvolvidos para escoamentos cisalhantes simples, mesmo ajustados empiricamente teriam poucas chances de reproduzir esse efeito com generalidade adequada.

Esse autor sugeriu ainda que uma relação linear entre a tensão de Reynolds e a taxa de deformação do escoamento médio, mesmo com fator de amplificação aplicado a determinada direção da deformação, como na equação (3.2-2) – seção 3.2 –, não seria confiável na presença de grandes curvaturas das linhas de corrente. Essa sugestão baseia-se no fato de que os efeitos de curvatura se fariam sentir sobre parâmetros estruturais do escoamento, de ordem mais elevada, e, portanto, não seria sensato esperar que os efeitos sobre as tensões de Reynolds locais aparecessem imediatamente à imposição da curvatura.

Se considerarmos a equação geral para o transporte das tensões de Reynolds – ver seção 3.3.2, equação (3.3.2-22) – o termo de produção das tensões turbulentas, pela deformação do escoamento médio, é dado por:

$$P_{u_i u_j} = - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)$$

Considerando-se um escoamento bidimensional – escoamento cisalhante sobre uma superfície curva – Bradshaw [1973] concluiu, como mencionado acima, que mesmo pequenas curvaturas nas linhas de corrente resultam em alterações significativas

nas tensões turbulentas. Nesse caso, o termo de produção apresenta os seguintes componentes:

$$P_{uv} \cong - \left(\overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{u^2} \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

$$P_{\overline{v^2}} \cong -2\overline{uv} \frac{\partial V}{\partial x}$$

Mesmo se a curvatura da superfície for muito pequena e, portanto, gerar um gradiente, na direção principal do escoamento, do componente normal da velocidade, muito pequeno comparado ao gradiente, na direção normal à superfície, do componente principal da velocidade, digamos $\frac{\partial V}{\partial x} \approx 0.02 \frac{\partial U}{\partial y}$, a influência desse pequeno gradiente sobre o termo de produção pode ser muito grande.

Como próximo à parede $\overline{u^2}$ é muito maior que $\overline{v^2}$ (ver Schlichting [1968]), isso aumenta, relativamente, a influência de $\frac{\partial V}{\partial x}$ sobre a produção de \overline{uv} . Além disso, do termo de produção de $\overline{v^2}$ verifica-se que, para valores positivos do gradiente $\frac{\partial V}{\partial x}$, como os que ocorrem junto à uma superfície côncava, há um acréscimo na produção da tensão turbulenta $\overline{v^2}$.

Desses considerações, verifica-se que a influência de $\frac{\partial V}{\partial x}$ sobre \overline{uv} é dez a quinze vezes maior que a influência de $\frac{\partial U}{\partial y}$. Naturalmente, esse diferente grau de influência não pode ser gerado por uma expressão como a de Boussinesq:

$$-\overline{uv} = \nu_\tau \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

Uma vez que para essa expressão se, por exemplo, $\frac{\partial V}{\partial x} \approx 0.02 \frac{\partial U}{\partial y}$ a influência de $\frac{\partial V}{\partial x}$ sobre \overline{uv} será de somente 2% da influência de $\frac{\partial U}{\partial y}$.

Entretanto, apesar dessas limitações fundamentais dos modelos com duas equações, alguns autores têm proposto modelos k - ϵ com modificações que permitem sua aplicação, com resultados satisfatórios, em situações complexas de escoamento. Como pode ser visto no apêndice A, na simulação do escoamento com linhas de corrente curvas, alguns autores têm utilizado modelos com duas equações, modificados, e têm obtido resultados razoavelmente satisfatórios.

Launder et al. [1977] propuseram um modelo k - ϵ modificado com um fator de correção, aplicado na equação de ϵ , que é função de um parâmetro adimensional chamado número de Richardson, que pode ser interpretado como uma razão entre a força centrífuga, gerada pela curvatura da linha de corrente, e a força de inércia. Para mais detalhes ver a seção 3.2.3 à frente e o apêndice A, seção A-3. Ver também Bradshaw [1969] e [1973]. Essa correção resulta em melhores resultados na presença de curvatura da linha de corrente, entretanto, para o escoamento no interior de equipamentos com geometria complexa, torna-se difícil a proposição de uma formulação adequada para o número de Richardson, como será melhor discutido à frente.

Outra abordagem, assumida por alguns autores, visando ampliar a generalidade dos modelos com duas equações, para sua utilização em escoamentos mais complexos, foi o desenvolvimento de modelos k - ϵ não lineares.

Esses modelos, embora também utilizando o conceito de viscosidade turbulenta, seriam capazes de simular mais adequadamente algumas características anisotrópicas do escoamento. Entretanto, apresentam uma maior dificuldade de implementação computacional do que os modelos k - ϵ usuais, mesmo os corrigidos, como o acima descrito. Segundo a literatura, o tempo computacional requerido pela sua utilização é compatível com o tempo requerido pelo modelo que considera equações de transporte

individuais para cada um dos componentes do tensor de Reynolds – abordado na seção 3.4.

Yakhot e Orzag derivaram um modelo k - ϵ baseado nos chamados métodos do Grupo de Renormalização (cuja sigla em inglês é RNG). As técnicas matemáticas de RNG são utilizadas, nessa abordagem, para desenvolver uma teoria para as grandes escalas, na qual o efeito das pequenas escalas é representado por coeficientes de transporte modificados.

Assim, por exemplo, a viscosidade turbulenta modificada é um parâmetro que aparece nas equações de quantidade de movimento, por meio do qual as menores escalas afetam as maiores escalas.

O procedimento RNG emprega uma força randômica *universal* que afeta as flutuações de velocidade de pequena escala e representa o efeito das escalas conhecidas, que incluem as condições iniciais e de contorno, sobre os vórtices na faixa inercial. Essa força é escolhida de tal modo que as propriedades globais do campo de escoamento resultante sejam as mesmas do escoamento resultante da deformação média.

No procedimento RNG, as equações do movimento para o campo de grandes escalas são obtidas por meio de um processo de média sobre uma faixa infinitesimal de pequenas escalas, que assim deixam de ser consideradas explicitamente nas equações. O processo de remoção dessas pequenas escalas é repetido até que as correções infinitesimais sobre as equações acumulem-se, produzindo alterações finitas. O procedimento retém apenas as modificações de viscosidade e, após a eliminação das menores escalas, a força randômica é descartada das equações resultantes e as condições iniciais e de contorno são reestabelecidas.

O procedimento RNG tem a característica de produzir um conjunto de equações que não apresentam constantes a serem empiricamente determinadas, já que o procedimento descrito resulta na determinação analítica das constantes. Ademais, as equações obtidas incorporam correções embutidas que as tornam adequadas tanto para as regiões do escoamento com alto e com baixo número de Reynolds.

O modelo RNG difere do modelo k - ϵ convencional, visto acima, nas seguintes características:

Inicialmente, as constantes determinadas assumem diferentes valores, a saber:

$$c_\mu = 0.0845, \quad c_{\epsilon_1} = 1.42, \quad c_{\epsilon_2} = 1.68, \quad \sigma_k = 0.7194 \quad \text{e} \quad \sigma_\epsilon = 0.7194$$

Além disso, a equação de transporte para dissipação da energia turbulenta possui um termo fonte adicional que é dado por:

$$S_\epsilon = -\rho\alpha \frac{\epsilon^2}{k} \tag{3.2.2-20}$$

onde $\alpha = c_\mu \eta^3 \frac{1 - \eta/\eta_0}{1 + \beta\eta^3}$, com $\eta_0 = 4.38$, $\beta = 0.012$ e $\eta = S \frac{k}{\epsilon}$, onde $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$,

$$\text{com } S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

O termo fonte representado pela equação (3.2.2-20) é significativo para escoamentos com elevadas taxas de deformação. Quando as taxas de deformação são pequenas, S e η tendem a zero e, portanto, o termo fonte adicional – equação (3.2.2-20) – também se torna desprezível, obtendo-se o comportamento do modelo k - ϵ convencional. Deve-se ressaltar ainda que η é um parâmetro que mede a razão entre as escalas de tempo da turbulência para o escoamento médio.

O modelo k - ϵ não linear, proposto por Speziale [1987], avalia as tensões turbulentas pela seguinte expressão:

$$\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} \delta_{ij} k + 2c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} s_{ij} + 4c_D c_\mu^2 \frac{k^3}{\epsilon^2} \left(s_{im} s_{mj} - \frac{1}{3} s_{mn} s_{mn} \delta_{ij} \right) + 4c_E c_\mu^2 \frac{k^3}{\epsilon^2} \left(s_{ij}^0 - \frac{1}{3} s_{mn}^0 \delta_{ij} \right)$$

$$\tag{3.2.2-21}$$

onde:

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

E

$$s_{ij}^0 = U_j \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_m} s_{mj} - \frac{\partial U_j}{\partial x_m} s_{mi}$$

Os modelos acima descritos ao empregarem expressões que, em lugar da relação muito mais simples e linear de Boussinesq/Kolmogorov – equação (3.2-1) –, envolvem o produto de gradientes dos componentes da velocidade média, resultam em diferentes tensões normais para diferentes direções.

3.2.3 Discussões adicionais sobre a modelagem da turbulência em escoamentos com rotação e em escoamentos com linhas de corrente curvas

Considerando-se os modelos de turbulência acima descritos, realiza-se a seguir uma discussão dos procedimentos de correção e adaptação desses modelos, disponíveis na literatura técnica, para levar em conta os efeitos de rotação e de curvatura das linhas de corrente.

Como já foi mencionado, devido à complexidade dos escoamentos turbulentos a maior parte da literatura técnica sobre turbulência abrange ou turbulência isotrópica ou escoamentos cisalhantes simples, isto é, escoamentos que apresentam somente uma taxa de deformação significativa. A presença de linhas de corrente curvas origina taxas de deformação adicionais, que não podem ser adequadamente abordadas usando-se uma relação linear como a proposta de Boussinesq. Também já foi mencionado que, mesmo pequenas taxas extras de deformação, causadas por curvaturas suaves das linhas de corrente, não podem ser adequadamente tratadas por uma teoria baseada numa viscosidade turbulenta representada por um tensor de ordem zero.

Assim, não somente a abordagem do comprimento de mistura, mas também os demais modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta, mesmo os mais complexos, como aqueles a duas equações diferenciais (tratados na seção 3.2.2), que foram desenvolvidos visando o estudo de escoamentos em que somente uma taxa de deformação é significativa, não são adequados para representar escoamentos com condições de deformação mais complexas.

Os modelos k - ϵ não lineares - também abordados acima -, como o RNG, por exemplo, também não são, de um ponto de vista teórico, muito adequados para lidar com taxas de deformação impostas pela curvatura da linha de corrente, uma vez que o efeito do termo fonte que é adicionado à equação da dissipação nesses modelos, somente é significativo quando as taxas de deformação são elevadas – vide equação 3.2.2-20, entretanto, como afirmado em Bradshaw [1973], e discutido na seção 3.2.2, mesmo pequenas taxas de deformação decorrentes da curvatura da linha de corrente são capazes de afetar, de maneira significativa, a turbulência.

O modelo k - ϵ de dupla escala, que utiliza quatro equações de transporte, embora também utilizando o conceito de viscosidade turbulenta, apresenta teoricamente comportamento superior relativamente ao k - ϵ convencional para simulação de escoamentos complexos, como será discutido na seção 3.3. Com esse modelo, como será visto no fim desta seção, alguns autores obtiveram resultados promissores na simulação de escoamentos com rotação. Entretanto, esse modelo apresenta-se computacionalmente mais custoso, em relação ao modelo k - ϵ convencional, ao empregar duas equações diferenciais adicionais.

Apesar das limitações mencionadas, existe um grande número de artigos técnicos visando estender a faixa de aplicação dos modelos de turbulência mais simples para abrangência ao estudo de campos de escoamento com linhas de corrente curvas. Desse modo, muitos pesquisadores têm trabalhado na determinação de fatores de correção para a extensão dos modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta para as aplicações referidas. Do ponto de vista teórico conceitual, essa abordagem é de difícil justificativa, como já reiteradamente discutido, entretanto, do ponto de vista da

prática da engenharia, tal abordagem pode resultar em modelos adequados em aplicações específicas.

Um trabalho desenvolvido por Abujelala & Lilley [1984] otimizou as constantes do modelo k - ϵ convencional de modo a que o modelo assim modificado representasse melhor escoamentos confinados com rotação. Descreve-se, a seguir, sucintamente, esse trabalho.

Trata-se de um trabalho, que embora não diretamente voltado ao estudo do escoamento em hidrociclones, aborda um dos principais objetos do escopo aqui tratado, que é o estudo do comportamento do modelo k - ϵ , e suas extensões, na descrição dos escoamentos com rotação e recirculação. O objetivo dos autores é o escoamento em injetores de combustível para turbinas aeronáuticas e queimadores industriais, que apresentam algumas semelhanças com o escoamento em hidrociclones, mas também diferenças fundamentais, como por exemplo, relativamente menores velocidades azimutais e ausência de drenagem da zona de recirculação.

Os autores apresentam, inicialmente, o modelo k - ϵ convencional, enfatizando as hipóteses utilizadas na modelagem dos termos das equações correspondentes, mormente a hipótese de equilíbrio local (produção = dissipação) de validade discutível em escoamentos sujeitos a efeitos difusivos e convectivos intensos.

Abujelula e Lilley (A&L) discutem algumas das divergências entre simulações, com a utilização do modelo k - ϵ convencional e resultados experimentais, disponíveis na literatura técnica. Essas divergências são maiores, como seria de se esperar, nas regiões de máximas velocidades – onde os efeitos convectivos são intensos, afastando-se o escoamento das condições de equilíbrio local, hipótese que conduz à obtenção do coeficiente da viscosidade turbulenta c_μ constante (Hanjilick & Launder [1972]). Para levar-se em conta o fato de que a convecção das tensões cisalhantes turbulentas não é desprezível e seu valor não pode ser baseado exclusivamente em propriedades locais, mantendo-se ainda o modelo k - ϵ , A&L descrevem as correções sobre o próprio fator c_μ e sobre o termo de destruição da taxa de dissipação na equação de transporte dessa variável, que já foram discutidas na seção 4.0. Particularmente para linhas de corrente

curvas, os autores chamam a atenção para o trabalho de Launder, Priddin e Sharma [1977].

A proposta de A&L não é entretanto a da utilização de fatores de correção variáveis, como no caso daqueles modelos citados. Esses autores recomendam a utilização do modelo k - ϵ com a mesma estrutura do modelo k - ϵ convencional, porém, com as constantes empíricas modificadas, por meio de um processo de otimização, para melhor ajustar dados experimentais (de um escoamento rotativo confinado), obtidos por Yoon e Lilley (ver referência em A&L [1984]).

Trata-se de um experimento de escoamento em tubo cilíndrico, onde ao fluxo axial é superposto um movimento de rotação do fluido, ao redor do eixo do tubo, gerado por um sistema de pás ajustáveis (estáticas), em dois diferentes ângulos, montado na seção à montante do trecho de medição. Os perfis de velocidade axial e azimutal foram medidos em diversas seções transversais ao longo do tubo e comparados com simulações utilizando o modelo k - ϵ convencional. Um estudo estatístico ajustou as constantes empíricas do modelo de forma a reproduzir, com menor desvio possível os dados experimentais, (mantendo-se, obviamente, a estrutura do modelo convencional).

Mostramos, na tabela abaixo, os valores das constantes empíricas do modelo k - ϵ convencional e os valores desses parâmetros otimizados para a modelagem de escoamentos turbulentos com rotação.

Modelo	C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ϵ
Convencional	0.09	1.44	1.92	1.00	1.30
Otimizado para rotação	0.125	1.44	1.5942	1.00	1.1949

Observa-se que, de acordo com o que foi discutido acima, apenas o coeficiente da viscosidade turbulenta e os parâmetros da equação para a taxa de dissipação turbulenta foram alterados. A constante empírica C_1 , apesar de fazer parte da equação para ϵ , foi mantida com seu valor original, uma vez que, como visto na seção 3.2, o termo modelado em que esse parâmetro é utilizado, que representa a produção da taxa de dissipação, é proporcional à produção da energia cinética turbulenta, e esta, por sua

vez, é a variável turbulenta melhor descrita pelo modelo k - ϵ , prescindindo portanto de correção.

Discutiremos, a seguir, algumas dessas propostas de modificações/adaptações dos modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta.

Já em 1929, Prandt (veja referência em Bradshaw [1973] ou So [1975]) propôs um fator baseado num parâmetro adimensional da curvatura para corrigir o comprimento de mistura. Bradshaw [1969], como pode ser visto no apêndice A (seções A-2 e A-4), definiu o parâmetro adimensional *número de Richardson* para curvatura pela analogia com um parâmetro de mesmo nome utilizado na correção da equação para a dissipação, no modelo k - ϵ , em situações onde existe flutuação.

Como discutido na seção 3.2.1, alguns autores trabalharam com o conceito de comprimento de mistura para a modelagem do escoamento em hidrociclones. Entretanto, parece ser mais razoável a tentativa de reprodução dos efeitos sobre a turbulência gerados pelas taxas extras de deformação, impostas pela curvatura das linhas de corrente, em modelos mais robustos. O modelo k - ϵ , em particular, devido ao seu amplo emprego em problemas de engenharia, parece ser particularmente mais adequado como modelo base para o estudo de alterações visando a aplicação citada. Obviamente, como já foi dito, as justificativas teórico-conceituais de tal abordagem são fracas, devido a inadequabilidade intrínseca aos modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta para representar os efeitos anisotrópicos presentes em escoamentos complexos.

As deficiências do modelo k - ϵ são geralmente atribuídas à falta de solidez física na equação modelada para a dissipação da energia cinética turbulenta (equação para ϵ). Nessa equação, os termos fonte são aqueles que requerem as hipóteses mais ousadas. Sloan, Smith e Smoot [1986] afirmam ainda que, como a equação para ϵ é utilizada mesmo em modelos de fechamento de ordem mais alta (por exemplo, a modelagem de cada uma das tensões do tensor de Reynolds, que será vista na seção 3.3.2), existe a possibilidade de que não ser obtida maior capacidade de previsibilidade com o uso desses modelos mais refinados, tendo em vista as limitações inerentes à equação para ϵ .

Consideramos, entretanto, que para o problema aqui considerado, a restrição mencionada por esses autores é menos fundamental, pelo menos do ponto de vista teórico, que a limitação de isotropia inerente aos modelos que fazem uso do conceito de viscosidade turbulenta. Mas, como foi dito acima, pode ser promissora, do ponto de vista de engenharia, a adaptação desse tipo de modelos para escoamentos mais complexos.

As abordagens consideradas, na literatura, para a correção do modelo k - ε levando em conta os efeitos de curvatura da linha de corrente são de dois tipos principais:

- Correção dos termos fonte na equação para ε (a maior parte das propostas atua especificamente no termo que representa a destruição da dissipação), usualmente modificando o coeficiente $c_{\varepsilon 2}$ na equação (3.2.2-14).
- Correção no coeficiente c_{μ} para o cálculo da viscosidade turbulenta ν_T , equação (3.2.2-15)

Sloan et al. [1986], mencionam que o uso da forma funcional para c_{μ} , a qual foi determinada experimentalmente a partir do modelo algébrico de tensões de Gibson-Lauder, sujeito ao que eles denominaram de “simplificações bastante ousadas” – equação (3.2.2-7) abaixo – embora não possuindo a desejada universalidade, comporta-se melhor para algumas regiões do escoamento.

Certamente não se pode afirmar que qualquer dessas abordagens seja superior à outra, uma vez que ambas não consideram o necessário caráter anisotrópico do escoamento. Entretanto, é razoável esperar-se que um fator de correção aplicado diretamente sobre a viscosidade turbulenta faça com que os efeitos da curvatura se produzam instantaneamente sobre o escoamento, enquanto que uma correção aplicada à equação da taxa de dissipação da energia turbulenta irá impor a correção a todos os termos presentes na equação de transporte para a taxa de dissipação da energia turbulenta e, portanto, os efeitos devem se fazer sentir de maneira mais gradual.

Modelos de fechamento de ordem mais elevada, como é o caso do Modelo das Equações de Transporte para as Tensões de Reynolds, são teoricamente capazes de representar os efeitos anisotrópicos gerados pela curvatura e, desse modo, têm uma expectativa de melhor comportamento na solução do problema citado, conforme já mencionado, entretanto implicam necessariamente num maior esforço computacional, nem sempre justificado para problemas práticos de engenharia.

A Correção para a curvatura das linhas de corrente pode ser feita do seguinte modo: Da analogia entre curvatura e flutuação é definido o parâmetro adimensional, denominado número de Richardson, com base no gradiente, para a curvatura (vide Bradshaw [1969]):

$$Ri_{\tau} = \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{2U_s}{R_c^2} \frac{\partial(R_c U_s)}{\partial R_c} \quad (3.2.3-1)$$

onde R_c é o raio de curvatura local da linha de corrente e U_s é a velocidade média ao longo da linha de corrente, isto é:

$$U_s = \frac{(U^2 + V^2)^{1/2}}{2} \quad (3.2.3-2)$$

e

$$R_c = \frac{(U^2 + V^2)^{3/2}}{UV \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) + U^2 \frac{\partial V}{\partial x} - V^2 \frac{\partial U}{\partial r}} \quad (3.2.3-3)$$

onde U e V , são respectivamente os componentes de velocidade nas direções x e r , que constituem o sistema de coordenadas cilíndricas, conforme descrito em Bradshaw [1973].

Esse parâmetro (3.2.3-1) é utilizado em um fator de correção que multiplica o coeficiente no termo de destruição da dissipação na equação para ε . Com essa alteração esse termo assume a forma:

$$\text{"Termo de destruição de } \varepsilon \text{"} \equiv c_{\varepsilon 2} (1 - c_c Ri_T) \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.2.3-4)$$

onde $c_c = 0.2$ (vide Launder, Priddin e Sharma [1977]).

Uma proposta alternativa de modificação da equação para ε foi sugerida por Hanjalic e Launder [1980] (veja também Sloan, Smith e Smoot [1986]). Eles estudaram o escoamento através de bocais e concluíram que a transferência e dissipação da energia cinética turbulenta é mais efetivamente realizada pelas tensões normais que pelas tensões tangenciais. Para levar em conta essa maior influência das tensões normais sobre a dissipação da energia turbulenta, esses autores propuseram uma forma alternativa para o termo de dissipação:

$$P_\varepsilon = \tilde{c}_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \rho_k - c'_{\varepsilon 1} c_\mu k \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \quad (3.2.3-5)$$

onde P_ε representa a produção da dissipação, ϵ é o tensor alternante e os coeficientes são: $\tilde{c}_{\varepsilon 1} = 4.44$ e $c'_{\varepsilon 1} = 3.0$.

A expressão acima escrita para o sistema de coordenadas representado na figura (3.2.3-1), resulta em (vide Sloan et all [1986]):

$$P_\varepsilon = (\tilde{c}_{\varepsilon 1} - c'_{\varepsilon 1}) c_\mu k \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] + 2c_\mu k (\tilde{c}_{\varepsilon 1} + c'_{\varepsilon 1}) \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.2.3-6)$$

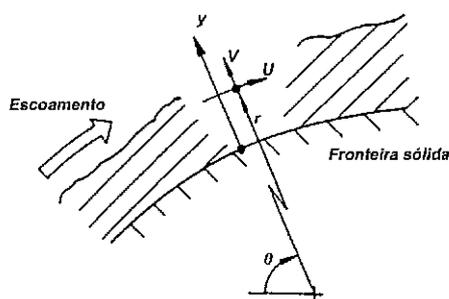


Figura 3.2.3-1 – Sistema de Coordenadas

Entretanto, o último termo no membro direito da expressão (3.2.3-6) acima é positivo para a curvatura côncava, pois $\partial U/\partial y$ e $\partial V/\partial x$ são ambos positivos nesse caso. Isso significa que a dissipação é maior e a turbulência é menor que na condição apresentada na figura 3.2.3-1, de curvatura convexa. Esse resultado é contrário à evidência experimental, a qual sugere um aumento da turbulência sobre superfícies côncavas.

Uma outra opção para levar em conta os efeitos da curvatura da linha de corrente é, como já foi mencionado, modificar diretamente a viscosidade turbulenta, por meio de um coeficiente de correção c_μ .

Rodi e Leschziner [1981] (ver referência em Sloan et al. [1986]) propuseram a seguinte forma funcional para o coeficiente c_μ , a qual é baseada numa versão simplificada do modelo algébrico das tensões turbulentas de Gibson-Lauder, e que expresso em coordenadas da linha de corrente fica:

$$c_\mu = \frac{0.09}{1 + 8K_1^2 \left(\frac{k^2}{\varepsilon^2} \right) \left(\frac{\partial U_s}{\partial n} + \frac{U_s}{R_c} \right) \frac{U_s}{R_c}} \quad (3.2.3-7)$$

onde $K_1 = 0.27$, U_s é a velocidade ao longo da linha de corrente, R_c é o raio de curvatura e n é a coordenada normal à linha de corrente (na direção de R_c). A faixa de aplicação de (3.2.3-7) é arbitrariamente limitada entre 0.025 e 0.09. Essa faixa indica que a forma funcional expressa pela equação (3.2.3-7) está limitada a condições de escoamento onde os efeitos de curvatura sobre a turbulência consistem em reduzir sua intensidade, isto é, curvatura convexa da linha de corrente.

Comentemos agora a correção para escoamentos com rotação.

As propostas acima descritas são recomendadas para escoamentos com linhas de corrente curvas, mas sem rotação. Para o caso de escoamentos onde a rotação é acentuada, algumas versões modificadas das mesmas duas abordagens acima descritas

(isto é, correção dos termos de dissipação por meio do uso de um parâmetro adimensional – número de Richardson de rotação – ou correção do coeficiente da viscosidade turbulenta) têm sido propostas.

As propostas de fatores de correção para modificar o modelo $k-\varepsilon$ tradicional para levar em conta a influência da rotação estão baseados na compreensão física sobre o particular escoamento com rotação, considerado. Como foi discutido no Capítulo 2 e na seção 3.2.1, o perfil do componente azimutal (ou tangencial) da velocidade para o caso de um hidrociclone é composto de uma combinação de uma região central que se comporta como rotação de corpo rígido (ou seja perfil proporcional ao raio – vórtice forçado) e uma região anular externa na qual prevalece o vórtice livre, ou seja uma região essencialmente irrotacional, onde o perfil da velocidade tangencial é inversamente proporcional ao raio. Com essas características peculiares do hidrociclone parece provável que uma forma única de correção aplicada a todo o domínio de escoamento seria inadequada, pelo menos em parte desse domínio.

A análise tradicional das condições de equilíbrio, num escoamento com rotação, de uma partícula de fluido (por exemplo, uma partícula projetada pela flutuação turbulenta – aquela do conceito de comprimento de mistura concebido por Prandtl – vide seção 3.2.1) é explicada por Von Karman – veja referência em Bradshaw [1973]).

Na região de vórtice forçado, o momento angular do campo de escoamento médio cresce com o raio e, de acordo com a mencionada discussão, a partícula de fluido que se deslocar radialmente sofrerá a influência de uma força restauradora, tendendo a recolocar essa partícula em sua posição original. Assim, a região onde ocorre vórtice forçado poderia ser considerada uma região estabilizadora, ou seja, onde haveria uma tendência a reduzir a intensidade da turbulência. Um efeito oposto é, obviamente, esperado na região de vórtice livre, onde a força que atuaria sobre a partícula deslocada tenderia a deslocá-la ainda mais e, portanto, nessa região a intensidade da turbulência tenderia a aumentar.

Sloan et al. [1986] chamam a atenção para o fato de que o efeito estabilizante, descrito no raciocínio acima, deve ser interpretado cuidadosamente nos casos em que ocorre a quebra do vórtice e onde existem zonas de recirculação, pois nesses casos, os

efeitos desestabilizantes desses fenômenos sobre a turbulência podem ser superiores ao efeito decorrente do vórtice forçado acima descrito. No caso do hidrociclone existe a região de transição do vórtice forçado para o livre, onde portanto ocorre a quebra do vórtice, e estão sempre presentes zonas de recirculação que variam de tamanho e intensidade conforme o tipo de hidrociclone, podendo ser pequena e relativamente fraca (no hidrociclone para remoção de gotículas de líquido de menor densidade) ou intensa (no hidrociclone para sólidos).

Diante da possibilidade dos efeito da rotação do fluido apresentarem-se de formas opostas conforme o tipo de escoamento, Sloan et al. [1986], analisam duas abordagens opostas para o problema de determinar uma correção do modelo k - ε devido à rotação do fluido. A primeira delas considera que o vórtice forçado tem efeito estabilizante, isto é, reduzindo a turbulência, enquanto a segunda considera o efeito oposto, isto é, o efeito desestabilizante.

Analisemos o efeito estabilizante da rotação. Uma forma análoga ao número de Richardson para curvatura acima citado foi proposta por Launder et al. [1977] (veja Apêndice A – seção A-3) para a rotação e tem a forma:

$$Ri_{gs} = \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{W}{r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right) \quad (3.2.3-8)$$

A correção é novamente introduzida como uma modificação no termo de destruição da dissipação da equação para ε , assim:

$$\text{“Destruição da dissipação”} \equiv c_{\varepsilon 2} \left(1 - c_s Ri_{gs} \right) \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.2.3-9)$$

onde $c_s = 0.002$.

A expressão acima para o número de Richardson produz um valor positivo desse parâmetro para o caso de gradiente positivo do momento angular de uma partícula de fluido (como no caso da rotação de corpo rígido) e, assim, de acordo com (3.2.3-9)

resulta numa redução da destruição de dissipação, isto é, resulta num decréscimo da viscosidade turbulenta.

Vamos analisar numericamente a faixa de variação no coeficiente $C_{\varepsilon 2}$, para o caso de um hidrociclone. Para essa análise vamos considerar os perfis de velocidade obtidos do modelo invíscido de Bloor & Ingham (veja seção 3.2.1 acima), isto é:

$$U = \frac{1}{2} B r^{-1/2} \left(3\alpha^* - \frac{5r}{x} \right) \quad (3.2.3-10)$$

$$W_{non\ dim} = \frac{1}{R'} \frac{\gamma\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5} C r^{1/2}\right)}{\gamma\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5} C\right)} \quad \text{onde} \quad \gamma(n, y) = \int_0^y t^{n-1} \exp(-t) dt \quad (3.2.3-11)$$

onde r e x são as coordenadas respectivamente radial e axial (do sistema de coordenadas cilíndricas), B , C e α^* são parâmetros relacionados com a geometria e as condições de escoamento no hidrociclone;

Consideremos ainda a expressão original para o número de Richardson para rotação, com a escala de tempo baseada no escoamento médio, – uma vez que não dispõe-se da escala de tempo para a turbulência (k/ε) –, assim definido:

$$Ri_{gs} = \frac{2 \frac{W}{r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right]^2} \quad (3.2.3-12)$$

Deve ser observado que o denominador da expressão (3.2.3-12) tem a dimensão do inverso do tempo ao quadrado. Na equação (3.2.3-8) essa escala de tempo foi substituída pela escala de tempo do escoamento turbulento (k/ε).

São apresentados abaixo os perfis de velocidade obtidos das expressões (3.2.3-10) e (3.2.3-11) para um hidrociclone com geometria e condições de escoamento arbitrariamente escolhidas. Essas velocidades estão expressas em metros/segundo num perfil distribuído sobre o raio adimensional (onde a adimensionalização é realizada

dividindo-se o valor local da coordenada radial por R_c , que é o raio nominal do hidrociclone):

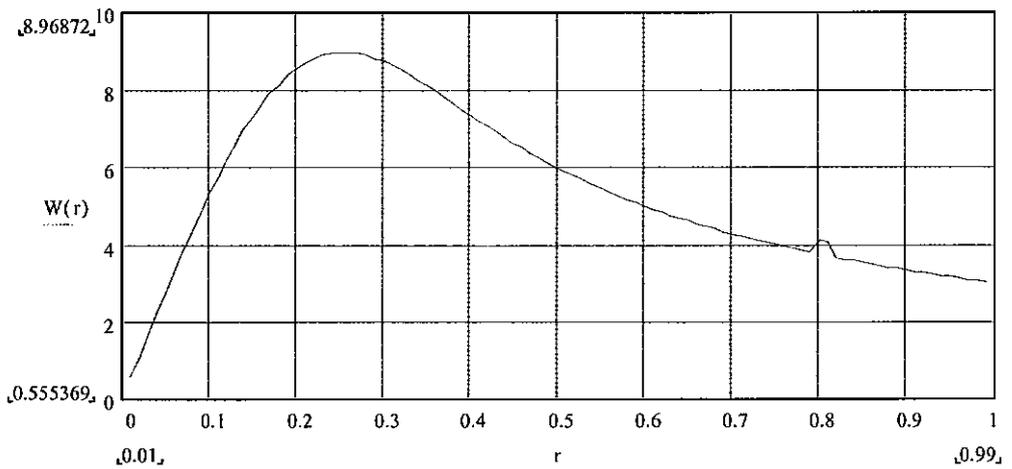


Figura 3.2.3-2 – Velocidade Azimutal (ou Tangencial)

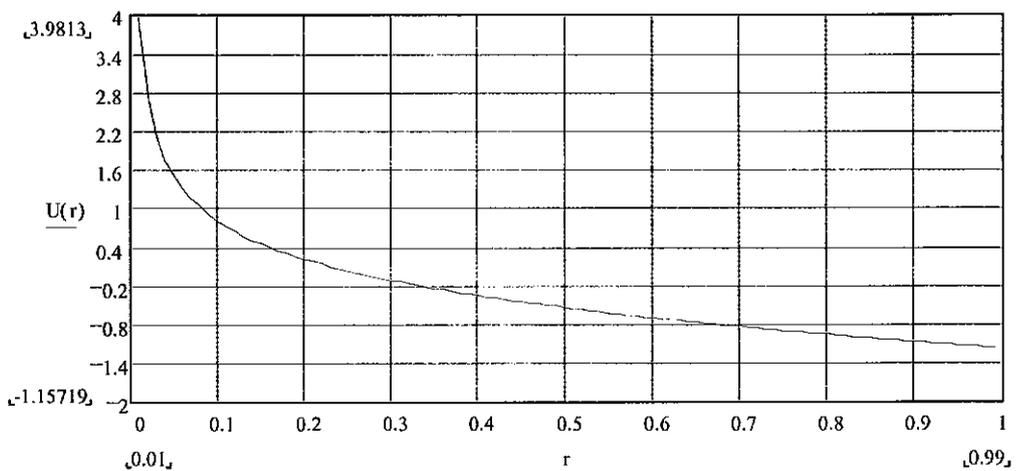


Figura 3.2.3-3 – Velocidade Axial

A figura 3.2.3-2 mostra que a velocidade de rotação (componente azimutal da velocidade) é de 3 m/s (próximo à parede do hidrociclone – $r=1$) e atinge um máximo de cerca de 9 m/s a uma distância do eixo de cerca de 25% do raio. Da figura 3.2.3-3 pode ser visto que a velocidade axial próximo ao eixo é de cerca de 2 m/s, mostrando a existência de uma reversão de sentido de escoamento.

A distribuição do número de Richardson para o gradiente, dado pela expressão (3.2.3-12), é representada pela curva abaixo:

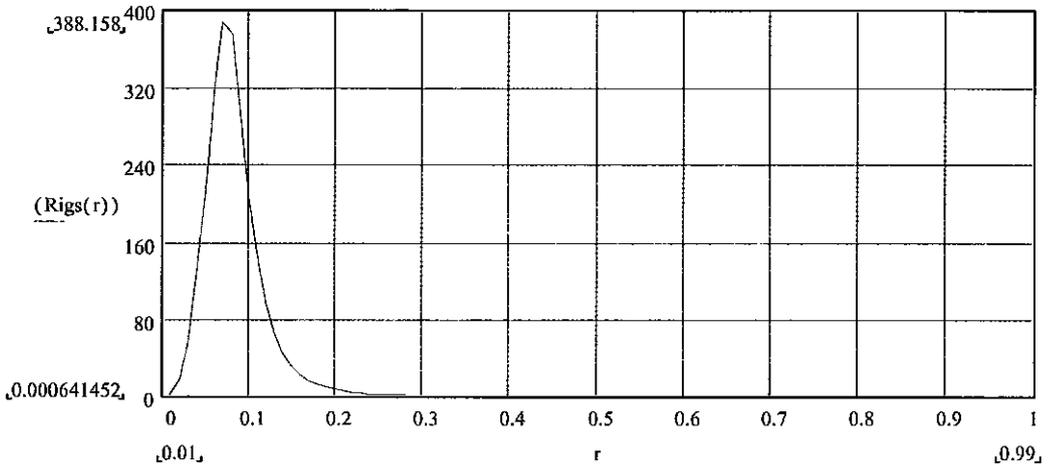


Figura 3.2.3-4 – Distribuição do Número de Richardson de Fluxo

Nota-se que o número de Richardson atinge valores muito elevados na região de rotação de corpo rígido, isto é, para $0 \leq r \leq 0.25$. Esses valores elevados são devido à forte movimento de rotação do escoamento. Como mencionado em Sloan et al. [1986]. O valor de pico da curva tende a infinito para elevadas rotações.

A variação no coeficiente é dada pela curva abaixo (lembrando que $c_{\epsilon 2} = 1.92$ no modelo $k-\epsilon$ original, sem correções).

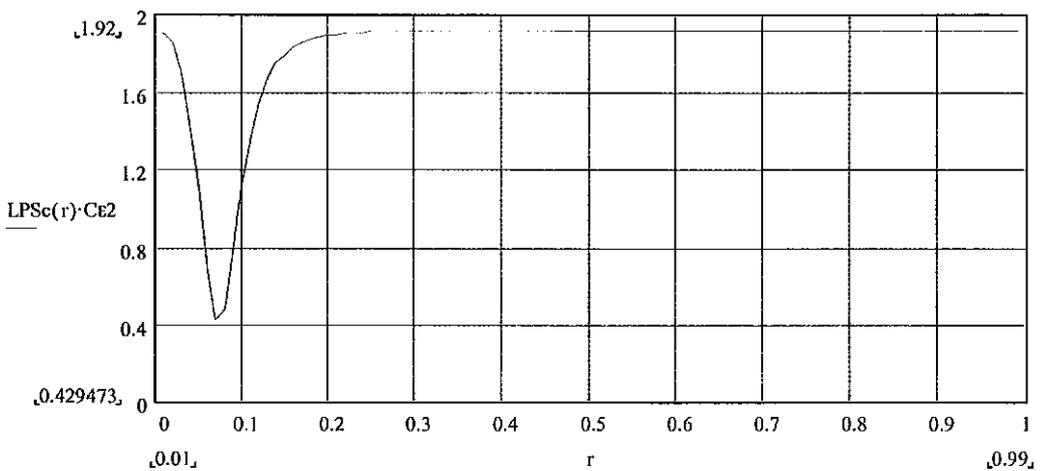


Figura 3.2.3-5 – Distribuição do coeficiente $C_{\epsilon 2}$ corrigido

A figura 3.2.3-5 acima mostra que, para o hidrociclone e condições de escoamento consideradas, a faixa de variação do coeficiente c_{e2} é: $0.43 \leq c_{e2} \leq 1.92$, na região de rotação de corpo rígido. Isso significa que, nessa região, a destruição da dissipação é substancialmente reduzida (a menos de $\frac{1}{4}$ do valor normal) devido ao efeito estabilizante sobre a turbulência proporcionado pela rotação. Nas regiões restantes, incluindo a região que se aproxima do comportamento de vórtice livre, nenhum efeito é produzido sobre o termo de destruição da dissipação. Esse último resultado é devido ao fato de que, na região irrotacional (vórtice livre), os numeradores das equações (3.2.3-8) e (3.2.3-12) tornam-se nulos.

O efeito desestabilizante da rotação será visto. De acordo com Sloan et al. [1986], Rodi afirma que o comportamento do número de Richardson para fluxo, em lugar do número de Richardson para gradiente, é mais consistente com os efeitos desestabilizantes produzido pela rotação em jatos giratórios e sobre superfícies em rotação.

Uma expressão para o número de Richardson para fluxo, em termos das quantidades médias é dado por:

$$Ri_{fs} = \frac{2 \frac{W}{r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right]^2} \quad (3.2.3-13)$$

A correção proposta por Rodi (veja referência em Sloan et al. [1986]) tem o objetivo de fazer crescer a turbulência (escala de comprimento ou viscosidade turbulenta) com a rotação, no caso de vórtice forçado. Em oposição ao fator de correção visto anteriormente, que atua sobre o termo de destruição de dissipação da equação para a dissipação da energia cinética turbulenta, Rodi propõe que o número de Richardson para fluxo seja utilizado num fator de correção aplicado sobre o termo de dissipação da equação para ε . Esse termo corrigido assume a seguinte forma:

$$\text{Termo de produção da dissipação corrigido} = c_{e1} \left(1 + 0.9 Ri_{fs} \right) \frac{\varepsilon}{K} P_k$$

onde P_k é o termo de produção da energia cinética turbulenta (vide seção 3.2.2).

Vamos analisar numericamente o efeito dessa correção sobre o escoamento no hidrociclone acima considerado.

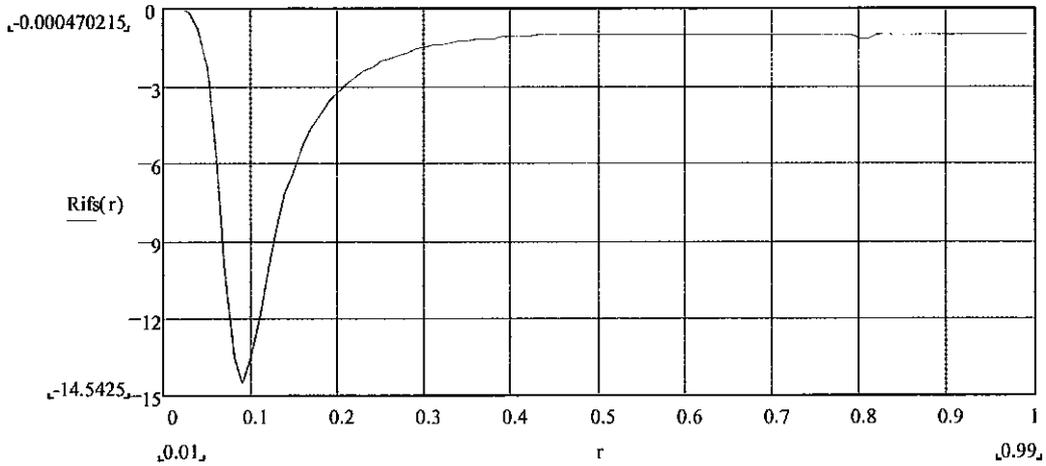


Figura 3.2.3-6 – Distribuição do Número de Richardson de fluxo

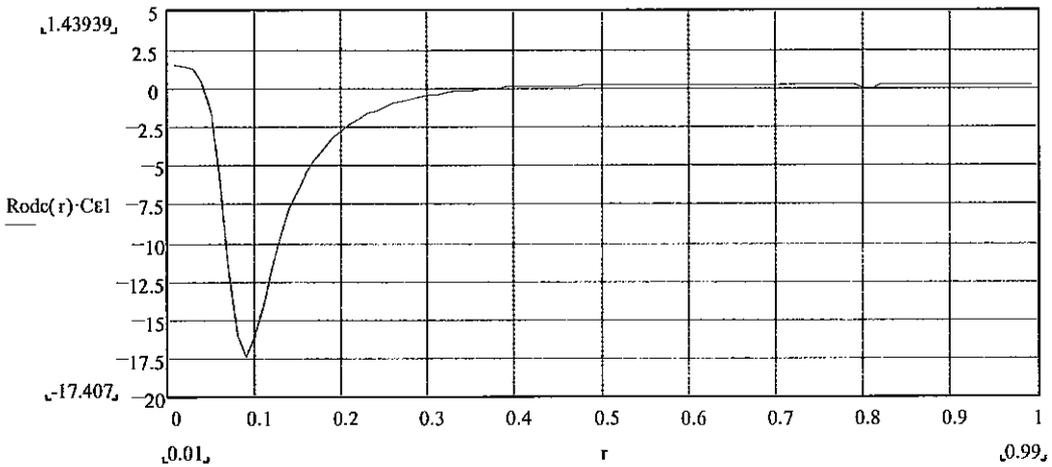


Figura 3.2.3-7 – Distribuição do coeficiente C_{e1} corrigido pelo fator proposto

Pode ser observado da figura 3.2.3-6 que o número de Richardson para fluxo assume valores negativos sobre todo o domínio de escoamento no hidrociclone. A figura 3.2.3-7 mostra que o valor do coeficiente C_{e1} é significativamente afetado pela forma corrigida proposta por Rodi, particularmente na região de vórtice forçado. Nessa

região, o coeficiente sofre uma alteração de seu valor normal (adotado por Launder e Spalding [1974]) para um valor negativo de magnitude uma ordem de grandeza superior. Essa correção implicará num forte desequilíbrio local entre a produção e a dissipação de energia cinética turbulenta nessa região, o que deverá ser compensado pelos demais termos de ambas as equações de transporte.

Outra característica da correção proposta por Rodi, contrariamente à proposta anteriormente vista, é a extensão de sua influência à região de vórtice livre. A figura 3.2.3-7 mostra que para $r > 0.5$, o coeficiente corrigido fica essencialmente constante $c_{\epsilon 1} = 0.144$, isto é, cerca de 10% de seu valor normal. Essa última característica está qualitativamente em concordância com o efeito desestabilizante sobre a turbulência proporcionado pelo vórtice livre.

A segunda abordagem para corrigir o modelo $k-\epsilon$ para os efeitos da curvatura da linha de corrente ou para os efeitos da rotação, como mencionado acima, é atuar diretamente no coeficiente c_{μ} para o cálculo da viscosidade turbulenta ν_T equação (3-24) (seção 3.2.3). Sloan et al. [1986], mostram, entretanto, que o uso dessa correção está limitada a casos de efeito estabilizante sobre a turbulência, uma vez que a faixa de variação do coeficiente c_{μ} está limitada ao valor máximo de 0.09, que é o correspondente ao modelo $k-\epsilon$ convencional.

3.2.4 Conclusões sobre o emprego dos modelos diferenciais com duas equações na simulação do escoamento em hidrociclones

Diversos artigos técnicos concluem pela inadequabilidade da utilização do modelo $k-\epsilon$ convencional na descrição dos escoamentos com linhas de corrente curvas ou com rotação do fluido (vide, por exemplo, o trabalho de Abujelala & Lilley [1984], citado acima). As razões para o desempenho limitado desse modelo, nos escoamentos citados, foram discutidas ao longo desta seção. Resta portanto, discutir as propostas de modificações do modelo convencional, acima expostas, com vistas à sua utilização para a simulação do escoamento num hidrociclone.

Tanto as propostas para a correção do modelo $k-\varepsilon$ para levar em conta os efeitos da curvatura da linha de corrente, como as propostas que pretendem levar em conta o efeito da rotação, foram obtidas e ajustadas com base em estudos de situações de escoamento bem mais simples do que as encontradas no interior do hidrociclone.

Num hidrociclone a trajetória espiral, de raio variável, descrita pelas partículas de fluido, faz com que o raio de curvatura das linhas de corrente seja variável tanto em magnitude como em direção e, portanto, não possa se manter coincidente com qualquer dos eixos do sistema de coordenadas.

O perfil radial do componente azimutal de velocidades num hidrociclone também, como já foi dito, apresenta trechos com características bastante distintas (trecho rotacional com rotação de corpo rígido, trecho rotacional de transição e trecho irrotacional - vórtice livre). Além disso, esse perfil varia ao longo do eixo do equipamento (nas diversas seções transversais). Os estudos de escoamentos com rotação consideram um comportamento único, relativamente à vorticidade, para o perfil do componente azimutal da velocidade.

O componente axial da velocidade no hidrociclone, por sua vez, apresenta uma reversão no sentido de escoamento, não presente nos escoamentos que serviram de base às correções descritas acima.

As propostas de correção para levar em conta o efeito da curvatura da linha de corrente, vistas acima, são limitadas aos casos em que esse efeito resulta numa atenuação da turbulência. Essa atenuação somente foi experimentalmente verificada em escoamentos externos sobre superfícies convexas. No caso de escoamentos externos sobre superfícies côncavas, o efeito verificado experimentalmente, como já foi dito, é o de intensificação da turbulência. (para detalhes sobre ambos os casos ver Hoffmann et al [1985]). Como no caso dos hidrociclones as características desse escoamento são muito mais complexas, pois o escoamento é confinado e, considerando-se o componente azimutal da velocidade o efeito das paredes do equipamento seria similar a uma superfície côncava, o que poderia tender a aumentar o nível de turbulência.

Poder-se-ia imaginar ainda que, para o caso do escoamento em hidrociclones, basta corrigir-se o comportamento do modelo k - ϵ unicamente para o efeito da rotação, uma vez que com essa consideração a curvatura da linha de corrente, imposta pela geometria do equipamento, ou seja, pela curvatura da parede, ficaria implícita. Esse tipo de abordagem tem, entretanto, sido considerado na literatura, não para aplicação em hidrociclones, mas para tipos mais simples de escoamentos em rotação, abordado de forma ambígua, na forma abaixo explicada:

A correção com efeito estabilizante da rotação sobre a turbulência será abordada. Nessa proposta de correção ocorre apenas redução da turbulência pelo efeito da rotação não sendo considerada qualquer amplificação da turbulência por esse efeito. Como crítica inicial ao emprego dessa abordagem para hidrociclones poder-se-ia citar a teoria de Von Karman (veja Bradshaw [1973] e também Apêndice A deste trabalho), que estabelece as condições de estabilização (redução) da turbulência na região de rotação em regime de vórtice forçado, também indica que, mesmo quando o momento angular de uma partícula de fluido permanece constante quando o raio aumenta – como é o caso do vórtice livre – há uma tendência à desestabilização da turbulência. Essa última tendência não seria reproduzida por esse tipo de correção de efeito estabilizante proposta.

Como mencionado em Sloan et al [1986], a presença do fenômeno, de comportamento de fluido ideal (vide seção 2), da recirculação próximo ao eixo de alguns escoamentos com forte rotação, onde o fluido de jusante é forçado de volta ao longo do eixo, complica o padrão de escoamento de tal modo, que a turbulência extra gerada pela recirculação pode sobrepujar qualquer efeito estabilizante decorrente da rotação. Como pode ser visto na figura 3.2.3-3 acima, para as condições aqui consideradas, junto ao núcleo central do hidrociclone (até cerca de 28% do raio nominal do equipamento) ocorre um acentuada reversão na direção de escoamento.

Vejamos a correção com efeito desestabilizante da rotação sobre a turbulência. O comportamento do modelo proposto por Rodi (figura 3.2.3-7), configura correções bastante elevadas na região de vórtice forçado, aumentando a turbulência nessa região. Na região de vórtice livre existe um efeito residual, significativamente menor, também amplificador da intensidade de turbulência. Trata-se de um comportamento, como já

discutido, não respaldado na física do problema, posto que a região de vórtice livre deveria apresentar um efeito desestabilizante maior que a região de vórtice forçado, segundo a já mencionada teoria de Von Karman.

São as seguintes as deficiências intrínsecas aos dois tipos de correção propostos. Há um alto grau de empirismo intrínseco a essa classe de correções, não somente nos coeficientes que multiplicam o número de Richardson no fator de correção, que são propostos com base em experimentos, mas esse empirismo está também presente na própria expressão para o número de Richardson, uma vez que se torna muito difícil estabelecer uma expressão adequada para esse parâmetro, quando as condições de escoamento são complexas (veja Bradshaw [1973]).

Sloan et al. [1986] mencionam que ambas as propostas de correção acima descritas, seja por Launder et al. [1977] ou por Rodi (veja referência em Sloan et al. [1986]) podem produzir resultados encorajadores em casos particulares, mas sua aplicação está longe de apresentar caráter universal, como demonstrado por sua *inefetividade* em ciclones, como mostrado em uma comunicação pessoal de Boysan et al (referências desse trabalho não estão disponíveis em Sloan et al. [1986], por tratar-se de comunicação privada).

A proposta, também acima descrita, de Abujelala & Lilley, de um modelo $k-\epsilon$ similar ao convencional, porém com constantes otimizadas para escoamentos com rotação, não pode, evidentemente, em princípio, ser rejeitada, para o escoamento em hidrociclones, exceto pelo fato de que também essa otimização foi feita com base em um experimento que embora apresente algumas semelhanças com o escoamento em hidrociclones, apresenta também diferenças importantes. Esse fato pode ser agravado ao considerar-se a falta de generalidade inerente a esse tipo de abordagem. Em outras palavras, o modelo resultante pode ser adequado tão-somente para as condições do experimento para o qual as constantes foram otimizadas. Isso será verificado em simulações numéricas do escoamento em hidrociclone com o modelo proposto por Abujelala & Lilley.

Levando-se em conta o que foi discutido durante a apresentação das propostas de correção para o modelo $k-\epsilon$ e dos problemas ou deficiências dessas correções, acima

apresentados, parece não ser muito adequada a utilização de fatores de correção, com base no parâmetro adimensional denominado de número de Richardson, para adaptação desse modelo de turbulência ao escoamento em hidrociclones. Além das restrições quanto à própria forma funcional desse parâmetro adequada a uma geometria complexa como a do hidrociclone, a correção almejada é também desconhecida e, certamente, não poderá ser implementada por uma única expressão válida para todo o domínio de escoamento, já que as características do escoamento nas vizinhanças do local onde a partícula se encontra afetam a forma da correção necessária.

Apesar das considerações do parágrafo anterior, apresenta-se, entretanto, na seção 3.4, deste capítulo, a proposta de uma correção do modelo $k-\varepsilon$, utilizando-se o conceito de número de Richardson. A correção proposta, entretanto, foi concebida levando-se em conta as características particulares do escoamento em hidrociclones, de forma a atingir de maneira distinta as regiões do domínio onde o componente azimutal da velocidade segue comportamento de vórtice forçado e onde segue comportamento de vórtice livre. Os resultados obtidos com a implementação desse modelo corrigido são descritos no capítulo 4.

3.3 Modelos de fechamento de ordem superior

3.3.1 Modelo k - ϵ com escala de tempo múltipla

Para um melhor entendimento das vantagens dos modelos de múltiplas escalas, relativamente ao modelo k - ϵ convencional, é conveniente uma discussão, ainda que sumária, dos fenômenos que têm lugar no escoamento turbulento, visando enfatizar principalmente uma das características desse tipo de escoamento, que é a multiplicidade de escalas.

Nos escoamentos turbulentos, as perturbações geram instabilidades no escoamento médio, acabando por produzir grandes vórtices turbulentos – ou maiores estruturas turbulentas – do escoamento. Esses vórtices vão se "quebrando" em estruturas cada vez menores até que os vórtices de menor escala sejam dissipados pelas forças viscosas.

A existência de uma grande diversidade de tamanhos de estruturas turbulentas no escoamento, funciona como o mecanismo de transferência contínua da energia cinética turbulenta gerada no escoamento médio, que produz as grandes estruturas turbulentas, para estruturas cada vez menores, até que, quando essas estruturas atingem determinado tamanho mínimo, as forças viscosas são suficientemente fortes para dissipar a energia turbulenta, impedindo assim a formação de estruturas turbulentas ainda menores, essa dimensão mínima é a denominada escala de dissipação de Kolmogorov.

Esse processo de transferência contínua de energia das maiores para as menores estruturas turbulentas pode ser entendido como uma cascata de energia, onde um número relativamente pequeno de estruturas de grandes dimensões distribui continuamente sua energia para um número cada vez maior de estruturas caracterizadas por dimensões cada vez menores. Nessa concepção as denominações "maiores" e "menores" ou ainda "grandes" e "pequenas", utilizadas na qualificação das estruturas turbulentas devem ser entendidas relativamente à dimensão linear característica do escoamento, como por exemplo, o tamanho característico do domínio

de escoamento, ficando o limite inferior representado pelo escala dissipativa de Kolmogorov.

Na concepção acima descrita tem-se que, no modelo k - ϵ convencional, a taxa de dissipação ϵ , pode ser interpretada como a taxa na qual a energia cinética turbulenta é transferida através de todo o espectro (de tamanhos de estruturas), das maiores estruturas presentes no escoamento para as menores também presentes. Ou seja, apenas a produção e a dissipação da energia cinética turbulenta podem ser alcançadas pelo modelo, a cascata de transferência de energia, em si, não é considerada num modelo com duas equações de transporte.

Portanto, o modelo com duas equações de transporte de grandezas turbulentas (k - ϵ convencional, por exemplo,) admite que ocorre um equilíbrio espectral no escoamento, ou seja, admite que uma vez que a energia cinética é gerada, nos menores números de onda do espectro (maiores estruturas), ela é também imediatamente dissipada, no mesmo ponto, nos maiores números de onda do espectro (menores estruturas).

Essa hipótese não é obviamente verdadeira, primeiramente, pela ampla faixa de dimensões das estruturas turbulentas acima descrita, que demanda algum retardo entre os processos de produção e dissipação. Deve ser lembrado que, em função da multiplicidade das dimensões das estruturas turbulentas (escalas espaciais), as escalas de tempo também são variáveis, ou seja, as grandes estruturas da turbulência são mais persistentes, retendo a energia de turbulência por um tempo maior, relativamente às pequenas estruturas. As menores estruturas turbulentas dissipam "imediatamente" a energia turbulenta, pela ação da viscosidade. É, portanto, necessário um tempo finito para a transferência na cascata energética acima citada. A hipótese de equilíbrio espectral torna-se uma aproximação ainda mais grosseira para escoamentos complexos, onde turbulência se afasta apreciavelmente da condição de isotropia.

Com a finalidade de capturar alguns dos efeitos dessa multiplicidade de escalas espaço-temporal, mas preservando as conveniências de se lidar com o conceito de *energia cinética turbulenta*, alguns pesquisadores – Hanjalic et al.

[1980] propuseram um modelo, com base nessa grandeza física, em que se trabalhasse com duas escalas de tempo e/ou comprimento. A idéia do novo modelo consiste em dividir o espectro de energia cinética turbulenta em duas faixas, numa dessas faixas (baixos números de onda) estaria ocorrendo a produção da energia turbulenta e sua transferência para a outra faixa, com números de onda maiores, onde não ocorreria produção, mas apenas dissipação da energia turbulenta.

Assim, a energia cinética turbulenta total, k_e , é considerada dividida entre uma parcela k_p , distribuída na região de produção, (correspondente à faixa de produção do espectro), e uma parcela k_t transferida para a região de maiores números de onda, correspondente à faixa de dissipação do espectro.

Os primeiros modelos, propostos pelos autores acima, consideravam uma razão fixa – entre a energia cinética turbulenta dos grandes vórtices (k_p) e a energia das pequenas escalas (k_t) – para a partição do espectro. Essa razão seria constante para todo o domínio do escoamento. Entretanto como, no caso de escoamentos complexos, o espectro de energia cinética turbulenta não é homogêneo, a manutenção de uma razão constante entre esses dois valores da energia cinética pode se tornar inadequada, para certas regiões do escoamento. Assim, por exemplo, o número de onda fixo para a partição poderá, em determinada região, ser muito baixo, fazendo com que a produção de energia cinética turbulenta situe-se na faixa de dissipação e, por outro lado, em outras regiões, sendo número de onda da partição muito elevado, o modelo se reduziria praticamente ao modelo k - ϵ convencional.

Para contornar o problema acima descrito, Kim e Chen [1989] desenvolveram uma variante desse modelo que considera que a localização da partição, isto é, a razão k_p/k_t é variável, de tal modo que sejam utilizadas partições variáveis do espectro de energia cinética, fazendo com que nas regiões onde a produção de energia cinética turbulenta é elevada a partição seja feita num número de onda mais elevado e, nas regiões onde a produção é pequena, a partição desloque-se para números de onda menores. Nesse modelo, portanto, a localização da partição, ou seja, a razão k_p/k_t é determinada como parte da solução, em função da intensidade de turbulência e das taxas de produção, de transferência e de dissipação. Esse método de partição variável,

segundo os autores, tem o efeito de fazer aumentar a viscosidade efetiva nas regiões em que a produção de turbulência é baixa e diminuir esse parâmetro nas regiões onde a produção de turbulência é elevada. Essa tendência é compatível com dados experimentais e também com modelos algébricos generalizados para as tensões turbulentas.

Façamos agora um equacionamento do modelo k - ε de dupla escala.

Como já foi dito, a idéia básica deste modelo, consiste em dividir a energia turbulenta total da seguinte forma:

$$k_e = k_p + k_t \quad (3.3.1-1)$$

Onde k_p é a energia turbulenta das grandes estruturas e k_t é a energia dos vórtices na faixa da dissipação. ε_p é a taxa de transferência da energia cinética turbulenta da região de produção para a faixa de dissipação e ε_t é a taxa de dissipação térmica (viscosa) da energia turbulenta.

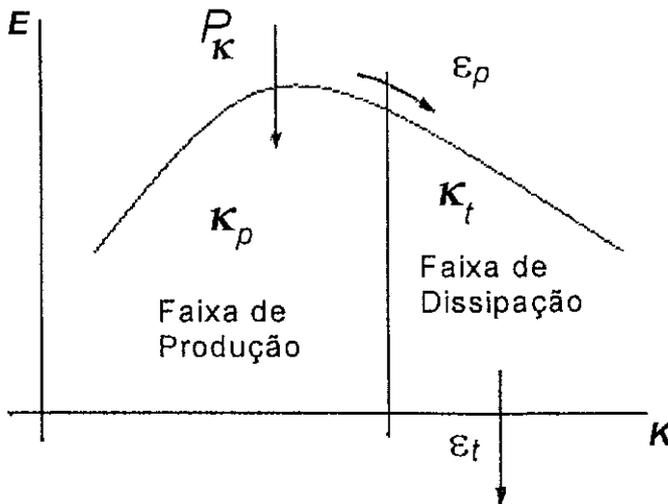


Figura 3.2 – Conceito do Modelo k - ε de Dupla Escala

Com $k = \int E dK$

onde E é a densidade espectral de energia e, K é o número de onda do espectro (frequência / velocidade média)

Para altos valores do número de Reynolds, as equações de transporte para as variáveis desse novo modelo de turbulência, considerando também regime estacionário, são assim desenvolvidas:

Para a energia cinética turbulenta, na faixa de produção, a equação assume a forma convencionalmente utilizada, com a diferença de que em lugar do termo correspondente à taxa de dissipação é utilizado o termo que corresponde à taxa de transferência da energia cinética entre a faixa de produção e a faixa de dissipação. Esse termo corresponde à energia perdida pelas grandes estruturas, situadas na faixa de produção do espectro. Assim ε da equação para a energia cinética turbulenta do modelo k - ε convencional é substituído por ε_p , resultando na seguinte equação:

$$U_j \frac{\partial k_p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v - \frac{\rho v_T}{\sigma_{k_p}} \right) \frac{\partial k_p}{\partial x_j} \right] = (P_k - \varepsilon_p) \quad (3.3.1-2)$$

Para a equação correspondente à energia cinética da faixa de dissipação do espectro (k_t), o termo de produção de energia cinética turbulenta corresponde à energia cinética transferida entre as duas faixas do espectro, ou seja, recebida pelas estruturas situadas na faixa de dissipação. Assim, P_k é substituído por ε_p , além disso a taxa de energia dissipada é agora representada por ε_t , resultando na seguinte equação:

$$U_j \frac{\partial k_t}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v - \frac{\rho v_T}{\sigma_{k_t}} \right) \frac{\partial k_t}{\partial x_j} \right] = (\varepsilon_p - \varepsilon_t) \quad (3.3.1-3)$$

A equação de transporte para a taxa de energia cinética transferida entre a faixa de produção e a faixa de dissipação do espectro e, também, a equação de transporte para a taxa de dissipação da energia cinética turbulenta foram obtidas por Hanjelic et al. [1980], partindo das formas funcionais genéricas para a derivada material desses duas grandezas, que são as seguintes:

$$\frac{D\varepsilon_p}{Dt} = f_p(k, k_p, k_t, P_k, \varepsilon_p, \varepsilon_t) + \text{termos difusivos} \quad (3.3.1-4)$$

$$\frac{D\varepsilon_t}{Dt} = f_t(k, k_p, k_t, P_k, \varepsilon_p, \varepsilon_t) + \text{termos difusivos} \quad (3.3.1-5)$$

Os autores consideraram, para simplificação das formas funcionais acima, a hipótese adicional de que para a taxa de transferência de energia turbulenta, entre as faixas do espectro, (ε_p), as variáveis dominantes na equação para a função f_p são P_k , ε_p e k_p , ou seja, a taxa de produção de energia cinética turbulenta pelo escoamento médio, a própria taxa de transferência dessa energia turbulenta para a faixa de dissipação do espectro e o nível de energia cinética turbulenta na faixa de produção do espectro. Para a taxa de dissipação, as variáveis dominantes são ε_p , ε_t e k_t , ou seja, a taxa de transferência de energia entre espectros, que para essa equação representa um termo de produção, a própria taxa de dissipação e o nível de energia cinética na faixa de dissipação do espectro.

Utilizando análise dimensional, os autores chegam às seguintes expressões para as funções f_p e f_t :

$$f_p = C_{p1} \frac{P_k^2}{k_p} + C_{p2} \frac{P_k \varepsilon_p}{k_p} - C_{p3} \frac{\varepsilon_t^2}{k_t}$$

e

$$f_t = C_{t1} \frac{\varepsilon_p^2}{k_t} + C_{t2} \frac{\varepsilon_p \varepsilon_t}{k_t} - C_{t3} \frac{\varepsilon_t^2}{k_t}$$

que substituídas em (3.3.1-4) e (3.3.1-5), e, considerando-se ainda regime permanente, conduzem às equações abaixo:

$$U_j \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v - \frac{\rho v_T}{\sigma_{\varepsilon_p}} \right) \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x_j} \right] = c_{p1} \frac{P_k^2}{k_p} + c_{p2} \frac{P_k \varepsilon_p}{k_p} - c_{p3} \frac{\varepsilon_t^2}{k_t} \quad (3.3.1-6)$$

$$U_j \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v - \frac{\rho v_T}{\sigma_{\varepsilon_p}} \right) \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial x_j} \right] = c_{t1} \frac{\varepsilon_p^2}{k_t} + c_{t2} \frac{\varepsilon_p \varepsilon_t}{k_t} - c_{t3} \frac{\varepsilon_t^2}{k_t} \quad (3.3.1-7)$$

Segundo Kim & Chen [1989], os termos $c_{p1} \frac{P_k^2}{k_p}$ e $c_{t1} \frac{\varepsilon_p^2}{k_t}$ assumem o papel

de funções de transferência variável de energia. O primeiro desses termos aumenta a taxa de transferência de energia para as estruturas da faixa de dissipação do espectro, toda vez que aumenta a taxa de produção de energia cinética turbulenta (P_k) nas estruturas na faixa de produção. O segundo termo aumenta a taxa de dissipação de energia turbulenta, das estruturas situadas na faixa de dissipação do espectro, toda vez que aumenta a taxa de transferência de energia cinética turbulenta entre as duas faixas do espectro.

Como foi dito acima, P_k é a taxa de produção de energia cinética turbulenta pela deformação do escoamento médio dada por: $P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$, onde

$$-\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + v_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

As constantes do modelo assumem os seguintes valores: $\sigma_{kp} = 0.75$, $\sigma_{\varepsilon p} = 1.15$, $\sigma_{kt} = 0.75$, $\sigma_{\varepsilon t} = 1.15$, $c_{p1} = 0.21$, $c_{p2} = 1.24$, $c_{p3} = 1.84$, $c_{t1} = 0.29$, $c_{t2} = 1.28$ e $c_{t3} = 1.66$.

A viscosidade turbulenta é calculada de:

$$v_T = c_{\mu f} \frac{k_e^2}{\varepsilon_p} = c_{\mu} \frac{k_e^2}{\varepsilon_t} \quad (3.3.1-8)$$

Onde o coeficiente da viscosidade efetiva $c_{\mu} = c_{\mu f} \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_p}$ e $c_{\mu f} = 0.09$, que é o coeficiente de viscosidade efetiva do modelo k - ε convencional. Assim, para regiões de escoamentos turbulentos em equilíbrio, a produção é igual à dissipação, ou seja, $P_k = \varepsilon_t = \varepsilon_p$ e, portanto, $c_{\mu f} = c_{\mu}$. Nesse caso, a partição do espectro vai se localizar numa região de alto número de onda. Quando $P_k > \varepsilon_p > \varepsilon_t$, $c_{\mu} < c_{\mu f}$, a partição desloca-se para um número de onda ainda maior, o que no limite, seria equivalente à utilização de uma faixa única, ou seja, modelo k - ε convencional. Quando a produção de energia turbulenta se aproxima de zero, $k_p < k_t$, $\varepsilon_p < \varepsilon_t$ e $c_{\mu} > c_{\mu f}$ e, assim, a partição é deslocada para uma região de baixo número de onda. Para razões P_k/ε_t arbitrárias, a partição é determinada como parte da solução.

A utilização do modelo k - ε de duas escalas para escoamentos com rotação será vista a seguir.

O modelo k - ε de múltipla escala, visto nesta seção, foi utilizado por Kim e Chen [1989], para a simulação de alguns escoamentos com geometria complexa, e os resultados foram analisados comparativamente aos obtidos com o modelo k - ε convencional. O caso considerado, que mais se aproxima das condições do estudo aqui considerado, foi a simulação do jato rotativo coaxial confinado.

Os resultados obtidos com respeito ao tamanho da “bolha” axial de recirculação e aos valores da velocidade no centro do jato, indicaram que o modelo de dupla escala mostrou uma concordância com os resultados experimentais bem superior à do modelo convencional.

Segundo os autores citados, essa melhor concordância é decorrente da capacidade intrínseca do modelo para representar o processo de cascata de energia cinética turbulenta e, com isso, resolver melhor os detalhes de escoamentos

turbulentos complexos. A desvantagem, relativa ao modelo $k-\epsilon$ convencional ficou por conta de, segundo esses autores, um “ligeiro” aumento no tempo computacional requerido pelo modelo a quatro equações.

Em trabalho anterior, Chen [1986] havia simulado com o modelo $k-\epsilon$ de dupla escala um jato confinado, com rotação, e obteve perfis de velocidade axial mais próximo dos dados experimentais, com o esse modelo do que os obtidos com o modelo $k-\epsilon$ convencional. A reprodução da recirculação observada experimentalmente (velocidades axiais negativas) foi mais bem reproduzida no modelo de dupla escala. Os perfis de velocidade azimutal também foram melhor reproduzidos, com o modelo de dupla escala, do que com o modelo convencional. Entretanto, os valores gerados por ambos os modelos só se apresentaram compatíveis com os resultados experimentais para seções próximas à seção de alimentação ($x/D < 1$, onde x é a distância axial medida da seção de alimentação e geração da rotação).

Não existem, divulgadas na literatura, informações sobre a utilização de modelos $k-\epsilon$ de dupla escala na simulação do escoamento em hidrociclones. Entretanto, do ponto de vista teórico, seria esperado que esses modelos apresentassem um resultado superior aos modelos $k-\epsilon$ convencionais, ainda que corrigidos para levar em conta os efeitos de curvatura, como será discutido a seguir.

A utilização do modelo $k-\epsilon$ de dupla escala para a simulação do escoamento em hidrociclones será discutida a seguir

Como já foi dito, a literatura técnica referente ao estudo do escoamento em ciclones e hidrociclones não menciona a utilização do modelo $k-\epsilon$ de dupla escala, para a simulação desse escoamento. Entretanto, em função do que foi acima discutido sobre as características do modelo e, também, em função dos resultados acima mencionados obtidos por outros autores na simulação de escoamentos complexos com rotação, esse tipo de modelo apresenta-se potencialmente mais promissor para essa finalidade do que os modelos $k-\epsilon$ "corrigidos".

Essa conclusão é necessária diante do que foi discutido na seção 3.2.2. Nos modelos k - ϵ corrigidos, o grau relativamente elevado de arbitrariedade na definição, até mesmo no sentido da correção a ser imposta ao termo de destruição da taxa da dissipação, e a dificuldade inerente à adoção de uma forma funcional para o parâmetro adimensional utilizado na correção – o número de Richardson –, que teria de levar em conta a curvatura das linhas de corrente, a rotação e ainda o fluxo reverso, tornam difícil estabelecer bases físicas sólidas para uma determinada proposta de correção visando o estudo do escoamento em hidrociclones. No modelo k - ϵ de dupla escala, entretanto, a maior robustez física intrínseca ao modelo, que, como foi visto, utiliza quatro grandezas turbulentas governadas por equações de transporte completas, assegura maior capacidade do mesmo em capturar, pelo menos em parte, os efeitos das características complexas, acima citadas, sobre o escoamento.

Portanto, apresentam-se, no capítulo 4, alguns resultados obtidos com a simulação do escoamento em hidrociclones utilizando-se o modelo k - ϵ de dupla escala, comparando-se os mesmos com os obtidos utilizando-se outros modelos.

Vejamos agora os modelos de fechamento de ordem superior.

O uso de um modelo algébrico para as tensões de Reynolds é o passo seguinte na sucessão de modelos de turbulência com dificuldade crescente, mas com desempenho esperado superior, para a análise de escoamentos com curvatura de linha de corrente e com rotação. Segundo Sloan et al. [1986], os modelos algébricos de tensão são mais indicados para situações onde os termos de transporte convectivo e difusivo não são muito importantes, uma vez que tais termos são modelados, nesse tipo de modelo, de um modo simplista. Boysan et al. (numa comunicação privada – vide referência, ou antes a ausência delas, em Sloan et al [1986]) argumentam que o transporte convectivo das tensões é bastante significativo no caso do escoamento em um hidrociclone, o que nos sugere a indicação de que os modelos algébricos da tensão de Reynolds poderiam não apresentar bom desempenho na previsão desse tipo de escoamento.

3.3.2 Equações de Transporte para as Tensões de Reynolds

Apesar de sua grande utilização no âmbito das aplicações de engenharia, os modelos de turbulência a duas equações, como enfatizado na seção 3.2, têm uma deficiência intrínseca, fazem uso da hipótese de Boussinesq (equação (3.2-1) – seção 3.2). Esses modelos assumem uma viscosidade turbulenta como uma grandeza escalar, o que somente corresponderia à realidade no caso da turbulência isotrópica. Embora esses modelos possam ser empregados nos casos de escoamentos cisalhantes simples, suas hipóteses fundamentais não são razoáveis para os casos de escoamentos complexos. Nesses casos, os valores locais das tensões turbulentas não são diretamente relacionados com o campo de velocidades do escoamento médio na forma expressa pela equação (3.2-1).

Os modelos k - ϵ de múltipla escala, como o modelo k - ϵ a quatro equações visto na seção 3.3, podem levar em conta alguns dos efeitos anisotrópicos presentes em escoamentos mais complexos, respondendo com maior grau de realismo a essas situações especiais. Esse realismo deve, como mencionado na seção 3.3, aumentar com o aumento do número de escalas considerado. Entretanto, aumentando-se o número de escalas aumenta-se o número de equações diferenciais agregadas ao modelo e, nesse caso, pode ser mais interessante do ponto de vista computacional deixar-se de trabalhar unicamente com os conceitos de energia cinética e taxa de dissipação turbulentas e considerar-se diretamente todos os componentes do tensor de Reynolds.

Para levar-se em conta a possibilidade de uma evolução diferenciada, no domínio de escoamento, dos elementos individuais do tensor de tensões turbulentas, parece razoável assumir-se que cada um desses elementos está sujeito a todos os mecanismos de transporte presentes numa equação diferencial de transporte.

Uma equação de transporte para $\overline{u_i u_j}$ pode ser obtida diretamente da manipulação algébrica das equações instantâneas de Navier-Stokes. Vamos deduzir abaixo a equação de transporte para $\overline{u_i u_j}$ para o caso de um fluido com propriedades constantes em escoamento incompressível.

Considerando, como mencionado em 3.1, que qualquer grandeza instantânea pode ser expressa como a soma de um valor médio e uma flutuação, como por exemplo:

$$\underbrace{\tilde{U}_i}_{\substack{\text{grandeza} \\ \text{ins tan tan nea}}} = \underbrace{U_i}_{\substack{\text{grandeza} \\ \text{média}}} + \underbrace{u_i}_{\substack{\text{valor} \\ \text{flutuante}}}, \quad (3.3.2-1)$$

As equações instantâneas de Navier-Stokes são:

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.3.2-2)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} \right) + \tilde{F}_i \quad (3.3.2-3)$$

Re escrevendo-se a equação acima (3.3.2-3) trocando-se o índice mudo de j para k , obtemos:

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} + \tilde{U}_k \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k} \right) + \tilde{F}_i \quad (3.3.2-4)$$

Multiplicando-se essa equação pela flutuação de velocidade na direção j , obtemos:

$$u_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} + u_j \tilde{U}_k \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k} = -\frac{u_j}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k} \right) + u_j \tilde{F}_i \quad (3.3.2-5)$$

Se tomarmos a média da equação acima, representando esse procedimento por uma barra sobreposta, obtemos:

$$\overline{u_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t}} + \overline{u_j \tilde{U}_k \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k}} = -\overline{\frac{u_j}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i}} + \overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k} \right)} + \overline{u_j \tilde{F}_i} \quad (3.3.2-6)$$

Fazendo uso da equação (3.3.2-1) e das propriedades do procedimento de média, pode-se calcular cada termo da equação (3.3.2-6), conforme mostrado abaixo:

$$\overline{u_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t}} = \underbrace{\overline{u_j} \frac{\partial U_i}{\partial t}}_{=0} + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial t}} \quad (3.3.2-7)$$

$$\overline{u_j \tilde{U}_k \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k}} = \overline{u_j (U_k + u_k) \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_k}} = \underbrace{\overline{u_j U_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{=0} + \overline{\tilde{U}_k u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{u_j u_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + \overline{u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \quad (3.3.2-8)$$

$$-\frac{\overline{u_j \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i}}}{\rho} = -\frac{\overline{u_j \frac{\partial (P + p)}{\partial x_i}}}{\rho} = -\underbrace{\overline{u_j} \frac{\partial P}{\partial x_i}}_{=0} - \frac{\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}}}{\rho} \quad (3.3.2-9)$$

$$\overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k} \right)} = \overline{v u_j \frac{\partial^2 (U_i + u_i)}{\partial x_k \partial x_k}} = \underbrace{v \overline{u_j} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k}}_{=0} + v \overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}} \quad (3.3.2-10)$$

$$\overline{u_j \tilde{F}_i} = \overline{u_j (F_i + f_i)} = \underbrace{\overline{u_j F_i}}_{=0} + \overline{u_j f_i} \quad (3.3.2-11)$$

Substituindo-se as equações (3.3.2-7), (3.3.2-8), (3.3.2-9), (3.3.2-10) e (3.3.2-11) na equação (3.3.2-6), obtém-se:

$$\overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{U_k u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{u_j u_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + \overline{u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} = -\frac{\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}}}{\rho} + v \overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{u_j f_i} \quad (3.3.2-12)$$

Trocando-se os índices i e j na equação (3.3.2-12), resulta:

$$\overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial t}} + \overline{U_k u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{u_i u_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k}} + \overline{u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} = -\overline{\frac{u_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \nu \overline{u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{u_i f_j} \quad (3.3.2-13)$$

Somando-se as equações (3.3.2-12) e (3.3.2-13) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial t}} + \overline{U_k \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)} + \overline{u_j u_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + \overline{u_i u_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k}} + \overline{u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \left(\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right) + \nu \left(\overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}} \right) + \overline{u_j f_i} + \overline{u_i f_j} \end{aligned} \quad (3.3.2-14)$$

Re arranjando-se os termos nessa equação (3.3.2-14), temos:

Os primeiros dois termos podem ser agrupados na seguinte forma:

$$\overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{u_i u_j} \right) \quad (3.3.2-15)$$

O terceiro e o quarto termos podem ser agrupados na seguinte forma:

$$U_k \left(\overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \right) = U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i u_j} \right) \quad (3.3.2-16)$$

O quinto e o sexto termos são agrupados como segue:

$$\overline{u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} = \overline{u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \underbrace{\overline{u_j u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k}}}_{=0} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j u_k})$$

(equação da continuidade para flutuações de velocidade)

(3.3.2-17)

Os termos que contém a flutuação de pressão podem ser agrupados na forma:

$$-\frac{1}{\rho} \left(\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \underbrace{\overline{p \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}}_{+A} + \underbrace{\overline{p \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} - \overline{p \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \overline{p \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}}_{-A} \right)$$

(3.3.2-18)

Os primeiros quatro termos entre parênteses no lado direito da equação acima podem ser reescritos como:

$$\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{p \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{p \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{p u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{p u_j})$$

(3.3.2-19)

Substituindo-se (3.3.2-19) em (3.3.2-18) obtém-se:

$$-\frac{1}{\rho} \left(\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right) = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i p}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_j p}) - \overline{p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \right] =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta_{jk} \overline{u_i p} + \delta_{ik} \overline{u_j p}) + \overline{\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}$$

(3.3.2-20)

E, finalmente, o termo viscoso pode ser rearranjado na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \nu \left(\overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}} \right) = \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] = \\
& = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j}) \right] - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}
\end{aligned} \tag{3.3.2-21}$$

Fazendo uso das equações (3.3.2-15), (3.3.2-16), (3.3.2-17), (3.3.2-20) e (3.3.2-21), e não considerando-se forças de corpo, a equação (3.3.2-14) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} = P_{ij} + \phi_{ij} + D_{ij} - \varepsilon_{ij} \tag{3.3.2-22}$$

Onde:

$$P_{ij} = - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \tag{3.3.2-23}$$

$$\phi_{ij} = \frac{\rho}{\rho} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \tag{3.3.2-24}$$

$$D_{ij} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i u_j u_k} + \frac{\overline{\rho u_j}}{\rho} \delta_{ik} + \frac{\overline{\rho u_i}}{\rho} \delta_{jk} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} - \nu u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \nu u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \tag{3.3.2-25}$$

$$\varepsilon_{ij} = - \left[2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} - \nu \overline{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)} \right] \tag{3.3.2-26}$$

Cada termo da equação (3.3.2-22) – (equações 3-23 a 3-26) – pode ser interpretado numa forma similar à adotada quando analisou-se a equação de transporte para a energia cinética turbulenta, na seção anterior.

A expressão para P_{ij} representa a produção das tensões turbulentas pelo gradiente das velocidades médias. A expressão para ϕ_{ij} pode ser interpretada como causando uma redistribuição da energia turbulenta entre os componentes normais do tensor turbulento, atuando no sentido de diminuir a diferença entre eles (Hanjalic e Launder [1972]). A expressão para D_{ij} representa a difusão das tensões turbulentas; os primeiros três termos nessa expressão são a difusão devido ao escoamento turbulento e os três últimos termos representam a difusão molecular e podem ser desprezados em regiões com alto número de Reynolds. A expressão para ε_{ij} pode ser interpretada como a dissipação viscosa das tensões turbulentas.

O membro esquerdo e o primeiro termo no membro direito da equação (3.3.2-22) contém somente as tensões turbulentas e as variáveis do escoamento médio, desse modo eles não necessitam qualquer modelagem. Essa mesma assertiva é válida para o quarto termo na expressão para D_{ij} , que corresponde à difusão molecular das tensões turbulentas. Entretanto, para se obter um sistema fechado de equações e incógnitas, formado pelas equações de Navier-Stokes do escoamento médio – equações (3.1-2) e (3.1-3) – e pelas equações (3.3.2-22), todos os demais termos destas últimas equações necessitam algum tipo de modelagem para expressá-los em função das grandezas do escoamento médio e/ou das próprias tensões turbulentas.

O modelo para os termos de redistribuição foi desenvolvido com base nos trabalhos de Chou [1945]. Tomando-se o divergente da equação diferencial para a flutuação de velocidade u_i , obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = -2 \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_m} (u_i u_m - \overline{u_i u_m}) \quad (3.3.2-27)$$

Esse autor mostrou que a solução da equação (3.3.2-27) pode ser escrita na seguinte forma (Launder, Reece e Rodi [1975]):

$$\overline{\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left[\underbrace{\overline{\left(\frac{\partial^2 u_i u_m}{\partial x_l \partial x_m} \right)' \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}}_{\phi_{ij,1}} + 2 \underbrace{\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right)' \overline{\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right)' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}}_{\phi_{ij,2}} \right] \frac{d vol}{|\vec{x} - \vec{y}|} + \underbrace{S_{ij}}_{\phi_{ij,w}} \quad (3.3.2-28)$$

Onde o tensor de segunda ordem representa a seguinte integral de superfície:

$$S_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{Area} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial}{\partial n'} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} - \overline{p'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \right] dS \quad (3.3.2-29)$$

Onde n é o vetor normal à superfície.

Essas integrais de volume e superfície são avaliadas respectivamente no volume e na superfície que o circunda ao redor de um ponto fixo (relativamente às integrais) no campo de escoamento. Esse ponto é dado pelo vetor posição \vec{x} , onde a correlação pressão-deformação está sendo calculada. As “linhas” que aparecem em ambas as integrais significam que, para a integração, o valor da variável é avaliado num ponto, dado pelo vetor posição \vec{y} , no volume ou superfície acima mencionados.

Assim, o termo de redistribuição na equação (3.3.2-22) é formado por três diferentes contribuições, assinaladas em (3.3.2-28), ou seja:

$$\phi_{ij} = \phi_{ij,1} + \phi_{ij,2} + \phi_{ij,w} \quad (3.3.2-30)$$

A primeira parte de ϕ_{ij} , isto é, $\phi_{ij,1}$, é associado diretamente com as flutuações de velocidade, enquanto $\phi_{ij,2}$ representa a contribuição para o termo de redistribuição da interação entre o escoamento médio e a turbulência. O último termo $\phi_{ij,w}$ representa a influência das paredes sólidas sobre a redistribuição da turbulência.

Como os termos na expressão (3.3.2-30) representam a redistribuição de energia entre as tensões de Reynolds, parece razoável supor-se que os primeiros dois termos têm

um efeito de tender a levar a turbulência para uma condição de isotropia, ou seja, uma condição na qual todas as tensões normais são iguais e não existem tensões tangenciais. Na condição de isotropia o tensor tensões turbulentas é representado por:

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (3.3.2-31)$$

Com base na condição acima, Rotta [1951], (ver referência em Launder et al. [1975]), assumiu, na modelagem de $\phi_{ij,1}$, que a magnitude desse termo é proporcional ao nível de anisotropia, já que é um termo restaurador de isotropia. Levando isso em consideração e fazendo uma análise dimensional, esse autor propôs a seguinte forma para a modelagem do citado termo:

$$\phi_{ij,1} = -c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (3.3.2-32)$$

Onde o termo entre parêntesis é uma medida da anisotropia presente no escoamento. De dados empíricos o autor determinou o valor de $c_1 = 1.8$.

A mesma idéia foi utilizada por Naot et al. [1970], (ver referência em Launder et al. [1975]), para a modelagem de $\phi_{ij,2}$, considerando que esse termo tem a função de redistribuição dos termos de produção tendendo a condição de isotropia. Seu modelo é:

$$\phi_{ij,2} = -c_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) \quad (3.3.2-33)$$

onde $c_2 = 0.6$.

O último termo na equação (3.3.2-30), o qual representa a influência da parede, deve agir de modo a se opor a tendência de conduzir à isotropia apresentada pelos outros dois termos, pois a influência da parede é obviamente variável com a direção considerada. Esse último termo deve dificultar a transferência de energia da direção do

escoamento para a direção normal à parede. O modelo para $\phi_{ij,w}$ foi proposto por Gibson e Launder [1978] e é dado por:

$$\phi_{ij,w} = \phi_{ij,1}^w + \phi_{ij,2}^w \quad (3.3.2-34)$$

onde

$$\phi_{ij,1}^w = c'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j n_k n_i} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i n_k n_j} \right) f_w \quad (3.3.2-35)$$

$$\phi_{ij,2}^w = c'_2 \frac{\varepsilon}{k} \left(\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik,2} n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{jk,2} n_k n_j \right) f_w \quad (3.3.2-36)$$

$$f_w = \frac{k^{3/2} / \varepsilon}{c_f d_w} \quad (3.3.2-37)$$

as constantes c'_1 e c'_2 assumem os seguintes valores:

$$c'_1 = 0.5 \quad \text{e} \quad c'_2 = 0.3$$

n_i representa o vetor normal à parede sólida. A função f_w é introduzida para reduzir os efeitos de $\phi_{ij,1}^w$ e $\phi_{ij,2}^w$ longe da parede, uma vez que d_w é uma distância representativa da parede, essa distância é de difícil definição em escoamentos dentro de equipamentos geometricamente complexos.

Verificou-se experimentalmente que a distribuição de energia dada pela expressão para $\phi_{ij,2}^w$ não é realista para o caso de jatos atingindo superfícies. Alguns pesquisadores desenvolveram outros modelos para corrigir esse problema, mas esses modelos não têm aplicação geral. Devido a esses problemas a contribuição de $\phi_{ij,2}^w$ no modelo não é considerada por muitos autores.

Em ciclones e hidrociclones o pequeno raio de curvatura do cabeçote cilíndrico de alimentação faz com que a corrente fluida de entrada seja muito similar a um jato sobre uma superfície e assim, o modelo acima para $\phi_{j,2}^w$ não é adequado para esse tipo de escoamento.

Considerando o termo de difusão – equação (3.3.2-25) – é usual considerar-se no modelo somente a primeira parte do termo, isto é, a correlação tripla. Os últimos três termos não são importantes na região de turbulência plena, uma vez que representam a difusão molecular. As outras duas partes são também consideradas contribuições menos importantes frente à correlação tripla.

A correlação tripla, por sua vez, deve ser modelada em função das demais variáveis do escoamento, o que é feito pela expressão abaixo:

$$\overline{u_k u_i u_j} = -c_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m} \tag{3.3.2-38}$$

onde a constante empírica é $c_s = 0.22$. Essa equação é uma versão truncada da equação de transporte para a correlação tripla, que em sua forma completa envolve a correlação quádrupla.

O tensor que corresponde ao termo de dissipação é considerado como isotrópico e, assim, reduz-se a um escalar ε . Desse modo $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}$ e o valor desse escalar ε é obtido de uma equação de transporte similar a utilizada nos modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta, vistos nas seções anteriores.

As equações modeladas para as tensões turbulentas ficam então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} = & \frac{\partial}{\partial x_k} \left(c_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) + \\ & - c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - c_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j n_k n_i} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i n_k n_j} \right) f_w + \\
& + c'_2 \frac{\varepsilon}{k} \left(\phi_{km} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik,2} n_k n_i - \frac{3}{2} \phi_{jk,2} n_k n_j \right) f_w + \\
& - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.3.2-39}$$

onde:

$\phi_{ij,2}$ é dada pela equação (3.3.2-33),

n_i é o vetor normal à superfície da parede cuja influência está sendo considerada,

f_w é dada pela equação (3.3.2-37),

a energia cinética turbulenta pode ser obtida de:

$$k = \overline{u_i u_i} / 2 \tag{3.3.2-40}$$

ou de uma equação de transporte da forma:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_k \overline{u_i u_j} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) - P_k - \varepsilon \tag{3.3.2-41}$$

e a taxa de dissipação é dada pela seguinte equação de transporte:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_\varepsilon \overline{u_i u_j} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) - c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \tag{3.3.2-42}$$

os termos P_{ij} e P_k são dados por

$$P_{ij} = - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \tag{3.3.2-43}$$

e

$$P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (3.3.2-44)$$

$c_\epsilon = 0.18$, $c_k = 0.22$ e as demais constantes já foram definidas.

Visando a obtenção de um modelo mais simples e facilmente operacional, Rodi [1981] desenvolveu uma versão algébrica para as equações de transporte do tensor de Reynolds. A idéia básica utilizada por esse autor foi a de eliminar-se a presença dos gradientes de tensão turbulenta presentes nos termos convectivos e difusivos das equações modeladas para o transporte das tensões de Reynolds (equações 3.3.2-22). Essa eliminação dos gradientes foi obtida considerando a hipótese de que a razão $\overline{u_i u_j} / k$ é essencialmente invariante. Nesse caso, a derivada material das tensões de Reynolds pode ser escrita na forma:

$$\frac{D(\overline{u_i u_j})}{Dt} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \frac{Dk}{Dt} + k \frac{D(\overline{u_i u_j} / k)}{Dt}, \quad (3.3.2-45)$$

E o último termo no membro direito da equação é desprezado.

Considerando essa hipótese, o lado esquerdo da equação (3.3.2-39) pode ser escrito na seguinte forma:

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \frac{Dk}{Dt} \quad (3.3.2-46)$$

E o termo de difusão – primeiro termo no lado direito da equação (3.3.2-39) – pode ser escrito na forma:

$$c_s \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{k}{\epsilon} \overline{u_l u_m} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m} \right) = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} c_k \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{k}{\epsilon} \overline{u_l u_m} \frac{\partial k}{\partial x_m} \right) \quad (3.3.2-47)$$

Considerando (3.3.2-46) e (3.3.2-47), a equação diferencial para o transporte das tensões de Reynolds pode ser reduzida a uma forma algébrica pela seguinte substituição:

$$\frac{D(\overline{u_i u_j})}{Dt} - D_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} + U_m \frac{\partial}{\partial x_m} \overline{u_i u_j} - \frac{\partial}{\partial x_m} \left(c_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_m u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \left(\frac{Dk}{Dt} - D_k \right) \quad (3.3.2-48)$$

Fazendo-se uso da equação de transporte da energia cinética turbulenta, o termo entre parêntesis, na extrema direita da equação (3.3.2-48), pode ser escrito como $(P_k - \varepsilon)$ – veja equação (3.2.2-1).

Assim, a equação (3.3.2-39) assume a seguinte forma:

$$\frac{\overline{u_i u_j}}{k} (P_k - \varepsilon) = P_{ij} + \phi_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (3.3.2-49)$$

onde os primeiros dois termos no lado direito da equação são dados pelas equações (3.3.2-23), (3.3.2-32), (3.3.2-33), (3.3.2-35), (3.3.2-36) e (3.3.2-37) e o último termo assume a forma $\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon$.

Levando-se em conta essas expressões, a equação (3.3.2-49) não tem quaisquer derivadas das tensões turbulentas.

Desse modo, as equações para as tensões de Reynolds, dadas pela expressão (3.3.2-49), as equações para o escoamento médio, a equação para a energia cinética turbulenta e finalmente a equação para a taxa de dissipação, em conjunto, formam um sistema fechado de equações para a solução do escoamento turbulento.

Pretende-se, dando seguimento a este trabalho, simular o escoamento em hidrociclones utilizando um modelo diferencial completo para os componentes do tensor de Reynolds.

O simulador CFX 5.6 dispõe, já implementados em seu código, de três variantes do modelo diferencial completo do Tensor de Reynolds, dois deles propostos por Launder, Reece e Rodi, denominados de LRR-IP, onde o IP significa isotropização da produção e de LRR-QI, onde o QI significa quase-isotrópico. Entretanto, para o escoamento em questão adotou-se a variante proposta por Speziale, Sarkar e Gatski, recomendada como mais adequada para simulação de escoamento em hidrociclones, já que a anisotropia desse escoamento é preponderante. Nesse modelo, as equações acima descritas, tanto para o tensor de Reynolds como para os demais termos, (produção de energia turbulenta P_{ij} , redistribuição das tensões turbulentas normais, ou seja, ϕ_{ij} que leva em conta a interação pressão tensor deformação, estão expressas na forma conservativa e têm as seguintes expressões:

a) componentes do tensor de Reynolds

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (U_k \overline{\rho u_i u_j}) = P_{ij} + \phi_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu + \frac{2}{3} c_s \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}}{\partial x_k} \right] - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \rho$$

Onde:

$$P_{ij} = -\rho \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)$$

$$\phi_{ij} = \phi_{ij1} + \phi_{ij2}$$

$$\phi_{ij1} = -\rho \varepsilon \left[c_{s1} a_{ij} + c_{s2} \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} a_{kl} a_{kl} \delta_{ij} \right) \right] \quad e$$

$$\begin{aligned} \phi_{ij2} = & -c_{r1} P a_{ij} + c_{r2} \rho k S_{ij} - c_{r3} \rho k S_{ij} \sqrt{a_{kl} a_{kl}} + c_{r4} \left(a_{ik} S_{kj} + S_{ik} a_{kj} - \frac{2}{3} a_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) \\ & + c_{r5} \rho k (a_{ik} W_{kl} + W_{ik} a_{kj}) \end{aligned}$$

b) equação para a taxa de dissipação

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_k \varepsilon)}{\partial x_k} = \frac{\varepsilon}{k} (c_{e1} P - c_{e2} \rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{\sigma_\varepsilon} \left(\mu + \rho c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right]$$

Onde P é calculado pela expressão 3.3.2-44,

$$a_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad , \quad W_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad S_{ij} \quad \text{é o tensor taxa de}$$

deformação.

Os valores das constantes do modelo, propostos pelos autores, seguem nas tabelas abaixo:

c_{s1}	c_{s2}	c_{r1}	c_{r2}	c_{r3}	c_{r4}	c_{r5}
1.7	-1.05	0.9	0.8	0.65	0.625	0.2

c_μ	σ_ε	c_s	c_{e1}	c_{e2}
0.1	1.36	0.22	1.45	1.83

3.4 Modificação Proposta para o modelo k - ϵ de turbulência

Ao analisar-se, do ponto de vista conceitual, qual deverá ser a influência do escoamento médio no hidrociclone, sobre a turbulência, verifica-se facilmente que a existência de uma direção preferencial para a vorticidade, que é a direção axial do equipamento, torna, poder-se-ia dizer, menos caótica a turbulência, ou seja, haveria alguma ordem, num fenômeno que, pela amplificação não linear das perturbações, é eminentemente aleatório. As características intrínsecas ao próprio escoamento no hidrociclone determinariam uma direção preferencial de alinhamento dos vórtices. Lesieur [1997], define tal fenômeno – do surgimento de estruturas coerentes de grandes escalas no escoamento, pelo efeito da rotação – como indução ao que ele quase “hereticamente” denomina turbulência bidimensional.

A idéia mais simples de se modificar um modelo de turbulência que utilize uma equação de transporte para a energia turbulência, como é o caso do modelo k - ϵ , para levar-se em conta o efeito da rotação sobre a turbulência, consiste em se tentar atuar sobre a geração de energia turbulenta, considerando os aspectos físicos previamente conhecidos do problema e as deficiências apresentadas pelo modelo.

A seguir apresentaremos uma discussão fenomenológica do problema.

Verifica-se, com base na análise efetuada neste trabalho, (vide capítulo 4, particularmente a seção 4.7), que os modelos de turbulência com duas equações reproduzem razoavelmente os perfis dos componentes axial e radial da velocidade obtidos experimentalmente. O problema reside na obtenção do perfil azimutal de velocidade. Nesse caso, todos os modelos, invariavelmente conduzem ao um perfil de rotação de corpo rígido e falham em reproduzir a região com comportamento de vórtice livre.

Pode-se analisar o por quê da ocorrência de tal problema. O efeito ciclônico – ou seja, o efeito de comportamento aproximando-se ao vórtice livre para o componente azimutal da velocidade – é essencialmente um fenômeno verificado em fluidos de baixa

viscosidade. Como já abordado no capítulo 2, a solução do escoamento de fluido ideal no hidrociclone leva ao perfil de vórtice livre para o componente azimutal da velocidade. Essa solução implicaria numa velocidade infinita sobre o eixo de rotação. Essa impossibilidade física é evitada exatamente pela atuação da viscosidade, que provoca o aparecimento de uma região central de rotação de corpo rígido. Essa região central é tanto maior quanto maior for o valor do coeficiente de difusão da quantidade de movimento – ou seja, quanto maior for a viscosidade do fluido, para as mesmas condições de contorno e iniciais.

A utilização de um modelo de turbulência que adota o conceito de viscosidade turbulenta, ou seja, um acréscimo no termo difusivo da equação do movimento, corresponde à adoção de um acréscimo no coeficiente de difusão viscosa, ou seja, a um aumento no efeito da viscosidade sobre o escoamento. Portanto tal abordagem na consideração da turbulência, no escoamento em questão, provoca uma extensão do tamanho da região sobre efeito de rotação de corpo rígido, que não corresponde ao problema físico. Em outras palavras, a abordagem da turbulência com base no conceito de incremento da difusividade molecular – embora útil em alguns problemas – não é adequada para o escoamento em hidrociclones, conforme já discutido nas seções anteriores deste capítulo.

Entretanto, como o modelo k - ϵ pode capturar outras características do escoamento em questão e é um modelo mais simples do que o modelo de tensão de Reynolds, visto na seção 3.3.2, propõe-se aqui uma modificação nesse modelo, que tenta evitar o problema acima citado de deficiência em prever a rotação com comportamento de vórtice livre, pela introdução de uma combinação de duas correções de efeitos antagônicos, na equação de transporte da taxa de dissipação.

A formulação aqui adotada foi proposta por outros autores para a descrição dos efeitos da rotação sobre a intensidade de turbulência, mas não foi utilizada em hidrociclones, dada a complexidade do escoamento que dificulta a seleção de um critério adequado para a aplicação das correções, dificuldade que entendemos pode ser superada se diferentes correções forem aplicadas a diferentes regiões do domínio de escoamento.

A idéia, aqui apresentada, para a implementação dessa correção tem seu fundamento na física do problema. Assim, deve-se considerar que partindo-se de uma situação onde o fluido inicialmente no hidrociclone encontra-se em repouso, enquanto se inicia a alimentação tangencial, com velocidade elevada, tem-se a rotação de corpo rígido inicialmente instalada, ou seja, o perfil do componente azimutal da velocidade é proporcional à distância ao eixo do hidrociclone. Para a região que se encontra nesse perfil, aplicou-se ao modelo uma modificação que reduz a intensidade de turbulência (e portanto o coeficiente de viscosidade turbulenta), o que deve proporcionar um aparecimento mais rápido do perfil de vórtice livre. Por outro lado, nessas regiões, em que se inicia o estabelecimento do perfil de vórtice livre, aplica-se uma correção inversa, permitindo-se um aumento na intensidade de turbulência.

Leva-se em conta, nesta proposta, a forma do perfil do componente azimutal da velocidade num hidrociclone, que é aprioristicamente conhecida, conforme discutido no capítulo 1, bem como o comportamento da *difusão turbulenta*, em fluido em rotação, conforme abordado no capítulo 3. Naquele capítulo discutiu-se que nas regiões em que o fluido comporta-se como rotação de corpo rígido, ou seja, quando a velocidade azimutal é proporcional à distância ao eixo de rotação, a intensidade de turbulência tende a diminuir, já que a *partícula de fluido* que se deslocar radialmente sofrerá, por parte do gradiente radial de pressão decorrente da rotação, um efeito restaurador, ou seja, um efeito que tende a se opor a esse deslocamento radial da *partícula*. Já nas regiões em que a velocidade é constante ou diminui com o raio, o efeito da rotação seria o oposto, ou seja, haveria um efeito impulsionador do deslocamento da *partícula de fluido*, em razão do gradiente radial de pressão imposto pela rotação.

Caso tal modelo se mostre satisfatório, terá a vantagem de evitar a necessidade de solução do sistema completo de equações de Reynolds, o que implica na solução de mais cinco equações diferenciais acopladas, tornando o problema, do ponto de vista de simulação, muito mais complexo.

Objetiva-se, portanto, utilizar as correções amplamente discutidas no capítulo 3, que consideram como parâmetro quantificador da correção o adimensional denominado *número de Richardson* para rotação, que pode ser entendido como uma relação entre a força centrífuga decorrente da rotação e o a força de inércia. Fatores de correção são, assim, aplicados aos termos fonte da equação para a taxa de dissipação de forma a produzir os efeitos acima descritos.

Tem-se assim, a seguinte proposta de modificação, nas equações do modelo k - ε :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{v_T}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \varepsilon \quad (3.4-1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.4-2)$$

com $v_T = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ e $P_k = v_T \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right]$

onde $c_\mu = 0.09$ e as constantes da equação de transporte de ε passam a ser parâmetros variáveis $c_{\varepsilon 1}$ e $c_{\varepsilon 2}$, cujas expressões são função da forma do perfil do componente azimutal da velocidade, da seguinte forma:

Chamando o componente azimutal da velocidade de V_θ e a coordenada radial (centrada no eixo do equipamento) de r , temos a seguinte proposta:

$$\text{Se } \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \geq 0 \quad \text{então} \quad c_{\varepsilon 2} = 1.92(1 - c_c Ri) \quad (3.4-3)$$

$$\text{e} \quad c_{\varepsilon 1} = 1.44.$$

$$\text{Onde o número de Richardson é dado por: } Ri = \frac{k^2 V_\theta}{\varepsilon^2 r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \right) \quad (3.4-4)$$

$$\text{Se } \frac{\partial V_\theta}{\partial r} < 0 \quad \text{então} \quad c_{\varepsilon 1} = 1.44(1 + c_f Ri) \quad (3.4-5)$$

$$\text{e} \quad c_{\varepsilon 2} = 1.92.$$

$$\text{Onde o número de Richardson é dado por: } Ri = \frac{k^2 V_\theta}{\varepsilon^2 r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right) \quad (3.4-6)$$

Para esclarecimentos sobre esses grupos adimensionais, veja o capítulo 3, seção 3.2.3.

A primeira dessas correções, atua nas regiões onde o componente azimutal da velocidade aumenta com o raio, e tende a reduzir o valor do parâmetro que multiplica a destruição da taxa de dissipação da turbulência, contribuindo, portanto, para que o valor da taxa de dissipação da energia turbulenta seja maior e, portanto, menor a intensidade da turbulência.

A segunda correção, por outro lado, atua nas regiões onde o componente azimutal da velocidade diminui com o raio, e tende a reduzir o valor do parâmetro que multiplica o termo de produção da taxa de dissipação da turbulência, contribuindo, portanto, para que o valor da taxa de dissipação da energia turbulenta seja menor e, portanto, intensidade da turbulência possa aumentar.

Os valores dos parâmetros C_c e C_f podem ser pesquisados de forma a otimizar o modelo para o escoamento no hidrociclone. Tal otimização pode ser com base em dados experimentais ou, na falta destes, em dados extraídos de simulações com modelos de turbulência de ordem superior.

Com a finalidade de minimizar outros efeitos na comparação dos resultados da simulação com a modificação acima proposta, optou-se por implementá-la no simulador CFX, utilizando-se o modelo 3D, com a mesma malha hexaédrica utilizada na simulação com o modelo completo do tensor de Reynolds.

O detalhamento da implementação do modelo modificado no simulador CFX será feita a seguir.

O CFX opera em malha cartesiana. Embora tal simulador possa expressar os resultados em outros sistemas de coordenadas, como a cilíndrica, por exemplo, o gradiente da velocidade do fluido somente é calculado internamente no sistema cartesiano. Por essa razão optou-se por calcular as seguintes coordenadas :

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad e \quad \theta = \arctan(Y/X) \quad (3.4-7 \text{ a, b})$$

$$X = r \cos \theta \quad e \quad Y = r \sin \theta \quad (3.4-8 \text{ a,b})$$

A velocidade azimutal foi calculada pela seguinte expressão:

$$V_\theta = V \cos \theta - U \sin \theta \quad (3.4-9)$$

Onde U e V são funções de X e Y , ou seja das coordenadas retangulares. É necessário então calcular-se uma expressão para $\partial V_\theta / \partial r$ em função das coordenadas retangulares.

Calculando-se tal expressão para a derivada na direção radial do componente azimutal da velocidade, obtém-se o seguinte:

$$\frac{\partial V_{\theta}}{\partial r} = \frac{1}{X^2 + Y^2} \left[X^2 \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{X^3 V}{X^2 + Y^2} + XV - XY \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{X^2 Y U}{X^2 + Y^2} \right] + \frac{1}{X^2 + Y^2} \left[XY \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{Y^3 U}{X^2 + Y^2} - YU - Y^2 \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{XY^2 V}{X^2 + Y^2} \right] \quad (3.4-10)$$

A implementação dessas equações, bem como das anteriormente mostradas para os fatores de modificação do modelo $k-\varepsilon$, foi realizada por meio do conjunto de subrotinas em FORTRAN, que seguem no Apêndice B.

Os resultados obtidos com a implementação da modificação acima descrita no modelo $k-\varepsilon$ serão tratados no capítulo 4, seção 4.10.

3.5 Simulação de Grandes Escalas

O tratamento do problema da turbulência pela técnica chamada de Simulação de Grandes Escalas pode ser considerado como a mais promissora abordagem do problema da turbulência, considerando-se o atual estágio de desenvolvimento dos computadores, muito embora ainda restrita a número de Reynolds moderado. A seqüência de complexidade – e ou requisitos computacionais – e potencial desempenho crescentes para a descrição do escoamento turbulento segue a seguinte ordem:

- Modelos que se apóiam no conceito de *viscosidade turbulenta*, incluindo as variantes mais sofisticadas, como os modelos diferenciais $k-\varepsilon$, $k-\varepsilon$ corrigidos, $k-\varepsilon$ não lineares e $k-\varepsilon$ com múltiplas escalas de comprimento e tempo.
- Modelos diferenciais para cada um dos componentes do tensor das tensões turbulentas (tensor de Reynolds)
- A técnica da chamada *Simulação das Grandes Escalas* do escoamento turbulento e modelagem das pequenas escalas desse escoamento.

A metodologia adotada pelo SGE é a de resolver diretamente as grandes estruturas (grandes vórtices) do escoamento turbulento por meio da solução numérica das equações transientes de Navier-Stokes, como uma malha espaço-temporal suficientemente refinada, ou seja, compatível com as escalas de comprimento e tempo dessas maiores estruturas da turbulência. As estruturas menores, com escalas de tempo também menores (alta freqüência), que por hipótese têm um maior grau de homogeneidade e isotropia relativamente às maiores estruturas, pois são menos afetadas pelas condições de contorno, continuam a ser modeladas por modelos mais simples, como alguns dos vistos anteriormente. Assim, rigorosamente falando, a SGE é uma técnica híbrida, que considera a resolução direta das estruturas turbulentas até determinada dimensão mínima e, abaixo disso, faz uso de um modelo de turbulência, preferencialmente relativamente simples, como aqueles baseados no conceito de viscosidade turbulenta.

Pelas restrições das ferramentas computacionais atualmente disponíveis, a literatura técnica recomenda a utilização da simulação de grandes escalas somente para

problemas relativamente simples, já que a malha bastante refinada para capturar as maiores estruturas turbulentas demanda recursos computacionais elevados. Entretanto, apesar disso, alguns pesquisadores (Silveira Neto [2003]) têm empregado, recentemente, esse modelo para um estudo qualitativo do escoamento em hidrociclones, fazendo uso de malhas não muito refinadas. O argumento utilizado pelo autor citado é de que, mesmo não produzindo resultados precisos para as grandezas médias do escoamento, devido a utilização de malha grosseira, ainda assim é possível capturar, com a simulação de grandes escalas, algumas estruturas turbulentas que permitem um melhor entendimento da fenomenologia do escoamento.

Façamos agora uma descrição sumária do método de Simulação de Grandes Escalas (SGE).

Como foi dito acima, o método baseia-se em resolver as equações transientes de Navier-Stokes filtradas para representar apenas os fenômenos do escoamento acima de determinada escala espacial e de tempo. Esse procedimento de filtragem pode ser considerado uma generalização do procedimento de média utilizado na obtenção das equações de Reynolds. Aquele procedimento corresponde a uma filtragem total das flutuações, que passariam a ser consideradas por meio dos modelos de turbulência. Neste caso vão ser filtradas apenas as flutuações de mais alta frequência, que também seriam modeladas, enquanto a equação filtrada transiente seria resolvida.

Partindo-se das equações transientes de Navier-Stokes para escoamento incompressível, temos:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \tag{3.5-1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.5-2}$$

A velocidade, por exemplo, seria definida como a soma de uma parte resolvida filtrada (denominada de grandes escalas) e uma parte residual (denominada de sub malha).

Assim decompondo-se a velocidade nessas duas partes temos,

$$u_i(x_i, t) = U_i(x_i, t) + u_i'(x_i, t) \tag{3.5-3}$$

sendo que o processo de filtragem que gera a parte filtrada U_i é dado por:

$$U_i(x_i, t) = \iiint u_i'(\xi_i, t) G(x_i - \xi_i) d\xi_i \tag{3.5-4}$$

onde a função $G(x_i)$ é a função filtro que pode assumir diversas formas.

Uma das mais comuns é a filtragem por volume, onde:

$$G(x_i - \xi_i) = \frac{1}{\Delta^3} \quad \text{se} \quad [(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^{1/2} \leq \frac{\Delta}{2} \tag{3.5-5 a/b}$$

$$\text{e } G(x_i) = 0 \quad \text{se} \quad [(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^{1/2} > \frac{\Delta}{2}$$

onde Δ é o tamanho característico do filtro, o que caracteriza a frequência (ou, também, a escala de comprimento) de corte de filtragem, que pode ser tomado como o tamanho da malha de resolução numérica. Ou seja:

$$\Delta = (\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k)^{1/3} \tag{3.5-6}$$

Deve ser observado que nesse processo de filtragem, as propriedades da decomposição em grandezas médias e flutuações, de Reynolds, não mais se aplicam. Assim, por exemplo:

$$\overline{U_i u_j'} \neq 0 \quad \text{e} \quad \overline{U_i} \neq U_i \quad 3.5-7$$

Assim as equações para as grandezas filtradas assumem a seguinte forma (lembrando que a barra representa a aplicação do processo de filtragem):

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_i u_j'})}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad 3.5-8$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad 3.5-9$$

onde:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{U_i U_j} + \overline{u_i' U_j} + \overline{U_i u_j'} + \overline{u_i' u_j'} \quad 3.5-10$$

Definindo-se os seguintes tensores:

$$L_{ij} = \overline{U_i U_j} - U_i U_j \quad 3.5-11$$

$$C_{ij} = \overline{u_i' U_j} + \overline{U_i u_j'} \quad 3.5-12$$

$$\tau_{ij} = \overline{u_i' u_j'} \quad 3.5-13$$

Levando-se em conta 3.5-10 e substituindo-se as expressões 3.5-11 a 3.5-13 na equação 3.5-8, obtém-se, com a equação da continuidade (3.5-7), o seguinte sistema:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_i u_j'})}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - (\tau_{ij} + C_{ij} + L_{ij}) \right] \quad 3.5-14$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

3.5-15

O processo de decomposição, acima visto, que foi aplicado ao sistema de equações trouxe à baila três novos tensores. O primeiro deles τ_{ij} é o chamado tensor de Reynolds de sub-malha e considera as correlações entre as flutuações da parte não filtrada da velocidade, C_{ij} é o chamado tensor cruzado, que correlaciona as interações entre a parte filtrada e a parte não filtrada da velocidade e, finalmente, L_{ij} é o chamado tensor de Leonard e quantifica a diferença entre a filtragem do produto dos componentes filtrados da velocidade e o produto desses componentes filtrados.

Alguns autores (Silveira Neto [2003], por exemplo) têm demonstrado que para esquemas numéricos de transporte convectivo de ordem não muito elevada, pode ser desprezada a influência tanto do tensor Cruzado quando do tensor de Leonard, restando apenas necessária a modelagem do tensor de sub-malha.

Smagorinsky [1963], (ver referência em Lesieur [1997]), com base na hipótese de equilíbrio local para as pequenas estruturas turbulentas (ou seja, na região de sub-malha) propôs uma forma de modelar o referido tensor.

Assim, considerando que a taxa de produção de energia turbulenta é igual à taxa de dissipação – para essa região do espectro (sub-malha) – ele fez uso da hipótese de Kolmogorov de que a produção pode ser escrita como função da taxa de cisalhamento do campo filtrado e a taxa de dissipação, por sua vez, pode ser escrita em função da escala de velocidade e do comprimento característico da sub-malha. Tem-se, portanto:

$$\tau_{ij} = -2\nu_{Tsm} S_{ij} \quad 3.5-16$$

onde:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad 3.5-17$$

Para fechar o sistema é preciso portanto, apenas modelar a viscosidade turbulenta da sub-malha ν_{Tsm} . Essa viscosidade turbulenta da sub-malha pode ser representada, com base numa análise dimensional, como o produto da escala de comprimento das estruturas não resolvidas (Δ equação 3.5-6, acima) e uma velocidade característica dessas estruturas.

No modelo de Smagorinsk, essa escala de velocidades é obtida com base numa analogia ao comprimento de mistura de Prandtl, relacionando-se essa velocidade com o gradiente de velocidade do campo filtrado, da seguinte forma:

$$\nu_{sm} = \Delta |S_{ij}| \tag{3.5-18}$$

Onde: $|S_{ij}| = (2S_{ij}S_{ij})^{1/2}$ 3.5-19

Essa expressão conduz ao modelo de Smagorinsk para a viscosidade sub-malha.

$$\nu_{Tsm} = (C_s \Delta)^2 |S_{ij}| \tag{3.5-20}$$

Onde C_s é a constante de Smagorinsk, cujo valor, para turbulência isotrópica, pode ser calculado, com base na expressão de Kolmogorov para o range inercial do espectro de energia turbulenta $E(k) = c_k \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$, onde c_k assume o valor 1.5.

Assim:

$$C_s = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3 c_k} \right)^{3/4} = 0.18 \tag{3.5-21}$$

Para utilização prática do modelo, entretanto, verifica-se que o valor da constante de Smagorinsk deve variar dependendo do tipo de escoamento e das características da malha. Os valores normalmente empregados variam entre 0.065

para escoamento em canais até 0.25. O valor *default* adotado no código CFX, versão 5.6, onde o modelo está implementado, é de 0.1.

Para as proximidades das paredes, essa viscosidade turbulenta de sub-malha deve ser amortecida. O código computacional mencionado utiliza uma função combinada que seleciona o valor mínimo entre um comprimento de mistura proporcional à distância à parede e o valor dado pela equação 3.5-20 multiplicado por uma função de amortecimento, ou seja:

$$v_{Tsm} = [\min(l_{mix}, f_{\mu} C_S \Delta)]^2 \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \quad 3.5-22$$

Onde:
$$l_{mix} = \kappa y_{parede} \quad 3.5-23$$

Com κ valendo 0.4.

A função de amortecimento é a de Van Driest, vista no capítulo 3, seção 3.2.1.

4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO ESCOAMENTO EM HIDROCICLONES

4.1 Introdução

Considera-se inicialmente, nesta seção, a simulação numérica, por um modelo simplificado, com a hipótese de simetria axial e o emprego de uma malha grosseira, para o escoamento num hidrociclone que opera inteiramente cheio de líquido – isto é, sem núcleo gasoso, como é o caso dos hidrociclones empregados no processamento primário de fluidos na indústria do petróleo. A geometria escolhida, que se descreve abaixo, o foi unicamente porque se dispõe de dados sobre os perfis de velocidade média. Apesar das diferenças geométricas entre essa geometria e aquela empregada para o tratamento de águas oleosas, ambas apresentam o mesmo comportamento fluidodinâmico, notadamente, a ausência de núcleo gasoso interno. As principais diferenças entre os dois equipamentos são as seguintes:

- O hidrociclone de geometria simplificada, embora com diâmetro nominal (76 mm) muito próximo do diâmetro nominal de um dos modelos de hidrociclone para águas oleosas (70 mm), possui um comprimento total de apenas cerca de 1/4 do comprimento total deste último (~380 mm contra ~1500 mm).
- No hidrociclone de geometria simplificada a área do bocal de saída de fluido próxima à seção de alimentação é bem maior do que a área do bocal de saída de fluido próxima ao vértice do trecho cônico ($d_o/d_u \approx 4.3$). No hidrociclone para águas oleosas ocorre o inverso ($d_o/d_u \approx 34$).

Esta seção foi estruturada na seguinte sequência: Inicialmente simulou-se, com diversos modelos de turbulência, o escoamento no hidrociclone simplificado, com as condições operacionais do experimento de Knowles et al [1973], comparando-se os resultados da simulação com os resultados experimentais (componentes da velocidade média).

Na seção 4.7 são apresentados resultados da simulação do hidrociclone com a geometria simplificada operando em condições de vazão semelhantes às verificadas nos hidrociclones para águas oleosas. Nessa seção são discutidos e comparados os resultados obtidos com alguns modelos de turbulência. Discutem-se, em seguida, as diferenças da utilização de um modelo de turbulência para baixos números de Reynolds comparativamente aos modelos com condição de transição região turbulenta / região com efeitos viscosos significativos (lei de parede). Passa-se então à discussão, em mais detalhe, de algumas das hipóteses simplificadoras, adotadas nas simulações acima descritas, que são a axissimetria e a consideração de escoamento monofásico. Para ilustrar as considerações deste último caso, foram feitas algumas simulações considerando-se o escoamento multifásico, constituído de uma emulsão de baixa concentração (2000 ppm) de óleo em água, representativa de uma água oleosa presente na indústria do petróleo.

Apresentam-se finalmente, algumas resultados das simulações de um protótipo industrial de hidrociclone utilizado no tratamento de águas oleosas em plataformas marítimas de produção de petróleo.

4.2. Características do hidrociclone modelado

4.2.1 Características geométricas e dimensionais

O hidrociclone de geometria simplificada, aqui considerado, é o que foi utilizado no trabalho de Knowles, Woods & Feuerstein [1973]. O modelo empregado nesse trabalho possui as as características dimensionais e geométricas, descritas na tabela e na figura abaixo:

Características Dimensionais do Hidrociclone (mm)	
Diâmetro do cabeçote cilíndrico (D)	76,2
Diâmetro do tubo de alimentação (D_I)	21,3
Dia. bocal prox. alimentação (D_o)	25,9
Dia. bocal prox. vértice do cone (D_u)	12,4
Ângulo de abertura do trecho cônico (θ)	11,3°
Comprimento do <i>vortex finder</i> (l)	30,5
Comprimento do trecho cilíndrico (H)	38,1
Comprimento total do hidrociclone (L)	381,0

Tabela 4.2.1-1 Dimensões do hidrociclone modelado

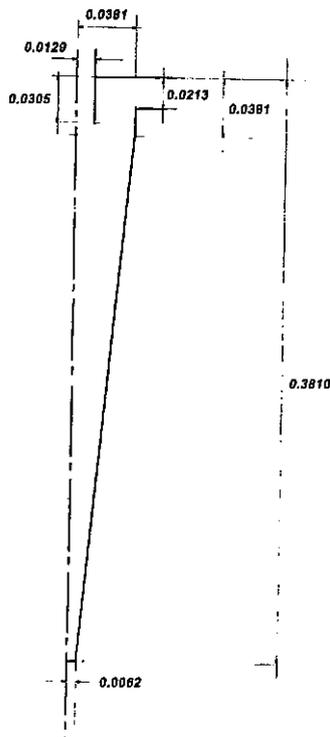


Figura 4.2.1-1 Características geométricas do hidrociclone modelado (medidas em metros)

4.2.2 – Condições operacionais gerais e simplificações no modelo

A alimentação, à exceção da seção 4.7, foi considerada monofásica, com água a 20°C.

Ademais, embora no modelo físico a alimentação se dê por um bocal de seção circular situado transversal e tangencialmente à seção cilíndrica, em um único ponto, o modelo para a simulação numérica foi considerado, por simplicidade, com simetria

axial já na seção de alimentação. Dessa forma, as simulações aqui apresentadas consideram que o fluido entra no corpo do hidrociclone, através de uma abertura cilíndrica que, situada no topo da seção cilíndrica do hidrociclone, compreende toda a parede lateral dessa seção, até uma altura igual ao diâmetro do tubo de alimentação. Esse esquema hipotético para a alimentação pode ser visto na figura 4.2.2-1, comparando-o com as condições geométricas de alimentação do protótipo.

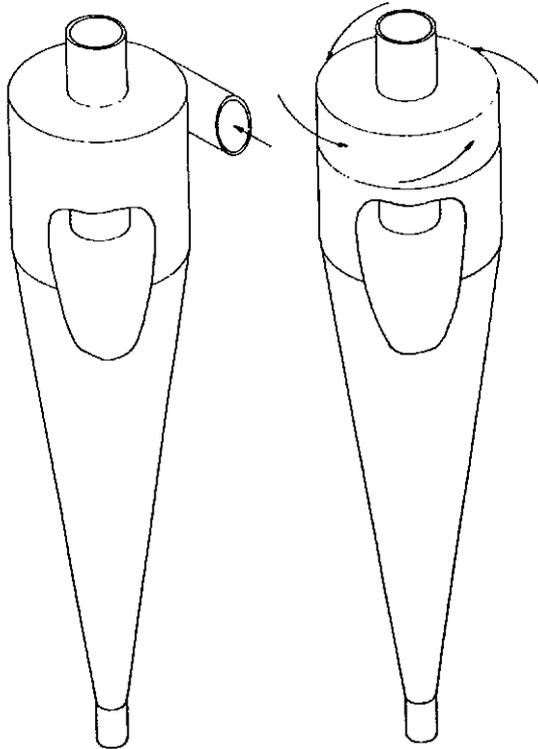


Figura 4.2.2-1 – Comparação das condições de alimentação (protótipo x modelo numérico)

4.3 – Modelos utilizados

Nas simulações apresentadas neste capítulo foram considerados os seguintes modelos de turbulência: k - ϵ convencional, k - ϵ com constantes modificadas para rotação e linha de corrente curva, k - ϵ não linear (RNG), k - ϵ de dupla escala. O equacionamento e as hipóteses consideradas em cada um desses serão resumidamente discutidas, a seguir.

4.3.1 – Modelo k - ε convencional

Trata-se do modelo k - ε para altos números de Reynolds, conforme apresentado por Launder & Spalding [1974].

Conforme descrito no capítulo 3, o modelo utiliza duas equações de transporte para as variáveis turbulentas k e ε . Essas equações, na forma conservativa, são as seguintes:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho u_i k - \left(\rho \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] = \rho (P_k - \varepsilon) \quad (4.3.1-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho u_i \varepsilon - \left(\rho \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] = \frac{\rho \varepsilon}{k} (c_1 P_k - c_2 \varepsilon) \quad (4.3.1-2)$$

onde os termos transientes tornam-se nulos, uma vez que as simulações consideraram regime estacionário.

Nas equações acima, a viscosidade turbulenta v_T é dada pela expressão $v_T = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ e P_k que é a taxa de produção da energia cinética turbulenta é calculada

por $P_k = v_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. As constantes do modelo assumem os seguintes

valores: $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1.314$, $c_\mu = 0.09$, $c_1 = 1.44$ e $c_2 = 1.92$.

Como as hipóteses de desenvolvimento do modelo só o validam para regiões com alto número de Reynolds, é necessário o emprego das chamadas funções de parede para fazer a ligação entre a região turbulenta e a região onde os efeitos viscosos são significativos. Embora tratando-se, no caso, de parede curva, com

concavidade acentuada na direção azimutal e ausência de curvatura na direção axial, foi adotada a lei de parede convencional, dada pelas seguintes equações:

$$\frac{U_r}{U_\tau} = \frac{\ln(E y^+)}{K} \quad (4.3.1-3)$$

$$k = \frac{U_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad (4.3.1-4)$$

$$\varepsilon = c_\mu^{0.75} \frac{k^{3/2}}{Ky} \quad (4.3.1-5)$$

onde U_r é o valor absoluto do componente da velocidade paralelo à parede, U_τ é a velocidade de atrito resultante, ou seja, $U_\tau = \frac{\tau_w}{\rho}$, y é a distância da parede ao primeiro ponto da malha, y^+ é a distância adimensional à parede, ou seja, $y^+ = \frac{U_\tau y}{\nu}$, $c_\mu = 0.09$ e K e E são as constantes da lei da parede, admitidas $K = 0.41$ e $E = 8.6$, que são valores adequados para parede lisa.

Essa lei considera o equilíbrio local, ou seja, as taxas de produção e dissipação da energia turbulenta são iguais, sendo portanto desprezíveis a convecção e difusão da energia turbulenta, além disso, essa lei é válida para $30 < y^+ < 130$. A primeira dessas condições não é estritamente verdadeira, ao se considerar uma parede curva, já que a presença de vórtices de Taylor-Görtler pode significar uma convecção não desprezível (Hoffmann et al. [1985]). A segunda condição depende apenas da geometria da malha e pode ser facilmente satisfeita no desenvolvimento da simulação numérica.

4.3.2. Modelo k - ϵ com constantes modificadas para rotação e linha de corrente curva

Conforme amplamente discutido na seção 3, o modelo k - ϵ convencional não apresenta bons resultados para o caso de rotação e linhas de corrente curvas. O trabalho de Abujelula e Lilley [1984], discutido em 3.2.3, apresenta novos valores para as constantes do modelo k - ϵ , que tornam esse modelo mais adequado à simulações de escoamentos com as características de rotação e linhas de corrente curvas. Assim, o modelo aqui referido constitui-se no modelo k - ϵ acima descrito, com as constantes assumindo os valores recomendados por Abujelula e Lilley, as quais podem ser vistas, comparativamente ao modelo convencional, na tabela 3.2.3-1, seção 3.2.3.

4.3.3. Modelo k - ϵ não linear RNG

Foi utilizado um modelo k - ϵ , baseado nos métodos do *Grupo de Renormalização*, desenvolvido por Yakhot e Orzag [1986], (ver referência em Wilcox[2000]), com modificações introduzidas por esses mesmos autores em 1992. A descrição dos fundamentos físicos do modelo foi realizada na seção 3. Trata-se, como visto naquela seção, de modelo k - ϵ convencional, com constantes que assumem novos valores, determinados inteiramente pelo processo analítico da teoria do *Grupo de Renormalização*, e a equação para a taxa de dissipação apresenta um termo fonte adicional que é significativo apenas para escoamentos com altas taxas de deformação e que se afastam significativamente das condições de equilíbrio.

4.3.4. Modelo k - ϵ de dupla escala

A descrição detalhada desse modelo encontra-se na seção 3.3.

As condições de contorno na alimentação, utilizadas nas simulações aqui apresentadas, estão descritas na seção 4.5.3 abaixo.

Utilizou-se, nas simulações com este modelo, a lei de parede que considera a hipótese de equilíbrio local, dada pelas equações:

$$k_p = \frac{k_e}{1 + \beta} \quad (4.3.4-1)$$

$$k_t = \frac{\beta k_e}{1 + \beta} \quad (4.3.4-2)$$

$$\varepsilon_p = c_\mu^{0.75} \frac{k_e^{3/2}}{Ky} \quad (4.3.4-3)$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_t \quad (4.3.4-4)$$

onde $\beta = 0.25$, $k_e = \frac{U_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}}$, $U_\tau = \frac{\tau_w}{\rho}$, τ_w é a tensão cisalhante na parede, y é a distância da parede ao primeiro ponto da malha e $K = 0.41$ é a constante de von Karman.

4.4. Descrição do método numérico empregado na solução das equações

Descreve-se aqui, de forma sucinta, o método numérico empregado pelos simuladores computacionais, com ênfase nas opções utilizadas neste trabalho. Enfatiza-se porém, que situa-se além do escopo do presente trabalho discutir o método numérico utilizado e as variações disponíveis.

Seguindo Patankar [1977], temos que as equações diferenciais de conservação das grandezas físicas do escoamento podem ser descritas genericamente na seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma^\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma^\phi \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma^\phi \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) + S_\phi \quad (4.4-1)$$

Nessa forma estão incluídas as equações da conservação da massa (continuidade), conservação da quantidade de movimento (1ª lei de Newton) e conservação da energia.

Os termos dessa equação genérica foram arranjados considerando os seguintes grupos:

Termo Transiente: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) \quad (4.4-2)$

Termo Convectivo: $\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\phi) \quad (4.4-3)$

Termo Difusivo: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma^\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma^\phi \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma^\phi \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \quad (4.4-4)$

Termo Fonte: $S_\phi \quad (4.4-5)$

A variável ϕ , o parâmetro Γ^ϕ , bem como o termo fonte S_ϕ assumem, para cada uma das equações de conservação, os valores dados na tabela abaixo:

Equação de Conservação	ϕ	Γ^ϕ	S_ϕ
Continuidade	1	0	0
Quantidade de Movimento - Componente x	u	μ	$B_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{U} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial P}{\partial x}$
Quantidade de Movimento - Componente y	v	μ	$B_y + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{U} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial y}$
Quantidade de Movimento - Componente z	w	μ	$B_z + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{U} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial z}$
Energia	T	$\frac{k}{C_p}$	$\frac{1}{C_p} \frac{DP}{Dt} + \frac{\mu}{C_p} \phi$
Concentração mássica	C	ρD	0

Tabela 4.4-1 – Termos das equações de conservação

O método numérico para a solução das equações acima, consiste em discretizar o domínio, do escoamento em estudo, em um número finito de elementos de volume. As equações diferenciais acima descritas são integradas nesses volumes finitos, obtendo-se, para cada um desses volumes, equações algébricas que relacionam os valores das grandezas, que seguem as leis de conservação, admitidos no ponto P central do volume, com os fluxos dessas grandezas, entre volumes adjacentes e o volume considerado.

Quando o número de elementos de volume tende a infinito, a solução desse sistema de equações algébricas de conservação tende à solução do sistema de equações diferenciais, integrado sobre o domínio.

Os elementos de volume formam um conjunto ordenado de pontos no tempo e no espaço. Para o caso de elementos hexaédricos, como os normalmente empregados,

as relações de cada ponto no domínio com os elementos vizinhos, admitindo-se a seguinte nomenclatura para os pontos vizinhos, são expressas pela equação (4.4-6)

- P - ponto onde a grandeza está sendo calculada no instante t
- N - ponto vizinho norte (direção da coordenada y) de P
- S - ponto vizinho sul (direção da coordenada y) de P
- E - ponto vizinho este (direção da coordenada x) de P
- W - ponto vizinho oeste (direção da coordenada x) de P
- H - ponto vizinho alto (direção da coordenada z) de P
- L - ponto vizinho baixo (direção da coordenada z) de P

Obtendo-se, após a referida integração, um sistema de equações lineares para cada um dos volumes finitos, cuja forma, com base na nomenclatura acima definida, é a seguinte:

$$a_P \phi_P = a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_H \phi_H + a_L \phi_L + a_{t-1} \phi_{t-1} + S_\phi \quad (4.4-6)$$

Nessa equação, os coeficientes a_i representam a contribuição de cada vizinho i espacial (e mesmo o temporal – no instante anterior) para o cálculo da variável desejada na célula P . Esses coeficientes são função da própria geometria da célula (tamanho da mesma, área da parede entre a célula P e a vizinha i , velocidade do fluido (efeito convectivo), do coeficiente de difusão viscosa, da condutividade térmica, da difusão turbulenta, etc.

Para simplificação do processo de integração da equação no volume finito, admite-se que as propriedades do fluido são constantes em cada uma das faces desse volume. Além dessa hipótese, admite-se ainda que o campo de velocidades, que é utilizado no termo convectivo e também no termo fonte, corresponde ao obtido na iteração anterior, sendo portanto constante, na integração considerada.

Assim, fazendo a integração da equação (4.4-1) no volume finito, na forma:

$$\begin{aligned}
& \int_{V,t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dVdt + \int_{V,t} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u\phi) dVdt + \int_{V,t} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v\phi) dVdt + \int_{V,t} \frac{\partial}{\partial z} (\rho w\phi) dVdt = \\
& \int_{V,t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dVdt + \int_{V,t} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dVdt + \int_{V,t} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dVdt + \int_{V,t} S^\phi dVdt
\end{aligned} \tag{4.4-7}$$

Cada um dos termos de (4.4-7) são resolvidos, com base nas considerações acima citadas, resultando nas seguintes expressões algébricas:

$$\int_{V,t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dVdt = [(\rho\phi)^t - (\rho\phi)^{t-1}] \Delta V \tag{4.4-8}$$

$$\int_{V,t} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u\phi) dVdt = (\rho u\phi) \Delta y \Delta z \Delta t \Big|_e - (\rho u\phi) \Delta y \Delta z \Delta t \Big|_w \tag{4.4-9}$$

$$\int_{V,t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dVdt = \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z \Delta t \Big|_e - \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z \Delta t \Big|_w \tag{4.4-10}$$

Considerando-se a seguinte nomenclatura:

$$\text{Massa total no volume finito considerado: } M_p = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \tag{4.4-11}$$

Fluxos de massa através das paredes do volume finito considerado:

$$\dot{M}_e = \rho u \Delta y \Delta z \Big|_e \quad \dot{M}_w = \rho u \Delta y \Delta z \Big|_w \tag{4.4-12a}$$

$$\dot{M}_n = \rho v \Delta x \Delta z \Big|_n \quad \dot{M}_s = \rho v \Delta x \Delta z \Big|_s \tag{4.4-12b}$$

$$\dot{M}_l = \rho w \Delta x \Delta y \Big|_l, \quad \dot{M}_h = \rho w \Delta x \Delta y \Big|_h \quad (4.4-12c)$$

Coeficientes difusivos:

$$D_e = \Gamma^\phi \Delta y \Delta z \Big|_e, \quad D_w = \Gamma^\phi \Delta y \Delta z \Big|_w \quad (4.4-13a)$$

$$D_n = \Gamma^\phi \Delta x \Delta z \Big|_n, \quad D_s = \Gamma^\phi \Delta x \Delta z \Big|_s \quad (4.4-13b)$$

$$D_h = \Gamma^\phi \Delta x \Delta y \Big|_h, \quad D_l = \Gamma^\phi \Delta x \Delta y \Big|_l \quad (4.4-13c)$$

Fazendo uso das expressões (4.4-11), (4.4-12a,b,c) e (4.4-13a,b,c) a equação (4.4-7) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{M_P \phi - M_P^{t-1} \phi_P^{t-1}}{\Delta t} + \dot{M}_e \phi_e^\theta - \dot{M}_w \phi_w^\theta + \dot{M}_n \phi_n^\theta - \dot{M}_s \phi_s^\theta + \dot{M}_h \phi_h^\theta - \dot{M}_l \phi_l^\theta = \\ & D_e \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e^\theta - D_w \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_w^\theta + D_n \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n^\theta - D_s \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s^\theta + D_h \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_h^\theta - D_l \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_l^\theta + Lin[S^\phi]^\theta \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (4.4-14)$$

onde o índice θ indica a fração do passo de tempo no qual as variáveis e seus gradientes são computados. E o termo $Lin[S^\phi]$ representa a linearização do termo fonte.

Os valores das variáveis nas faces dos volumes finitos podem obtidos seguindo um dos esquemas de interpolação que serão descritos a seguir, tendo por base a figura 4.4-1:

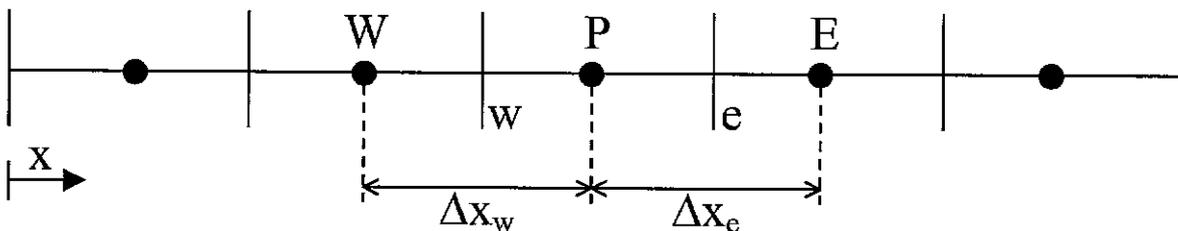


Figura 4.4-1 - Diagrama unidimensional mostrando a nomenclatura dos volumes finitos

O primeiro desses esquemas de interpolação é o chamado esquema *up wind*, que nada mais é do que considerar o predomínio das condições à montante no estabelecimento das condições na face considerada. Ou seja, a variável em questão assume, na face, o valor que essa variável possui na célula de onde provém o escoamento.

O esquema *up wind* é o esquema de interpolação mais conveniente para os problemas convectivo-dominantes, ou seja, naqueles em que os efeitos convectivos são mais significativos que os efeitos difusivos, como em geral ocorre com os problemas de escoamentos de fluidos de baixas viscosidade (ar e água, por exemplo) nas aplicações de engenharia.

O esquema alternativo é o chamado esquema de interpolação utilizando diferenças centrais. Nesse caso, os valores das variáveis nas faces são obtidos pela média aritmética dos valores das variáveis nas células adjacentes. Assim, reportando-se à figura 4.4-1, tem-se:

$$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \quad \phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad (4.4-15a,b)$$

O esquema *up wind*, embora seja um esquema estável e produza soluções fisicamente realistas, tem a propriedade de suavizar os gradientes, quando o escoamento se faz em uma direção transversal qualquer que não a direção de um dos eixos coordenados. Ou seja, tem um efeito dissipativo sobre a variável, analogamente a uma difusão. Esse efeito é chamado de difusão numérica.

O esquema das diferenças centrais, por sua vez, gera instabilidades da solução, por causar coeficientes negativos nas equações de volumes finitos. Essas instabilidades poderão levar a soluções fisicamente não realistas.

Tendo em vista esses problemas, o simulador PHOENICS adota como esquema padrão para a solução das equações diferenciais um esquema híbrido, onde o esquema a ser adotado é função do número de *Peclet* da célula. Esse adimensional

representa uma relação entre as magnitudes dos efeitos convectivo e difusivo. Assim, o esquema de interpolação adotado é:

Se $Pe \leq 2 \Rightarrow$ Diferenças centrais

Se $Pe > 2 \Rightarrow Up\ wind$

onde Pe = velocidade normal à face x distância entre nós / difusividade, ou

$$Pe_w = \frac{\rho_w u \Delta x_w}{\Gamma_w^\phi} \quad e \quad Pe_e = \frac{\rho_w u \Delta x_e}{\Gamma_e^\phi} \quad (4.4-16\ a,b)$$

Vários outros esquemas de interpolação, incluindo esquemas não lineares, são disponíveis no simulador utilizado. Esses esquemas não serão aqui abordados. Para maiores informações sobre os mesmos o leitor deve reportar-se aos "manuais" *on line* que acompanham o *software*.

As derivadas espaciais das variáveis (gradientes) são calculadas pelas expressões abaixo, na direção leste-oeste e suas análogas para as outras duas direções.

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_w} \quad e \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} \quad (4.4-17\ a,b)$$

Para as derivadas de segunda ordem a expressão algébrica correspondente é :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_W + \phi_E - 2\phi_P}{\Delta x_w \Delta x_e} \quad (4.4-18)$$

Levando-se em conta essas expressões, para o esquema de interpolação *up wind*, e admitindo-se a linearização do termo fonte S^ϕ na forma $S_P^\phi = S_P \phi_P + S_C$, obtêm-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{M_P}{\Delta t} \phi_P + A_P \phi_P^\theta &= \\ &= A_e \phi_E^\theta + A_w \phi_W^\theta + A_n \phi_N^\theta + A_s \phi_S^\theta + A_b \phi_B^\theta + A_l \phi_L^\theta + \frac{M_P^0}{\Delta t} \phi_P^0 + S_C \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (4.4-19)$$

Onde os coeficientes A_i são dados por:

$$A_P = A_e + A_w + A_n + A_s + A_h + A_l - S_P \Delta x \Delta y \Delta z - \frac{M_P}{\Delta t} + \frac{M_P^0}{\Delta t} \quad (4.4-20)$$

$$A_e = \frac{D_e}{\Delta x} \Big|_e^\theta \quad ; \quad A_w = \dot{M}_w + \frac{D_w}{\Delta x} \Big|_w^\theta \quad (4.4-21 \text{ a,b})$$

$$A_n = \frac{D_n}{\Delta y} \Big|_n^\theta \quad ; \quad A_s = \dot{M}_s + \frac{D_s}{\Delta y} \Big|_s^\theta \quad (4.4-22 \text{ a,b})$$

$$A_h = \frac{D_h}{\Delta z} \Big|_h^\theta \quad ; \quad A_l = \dot{M}_l + \frac{D_l}{\Delta z} \Big|_l^\theta \quad (4.4-23 \text{ a,b})$$

onde D_i e \dot{M}_i são dados pelas equações 4.4-11 a 4.4-13c.

Com relação ao aspecto temporal, na obtenção da solução numérica, dois tipos de formulação podem ser realizados. A formulação explícita, na qual $\theta = 0$, onde a equação 4.4-19 assume a forma:

$$\frac{M_P \phi_P}{\Delta t} = \phi_P^0 \left(\frac{M_P^0}{\Delta t} - A_P \right) + \sum A_{nb} \phi_{nb}^0 + S_C \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.4-24)$$

onde para compactar a notação, seguindo Patankar [1977], foi utilizado o índice nb para representar os vizinhos (*neighbour*) da célula P .

Na formulação acima (explícita), a variável na célula P pode ser determinada diretamente da equação acima, sem necessidade de resolver-se um sistema de equações, uma vez que os valores das variáveis para todas as demais células são conhecidos, pois são os valores dessas variáveis obtidos no passo anterior. Essa formulação, embora de manuseio mais fácil, nem sempre converge para a solução. Por essa razão é utilizada, preferencialmente, a formulação totalmente implícita, na qual $\theta = 1$. Nesse caso, a equação 4.4-19 assume a forma condensada:

$$A_p^* \phi_P = \frac{M_p^0 \phi_P^0}{\Delta t} + \sum A_{nb} \phi_{nb} + S_C \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.4-25)$$

$$\text{com } A_p^* = \sum A_{nb} - S_p \Delta z \Delta y \Delta x + \frac{M_p^0}{\Delta t}$$

Nesse caso, o conjunto de equações dados por 4.4-25 formam um sistema de equações, cujo número total de equações é dado por $n_\phi \times n_x \times n_y \times n_z$, ou seja, o produto do número de variáveis a serem determinadas pelo número total de volumes finitos em que o domínio do escoamento estudado foi dividido. Essas equações formam um sistema pois estão acopladas, uma vez que os valores das variáveis nas células vizinhas a P são também incógnitas do problema, uma vez que estão sendo determinadas no mesmo passo de tempo que o valor da variável na célula P .

O algoritmo – algoritmo SIMPLE e suas variantes – vide, por exemplo, Patankar [1977] ou Maliska [1995] – para a determinação dos componentes da velocidade de escoamento é composto pelos seguintes passos:

1. Estima-se o campo inicial de velocidades e pressão (P^*)
2. Calcula-se os coeficientes das equações do movimento para u , v e w .
3. Resolve-se as equações do movimento com P^* , obtendo-se u^* , v^* e w^* .
4. Calcula-se a correção de pressão P' que fecha o balanço de massa.

5. Corrige-se u^* , v^* e w^* , obtendo-se o campo de velocidades que satisfaz a equação da continuidade.
6. Calcula-se a pressão corrigida ($P = P^* + \alpha P'$).
7. Resolve-se as equações de conservação para as demais variáveis.
8. Faz-se $P^* = P$ e recomeça-se do passo 2, repetindo-se o procedimento até a convergência.

O método, que acabou de ser visto, foi descrito tendo por base as equações de Navier-Stokes, que representam as leis de conservação de massa, quantidade de movimento e energia, conforme mostrado na Tabela 4.4-1 acima. As equações diferenciais de conservação são obtidas das aplicações das leis físicas de conservação ao escoamento de fluidos, com base na hipótese do contínuo.

Não há dúvida que qualquer que seja o movimento do fluido (com baixas velocidades, do ponto de vista da mecânica newtoniana em oposição à relativística), as leis físicas de conservação de massa e do movimento newtoniano devem regê-lo. Por outro lado, a validade da hipótese do contínuo e, portanto, das equações de Navier-Stokes para descrição de escoamentos com altas frequências das flutuações de velocidade, como é o caso da turbulência, não é evidente.

Em virtude da multiplicidade de escalas do escoamento turbulento, e da possibilidade que as menores escalas presentes nesses escoamentos, sejam muito pequenas para a validade da hipótese do contínuo, haveria a possibilidade de ser obrigatória a consideração da estrutura molecular do fluido, para o estudo da turbulência.

Entretanto, verifica-se (vide por exemplo, Lesieur 1997), que as equações de Navier-Stokes descrevem adequadamente o movimento turbulento mesmo em escoamentos compressíveis hipersônicos, para números de Mach até cerca de 15, o que engloba quase todos os problemas de engenharia. A menor escala do movimento turbulento é maior do que a escala dissipativa de Kolmogorov e muitas vezes maior que o caminho livre entre moléculas do fluido.

Desse modo, seria teoricamente possível a descrição do movimento turbulento utilizando as equações transientes de Navier-Stokes com malhas espacial e temporal extremamente refinadas, compatíveis com a escala dissipativa de Kolmogorov. Esse é o método chamado Simulação Numérica Direta (sigla em inglês *DNS*) de tratamento da turbulência. Sua aplicação é restrita a escoamentos em condições geométricas simples e com baixos números de Reynolds, e, mesmo nessas condições, o grande número de equações resultante acarreta, no atual estado da arte da computação digital, elevado esforço computacional.

Como forma de contornar esse problema, para fins de aplicações de engenharia, são utilizados os modelos de fechamento em um ponto, baseados nas chamadas equações de Reynolds, que são as equações de Navier-Stokes para os valores médios das variáveis do escoamento, onde as flutuações turbulentas são tratadas como termos adicionais de tensões (vide seção 3).

Na impossibilidade da obtenção de equações diferenciais de transporte exatas, para esses termos adicionais de tensão (chamado problema de fechamento – vide por exemplo, Hinze [1975]), esses termos são modelados, variando-se a complexidade da modelagem (algébrica ou diferencial) em função da complexidade do próprio escoamento a ser modelado.

No caso de modelos diferenciais, para as variáveis adicionais relacionadas com a turbulência, essas novas equações são discretizadas pelo processo acima descrito e vão se somar ao sistema que descreve a evolução das grandezas médias do escoamento. Assim, no modelo k - ϵ convencional, além das cinco equações de transporte mostradas na tabela 4.4-1 a serem resolvidas para cada volume finito, duas outras equações, para as novas variáveis, seriam requeridas, num total de sete equações por volume finito. Esse número de equações adicionais pode crescer até sete, no caso da modelagem com equação de transporte para cada uma das tensões adicionais, do chamado tensor de Reynolds, em número de seis, pois o tensor é simétrico (vide seção 3.4) e, uma equação adicional para a taxa de dissipação da energia turbulenta.

4.5. Malha e condições de contorno

4.5.1. Características das malhas utilizadas

Para as simulações no hidrociclone descrito em 4.2, foi utilizada uma malha 20 x 40 células. Sendo o menor número para a direção radial e o maior para a direção axial. A distribuição e o tamanho de células não foi uniforme, utilizando-se uma maior concentração de células menores, junto à região do cabeçote, conforme pode ser visto na figura 4.5.1-1 abaixo:

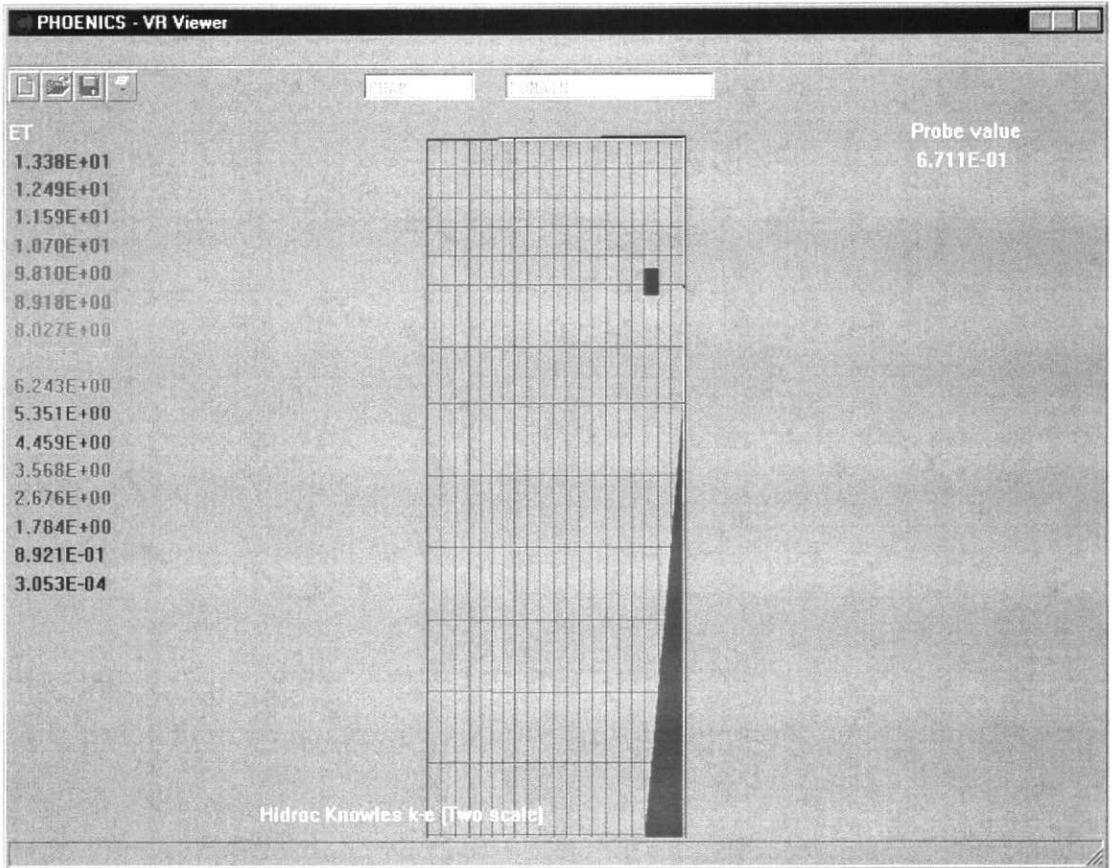


Figura 4.5.1-1 – Detalhe da malha utilizada nas simulações

4.5.2. Condições de contorno

Nas simulações do experimento original de Knowles et al., os componentes da velocidade do fluido na alimentação são os seguintes:

Primeiro conjunto de condições (experimento de Knowles):

Velocidade do fluido: 1.324 m/s na direção azimutal (direção x)

-0.093 m/s na direção radial (direção y)

0.0 m/s na direção axial (direção z)

O valor do componente na direção azimutal foi assumido igual à velocidade média no tubo de alimentação, para a vazão informada no artigo, sendo esse o componente responsável pelo efeito centrífugo. O componente radial foi calculado de forma a produzir, na hipótese de alimentação descrita em 4.2.2, o valor de vazão informado no referido artigo, já que, pela geometria considerada, apenas esse componente tem efeito sobre a vazão, uma vez que os outros dois componentes são tangenciais à área pela qual se faz a alimentação.

Cumprе ressaltar que, embora o hidrociclone utilizado por Knowles et al. tenha diâmetro nominal muito próximo daquele correspondente ao hidrociclone para águas oleosas, as condições operacionais descritas pelos autores são significativamente diferentes, com vazão e, conseqüentemente, velocidades bastante inferiores. Por essa razão, nas simulações que visam comparar os modelos de turbulência, foram utilizadas condições operacionais dos hidrociclones para águas oleosas, embora a geometria considerada seja ainda a do hidrociclone de Knowles, mais simples que a geometria do hidrociclone para águas oleosas. Para esse caso de comparação dos modelos de turbulência, os novos valores para os componentes da velocidade na alimentação são os seguintes:

Segundo conjunto de condições (comparação dos modelos de turbulência):

Velocidade do fluido: 2.00 m/s na direção azimutal (direção x)

-0.343 m/s na direção radial (direção y)

-0.05 m/s na direção axial (direção z)

Para este caso foi adotado um valor não nulo do componente axial, com uma ordem de grandeza inferior ao componente radial, para levar em conta uma eventual pequena inclinação do jato de alimentação.

Com relação às variáveis turbulentas, admite-se condições similares, na alimentação, para as duas simulações acima mencionadas.

Na total falta de informações experimentais, foi arbitrada uma intensidade de turbulência de 5% na corrente de fluido de entrada. Assim, a energia cinética turbulenta e a taxa de dissipação dessa energia são consideradas uniformes, na corrente de fluido de alimentação do hidrociclone, assumindo os seguintes valores:

$$k_{ent} = (IU)^2, \quad (4.5.2-1)$$

onde U representa uma velocidade média característica do escoamento, no caso a velocidade média no tubo de alimentação e I representa a intensidade de turbulência, ou seja, a fração dessa velocidade que correspondo às flutuações turbulentas.

A taxa de dissipação na corrente de fluido da alimentação, por sua vez, é estimada com base no valor acima e na hipótese de equilíbrio local, que conduz à seguinte relação (vide seção 3):

$$\varepsilon_{ent} = C_{\mu}^{0.75} \frac{k^{3/2}}{h} \quad (4.5.2-2)$$

onde h é uma dimensão linear característica. No caso, uma fração (0.1) do diâmetro do tubo de alimentação.

No caso do modelo k - ε de dupla escala, os valores das variáveis turbulentas assumidos na entrada são os seguintes: k_e é dado pela equação 4.5.2-1, com I assumindo arbitrariamente um valor de 5%, ε_t é estimado pela equação 4.5.2-2, onde h assume o valor de 10% do diâmetro de entrada, como acima mencionado. As demais variáveis são obtidas considerando a hipótese de equilíbrio local, de modo que k_p , k_t e ε_p assumem respectivamente os valores dados pelas equações 4.3.4-1, 4.3.4-2 e 4.3.4-4.

4.6. Comparação entre os resultados experimentais e os resultados obtidos com as simulações

4.6.1. Introdução

As condições do experimento de Knowles et al., descritas no artigo mencionado, foram aproximadas nas condições de contorno para a simulações cujos resultados são apresentados nesta seção. Desse modo, além das condições na alimentação, acima descritas, a *saída de fluido próxima à seção de alimentação* teve sua velocidade prescrita, de forma a resultar na vazão de 80% da vazão total de alimentação, conforme observado no experimento.

4.6.2. Resultados das simulações

As figuras 4.6.2-1 a 4.6.2-5 mostram, os vetores velocidade e a distribuição da pressão e dos componentes da velocidade, obtidas com a simulação considerando o modelo $k-\epsilon$ de dupla escala. Os gráficos 4.6.2-1 a 4.6.2-5, mostram os perfis de velocidade obtidos nas simulações, comparados aos resultados experimentais, para diferentes distâncias z medidas à partir da seção de *saída de fluido próxima ao vértice do trecho cônico*.

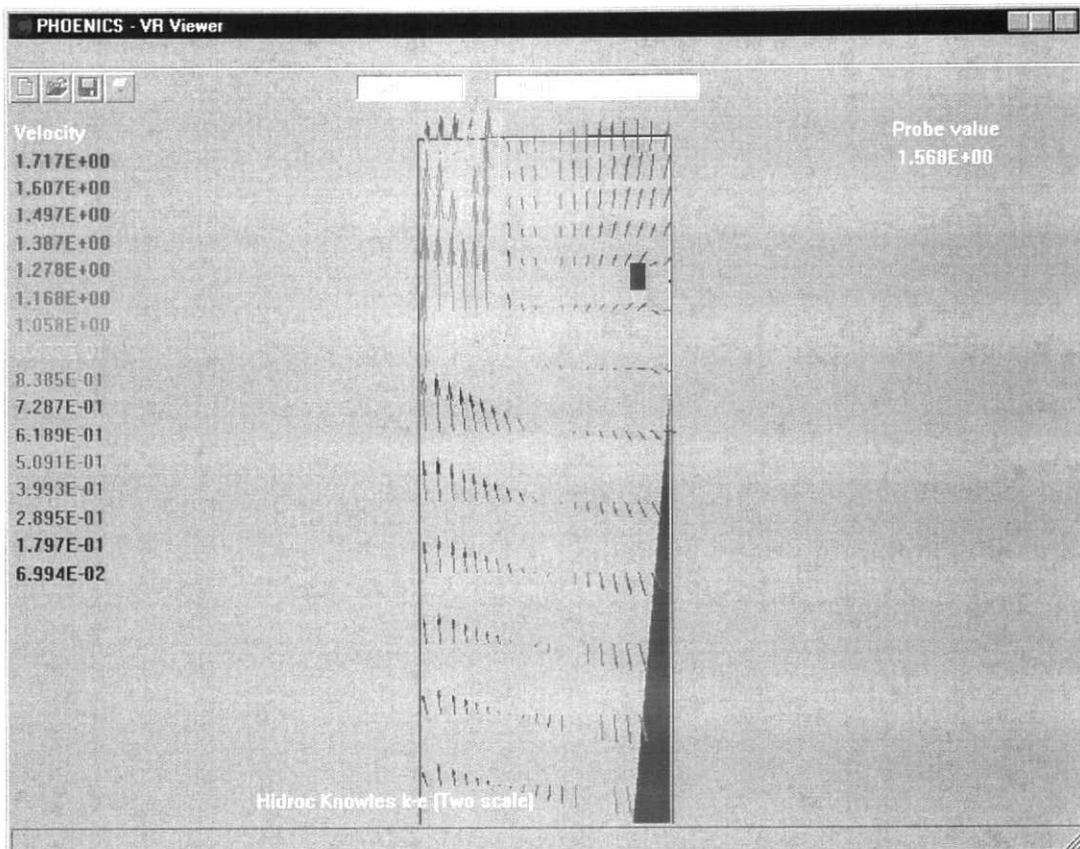


Figura 4.6.2-1 – Vetores velocidade na parte superior do hidrociclone

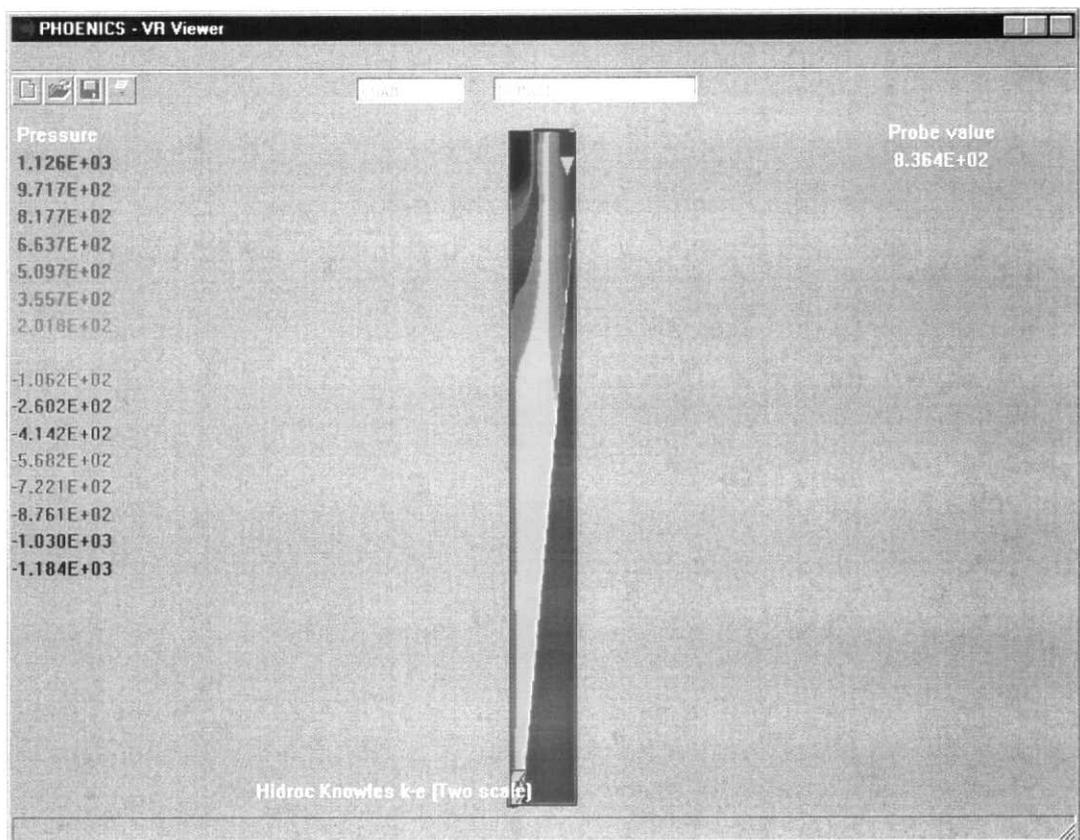


Figura 4.6.2-2 – Distribuição das pressões – manométrica (Pa)

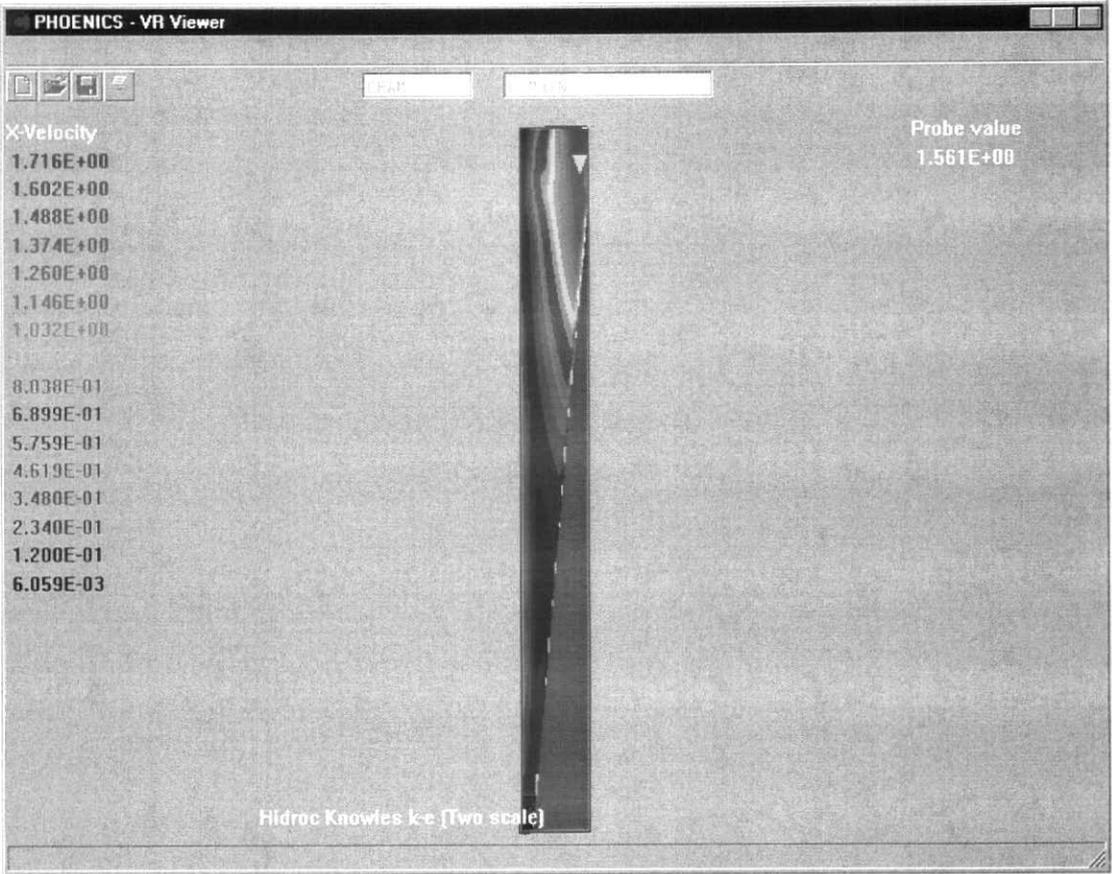


Figura 4.6.2-3 – Magnitude do componente azimutal da velocidade (m/s)

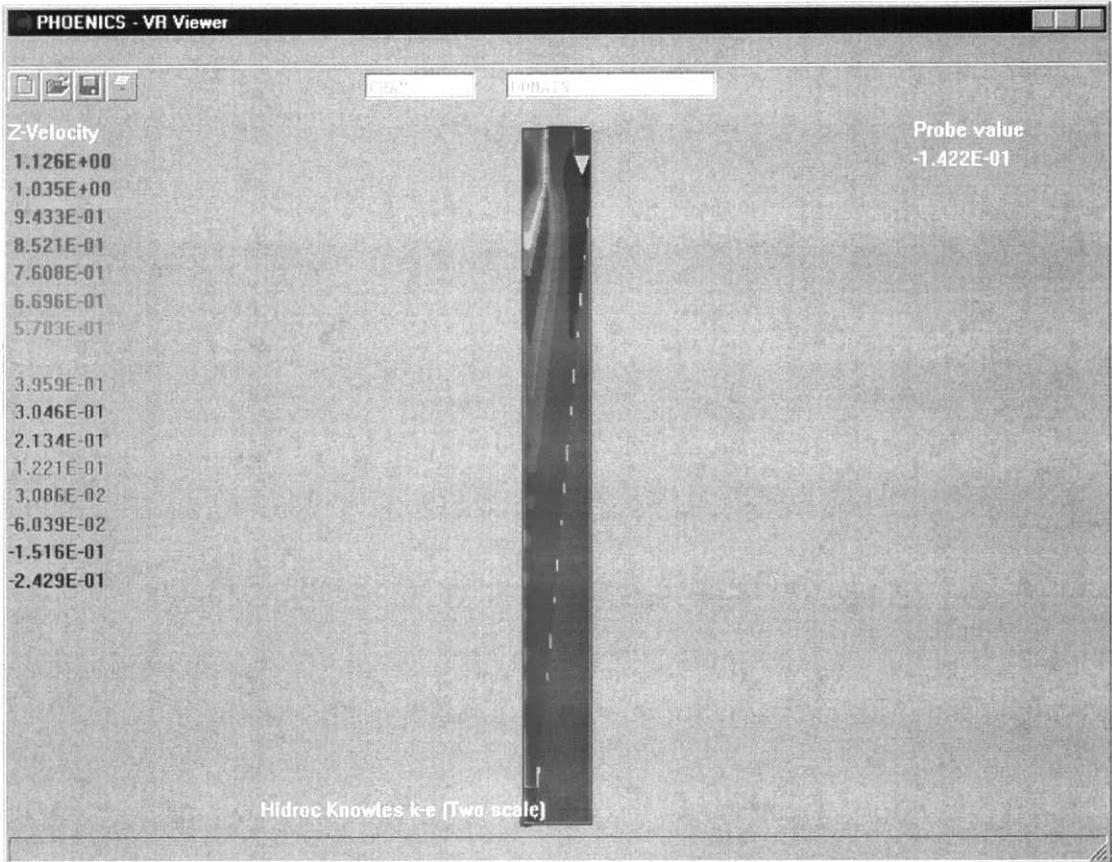


Figura 4.6.2-4 – Magnitude do componente axial da velocidade (m/s)

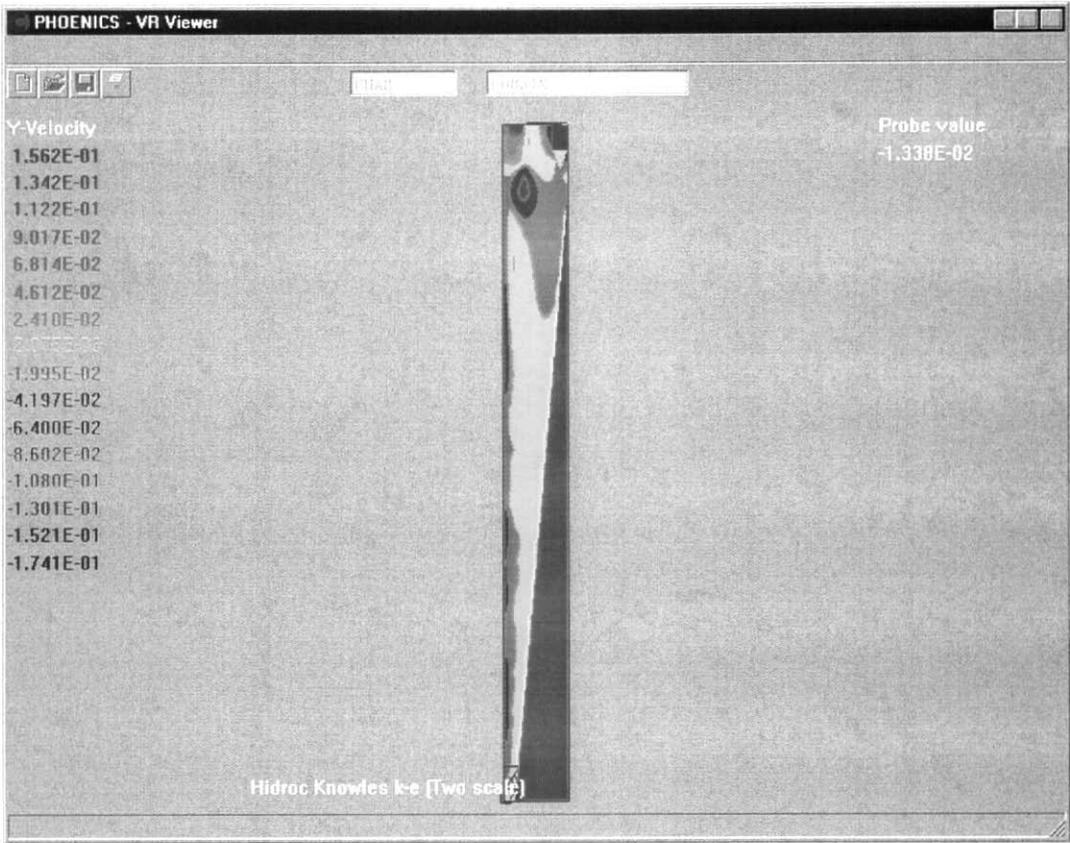


Figura 4.6.2-5 – Magnitude do componente radial da velocidade (m/s)

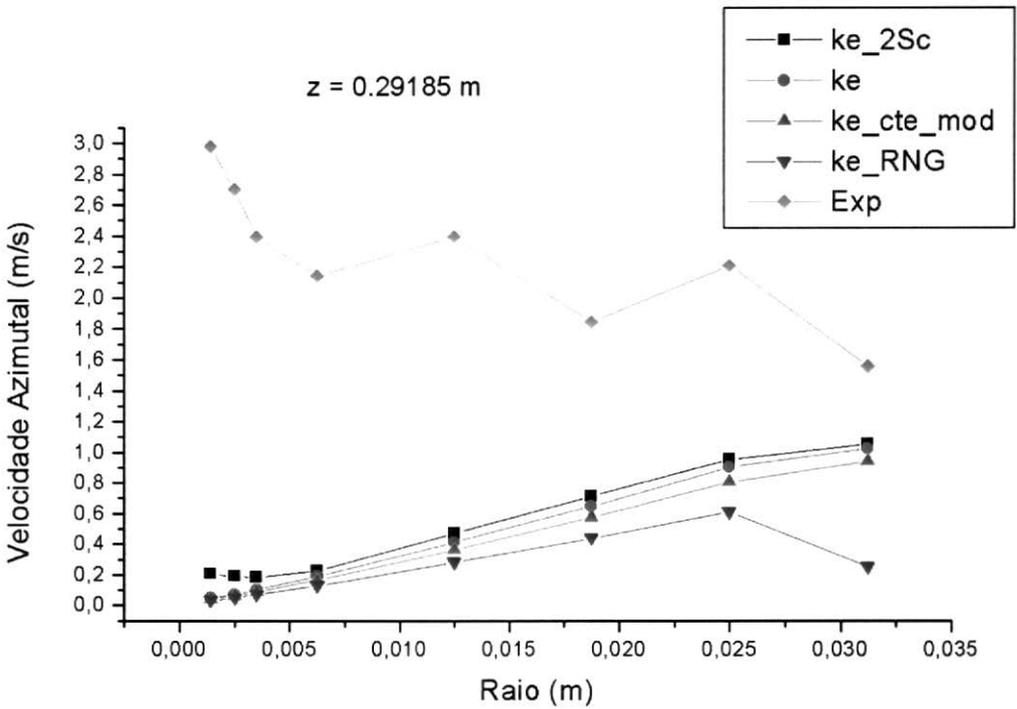


Gráfico 4.6.2-1 – Componente azimutal da velocidade em $z = 0.29185$ m

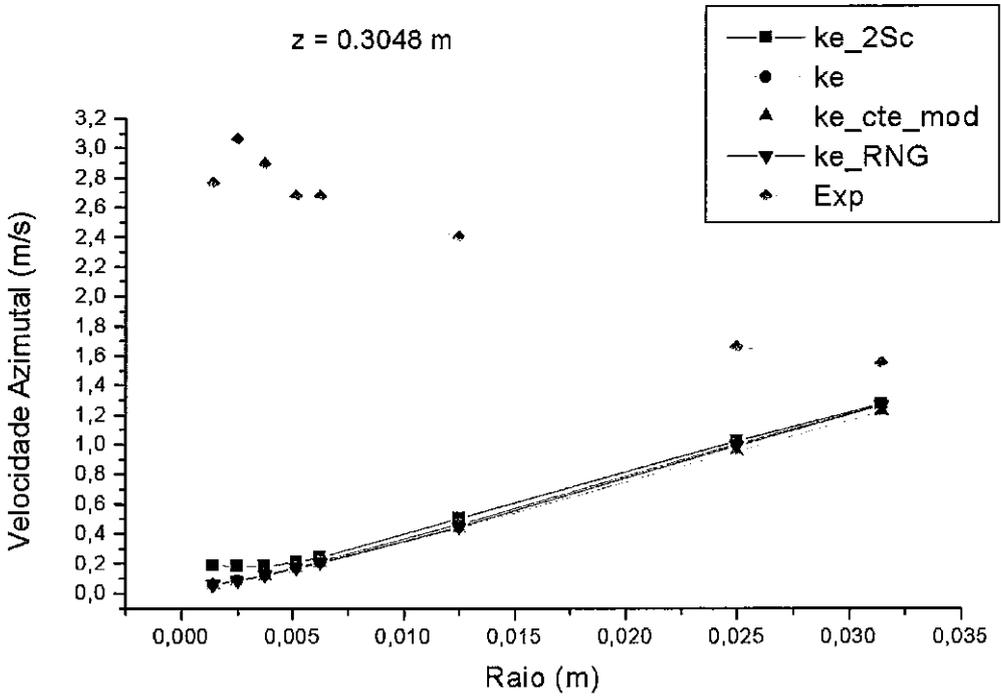


Gráfico 4.6.2-2 – Componente azimutal da velocidade em $z = 0.3048 \text{ m}$

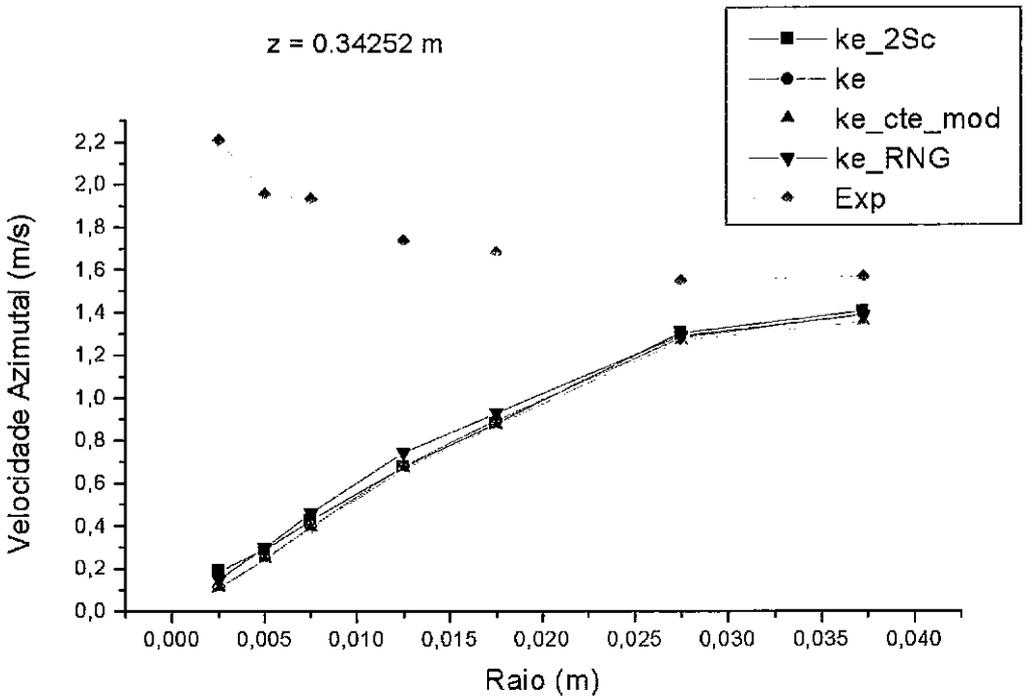


Gráfico 4.6.2-3 – Componente azimutal da velocidade em $z = 0.34252 \text{ m}$

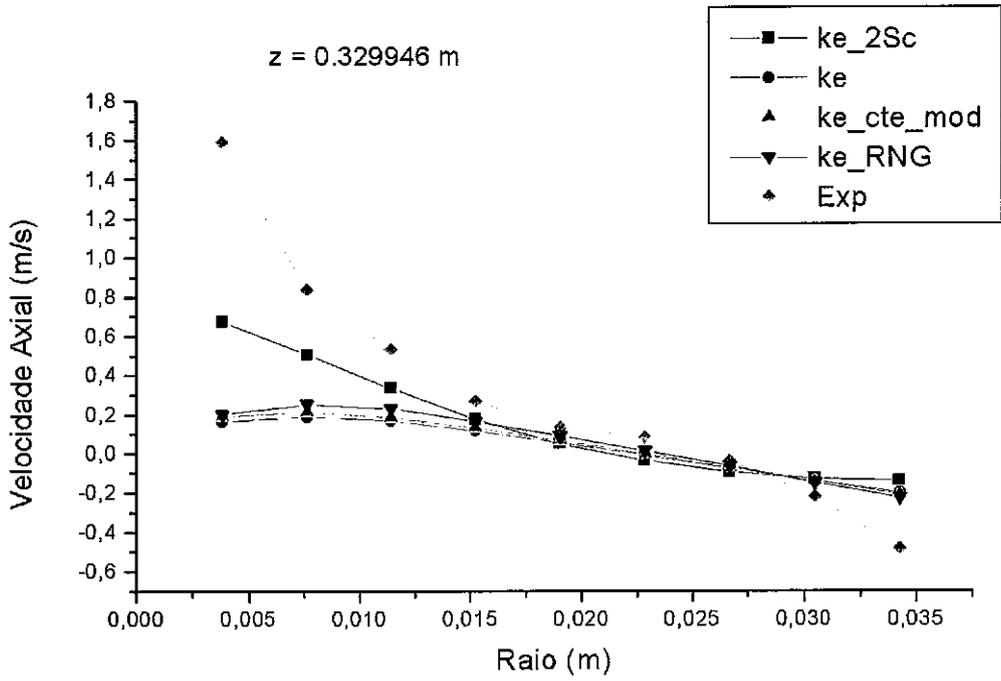


Gráfico 4.6.2-4 – Componente axial da velocidade em $z = 0.329946$ m

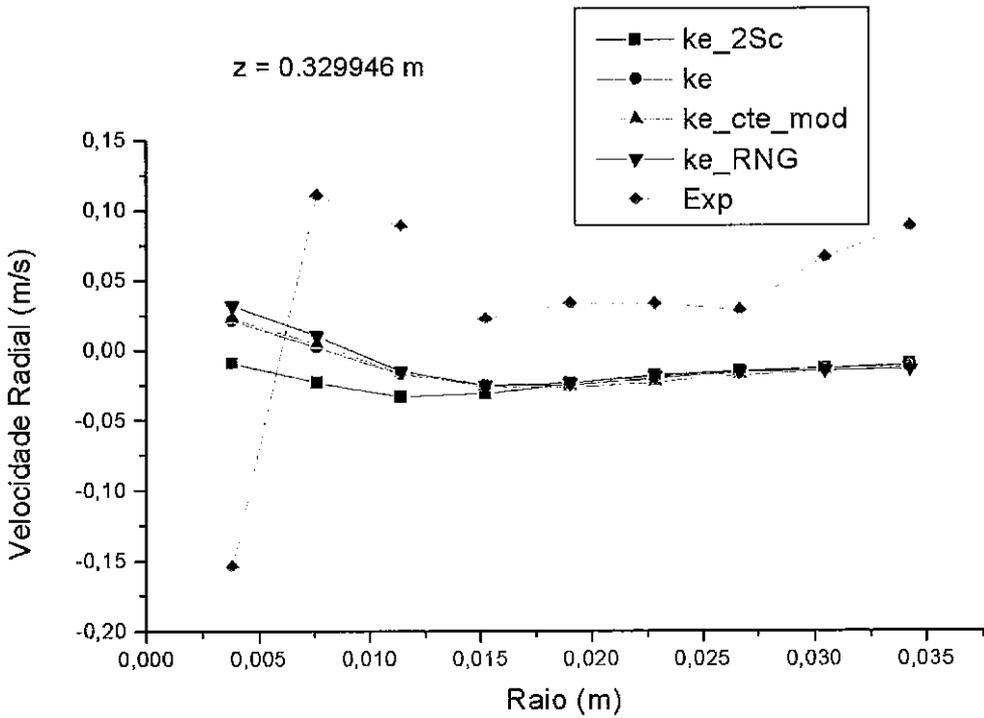


Gráfico 4.6.2-5 – Componente radial da velocidade em $z = 0.329946$ m

4.6.3. Comentários sobre os resultados obtidos

Embora os resultados experimentais do trabalho de Knowles et al [1973] apresentem uma dispersão bastante acentuada, esse problema foi menos severo nas medições do componente azimutal da velocidade e a reprodutibilidade dos resultados obtidos, particularmente desse componente da velocidade, foi apresentada no trabalho, mostrando desvios reduzidos, da ordem de 3%. Pode-se, portanto, afastar a possibilidade de que os resultados obtidos tenham incorreções substanciais.

Como pode ser observado dos gráficos 4.6.2-1 a 4.6.2-3, os resultados obtidos nas simulações, para os perfis de velocidade azimutal, com qualquer dos modelos de turbulência considerados, diferem significativamente dos resultados experimentais. Não só os valores numéricos do componente azimutal da velocidade são bastante distintos, mas a própria taxa de variação radial desse componente da velocidade assume sinais opostos, entre o verificado nas simulações e as medições experimentais.

Desse modo, os modelos de turbulência estudados falharam em captar o perfil de vórtice livre verificado experimentalmente, mostrando um comportamento de rotação de corpo rígido sobre todo o domínio. Isso pode ser observado também nos mapas de cores (figura 4.6.2-3), onde se constata que apenas junto ao topo, na região da figura onde se localiza a *sonda*, houve um pequeno aumento da magnitude do componente azimutal com redução do raio. Em todo o restante do domínio o comportamento foi mais próximo de rotação de corpo rígido.

Como pode ser visto do gráfico 4.6.2-4, os valores do componente axial da velocidade foram reproduzidos razoavelmente pelos modelos, na região média da dimensão radial do hidrociclone, mas fugiram dos valores experimentais para os pontos mais próximos do eixo do equipamento. O modelo $k-\epsilon$ de dupla escala foi o que mais se aproximou das velocidades axiais elevadas, observadas experimentalmente junto ao eixo, mas ainda assim, o valor previsto foi inferior a 50% do valor verificado no ponto experimental mais próximo do eixo. O valor da coordenada radial onde ocorre a mudança de sinal do componente axial da velocidade

– que corresponde ao ponto de reversão do fluxo, na seção considerada – foi reproduzido razoavelmente por todos os modelos.

Finalmente, ao se analisar o gráfico 4.6.2-5, observa-se que nenhum dos modelos, apresentou boa concordância com os resultados experimentais. Em todos os modelos a velocidade axial se manteve, em praticamente toda a extensão radial, com valores negativos, enquanto que os experimentos mostraram o contrário, ou seja, que o componente radial, na seção considerada, manteve-se positivo em quase toda extensão radial.

Aparentemente, os modelos de turbulência, ao utilizarem o conceito de viscosidade turbulenta, apresentaram um efeito difusivo muito elevado que propagou o efeito de vórtice forçado sobre todo o domínio. Isso parece confirmar que, independentemente da variante utilizada, esse tipo de modelo não é de grande utilidade para o estudo do escoamento em hidrociclones, onde os efeitos inerciais são relativamente mais significativos

Outro aspecto que merece alguns comentários são as condições de fluxo utilizadas do experimento de Knowles.

A vazão de alimentação utilizada foi bastante reduzida, praticamente correspondendo ao menor valor da faixa de vazões utilizada no experimento de 1952 de Kelsall (vide referência em Knowles et al [1973]), que utilizou um hidrociclone de dimensões menores. O experimento de Ohasi e Maeda, também mencionado no trabalho de Knowles, que utilizou um hidrociclone de dimensões muito semelhantes ao utilizado por Knowles, realizou-se com uma vazão cerca de 2.3 vezes maior.

É evidente que mesmo que se considere que as condições operacionais do experimento sejam inadequadas para os objetivos do equipamento, isso não justifica o baixo desempenho do modelo na previsão de variáveis fluido dinâmicas, entretanto verifica-se, em simulações com outras condições de alimentação, que com o aumento da vazão de alimentação e o aumento do efeito centrífugo decorrente, ocorre uma tendência mais acentuada à formação do perfil radial de vórtice livre para o componente azimutal da velocidade. Isso será mostrado do na seção 4.7.

Finalizando esta análise, podemos concluir que os resultados obtidos recomendam a utilização de modelos de turbulência capazes de lidar com as características anisotrópicas do problema, como abordado na seção 4.9. Além disso, a disponibilização de mais dados experimentais, particularmente das grandezas turbulentas, também contribuiria para permitir uma análise mais consistente.

4.7. Comparação dos modelos de turbulência, considerando o modelo numérico simplificado – simetria axial e geometria/malha simplificada

4.7.1. Introdução

As simulações, cujos resultados são aqui descritos, foram realizadas levando-se em consideração as condições de alimentação descritas na seção 4.5.2, sob a denominação de “segundo conjunto de condições (comparação dos modelos de turbulência)”. O componente radial da velocidade, adotado na alimentação, de 0.343 m/s foi calculado de modo a resultar numa vazão de alimentação da ordem de 100 litros/min, que se constitui num valor compatível com os valores operacionais dos hidrociclones para águas oleosas.

A área total da superfície cilíndrica considerada como seção de alimentação é dada por:

$$A_{ent} = \pi D h$$

onde $D = 0.0762$ m é o diâmetro do hidrociclone (trecho cônico) e $h = 0.021$ m é a altura da superfície cônica da seção de alimentação. Portanto a área da seção de alimentação é dada por:

$$A_{ent} = 0.005027 \text{ m}^2$$

Com o componente da velocidade normal à essa área é $v = 0.343$ m/s, temos que a vazão total de alimentação é dada por:

$$Q = A_{ent} v = 0.0017243 \text{ m}^3/\text{s}$$

ou ≈ 103 litros/minuto ($6.2 \text{ m}^3/\text{h}$).

Esta seção está estruturada da seguinte forma:

Inicialmente discute-se a necessidade de utilizar-se um modelo de turbulência que seja válido para regiões com baixo número de Reynolds, ou seja, regiões onde os efeitos viscosos não podem ser desprezados. Compara-se o desempenho de um modelo desse tipo com um modelo que utiliza condições de transição (lei de parede).

Descrevem-se, em seguida, os resultados obtidos utilizando-se diversos modelos de turbulência. Discutem-se e comparam-se esses resultados, apresentando-se as conclusões.

4.7.2. A utilização de modelos para baixos número de Reynolds alternativamente à consideração dos modelos convencionais com a lei de parede

A descrição do modelo para baixos números de Reynolds utilizado será feita a seguir.

Trata-se aqui da utilização da adaptação do modelo k - ε proposta por Lam-Bremhorst (Patel et al. [1984] – ver referência em Wilcox [2000]). Nesse caso algumas das constantes do modelo k - ε convencional – para altos valores do número de Reynolds – são multiplicadas por funções de parâmetros adimensionais que levam em consideração a relação entre os efeitos turbulentos e os efeitos viscosos.

Nesse modelo as constantes c_μ , $c_{\varepsilon 1}$ e $c_{\varepsilon 2}$ (vide seção 3.2.2) são multiplicadas respectivamente por:

$$f_\mu = \left[1 - \exp(-0.0165 \text{Re}_n)^2 \right] \left(1 + \frac{20.5}{\text{Re}_t} \right)$$

$$f_1 = 1 + \left(\frac{0.05}{f_\mu} \right)^3$$

$$f_2 = 1 - \exp(-\text{Re}_t^2)$$

onde os parâmetros que caracterizam a relação entre os efeitos viscosos e turbulentos são dados por:

$$\text{Re}_n = \frac{\sqrt{k} y_w}{\nu}$$

$$\text{Re}_t = \frac{k^2}{\varepsilon \nu}$$

onde y_w é a distância à parede. Os valores das funções que multiplicam as constantes tendem a zero quando a intensidade de turbulência torna-se elevada, ou seja, quando os dois parâmetros acima assumem valores elevados.

Esse modelo considera as seguintes condições de contorno, nas paredes, para as variáveis turbulentas:

$$y_w = 0 \text{ então } k = 0 \text{ e } \frac{d\varepsilon}{dy_w} = 0$$

A lei de parede utilizada é a lei logarítmica para as condições de equilíbrio local, ou seja, admite-se que nessa região junto à parede os efeitos convectivos são desprezíveis e, portanto, a taxa local de produção da energia turbulenta é igual à taxa de dissipação.

As equações correspondentes foram descritas na seção 4.3.1 e não serão aqui repetidas.

Os resultados obtidos considerando-se as duas abordagens para as regiões de baixa intensidade de turbulência são mostrados a seguir.

Mostram-se, a seguir, os resultados obtidos para os perfis dos três componentes da velocidade média, considerando-se a simulação com os seguintes modelos : k - ε para altos números de Reynolds, com constantes modificadas para levar em conta a rotação (vide seção 3.2.3) e k - ε para baixos números de Reynolds, acima descrito.

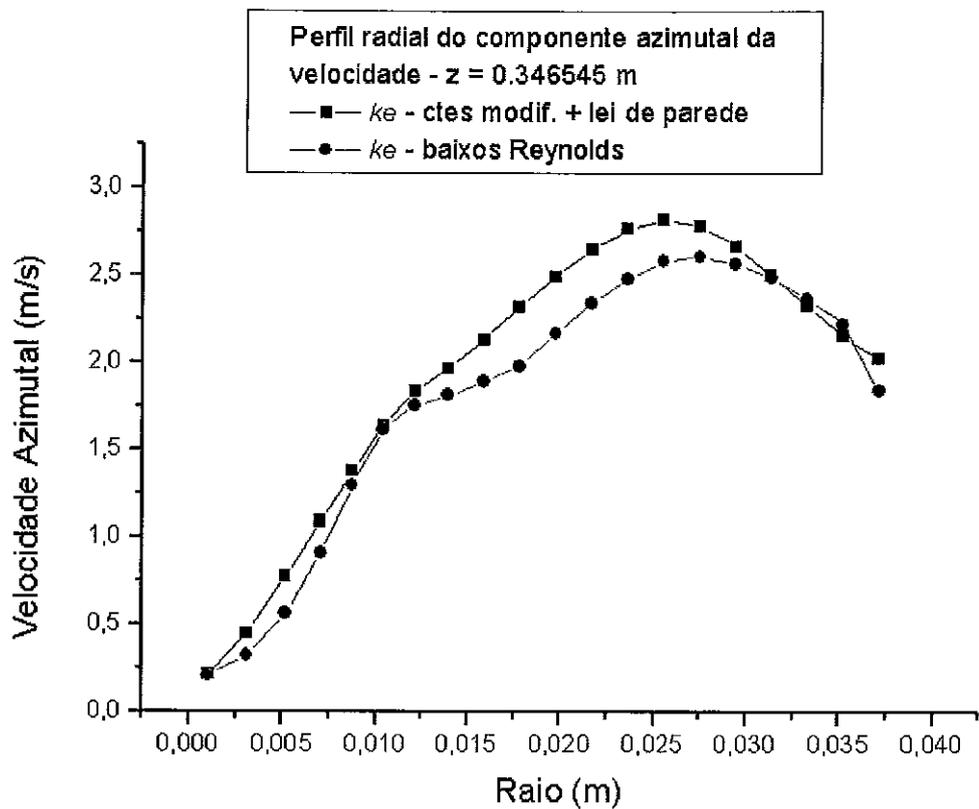


Gráfico 4.7.2-1 – Comparação dos perfis de velocidade azimutal

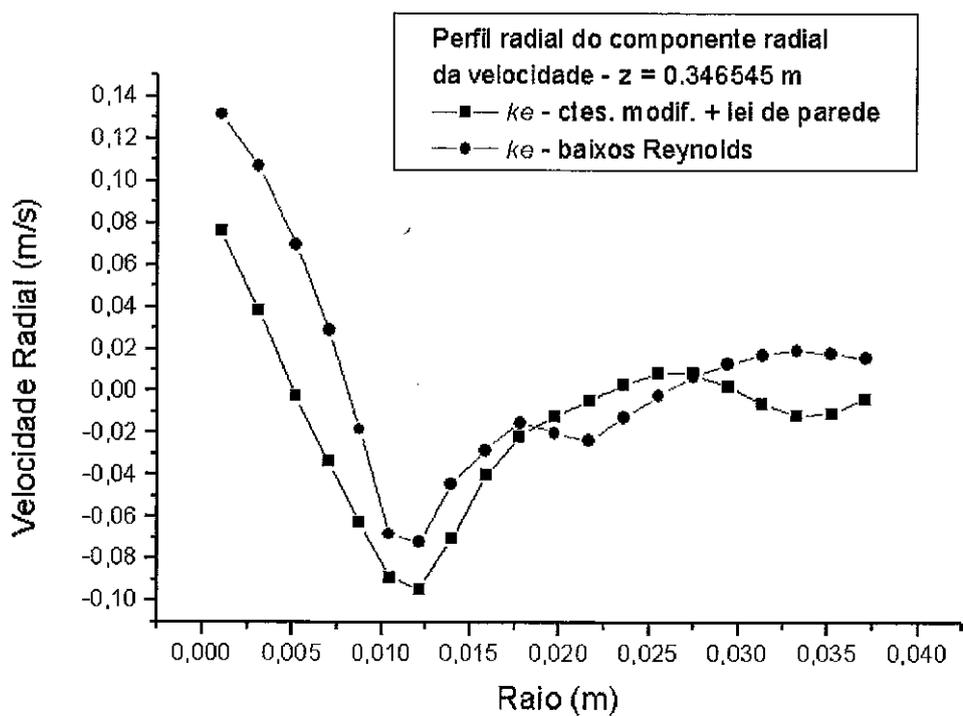


Gráfico 4.7.2-2 – Comparação dos perfis de velocidade radial

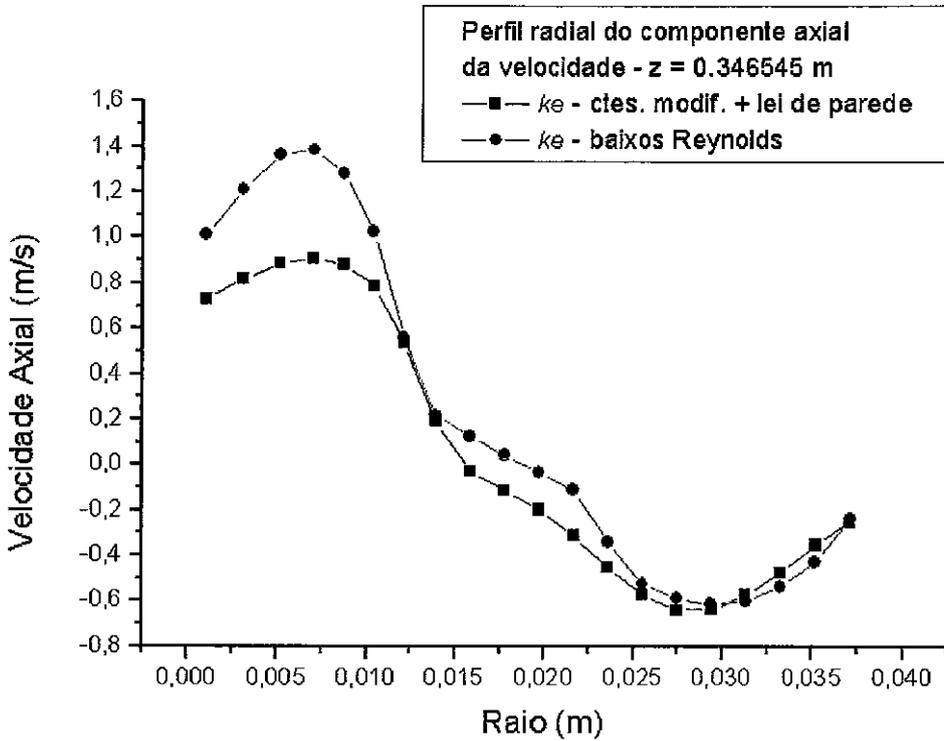


Gráfico 4.7.2-3 – Comparação dos perfis de velocidade axial

Como pode ser visto dos gráficos 4.7.2-1 a 4.7.2-3, os perfis de velocidade obtidos, considerando-se os dois modelos citados, apresentam formas similares, embora as magnitudes das velocidades mostram alguns pontos com valores que diferem significativamente. A maior variação local é verificada no perfil do componente axial da velocidade para uma distância ao eixo que corresponde a cerca de 20% do raio máximo, quando a velocidade axial estimada pelo modelo para baixos Reynolds é cerca de 60% superior a velocidade axial do modelo com constantes modificadas.

Verifica-se entretanto, que mesmo com a redução da energia cinética turbulenta em praticamente toda extensão radial do hidrociclone, as diferenças apresentadas nos perfis de velocidade média não fizeram com que esses perfis assumissem formas próximas dos observados experimentalmente. Ou seja, a redução na difusão turbulenta não foi suficiente para produzir o efeito de vórtice livre no componente azimutal da velocidade, como pode ser visto na figura 4.7.2-1.

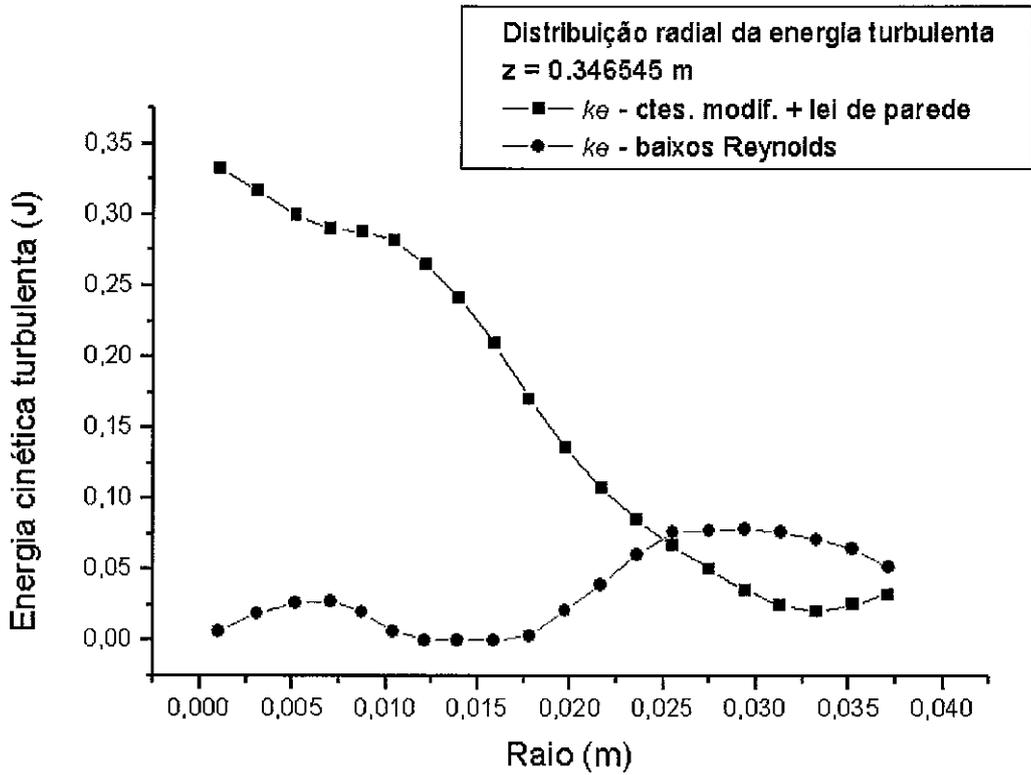


Gráfico 4.7.2-4 – Comparação da distribuição radial da energia turbulenta

4.7.3. Comparação entre os resultados obtidos com diferentes modelos de turbulência considerando as simulações numéricas simplificadas– Apresentação e análise dos resultados obtidos

Realizaram-se simulações considerando-se os seguintes modelos de turbulência:

- Modelo $k\text{-}\epsilon$ de dupla escala
- Modelo $k\text{-}\epsilon$ convencional
- Modelo $k\text{-}\epsilon$ com constantes modificadas
- Modelo $k\text{-}\epsilon$ não linear (RNG)

Esses modelos foram apresentados e discutidos na seção 3. As características geométricas, as condições de contorno e a malha utilizada utilizadas nas simulações, foram apresentadas nas seções 4.2, 4.3 e 4.4.

Apresentam-se os gráficos obtidos para os perfis de velocidade em três seções transversais do hidrociclone. As localizações dessas seções estão indicadas na figura 4.7.3-1, abaixo. Inicia-se com o componente azimutal.

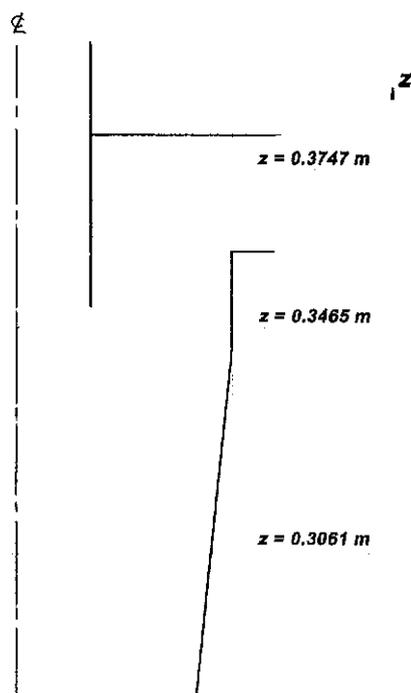


Figura 4.7.3-1 – Localização das seções cujos gráficos são apresentados
(a cota z é medida em relação à saída de *saída de fluido próxima ao vértice do trecho cônico* – ver figura 4.2.1-1)

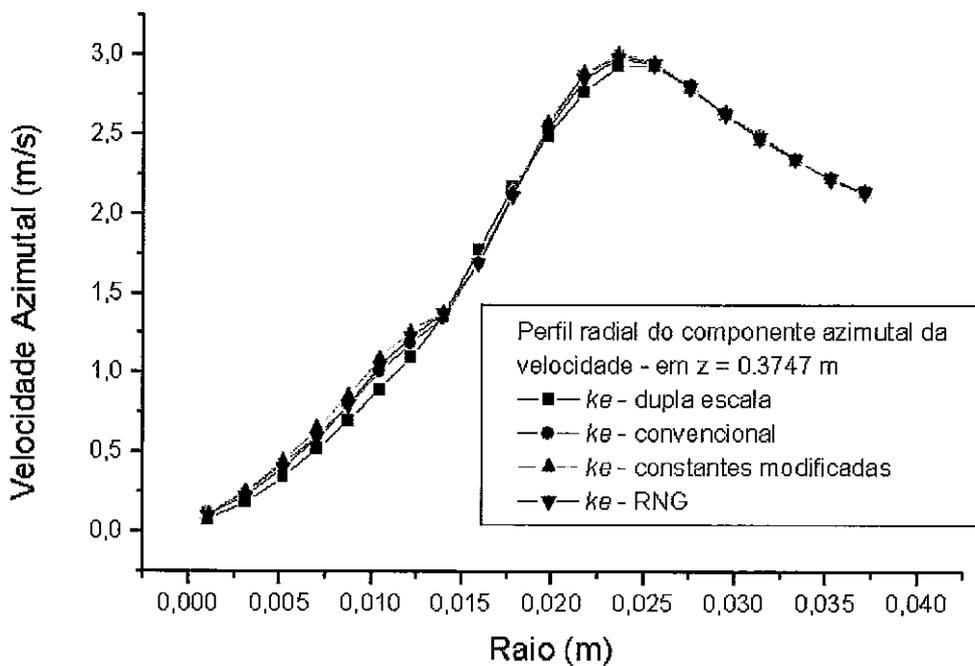


Gráfico 4.7.3-1 – Perfis da velocidade azimutal para cada modelo em $z = 0.3747$ m

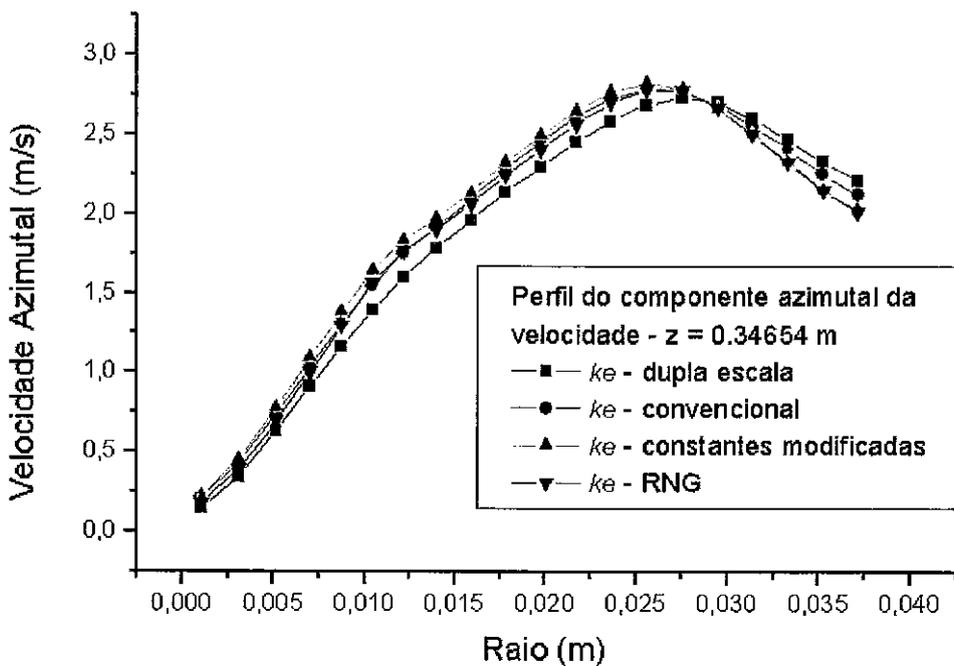


Gráfico 4.7.3-2 – Perfis da velocidade azimutal para cada modelo em $z = 0.34654$ m

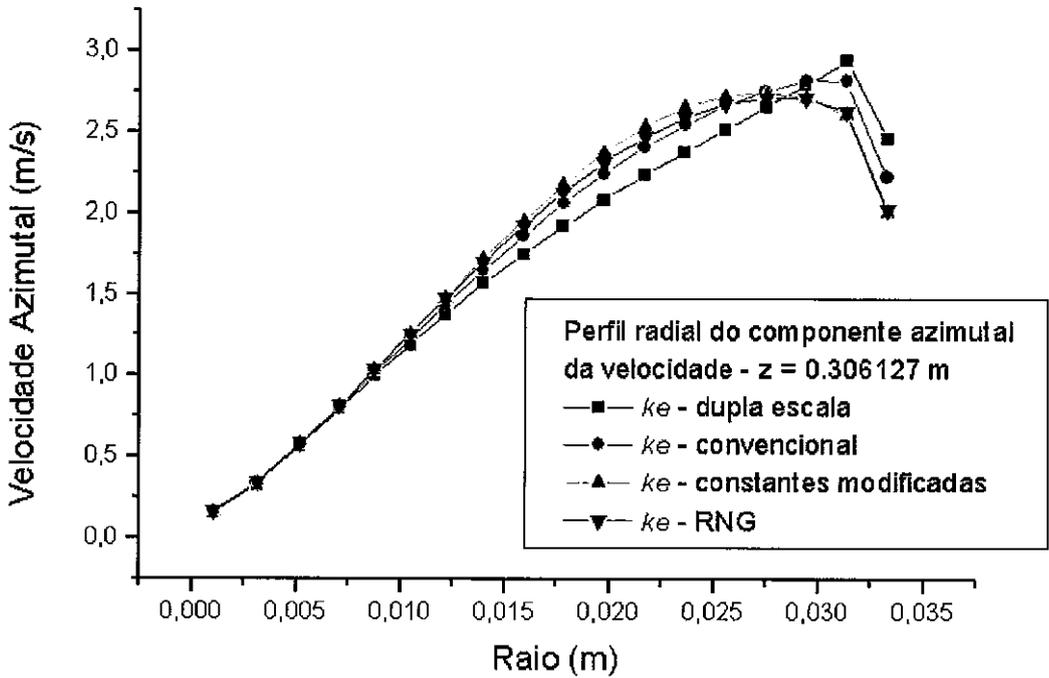


Gráfico 4.7.3-3 – Perfis de velocidade para cada modelo em $z = 0.306127$ m

Como pode ser observado dos gráficos acima, todos os modelos considerados conduziram a resultados muito próximos para os perfis do componente azimutal da velocidade. Particularmente na seção junto à alimentação, no trecho radial onde se verifica o comportamento de vórtice livre ($R > 0.025$ m), os resultados obtidos para cada um dos modelos foram os mesmos. As diferenças entre os resultados para cada modelo, observadas nessa seção foram, de fato, as menores em quase toda a extensão radial. Apresenta-se, a seguir, o componente radial.

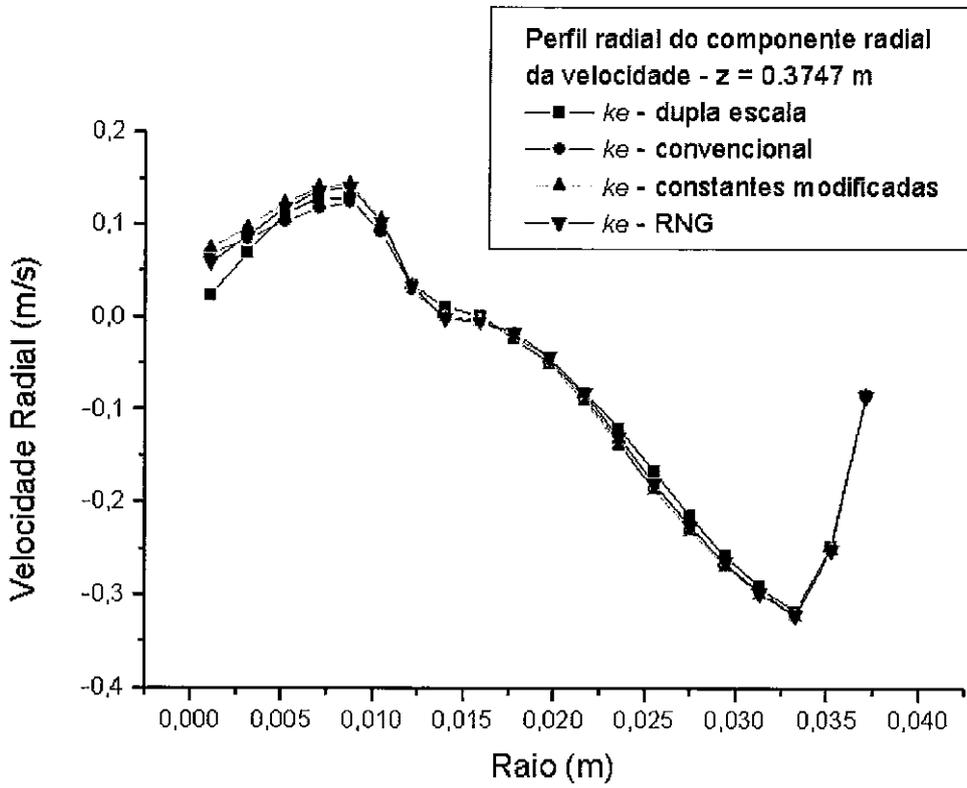


Gráfico 4.7.3-4 – Perfis da velocidade radial para cada modelo em $z = 0.3747$ m

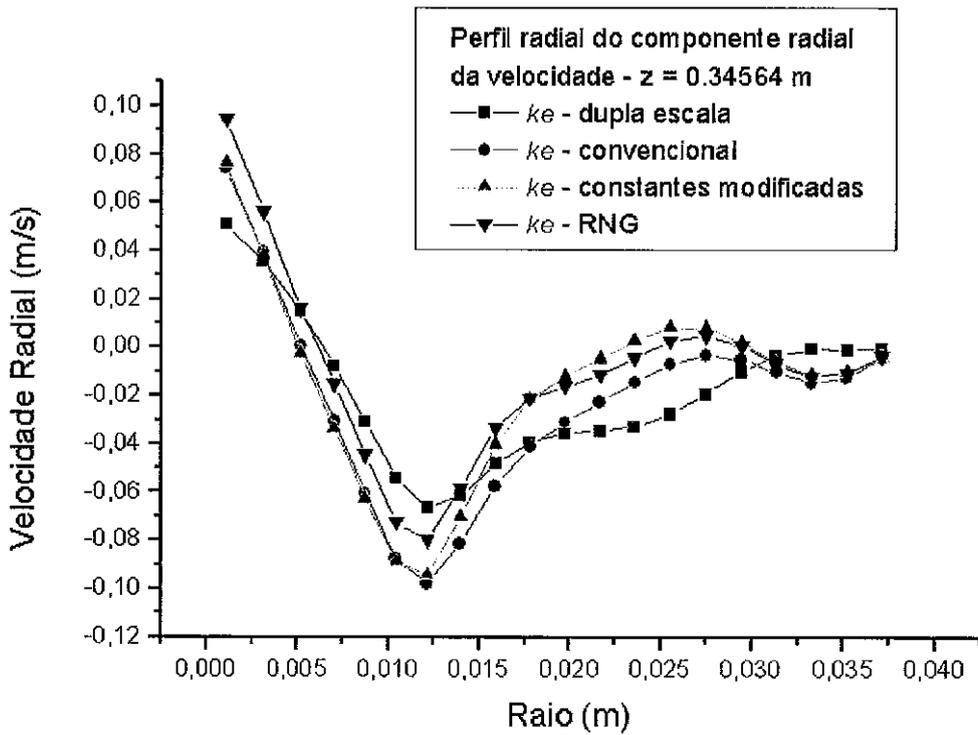


Gráfico 4.7.3-5 – Perfis da velocidade radial para cada modelo em $z = 0.34564$ m

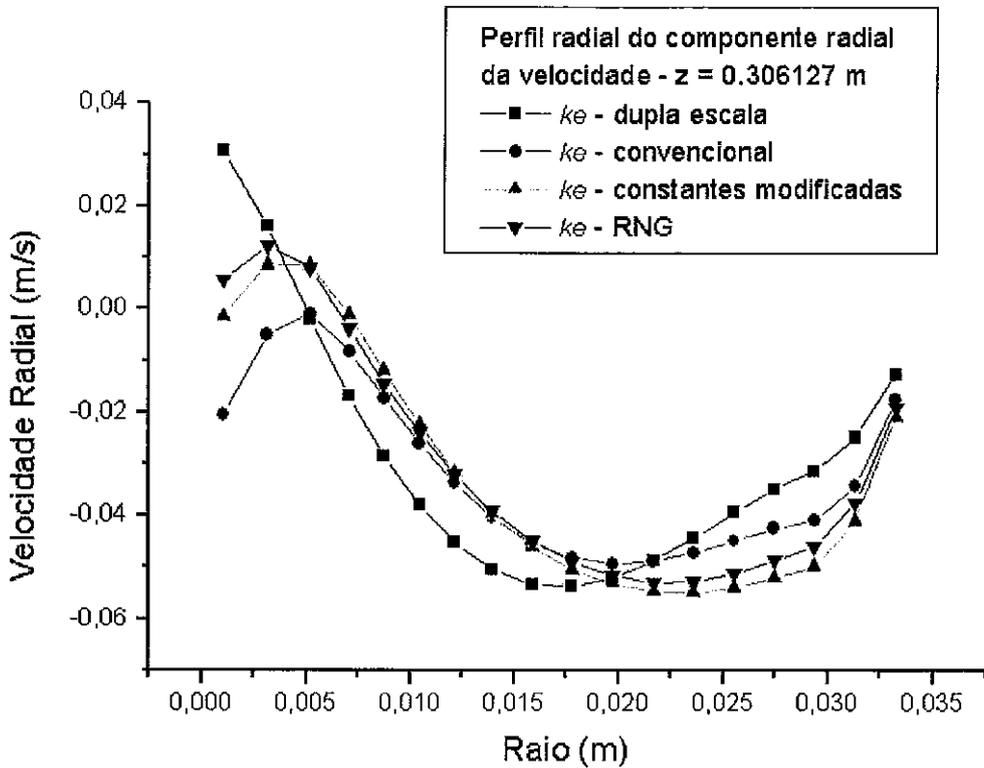


Gráfico 4.7.3-6 – Perfis da velocidade radial para cada modelo em $z = 0.306127$ m

Observa-se da comparação dos gráficos 4.7.3-4 a 4.7.3-6 que os perfis obtidos para o componente radial da velocidade apresentam valores negativos desse componente, na maior parte da extensão radial, assumindo valores positivos apenas numa pequena região mais próxima ao eixo, esse comportamento é esperado e devido à recirculação, como pode ser observado da figura 4.7.3-2, onde a última carreira de vetores velocidade mostra, na célula mais próxima ao eixo, o surgimento de um pequeno componente radial positivo. Além disso, observa-se nos perfis do componente radial da velocidade, uma variação mais acentuada nos resultados obtidos para os diferentes modelos de turbulência, do que a observada nos perfis do componente azimutal. Observa-se ainda, que o modelo $k-\epsilon$ de dupla escala foi o que apresentou resultados que mais se afastaram daqueles obtidos pelos demais modelos. Não somente as magnitudes obtidas no modelo $k-\epsilon$ de dupla escala afastaram-se mais das obtidas com os demais modelos – vide por exemplo o comportamento para $R > 0.0225$ m no gráfico 4.7.3-5 –, mas os gradientes radiais do componente radial da

velocidade assumiram, para esse modelo, sinal diferente dos demais modelos – veja-se, por exemplo, o comportamento para $R > 0.005$ m no gráfico 4.7.3-6.

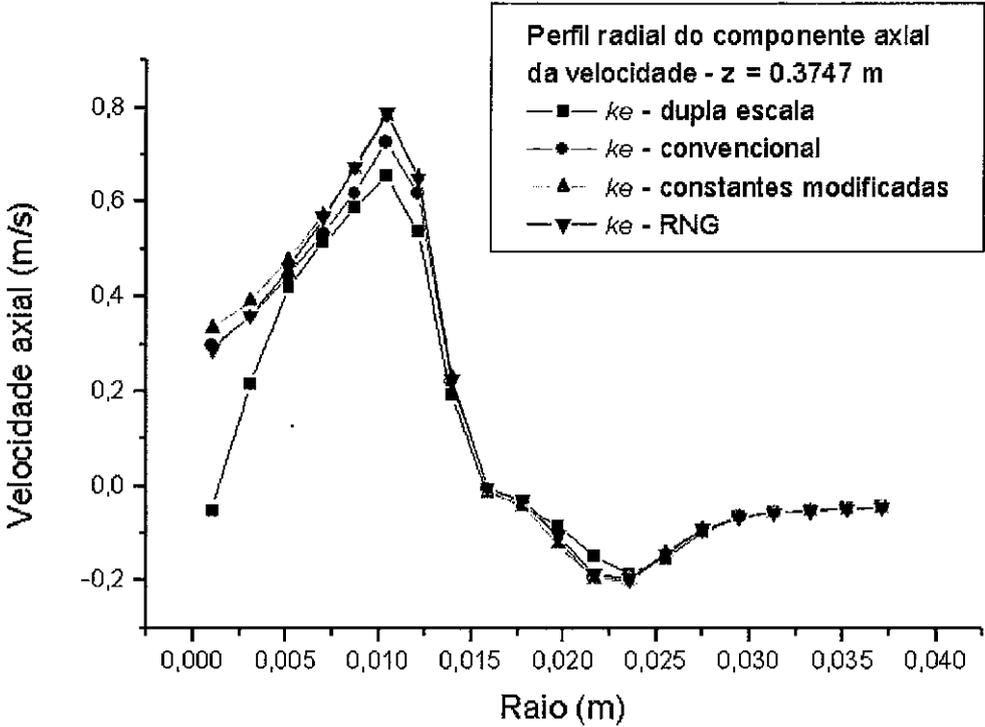


Gráfico 4.7.3-7 – Perfis da velocidade axial para cada modelo em $z = 0.3747$ m

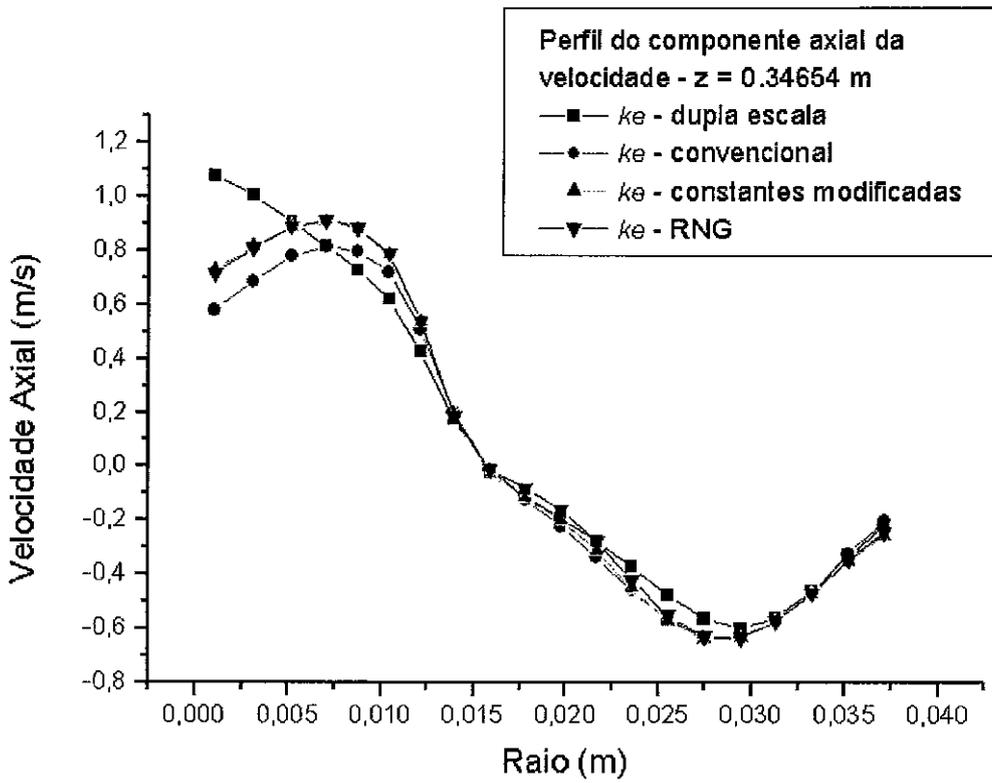


Gráfico 4.7.3-8 – Perfis da velocidade axial para cada modelo em $z = 0.34654$ m

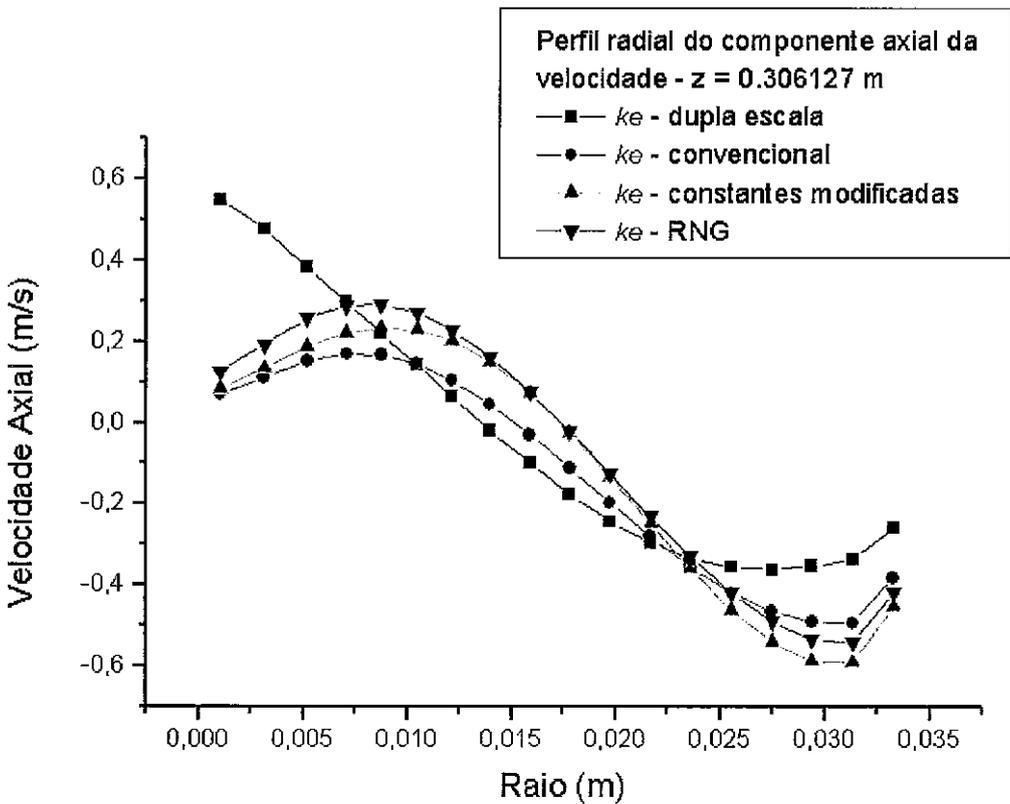


Gráfico 4.7.3-9 – Perfis da velocidade axial para cada modelo em $z = 0.306127$ m

Observa-se dos gráficos 4.7.3-7 a 4.7.3-9 que os resultados obtidos para os perfis do componente axial da velocidade, confirmam a reversão de direção axial do escoamento, ao assumir valores positivos junto ao eixo do equipamento e negativos na região mais próxima à parede. Além disso, observa-se também que, similarmente ao ocorrido com os perfis do componente radial, foi o modelo $k-\epsilon$ de dupla escala que mais se afastou dos resultados obtidos com os demais modelos. Isso se verificou principalmente para baixos valores do raio, ou seja, na região mais próxima ao eixo. No caso da seção $z = 0.3747$ m, esse modelo foi o único a resultar em velocidade negativa na célula mais próxima ao eixo do hidrociclone. É interessante ainda observar que, nessa mesma região próxima ao eixo, nas duas outras seções analisadas, o modelo $k-\epsilon$ de dupla escala foi o que apresentou valores positivos mais elevados para o componente axial da velocidade.



Figura 4.7.3-2 – Detalhe dos vetores velocidade – modelo $k-\epsilon$ de dupla escala



Figura 4.7.3-3 – Detalhe dos vetores velocidade – modelo $k-\epsilon$ com constantes modificadas

Comparando-se a distribuição de velocidades obtida com o modelo $k-\varepsilon$ de dupla escala (figura 4.7.3-2), com a obtida com o modelo $k-\varepsilon$ com constantes modificadas para a rotação (figura 4.7.3-3), verifica-se, como foi mencionado quando foram comparados os perfis de velocidade axial, que o componente axial mais elevado é obtido com o modelo de dupla escala.

Esse resultado é fisicamente consistente, uma vez que o maior gradiente axial de pressão ocorre sobre o eixo, posto que os menores valores da pressão, decorrentes do efeito centrífugo, são atingidos dentro do *vortex finder* junto à *saída de fluido próxima à seção de alimentação*. (Ver figura 4.7.3-4).

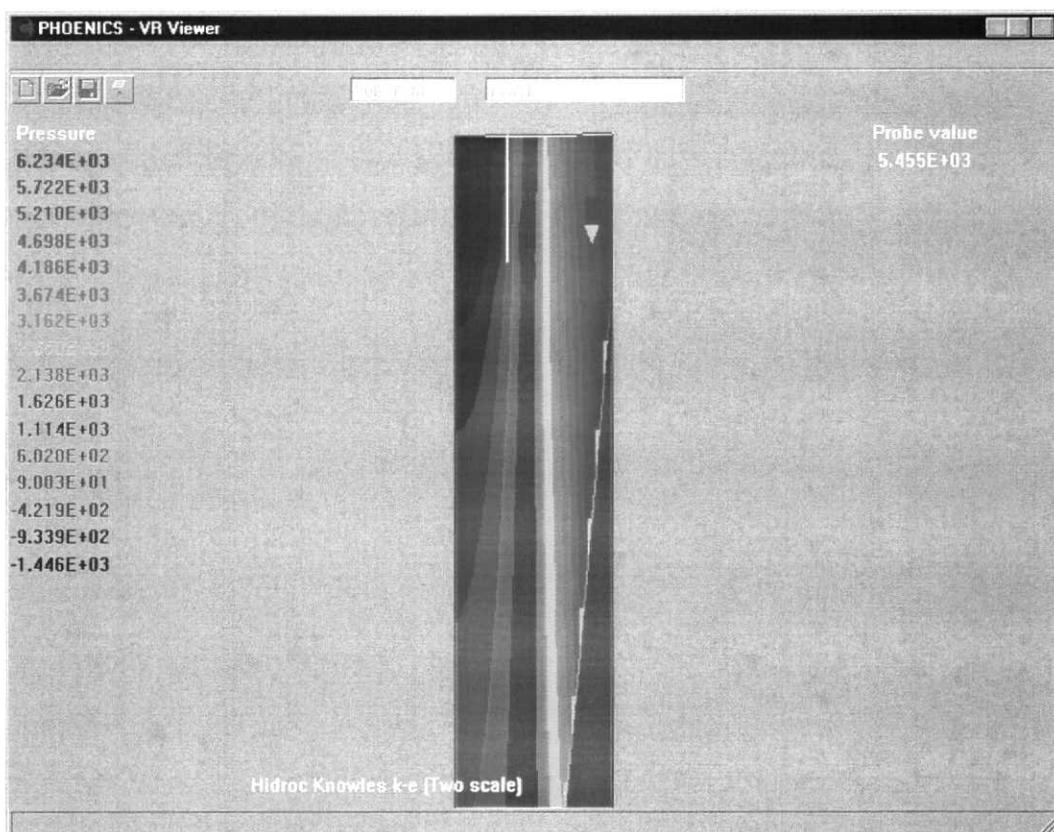


Figura 4.7.3-4 – Distribuição da pressão – modelo $k-\varepsilon$ de dupla escala

Passa-se a analisar os resultados obtidos relativamente às grandezas turbulentas.

Tanto no modelo $k-\varepsilon$ com constantes modificadas, quanto no modelo $k-\varepsilon$ não linear (RNG) a energia cinética turbulenta concentrou-se na região próxima à entrada

do *vortex finder*, onde ocorrem os maiores gradientes de velocidade, particularmente do componente axial. Isso pode ser observado das figuras 4.7.3-5 e 4.7.3-6.

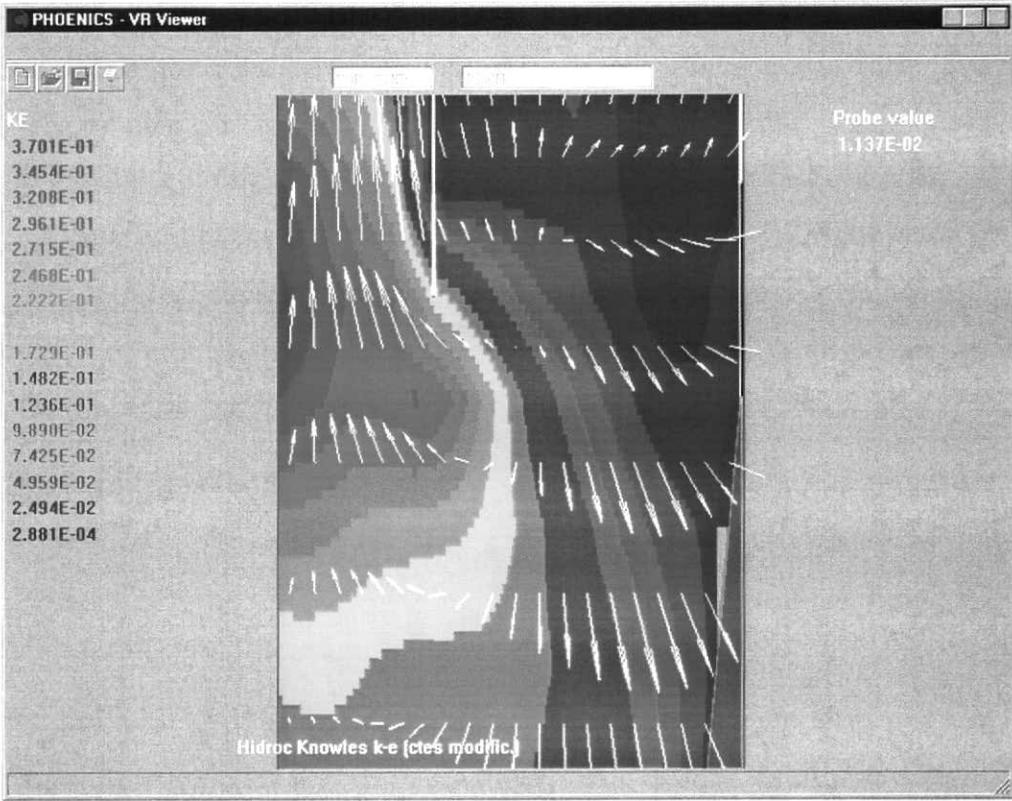


Figura 4.7.3-5 – Detalhe da distribuição da Energia Cinética Turbulenta (k - ϵ ctes. modif.)

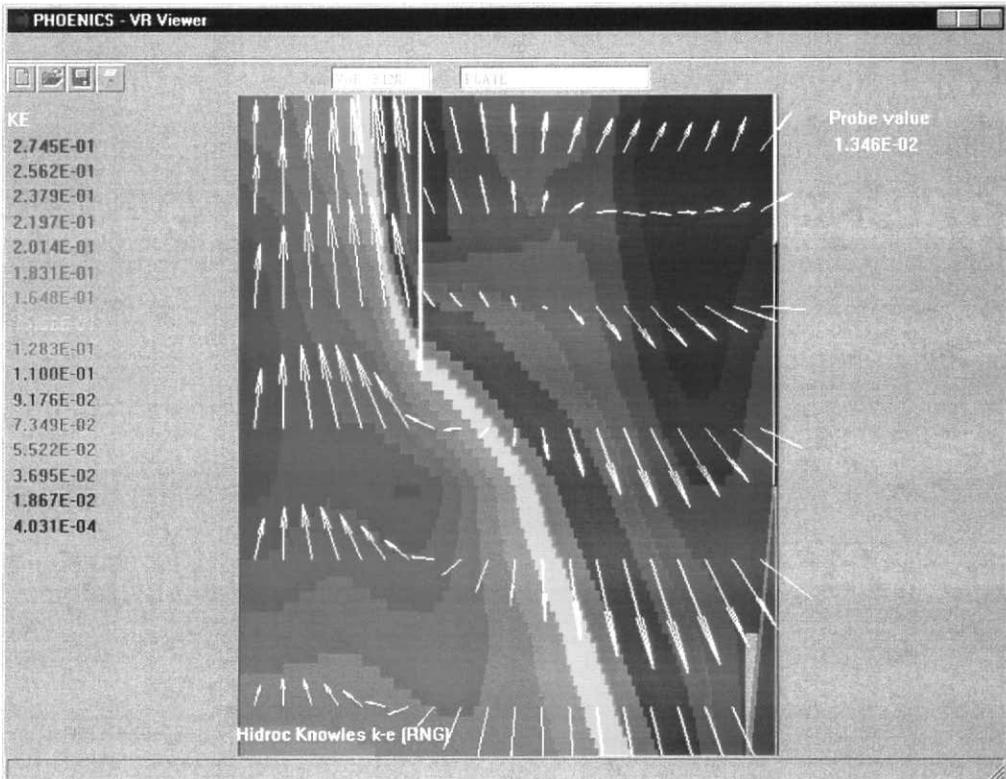


Figura 4.7.3-6 – Detalhe da distribuição da energia cinética turbulenta – mod. k - ϵ RNG

A simulação com o modelo de dupla escala mostrou que a energia turbulenta na faixa de produção do espectro concentrou-se numa região mais afastada do eixo e apenas a energia cinética turbulenta da faixa dissipativa do espectro é que se concentrou na região mostrada pelos modelos anteriormente citados. Isso pode ser visto nas figuras 4.7.3-7 e 4-7.2-8.

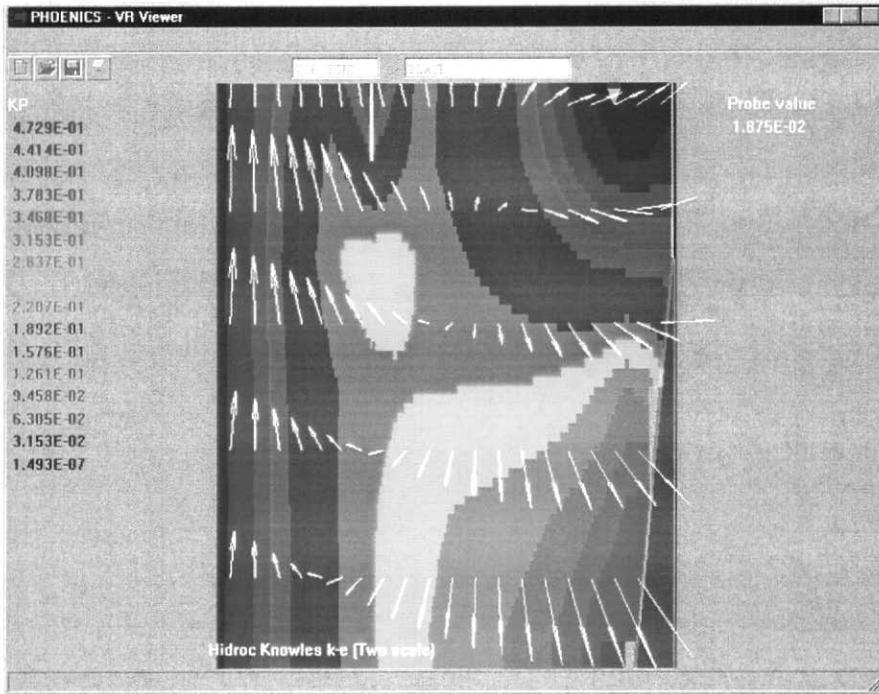


Figura 4.7.3-7 – Detalhe da energia turbulenta na faixa de produção k_p (modelo $k-\epsilon$ dupla escala)

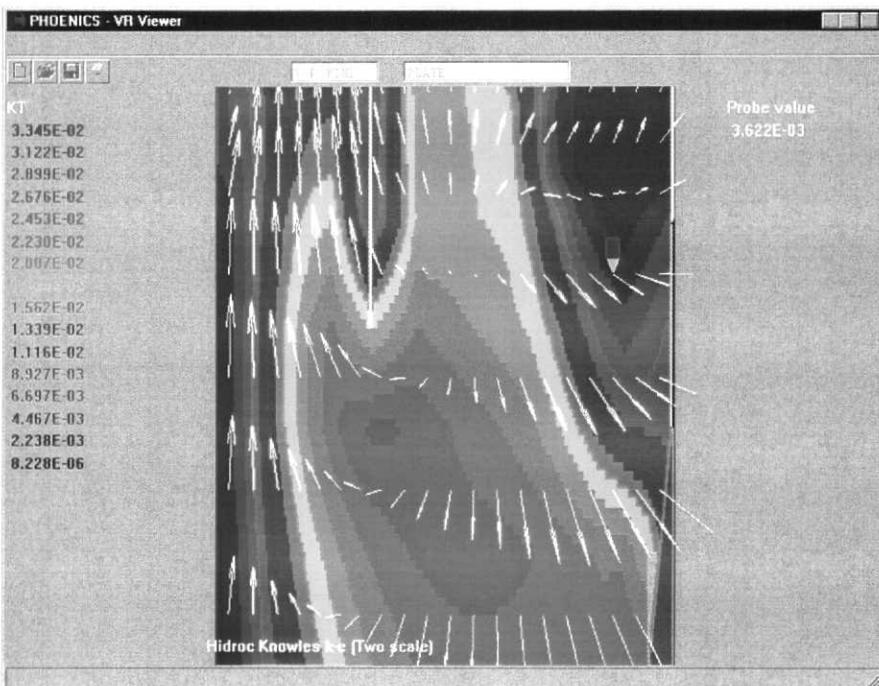


Figura 4.7.3-8 – Detalhe da energia turbulenta na faixa de dissipação k_t (mod. $k-\epsilon$ dupla escala)

Os gráficos abaixo mostram o comportamento radial das grandezas turbulentas nas mesmas seções indicadas na figura 4.7.3-1

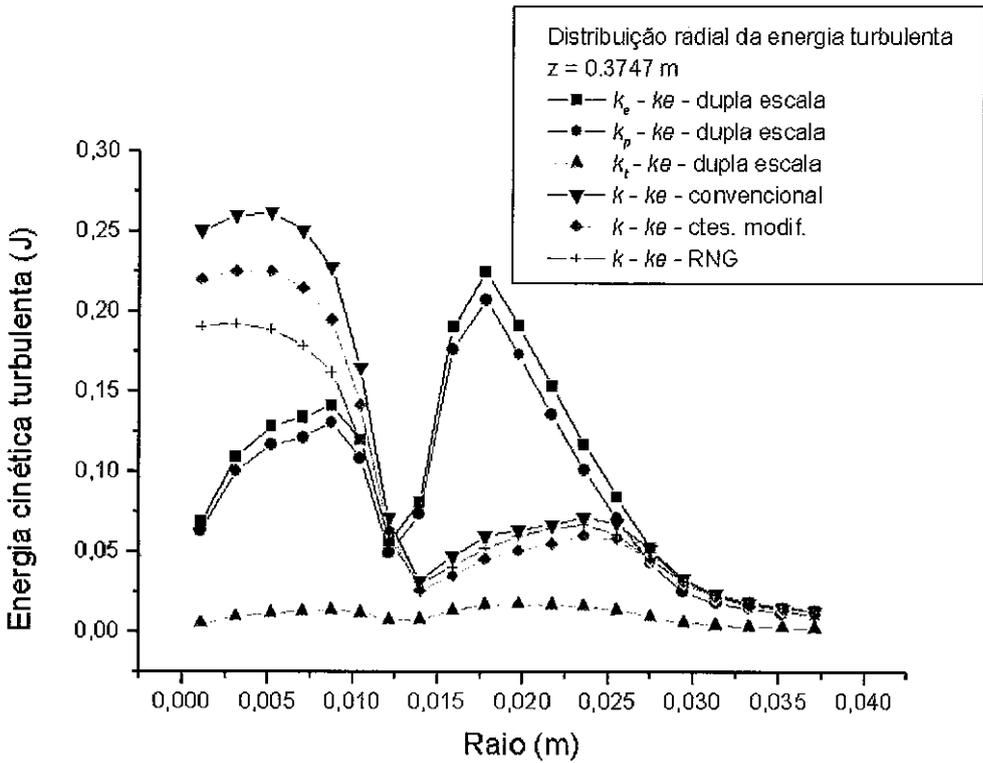


Gráfico 4.7.3-9 – Perfis da energia turbulenta para cada modelo em z = 0.3747 m

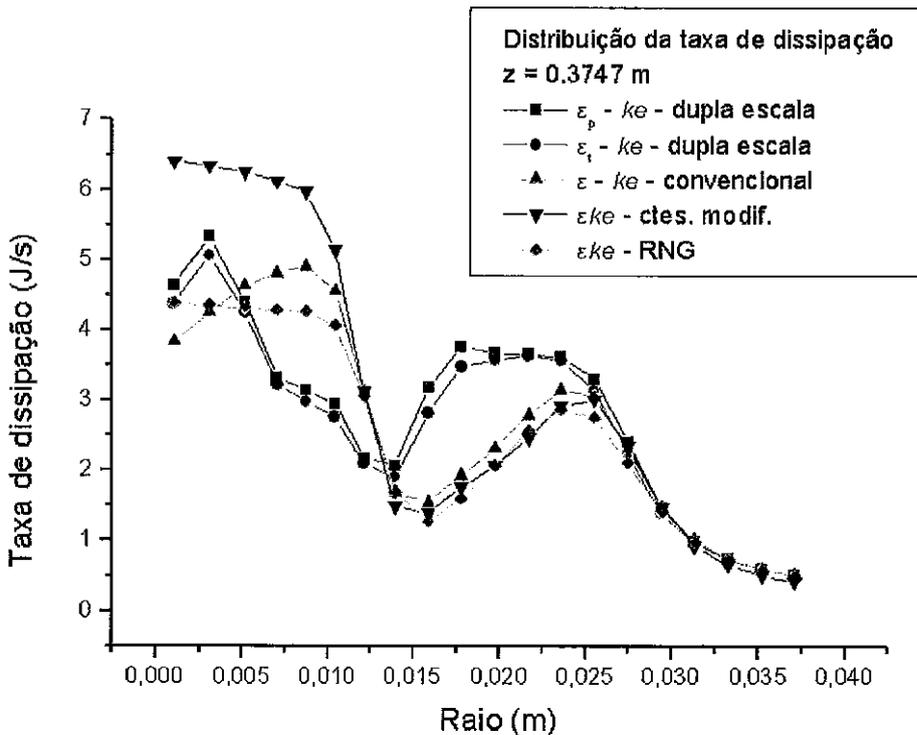


Gráfico 4.7.3-10 – Perfis da taxa de dissipação para cada modelo em z = 0.3747 m

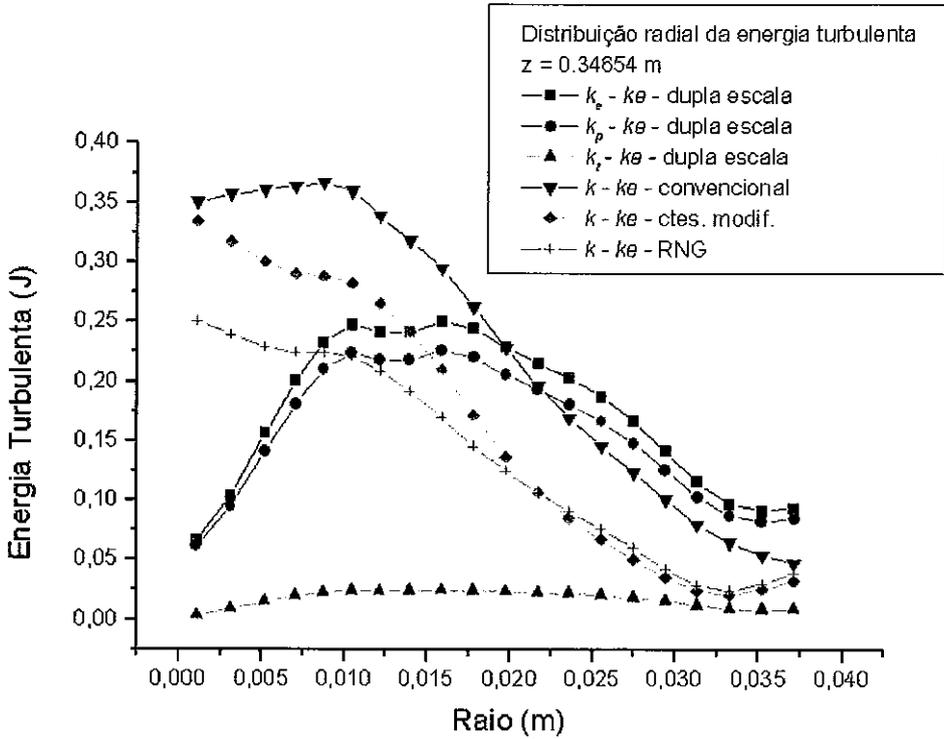


Gráfico 4.7.3-11 – Perfis da energia turbulenta para cada modelo em $z = 0.34654$ m

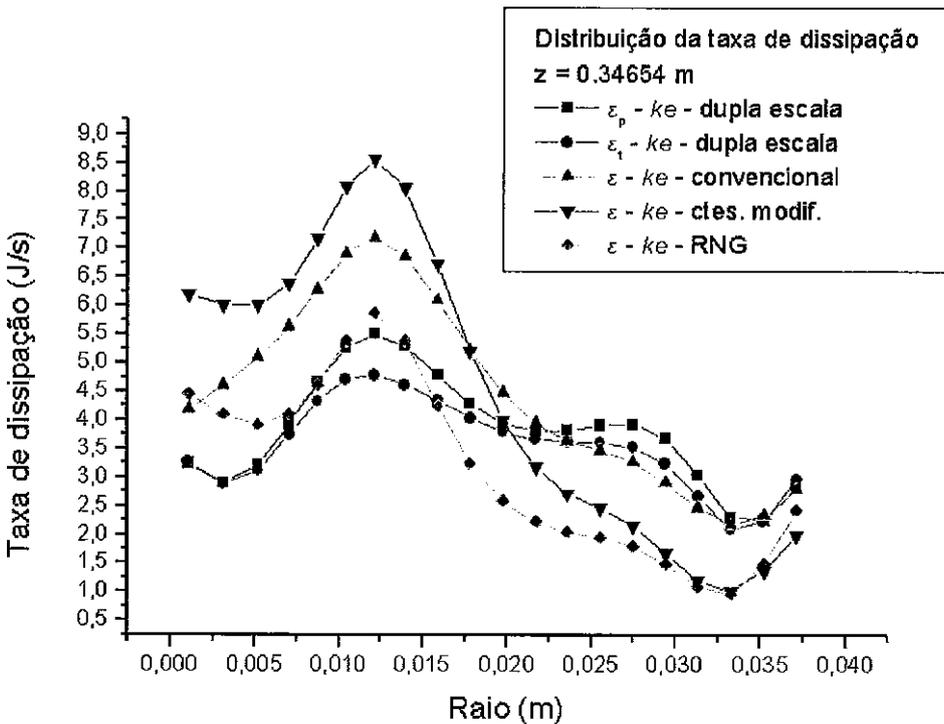


Gráfico 4.7.3-12 – Perfis da taxa de dissipação para cada modelo em $z = 0.34654$ m

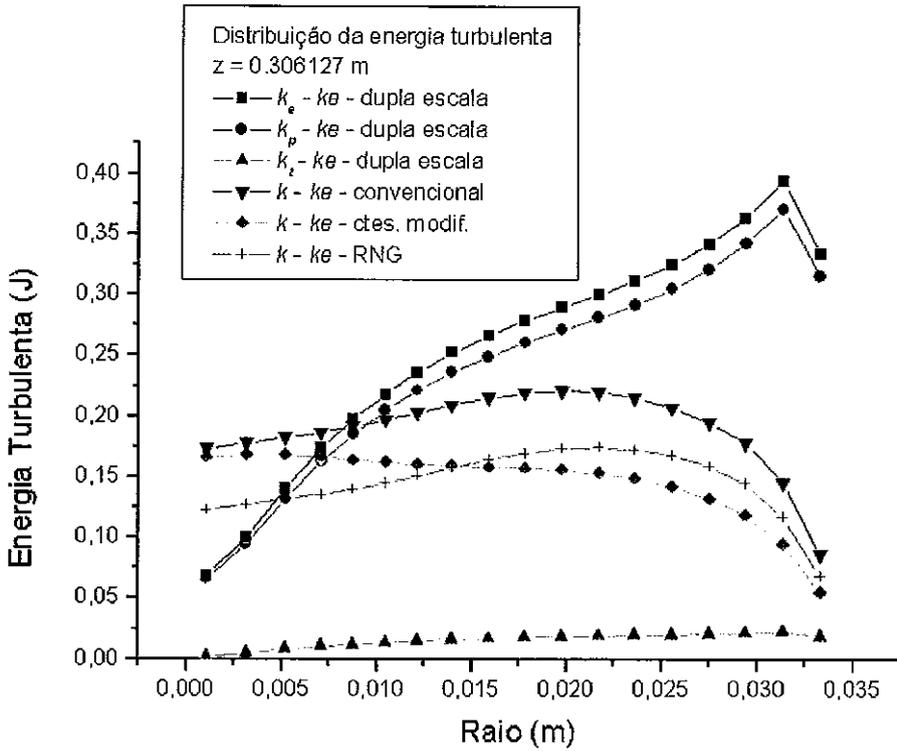


Gráfico 4.7.3-13 – Perfis da energia turbulenta para cada modelo em z = 0.3061 m

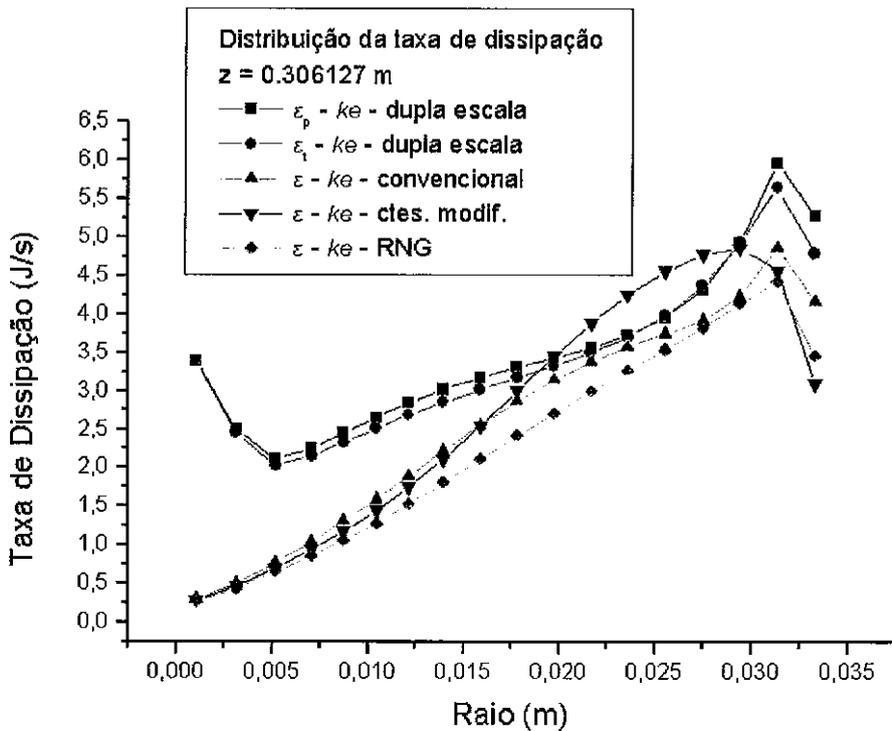


Gráfico 4.7.3-14 – Perfis da taxa de dissipação para cada modelo em z = 0.3061 m

4.8. Discussão de das simplificações adotadas – Alguns resultados considerando o problema bifásico

4.8.1. Introdução

Nas seções anteriores deste texto, ao focar-se a modelagem do escoamento no hidrociclone, duas hipóteses foram permanentemente consideradas, sem discussões complementares sobre os seus respectivos limites de validade. A primeira dessas hipóteses é a axissimetria, que, embora seja uma condição a que o escoamento no hidrociclone, por restrições geométricas, tende forçosamente, pode não ser uma aproximação adequada principalmente nas vizinhanças da região de alimentação. A outra hipótese diz respeito à influência sobre o escoamento da presença de fases distintas no interior do hidrociclone. Nesta seção vão-se abordar com mais detalhe esses aspectos.

4.8.2. Axissimetria

A consideração da simetria axial quando da modelagem do escoamento no interior de hidrociclones, principalmente ao se considerar modelos de turbulência diferenciais, constitui-se numa hipótese bastante útil para a redução da carga computacional, relativamente à consideração do problema totalmente tridimensional.

Além disso, como foi mencionado acima, pela própria geometria do equipamento, as condições de escoamento impostas ao fluido tendem à axissimetria pelo menos nas regiões afastadas da alimentação. Resultados de medições experimentais, onde o modelo físico utilizado possui um ponto único ponto de alimentação no cabeçote do equipamento, tendem a comprovar que a hipótese de simetria axial é uma aproximação relativamente satisfatória – vide, por exemplo, Small et al. [1996].

No caso dos hidrociclones empregados na indústria do petróleo, particularmente nos hidrociclones para águas oleosas, os efeitos das condições não axissimétricas da entrada são menos consideráveis. Isso se deve às duas razões mencionadas na seção 2. A primeira delas é a utilização de dois bocais de

alimentação situados em posições diametralmente opostas, o que obviamente torna o escoamento, mesmo na seção de alimentação, próximo da axissimetria. A outra razão é o aspecto muito mais alongado do hidrociclone para líquidos, relativamente aos hidrociclones para sólidos, o que faz com que, naqueles equipamentos, a região com efeitos de eventuais perturbações da entrada, seja uma fração menos significativa do comprimento do hidrociclone, do que nesses equipamentos.

Small, Fitt e Thew [1996] analisaram os efeitos da consideração da tridimensionalidade na simulação numérica da turbulência em hidrociclones. Esses autores concluíram que a hipótese de axissimetria, utilizada na quase totalidade das simulações do escoamento nesses equipamentos, embora razoável, pode ser muito restritiva se considerarmos as grandes dimensões do bocal de alimentação relativamente ao corpo cilíndrico do hidrociclone. Esses autores chamam ainda a atenção para a consideração dos efeitos da imposição de condições de contorno restritivas e, em princípio, não conhecidas, sobre os resultados da simulação.

Na seção 4.9., faremos simulações sobre o modelo tridimensional, com uma malha mais fina, visando determinar os efeitos da não simetria axial na região de alimentação, bem como discutiremos mais detalhadamente as considerações a serem realizadas para se evitar o mencionado problema das condições de contorno.

4.8.3. Aspectos gerais sobre os efeitos da fase dispersa

Para o caso dos hidrociclones de aplicação na indústria do petróleo deve-se distinguir, inicialmente, entre os hidrociclones que visam a remoção de óleo previamente ao descarte da água produzida, visando controle da poluição ambiental, dos hidrociclones, ainda em fase de desenvolvimento, como mencionado na seção 2.0, que se destinam à desidratação do óleo.

No caso dos hidrociclones para a separação das chamadas águas oleosas na indústria do petróleo, o problema dos efeitos da fase dispersa sobre o escoamento é, de fato, de pequena importância. Esses equipamentos recebem correntes de águas com teores de óleo que ficam abaixo de 2000 ppm ou 0.2% em volume. Esse óleo está disperso na água em gotículas cujo tamanho médio é inferior a 40 μm . Teores

maiores de óleo, quando presentes em correntes de águas contaminadas, estão usualmente associados a maiores diâmetros médio de gotículas, e sua separação se dá de forma relativamente rápida em decantadores gravitacionais, que são empregados usualmente nas instalações de produção de petróleo, a montante dos hidrociclones.

Sob o efeito do campo centrífugo no interior do hidrociclone as gotículas de óleo (menos denso que a água) tendem a migrar para o eixo do equipamento, entrando na região de fluxo reverso (recirculação). Desse modo a corrente de fluido que deixa o hidrociclone pelo bocal de *saída de fluido próxima à seção de alimentação* tende a ser mais concentrada em óleo que a corrente de alimentação, enquanto que a que sai pelo bocal de *saída de fluido próxima ao vértice do trecho cônico* tende a possuir uma concentração de óleo menor. Em face do baixo valor da concentração de óleo na alimentação, os efeitos da gotículas dispersas sobre a reologia da emulsão serão de maior importância na região do chamado “núcleo oleoso”, ao redor do eixo do equipamento. Entretanto, mesmo nessa região, a concentração de óleo mantém-se usualmente, conforme verificado nas instalações em operação, abaixo dos 10%.

Esse teor entretanto, já seria suficiente para alterar significativamente as propriedades reológicas do fluido que escoar nessa região relativamente às propriedades da água. A massa específica do fluido seria proporcional aos teores volumétricos das fases presentes e, portanto, no caso citado, admitindo-se uma diferença de densidade entre o óleo e a água de 15%, a massa específica da emulsão seria da ordem de 1.5% inferior à da água. Já no caso da viscosidade, uma emulsão com 10% em volume de fase dispersa pode apresentar uma viscosidade muito superior (em geral cerca de uma ordem de grandeza acima) do que a viscosidade da fase contínua. O cálculo da viscosidade da emulsão como uma média das viscosidades de cada fase, ponderada relativamente à concentração dessas fases, não constitui, portanto, uma aproximação aceitável. Esse crescimento da viscosidade das emulsões é particularmente acentuado na presença de quantidades diminutas de surfactantes nas superfícies das gotículas dispersas, que produzem mecanismos interfaciais que afetam substancialmente a resistência ao deslocamento entre camadas adjacentes de fluido. Essas substâncias contaminantes, cujas moléculas possuem uma parte hidrofílica e uma parte lipofílica, são bastante diversas e freqüentemente encontradas nas águas produzidas. Entretanto, os gradientes de velocidade elevados

presentes na região de recirculação do hidrociclone, ou seja, junto ao núcleo oleoso, fazem com que os efeitos da viscosidade do fluido sejam ordens de grandeza inferiores aos efeitos turbulentos, tornando os efeitos do eventual crescimento da viscosidade pouco significativos para o escoamento. Esse efeito entretanto, pode ser significativo para a análise da migração da gotícula dispersa no campo centrífugo, pois esse escoamento relativo da gotícula corresponde ao chamado *creeping flow*, onde os efeitos viscosos são altamente significativos.

No caso do hidrociclone para desidratação de óleo, que, como foi dito, encontra-se ainda em estágio de desenvolvimento, não se dispondo ainda de protótipos industriais confiáveis, o problema da presença de duas fases assume uma relevância considerável. Isso se deve ao fato de que a fase contínua óleo está “contaminada”, nesse caso, com um teor de fase dispersa água geralmente bem mais elevado do que os teores de óleo disperso no equipamento anteriormente descrito. Teores de água da ordem de 15%, na alimentação, estariam perfeitamente dentro da faixa de operação dos hidrociclones para desidratação de óleo. A água dispersa tenderia, pelo efeito centrífugo a se acumular junto às paredes do equipamento, atingido nessas regiões, teores mais elevados. O comportamento reológico de emulsões de água em óleo, com teores elevados da fase dispersa água, tende a se afastar muito do comportamento reológico de suas fases constituintes e é altamente variável com a concentração da fase dispersa. Além disso, nas regiões onde a concentração da fase inicialmente dispersa (água) atingir valores muito elevados, poderá ocorrer a chamada inversão da emulsão, com a água passando a constituir a fase contínua e o óleo a fase dispersa. Essa inversão da emulsão, do tipo *água em óleo* para o tipo *óleo em água*, provoca mudanças bruscas nas propriedades reológicas.

Apresentam-se, nesta seção, alguns resultados da simulação do hidrociclone com geometria simplificada, cuja geometria e condições operacionais foi detalhada na seção 4.2, considerando, entretanto, como única diferença relativa aos casos tratados naquela seção, que o fluido que alimenta o hidrociclone é composto por água com 0.2% em volume de óleo disperso sob a forma de gotículas de 30 μm .

Foi arbitrariamente adotado o modelo de turbulência $k-\epsilon$ de dupla escala para a simulação. Para o tratamento da viscosidade (laminar) da mistura foram consideradas duas hipóteses:

- Viscosidade da mistura calculada como média ponderada, relativamente à concentração volumétrica, das viscosidades do óleo e da água.

Embora utilizado em alguns estudos do comportamento de misturas de fluidos, esse método de cálculo da viscosidade da mistura não é adequado, pois que, como discutido acima, o comportamento da mistura heterogênea (dispersão ou emulsão de óleo em água) afasta-se muito da linearidade. Entretanto, por se tratar de método de fácil implementação é também freqüentemente adotado em simuladores de escoamento, com melhores resultados relativamente aos dados experimentais, do que a consideração da viscosidade unicamente da fase contínua.

No exemplo aqui mostrado, como a concentração da fase dispersa (óleo) é muito baixa, a viscosidade resultante para a mistura é, em quase todo o domínio do escoamento, muito próxima à da fase contínua (água).

- Viscosidade da mistura dada por uma expressão empírica – de validade restrita a uma determinada emulsão, mas cujo comportamento é qualitativamente semelhante às emulsões de água em óleo encontradas na indústria do petróleo.

Nessa expressão, a viscosidade da mistura é dada por uma função quadrática da concentração da fase dispersa óleo:

$$\nu_{mist} = 0.00005 + 0.004065 c_o - 0.00395 c_o^2 \quad (4.8.3-1)$$

O modelo bifásico adotado é, na realidade, um modelo em que as equações de transporte são resolvidas apenas para uma fase considerada fase contínua, que é a caracterizada pelas propriedades (massa específica e viscosidade) da mistura. As características do escoamento são assim inteiramente determinadas, pela solução das equações do movimento para uma única fase.

A movimentação da fase dispersa é determinada por um modelo algébrico de escorregamento relativamente à fase contínua (hipóteses de escoamento de Stokes, onde os efeitos viscosos são muito mais significativos que os efeitos convectivos). Essas hipóteses são válidas para fluidos de viscosidade elevada e/ou para partículas (gotículas) muito pequenas, mesmo para o regime transiente, pois nessas condições os tempos de relaxação para as gotículas dispersas são muito menores que os tempos das mudanças no escoamento. Para o caso das flutuações turbulentas, isso pode não ser verdade, mas admite-se que o comportamento global da fase dispersa é guiado basicamente pelo escoamento médio, já que a integral no tempo das flutuações turbulentas é nula.

Veja-se, na figura abaixo, o comportamento da viscosidade da mistura, em função da concentração da fase dispersa, para a segunda das hipóteses de tratamento da viscosidade, acima descritas.

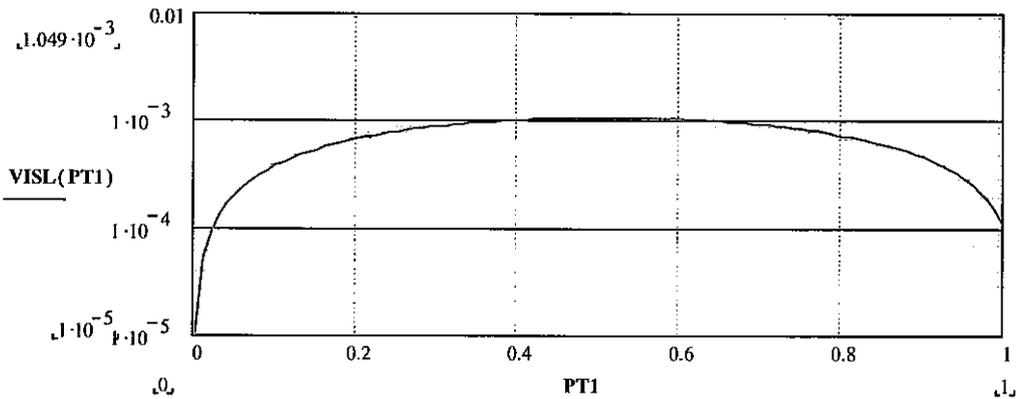


Gráfico 4.8.3-1 – Variação da viscosidade com o teor de óleo

Como pode ser visto, no gráfico acima, a viscosidade do óleo é uma ordem de grandeza superior à viscosidade da água. A viscosidade da emulsão, por sua vez, é duas ordens de grandeza superior à viscosidade da água, para teores de óleo entre 35% e 65%.

Apresenta-se, em seguida, os resultados das simulações considerando as duas formas para determinação da viscosidade acima descritas, ou seja, a primeira delas considera a viscosidade da mistura (dispersão) como uma média ponderada em função

das respectivas concentrações, da água e do óleo e a segunda delas considera a forma funcional acima descrita para a determinação da viscosidade da dispersão.

Apresenta-se, inicialmente, os resultados com o chamado *modelo algébrico de escorregamento* (em inglês - algebraic slip model ou ASLP) sem modificação, ou seja, considerando a primeira das formas acima descritas para o cálculo da viscosidade da mistura. Na seção 4.8.6 apresenta-se os resultados com o modelo modificado para determinar a viscosidade conforme a expressão acima.

4.8.4. Descrição do modelo algébrico de escorregamento

O modelo algébrico de escorregamento está baseado na hipótese de que existe uma fase contínua em escoamento contendo outras fases dispersas, cujo movimento relativo (velocidade de escorregamento em relação à fase contínua) é dado por uma relação algébrica envolvendo as variáveis hidrodinâmicas locais.

Essas outras fases dispersas são, cada uma delas, dotadas de propriedades uniformes. Assim, para uma fase dispersa composta de gotículas de outro fluido (por exemplo gotículas de óleo em emulsão na água), cada diâmetro de gotícula tem que ser considerado como uma fase dispersa independente.

O escoamento é resolvido utilizando o equacionamento já visto para o escoamento monofásico, sendo que, entretanto, as propriedades do fluido em escoamento (fase contínua) são consideradas as propriedades da mistura. A densidade é evidentemente proporcional à fração volumétrica de cada fase presente na célula e a viscosidade calculada de duas maneiras diferentes conforme será visto nas seções 4.8.3 e 4.8.5.

O movimento relativo da fase dispersa verifica-se com velocidade (de escorregamento relativamente à fase contínua) muito baixa. Essa condição corresponde à desenvolvida por Stokes quando do estudo do movimento de uma esfera, sujeita a uma força de corpo, imersa em um fluido viscoso.

Parte-se, nesse estudo, de uma esfera de pequeno diâmetro imóvel suspensa no seio de um fluido viscoso que escoia com velocidade, no infinito, U_∞ . Nessas condições, Stokes admitiu, como aproximação, que o termo de inércia na equação do movimento do fluido pode ser desprezado frente aos outros termos, uma vez que esse termo é da ordem de grandeza do quadrado da velocidade, enquanto que os demais termos são da ordem de grandeza da velocidade. No regime permanente, com essa hipótese, a equação do movimento fica reduzida à seguinte equação:

$$\vec{\nabla} p = \mu (\nabla^2 \vec{U}) \quad (4.8.4-1)$$

Tomando-se o divergente da equação acima, obtém-se:

$$\nabla^2 p = 0 \quad (4.8.4-2)$$

Assim, o campo de pressões é harmônico, ou seja, satisfaz a equação de Laplace. Uma função harmônica, solução de (4.8.4-2) é dada por:

$$p = -\frac{Ax}{r^3} \quad (4.8.4-3)$$

onde o eixo x , com origem no centro da esfera, é paralelo à direção da velocidade do fluido incidente, sendo o sentido positivo desse eixo coincidente com o sentido dessa velocidade. A coordenada r relaciona-se com as coordenadas cartesianas por $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Desse modo a equação para o campo de velocidades é dada por:

$$\nabla^2 \vec{U} = -\frac{A}{\mu} \vec{\nabla} \left(\frac{x}{r^3} \right) \quad (4.8.4-4)$$

Essa equação se desdobra nas seguintes equações escalares, para cada componente da velocidade:

$$\nabla^2 U_x = \frac{A}{\mu} \left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right), \quad \nabla^2 U_y = \frac{A}{\mu} \frac{3xy}{r^5} \quad \text{e} \quad \nabla^2 U_z = \frac{A}{\mu} \frac{3xz}{r^5}$$

Que estão sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$U_x = U_y = U_z = 0 \quad \text{em } r = r_0$$

e

$$U_y = U_z = 0 \quad \text{e} \quad U_x = U_\infty \quad \text{em } r \rightarrow \infty$$

onde r_0 é o raio da esfera.

A integração dessas equações é realizada utilizando-se das condições de simetria do problema (os eixos y e z , por exemplo, são intercambiáveis). Como resultado das condições de contorno acima descritas, a constante A é determinada e assume o seguinte valor:

$$A = \frac{3}{2} \mu r_0 U_\infty \quad (4.8.4-6)$$

Substituindo-se esse valor em 4.8.4-3, obtém-se:

$$p = -\frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty r_0 x}{r^3} \quad (4.8.4-7)$$

Na superfície da esfera, onde $x = -r_0$ e $r = r_0$, a pressão assume o valor:

$$p = \frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty}{r_0} \quad (4.8.4-8)$$

A força de arrasto de Stokes sobre a esfera (D_S) é dada pelo produto da pressão pela área da esfera; ou seja:

$$D_s = \frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty}{r_0} 4\pi r_0^2 = 6\pi\mu U_\infty r_0 \quad (4.8.4-9)$$

A expressão acima é a fórmula de Stokes para a força de arrasto sobre uma esfera. O coeficiente de arrasto é obtido dividindo-se a força de arrasto pela pressão dinâmica, ou seja:

$$C_D = \frac{D_s}{\rho U_\infty^2 (\pi r_0^2 / 2)} = \frac{24}{2 r_0 U_\infty / \nu} = \frac{24}{Re_p} \quad (4.8.4-10)$$

onde Re_p é o número de Reynolds calculado com base no diâmetro da partícula.

A expressão 4.8.4-9 pode ser utilizada para a estimativa da velocidade (V_t) de migração de uma partícula esférica de pequeno diâmetro imersa em fluido de densidade diferente, sujeita a uma força de corpo devida ao campo centrífugo. O balanço de força correspondente é dado por:

Arrasto = Resultante das força de corpo

ou seja:

$$6\pi\mu r_0 V_t = \frac{4}{3} \pi r_0^3 (\rho - \rho_p) \frac{U^2}{R} \quad (4.8.4-11)$$

onde U^2/R é a aceleração centrífuga (U é o componente azimutal da velocidade do fluido e R é a posição radial da partícula, onde ocorre a velocidade U).

Portanto, tem-se

$$V_t = \frac{(\rho - \rho_p)}{18\mu} d_p^2 \frac{U^2}{R} \quad (4.8.4-12)$$

onde ρ e μ são propriedades do fluido que cerca a esfera. Se as propriedades desse fluido forem alteradas significativamente pela presença da própria fase dispersa, verifica-se de 4.8.4-12, que a velocidade de migração da partícula será muito afetada.

4.8.5. Resultados obtidos na simulação com o modelo algébrico de escorregamento – considerando a viscosidade da mistura ponderada pela concentração

Os resultados apresentados nesta seção consideram a seguinte expressão para a viscosidade da mistura (dispersão):

$$\nu = \nu_a(1 - PT_1) + \nu_o PT_1$$

onde ν_a é a viscosidade da água, adotada $\nu_a = 0.00001 \text{ m}^2/\text{s}$

ν_o é a viscosidade do óleo, adotado $\nu_o = 0.0001 \text{ m}^2/\text{s}$

PT_1 é a concentração volumétrica de óleo

Os resultados obtidos são mostrados nas seguintes figuras:

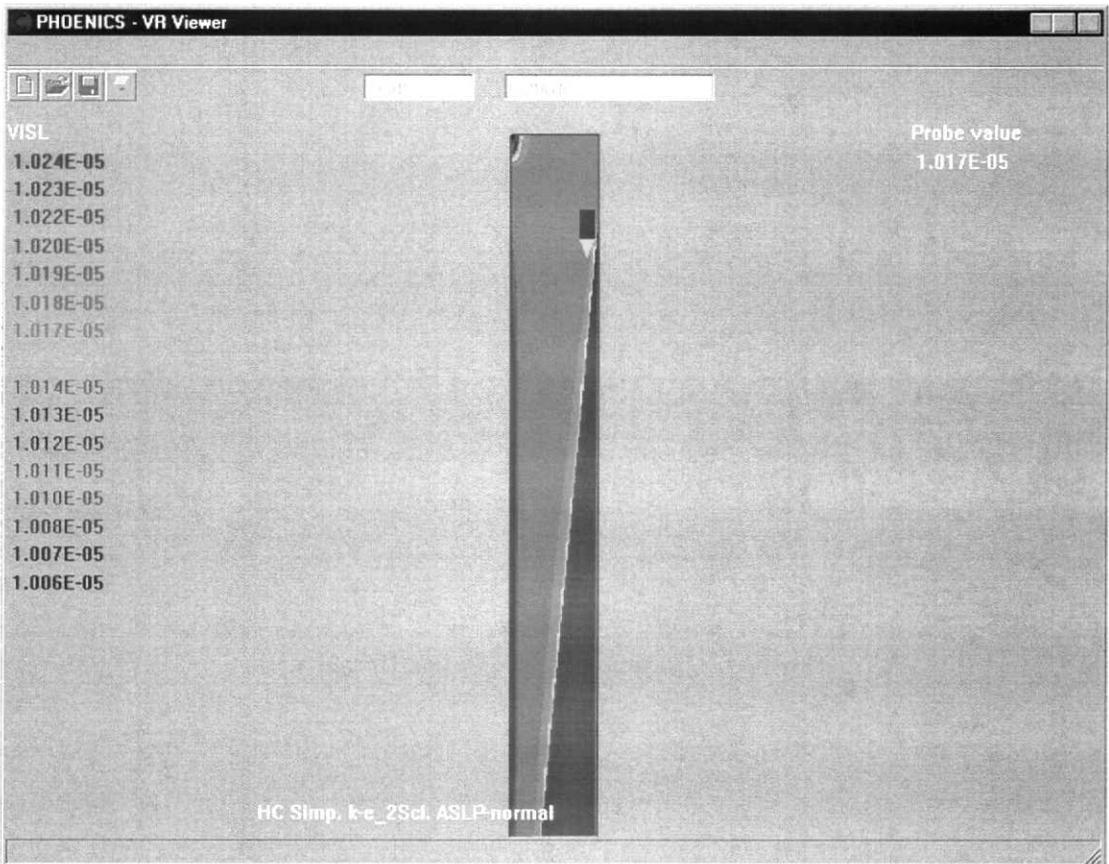


Figura 4.8.5-1 – Distribuição Espacial da Viscosidade (mod. ASLP sem modificações)

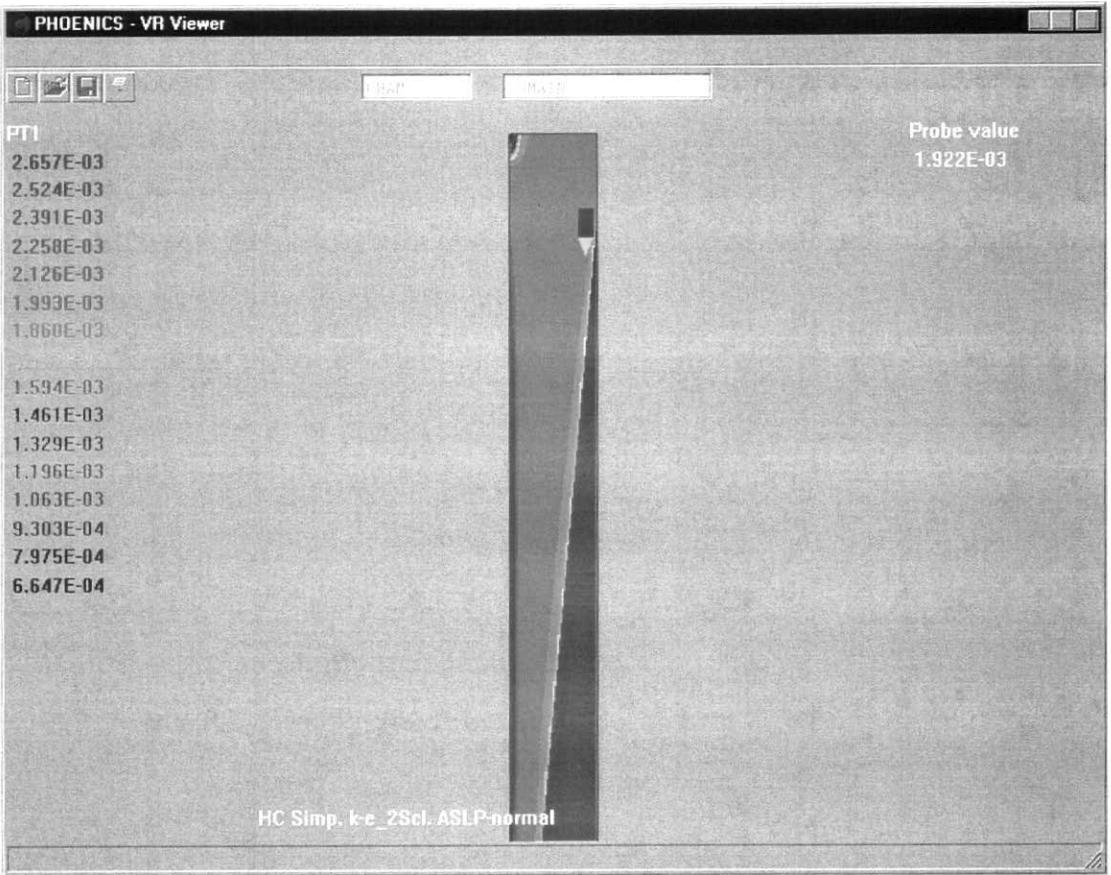


Figura 4.8.5-2 – Concentração das Gotículas de Óleo Disperso (mod. ASLP sem modificações)

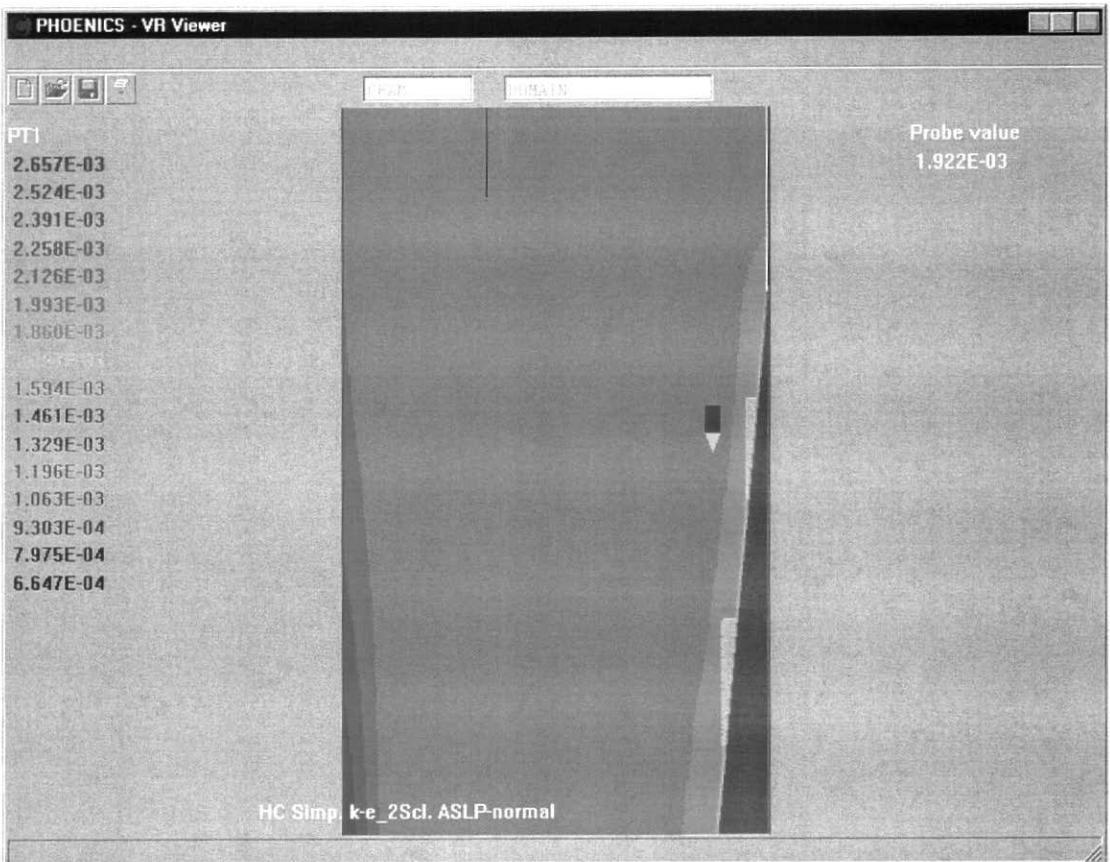


Figura 4.8.5-3 – Detalhe da Concentração de Gotículas (mod. ASLP sem modificação)

4.8.6. Resultados obtidos na simulação com o modelo algébrico de escorregamento – considerando a viscosidade da mistura calculada pela equação 4.8.3-1

O modelo algébrico de escorregamento (ASLP) foi modificado com a expressão para o cálculo da viscosidade em função do teor de óleo, dado pela expressão abaixo, cujo comportamento é expresso na figura 6.1:

$$\nu = 0.00001 + 0.004065PT_1 - 0.003975PT_1^2$$

onde: PT_1 é a concentração de volumétrica de óleo.

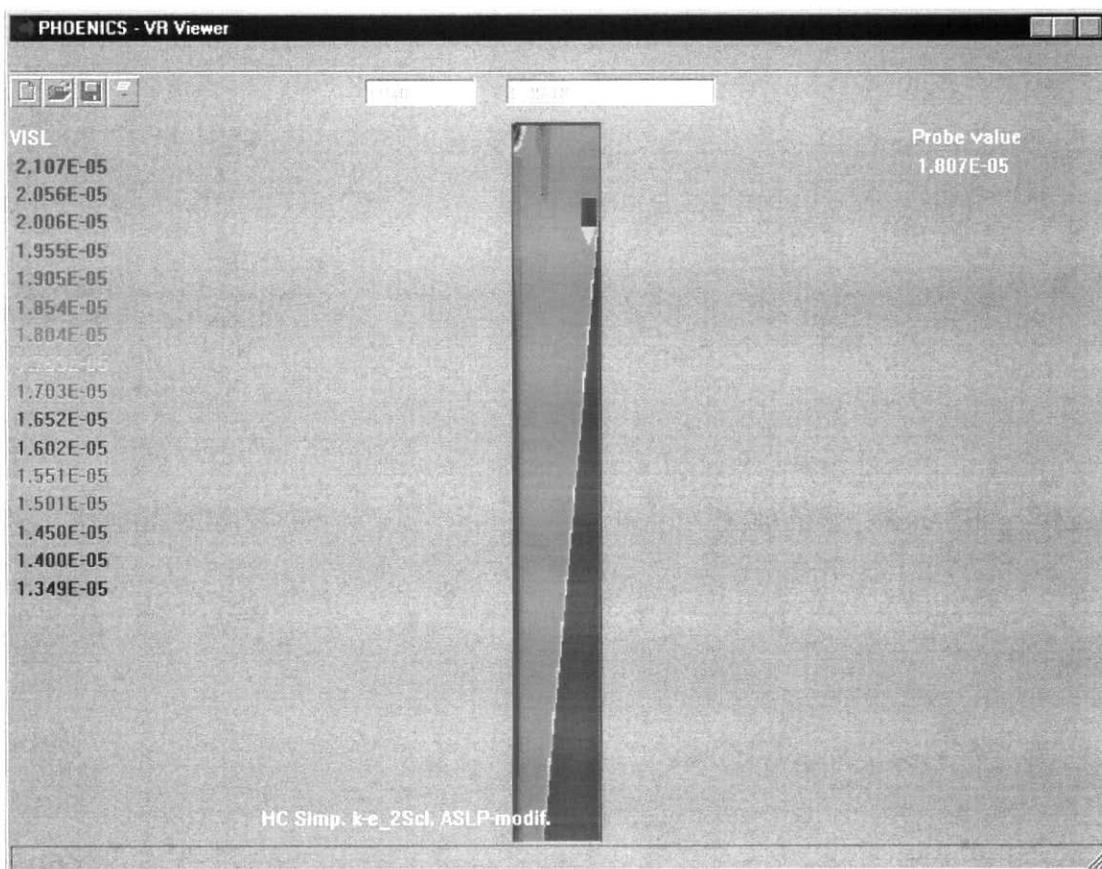


Figura 4.8.6-1 – Distribuição Espacial da Viscosidade (mod. ASLP modificado)

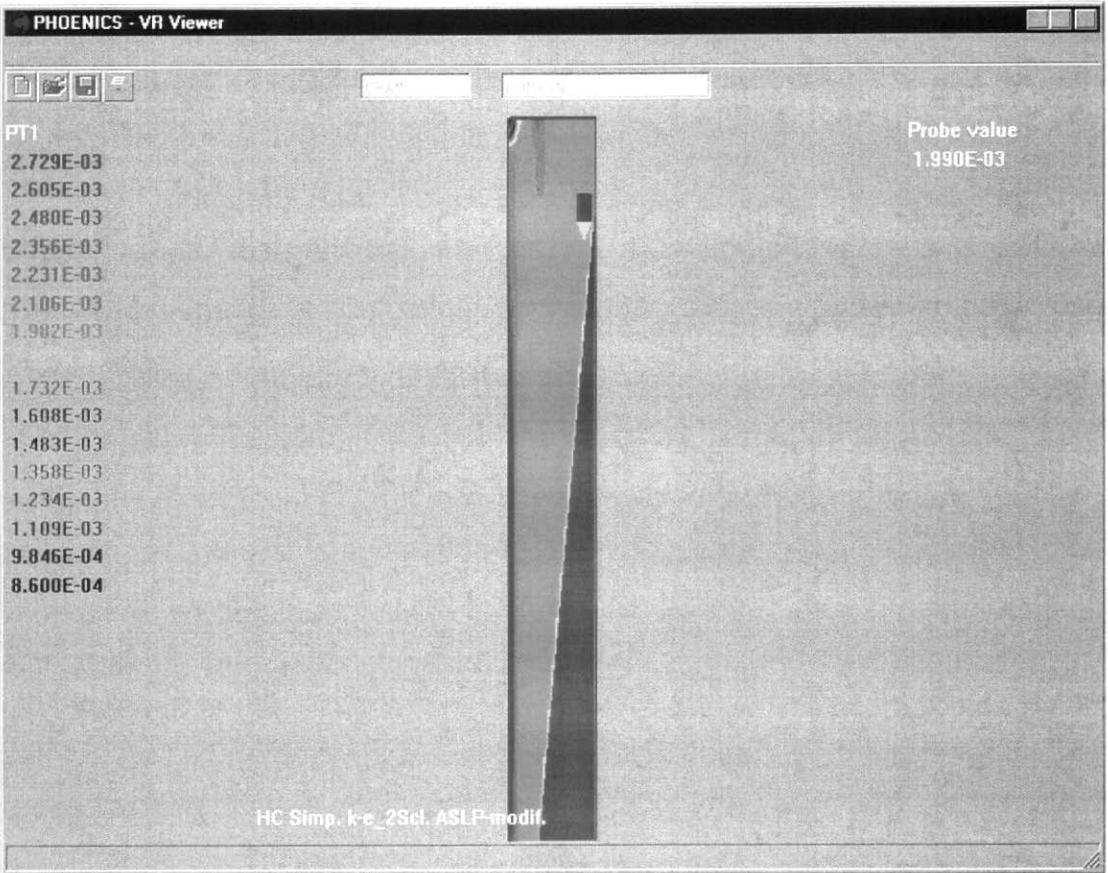


Figura 4.8.6-2 – Concentração das Gotículas de Óleo Dispersas (mod. ASLP modificado)

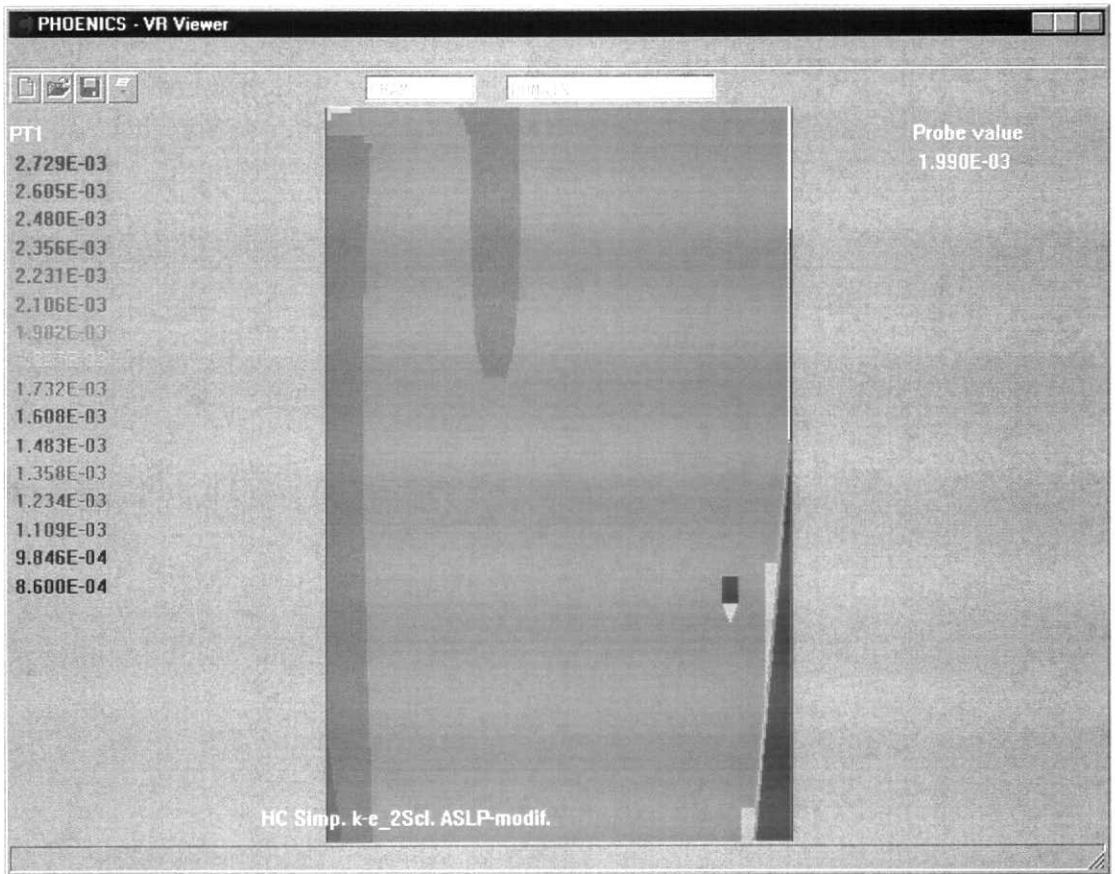


Figura 4.8.6-3 – Detalhe da Distribuição de Gotículas (mod. ASLP modificado)

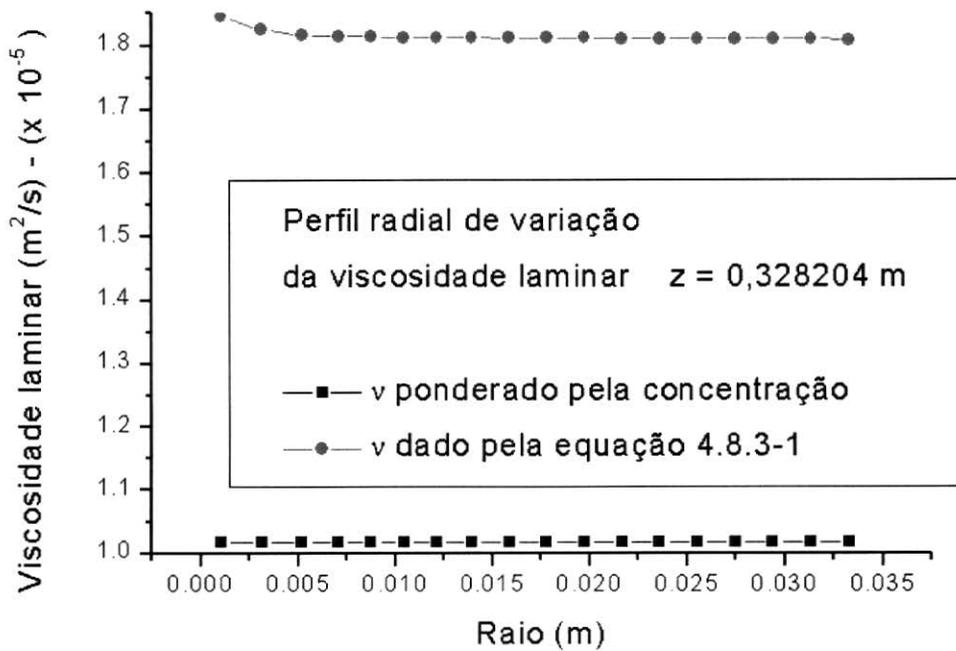


Gráfico 4.8.6-1 – Distribuição radial da viscosidade laminar em $z = 0.328204 \text{ m}$ (mod. ASLP s/ mod. x modificado)

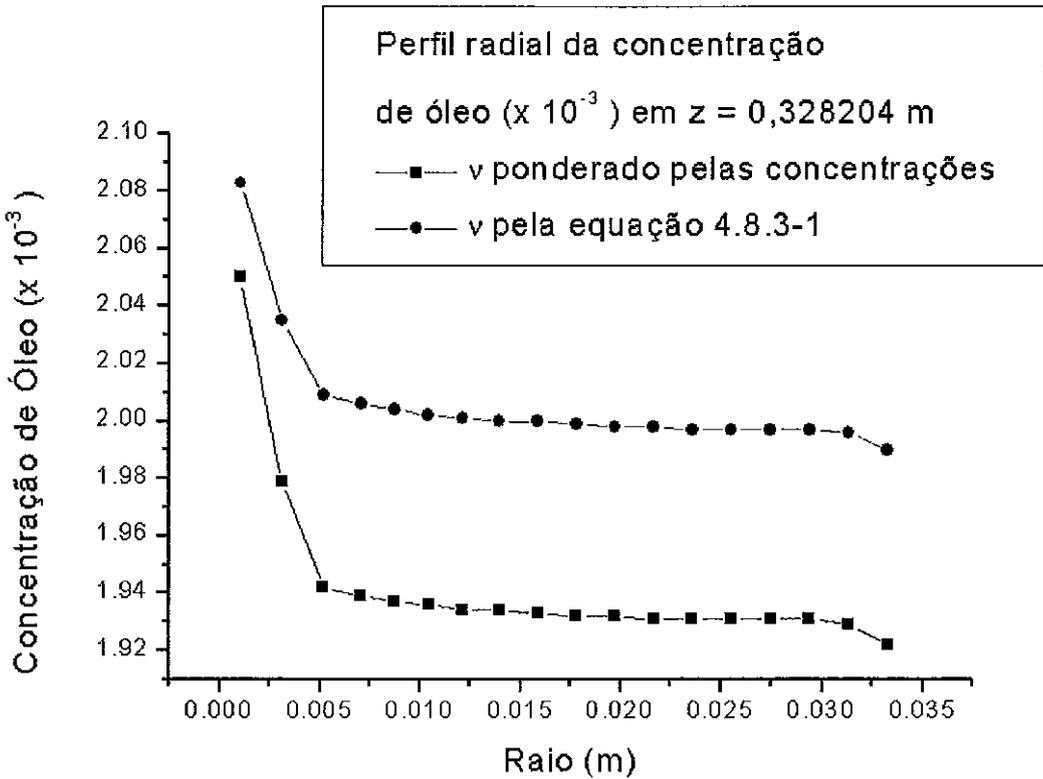


Gráfico 4.8.6-2 – Distribuição radial da concentração de óleo em $z = 0.328204$ m (mod. ASLP s/ mod. x modificado)

4.8.7 Comparação entre os perfis de velocidade média obtidos com os dois modelos

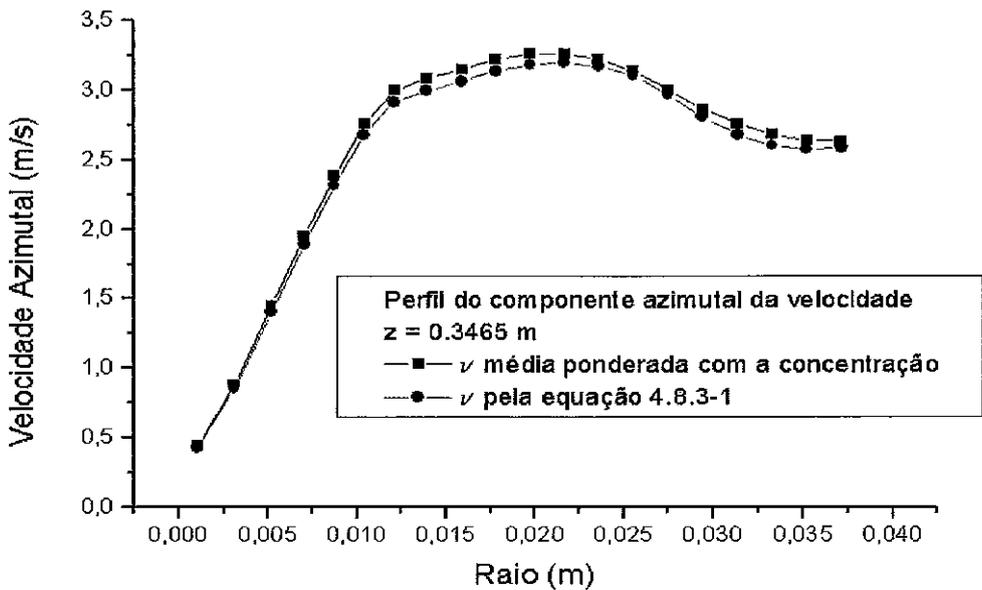


Gráfico 4.8.7-1 – Perfil do componente azimutal da velocidade $z = 0.3465$ m

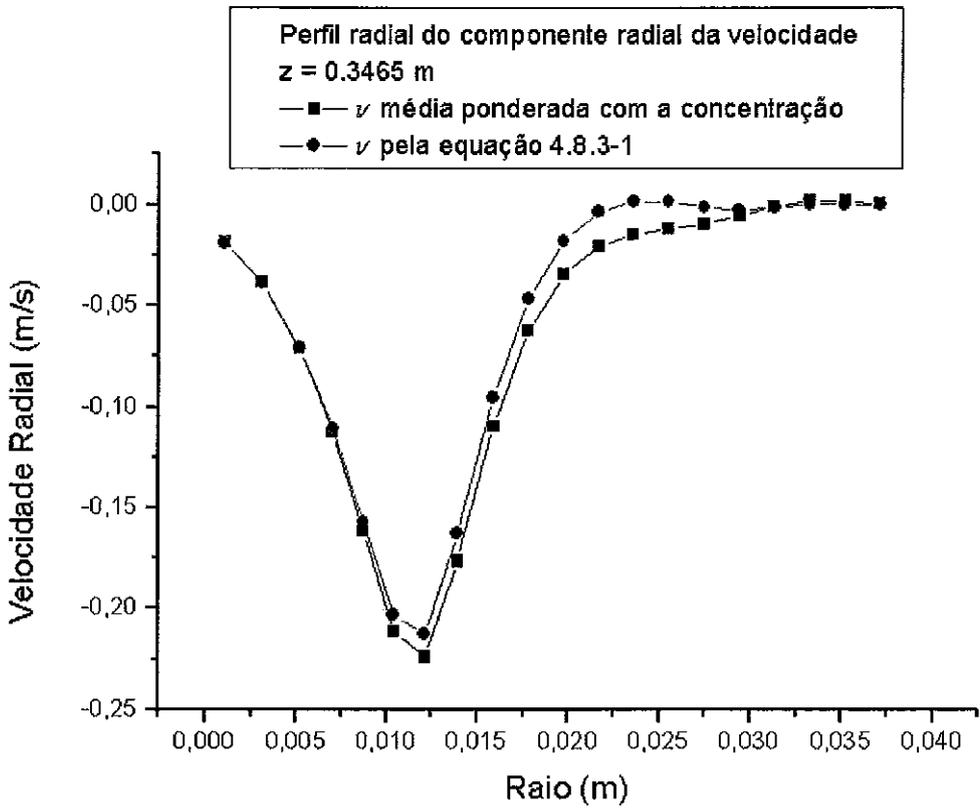


Gráfico 4.8.7-2 – Perfil do componente radial da velocidade em $z = 0.3465 \text{ m}$

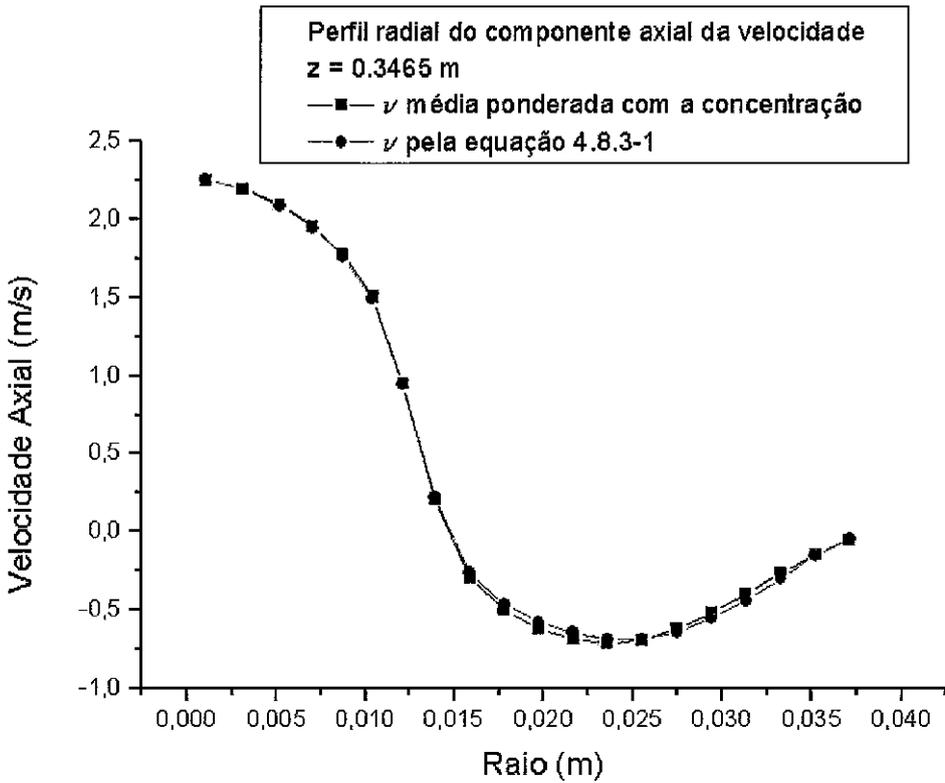


Gráfico 4.8.7-3 – Perfil do componente axial da velocidade em $z = 0.3465 \text{ m}$

4.8.8. Comentários sobre os resultados obtidos

Os resultados, mostrados nas figuras 4.8.7-1 a 4.8.7-3 comprovam a esperada pouca influência no escoamento das alterações reológicas introduzidas pela presença de um teor de óleo tão reduzido (0.2% em volume), como aquele encontrado no hidrociclone para tratamento de águas oleosas, uma vez que, poucas foram as alterações produzidas nas grandezas médias do escoamento, ao comparar-se os dois modelos bifásicos acima descritos. Mesmo considerando a existência de regiões do domínio onde a concentração da fase dispersa aumenta significativamente, devido à migração no campo centrífugo, o efeito da variação correspondente da viscosidade foi pouco significativo. Entretanto, o mesmo não pode ser dito, com relação à separação de fases, ou seja, à migração das gotículas de óleo dispersas para o eixo do equipamento. Neste último caso, da comparação entre os dois modelos bifásicos acima descritos, onde o regime de escoamento das gotículas – devido basicamente ao seu pequeno diâmetro – é o regime de Stokes, conclui-se que, sendo a influência da viscosidade laminar bastante grande, o modelo que avalia essa grandeza por meio de correlação experimental é bem mais adequado.

Considerando-se que a concentração inicial de óleo no domínio e a concentração na alimentação é igual a 0.2% em volume, verifica-se, da comparação das figuras 4.8.5-2 e 4.8.6-2, que a faixa de variação espacial da concentração de óleo é menor no modelo modificado (onde varia de 0.08600 a 0.2729) do que no modelo sem modificações (onde varia de 0.06647 a 0.2657), por conta do efeito do aumento da viscosidade, decorrente do primeiro modelo, que dificulta a migração das gotículas de óleo.

Esse mesmo resultado verifica-se com relação à distribuição espacial da viscosidade laminar, como pode ser visto comparando-se as figuras 4.8.5-1 e 4.8.6-1, ou pela observação do gráfico 4.8.6-1.

Da análise do gráfico 4.8.6-2 verifica-se que a concentração de óleo, no modelo que estima a viscosidade como média ponderada da mistura, mantém-se reduzida ($\approx 1.93\%$) em quase toda extensão do raio, na seção considerada, o que

mostra que com esse modelo, algum óleo disperso já foi removido nessa seção. Esse mesmo gráfico mostra entretanto, que para o modelo que calcula a viscosidade da mistura pela equação 4.8.3-1, a concentração de óleo mantém-se em torno de 2% ainda em boa parte da extensão radial. Esses resultados mostram a importância da estimativa adequada da viscosidade laminar da emulsão, para o estudo do fenômeno da separação da fase dispersa.

Por conta do mesmo efeito, ou seja, do retardo na migração imposto pela maior viscosidade, observa-se também um maior acúmulo de fase dispersa junto ao eixo do hidrociclone na parte junto ao cabeçote cilíndrico na figura 4.8.5-3 (modelo ASLP sem modificações) do que na figura 4.8.6-3 (modelo ASLP modificado), como se nota pela região com coloração avermelhada naquela figura, que se inicia acima da região correspondente nesta última figura.

4.9 Simulações com o modelo de equações diferenciais de transporte para cada um dos componentes do Tensor de Reynolds

Conforme já discutido no capítulo 3, particularmente na seção 3.3.2, este modelo em função de suas características intrínsecas, apresenta-se como o mais apropriado à descrição do escoamento em hidrociclones. A implementação do modelo foi realizada no código CFX, versão 5.6, utilizando-se uma geometria tridimensional, com malha hexaédrica de 206.408 nós, com 199.566 elementos.

As dificuldades na prescrição de condições de contorno realistas para o problema fez com que fossem acrescentados ao domínio de escoamento – representado pela geometria modelada – regiões de acomodação de fluido nas duas saídas do hidrociclone. Essa técnica, denominada de *far field* permite o desenvolvimento de perfis complexos para as variáveis do escoamento nos bocais de saída que, no caso de imposição, nesses bocais, de condições de contorno muito rígidas e fisicamente não realistas, ficariam impossibilitados de se desenvolverem.

Os valores iniciais para os campos das variáveis do escoamento foram os seguintes: componentes das velocidades médias nulos nas três direções e componentes do Tensor de Reynolds da ordem de 10^{-4} e o mesmo valor para a taxa de dissipação. Admitida ainda a alimentação com velocidade média de 1.324 m/s (conforme condições descritas no início da seção 4.5.2).

A geometria utilizada corresponde à descrita na seção 4.2.1 acrescida de tubos de alimentação e de saída. Acrescentou-se ainda, ao campo simulado, como já mencionado, as duas regiões de *far field*. Optou-se, dadas as facilidades de implementação no mencionado código computacional, relativamente ao código PHOENICS utilizado nas seções anteriores, pela análise do problema tridimensional, como já foi dito.

A utilização de malha hexaédrica, com distribuição mais regular relativamente à uma malha tetraédrica, deveu-se a que o primeiro tipo de malha é mais conveniente quando se tem um escoamento em que ocorrem direções preferenciais bem definidas, onde há vantagem numérica em se posicionar as faces dos elementos o mais alinhado possível com as normais a essas direções preferenciais. Esse é o caso do hidrociclone onde principalmente o componente azimutal da velocidade é bastante significativo.

As figuras seguintes mostram o esquema superficial da malha utilizada, fornecendo também uma idéia do tamanho do domínio e das duas regiões de desenvolvimento utilizadas nas saídas.



Figura 4.9-1 Esquema geral da malha sobre a superfície do domínio

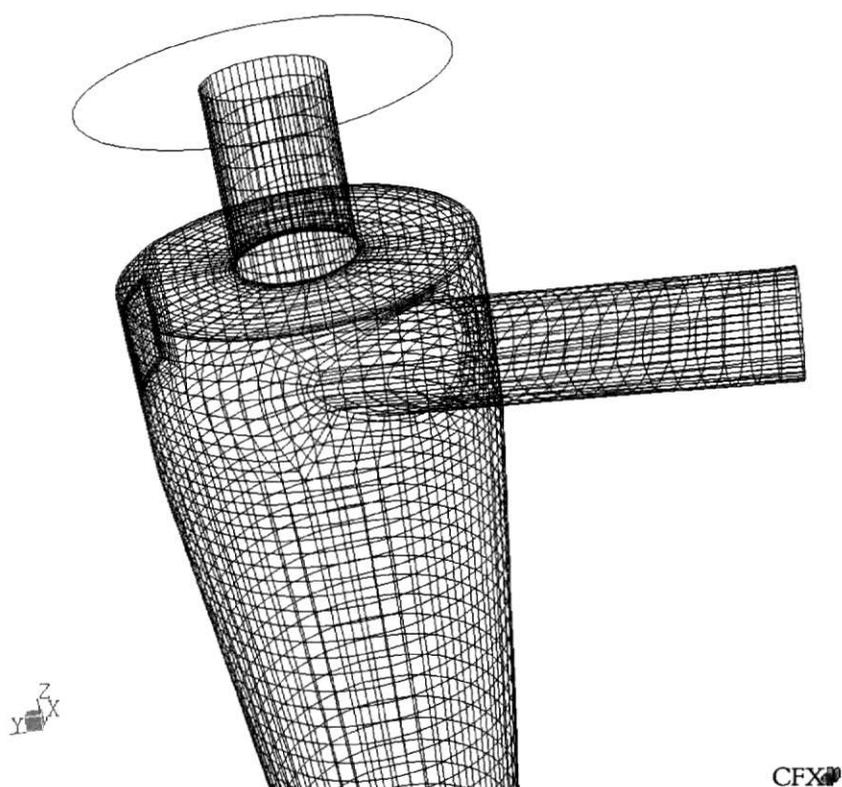


Figura 4.9-2 Detalhe do esquema da malha sobre a superfície da parte superior do hidrociclone

A utilização do modelo completo, com equações de transporte independentes para cada um dos componentes do Tensor de Reynolds, conduziu a uma previsão mais realista do perfil do componente azimutal da velocidade no hidrociclone, do que aquelas obtidas com os modelos anteriormente vistos. Embora, em comparação com os resultados experimentais (Knowles et al. 1973), os resultados da simulação com o modelo citado mostram que o perfil de comportamento de vórtice livre se situou na parte mais externa do domínio (maiores distâncias ao eixo), enquanto que na região central prevaleceu o comportamento de rotação de corpo rígido.

Apresentamos, a seguir, alguns dos resultados obtidos com essa simulação:

Para os gráficos com perfis de velocidade foi adotada a seguinte nomenclatura dos modelos:

Ke_2Sc – Modelo k - ϵ de dupla escala (ver capítulo 3, seção 3.3.1)

Ke_RNG – Modelo $k-\epsilon$ com constantes determinadas pelo procedimento do RNG (ver capítulo 3, seção 3.2.2)

Exp – Pontos experimentais (ver Knowles et al., [1973])

Rey Str – Modelo completo do Tensor de Reynolds (ver capítulo 3, seção 3.4)

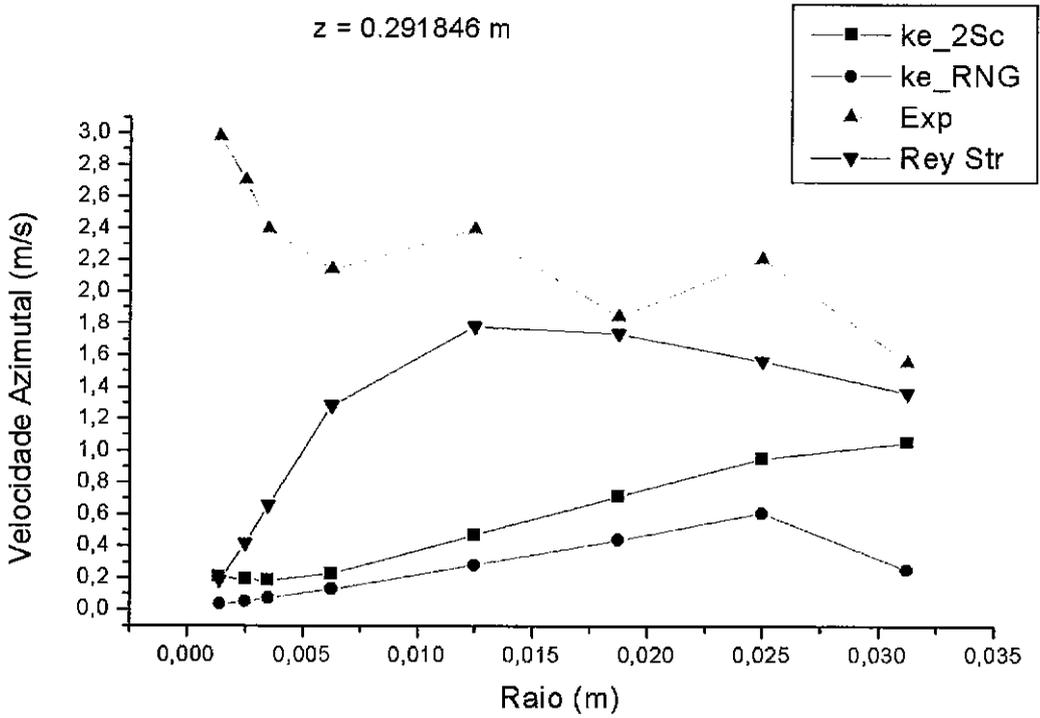


Figura 4.9-3 Perfil do componente azimutal da velocidade em $z = 0.291846 \text{ m}$

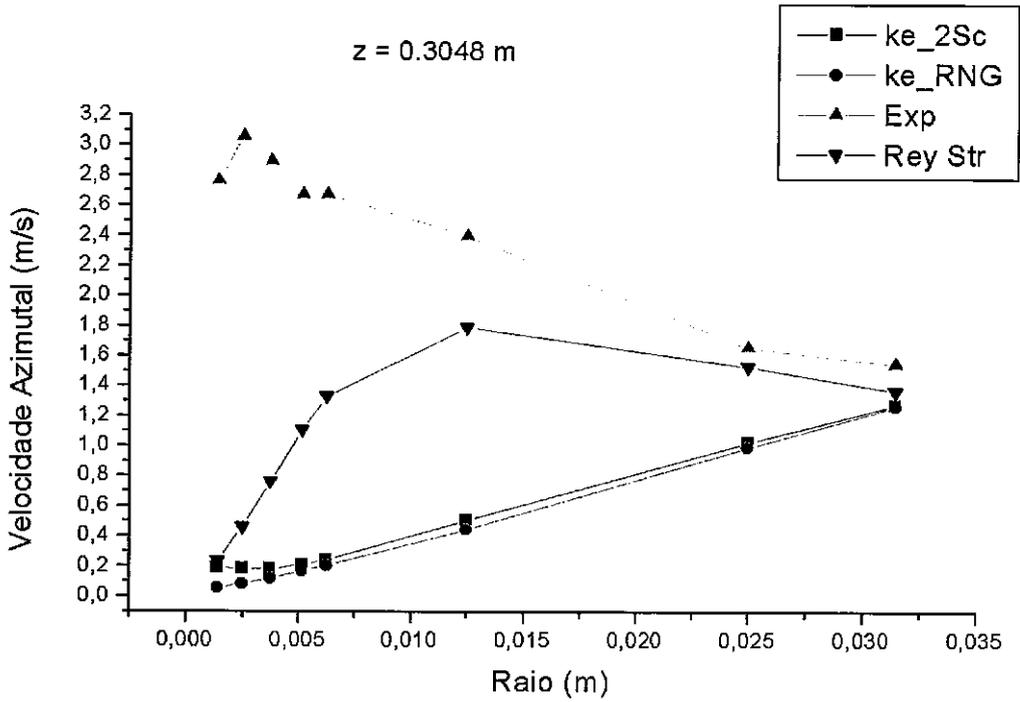


Figura 4.9-4 Perfil do componente azimutal da velocidade em $z = 0.3048 \text{ m}$

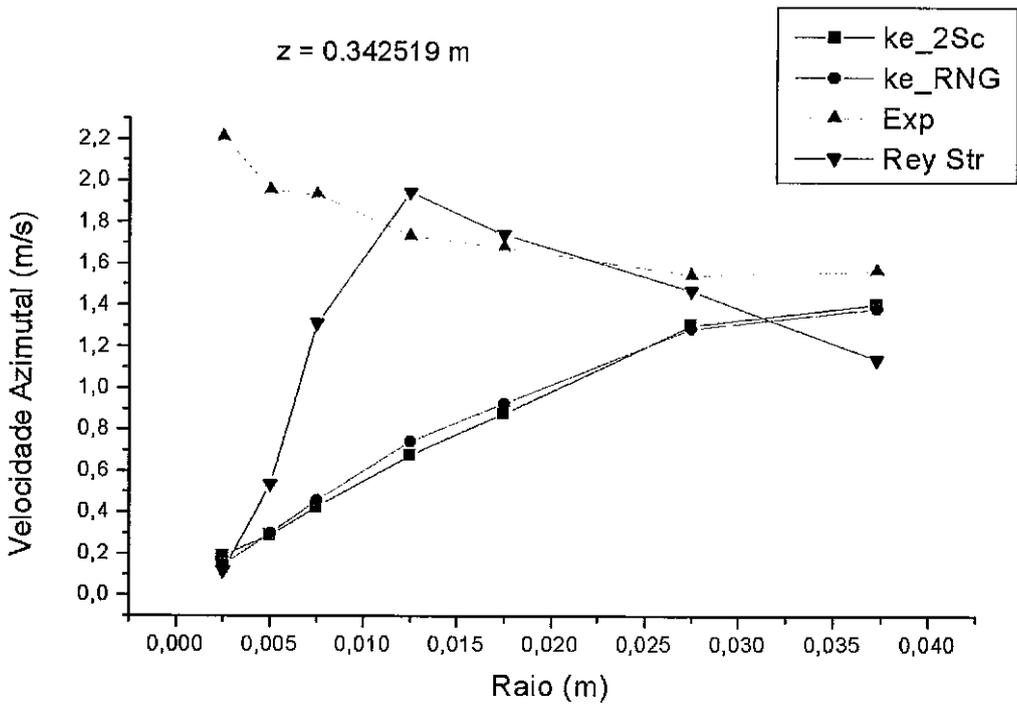


Figura 4.9-5 Perfil do componente azimutal da velocidade em $z = 0.342519 \text{ m}$

Verifica-se das figuras 4.9-3 a 5 acima que o modelo do Tensor de Reynolds previu, sistematicamente, que para o raio até cerca de 0.0125 m o componente azimutal da velocidade comporta-se como rotação de corpo rígido, enquanto que para valores do raio acima desse valor, esse componente da velocidade começa a diminuir com o aumento do raio.

Com relação às tensões de Reynolds, a simulação mostra que a turbulência é bastante anisotrópica. As tensões normais variam nas seguintes faixas (em m^2/s^2):

$$0 < \overline{uu} < 0.2585, \quad 0 < \overline{vv} < 0.4398 \quad e \quad 0 < \overline{ww} < 0.1534$$

As tensões cisalhantes turbulentas, por sua vez, variam nas seguintes faixas (em m^2/s^2):

$$-0.15 < \overline{uv} < 0.3682, \quad -0.04603 < \overline{uw} < 0.03773 \quad e \quad -0.03863 < \overline{vw} < 0.03982$$

A relação entre a tensão turbulenta normal máxima e mínima é de cerca de 3 vezes, enquanto que a tensão cisalhantes máxima é superior a tensão normal em duas direções. Esses resultados enfatizam o caráter anisotrópico da turbulência no escoamento em questão

A hipótese de simetria axial, embora não rigorosa, principalmente próximo à região de alimentação, representa razoavelmente bem o comportamento real. Para mostrar essas diferenças vamos exibir alguns gráficos de perfis de velocidade medidos nos mesmos pontos em planos axial ortogonais entre si.

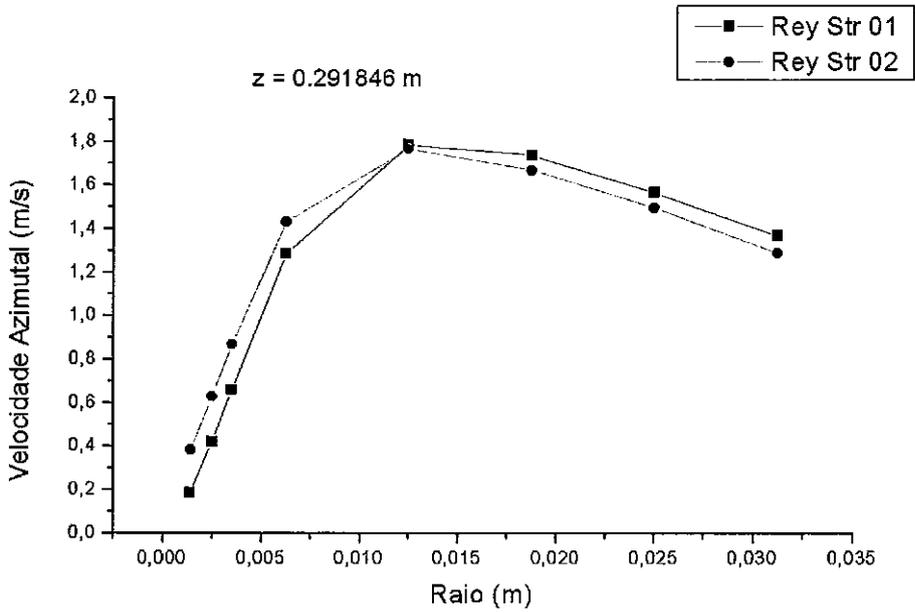


Figura 4.9-6 Perfis da velocidade aximutal em planos axiais normais entre si em $z = 0.291846$ m

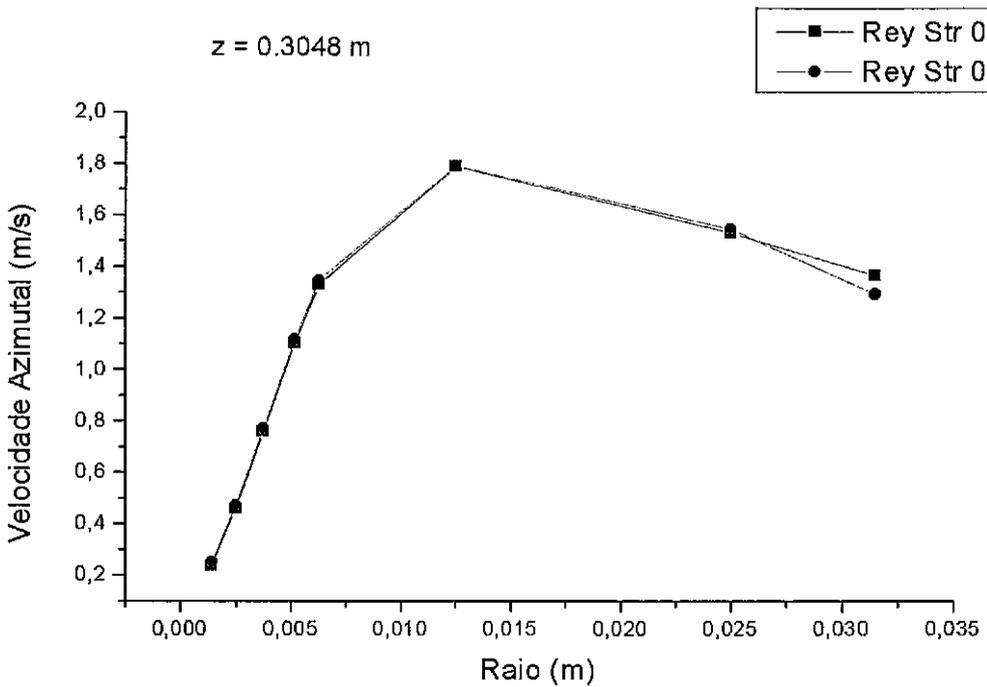


Figura 4.9-7 Perfis da velocidade aximutal em planos axiais normais entre si em $z = 0.3048$ m

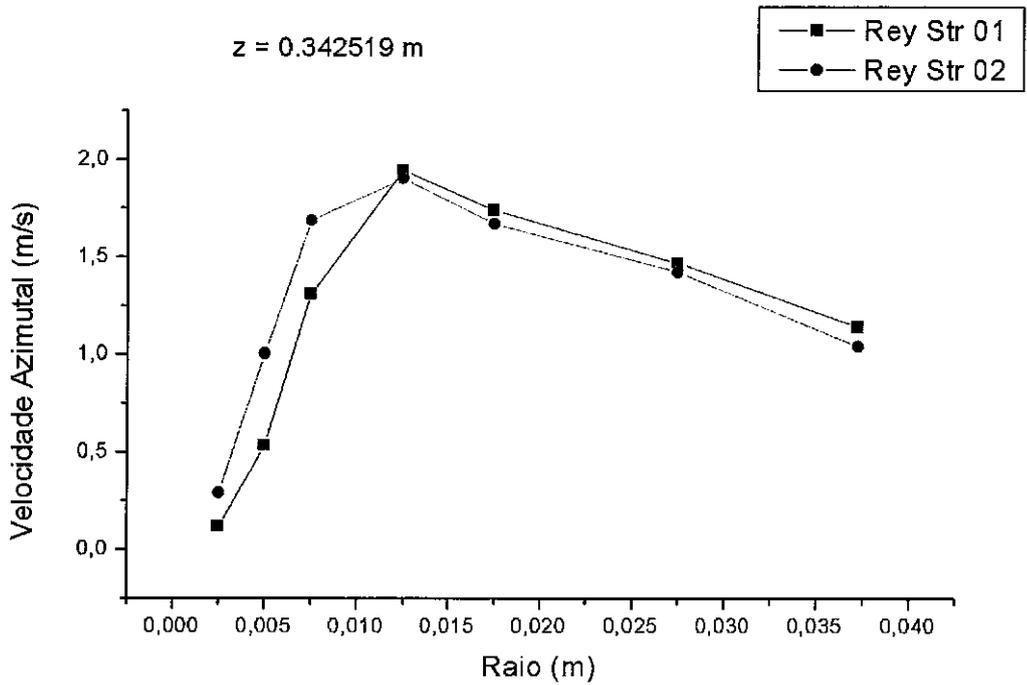


Figura 4.9-8 Perfis da velocidade aximutal em planos axiais normais entre si em $z = 0.342519 \text{ m}$

Como se pode observar das figuras 4.9-6 a 8, os perfis são essencialmente os mesmos tanto para o plano normal ao bocal de alimentação (denominado 01 nos gráficos citados), quanto no plano paralelo a esse bocal (denominado de 02 nos gráficos) os perfis permanecem essencialmente os mesmos. O maior afastamento é observado, obviamente, no caso da seção mais próxima do bocal de alimentação (figura 4.9-8).

4.10 Simulação com o modelo $k-\varepsilon$ modificado proposto neste trabalho

Vão ser discutidos nesta seção os resultados da simulação numérica do problema do escoamento no hidrociclone com o modelo $k-\varepsilon$ modificado, para levar em conta os efeitos da rotação, utilizando correção dos termos fonte da equação de ε , conforme detalhado no capítulo 3, seção 3.4. A geometria, malha e as condições de contorno aqui utilizadas são as mesmas descritas na seção 4.9, onde foi abordado o modelo de equações de transporte para cada um dos componentes do tensor de Reynolds.

Além da simulação com o modelo $k-\varepsilon$ com a modificação proposta neste trabalho, foi simulado o mesmo problema, utilizando o $k-\varepsilon$ convencional, para permitir-se uma comparação dos resultados, e uma verificação dos efeitos da modificação proposta relativamente ao modelo convencional. Além disso, as simulações que envolveram o modelo $k-\varepsilon$ convencional e o modificado foram realizadas considerando o mesmo incremento temporal e o mesmo número total de passos de tempo. Esse procedimento visou permitir uma comparação direta entre os resultados obtidos, em função apenas das alterações no modelo.

Ressalte-se que o modelo proposto no capítulo 3, seção 3.4, não está, em princípio completamente definido, já que os parâmetros c_c e c_f das equações 3.4-3 e 3.4-5 não foram definidos naquela seção. Adotou-se como critério para definição desses parâmetros, a determinação dos valores numéricos que mais aproximem os resultados obtidos com o modelo modificado, daqueles obtidos com o modelo das equações de transporte para cada componente do Tensor de Reynolds, cujos resultados foram descritos na seção 4.9.

Na pesquisa desses valores, não foi possível entretanto, obter-se um valor adequado para o parâmetro c_f que aparece na equação 3.4-5 (capítulo 3, seção 3.4). Partindo-se do valor recomendado por Rodi para o parâmetro da correção por ele proposto, que é 0.9 – nos casos onde a rotação amplifica a intensidade de turbulência – e baixando-se esse valor, considerando-se o fato de que a intensidade de turbulência estimada pelo modelo $k-\varepsilon$

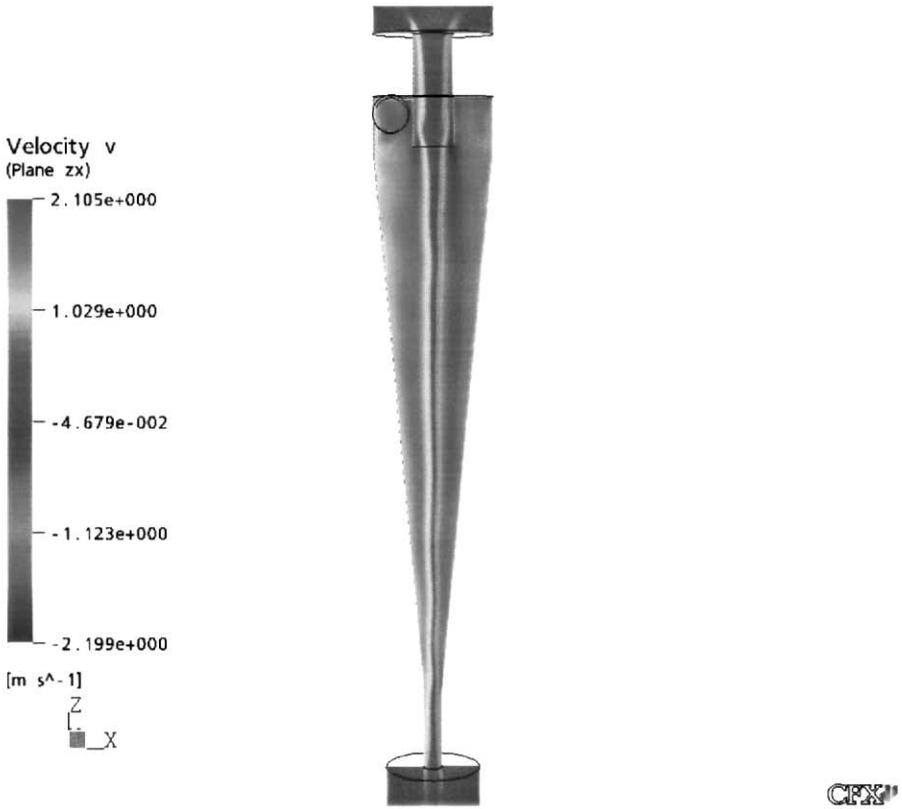
convencional é usualmente muito elevada em confronto com a verificada no escoamento em hidrociclones, não logrou-se resultados adequados. Em todos os casos simulados não se chegou a um resultado final, por ocorrerem problemas de *overflow*, conforme já discutido na análise dos efeitos desse parâmetro, empreendida no capítulo 3, seção 3.2.3. Em outras palavras, a redução na destruição da taxa de dissipação torna o problema instável, por permitir um aumento na energia turbulenta que, em função do acoplamento das equações de transporte do modelo, acaba por afetar de forma explosiva o campo médio do escoamento.

De qualquer modo, uma análise conceitual do escoamento em hidrociclones parece indicar que essa correção no sentido de aumentar a turbulência, mesmo em se tratando da região de comportamento de vórtice livre, parece não ser adequada. Nessa região o escoamento é essencialmente irrotacional, o que significa que a turbulência não pode estar aí sendo gerada, mas apenas sendo transportada, proveniente das regiões onde predominam os efeitos rotacionais (parede e região central do vórtice forçado). Desse modo, qualquer efeito amplificador da turbulência existente na região de vórtice livre pode, na verdade, ser ainda menor do que o efeito amplificador determinado pelo próprio modelo $k-\epsilon$ com suas constantes otimizadas para outros tipos de escoamento. Em outras palavras, os termos de geração de turbulência inerentes ao modelo podem estar apresentando um efeito residual nessa região, o que dispensaria qualquer necessidade de incrementar-se ainda mais o nível de turbulência por meio da correção proposta.

Com relação à correção para atenuar a intensidade de turbulência na região de comportamento de vórtice forçado, partiu-se inicialmente do valor proposto por Launder para o parâmetro c_c , que é de 0.002 – nos casos onde a rotação atenua a turbulência – e aumentou-se esse valor, procurando-se obter um nível de intensidade de turbulência gerado pelo modelo modificado, compatível com o nível gerado pelo modelo completo do tensor de Reynolds. Como pode ser visto das figuras abaixo, uma concordância bastante boa entre os resultados obtidos com esses dois modelos verificou-se para um $c_c = 0.004$.

Apresentam-se, a seguir, os mapas de distribuição espacial da intensidade do componente azimutal da velocidade, obtidos com o modelo $k-\epsilon$ convencional, com o

modelo de tensão de Reynolds e, finalmente, o obtido com o modelo modificado, considerando o valor do parâmetro c_c igual a 0.002, como acima citado. Como pode ser observado desses mapas, o modelo modificado permite a construção do campo do componente azimutal da velocidade mais próximo daquele produzido com o modelo do Tensor de Reynolds. Já o modelo $k-\epsilon$ convencional, apresentou um perfil de rotação de corpo rígido na totalidade do domínio. Entretanto, o valor máximo do componente azimutal da velocidade foi cerca de 10% superior ao obtido com o modelo do Tensor de Reynolds. O modelo convencional, por sua vez, subestimou esse valor em cerca de 15%.



**Figura 4.10-1 Distribuição da intensidade do componente azimutal da velocidade no plano axial
Modelo completo do Tensor de Reynolds**

Observa-se da figura 4.10-1 acima, que o perfil do componente azimutal da velocidade obtido com o modelo de equações de transporte para cada um dos componentes o tensor de Reynolds captura o efeito ciclônico, ou seja, a região de vórtice livre, em todo o domínio do escoamento.

Em que pesem as diferenças ainda persistente entre os resultados com o modelo do Tensor de Reynolds e os resultados experimentais, conforme já discutido na seção 4.9, será aqui considerado que os resultados com esse modelo são o paradigma a ser alcançado, já que vasta literatura confirma a adequabilidade desse modelo para descrição do escoamento num hidrociclone.

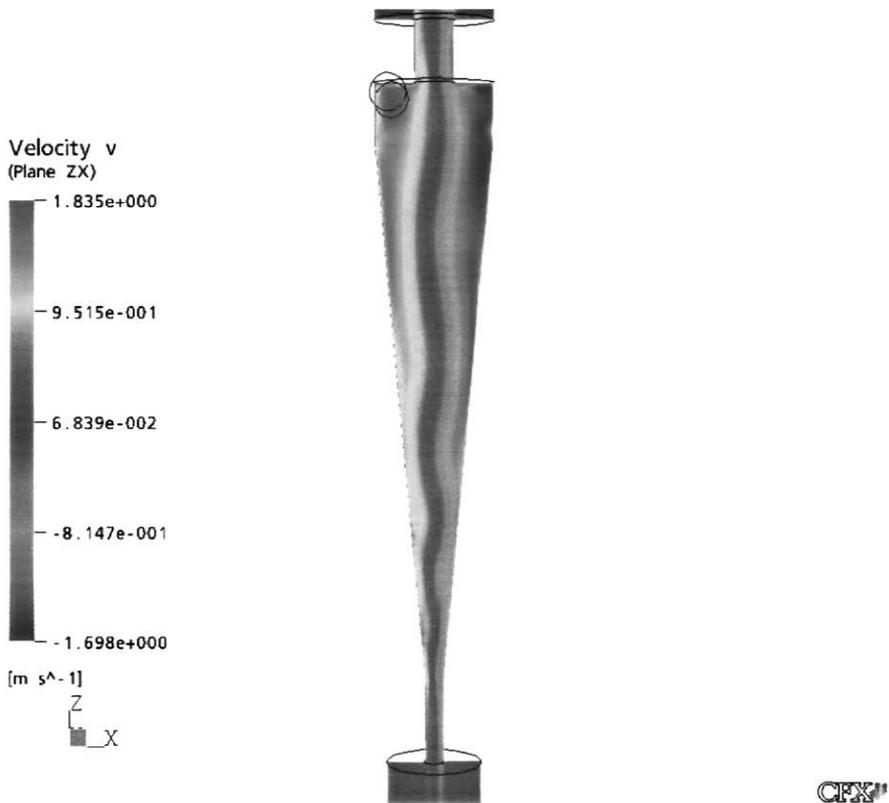


Figura 4.10-2 Distribuição da intensidade do componente azimutal da velocidade no plano axial
Modelo *k-ε* convencional

O modelo $k-\varepsilon$ convencional falha em captar o efeito ciclônico, ou seja, não há formação de região de vórtice livre no domínio de escoamento, como pode ser visto na figura 4.10-2.

Como mencionado acima, o mapa, mostrado na figura 4.10-3, foi obtido considerando-se um fator c_c e c_f de, respectivamente, 0.002 e 0.000, ou seja, corrigindo-se apenas para a redução da intensidade de turbulência nas regiões de rotação de corpo rígido e, utilizando o modelo $k-\varepsilon$ sem correção, nas regiões onde começa a se formar o perfil de vórtice livre. Da análise desse mapa, verifica-se que, com o modelo $k-\varepsilon$ modificado, já é possível identificar uma região de efeito ciclônico, ou seja, uma região onde ocorre queda do módulo do componente azimutal da velocidade a medida em que se caminha do eixo para a parede do hidrociclone. Tal efeito é, entretanto, ainda incipiente, para o valor do parâmetro c_c acima citado.

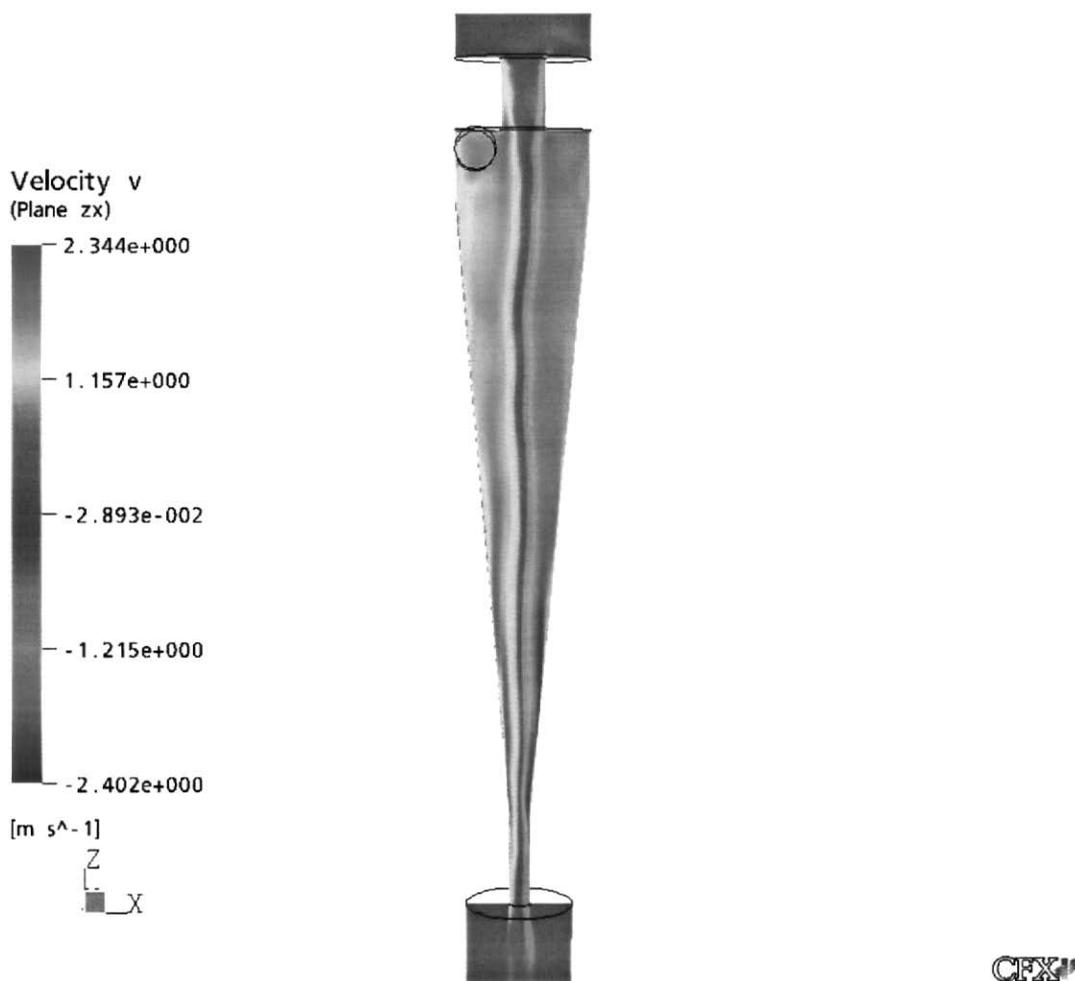


Figura 4.10-3 Distribuição da intensidade do componente azimutal da velocidade no plano axial
Modelo $k-\epsilon$ com a modificação proposta e $c_c = 0.002$

Ao se adotar o valor de 0.004 para o parâmetro c_c , verifica-se uma melhora na reprodução do perfil do componente azimutal da velocidade, conforme pode ser visto na figura 4.10-4 abaixo. Também o valor máximo desse componente da velocidade, obtido com a adoção do valor acima para o parâmetro c_c , ficou mais próximo do obtido com o modelo do Tensor de Reynolds.

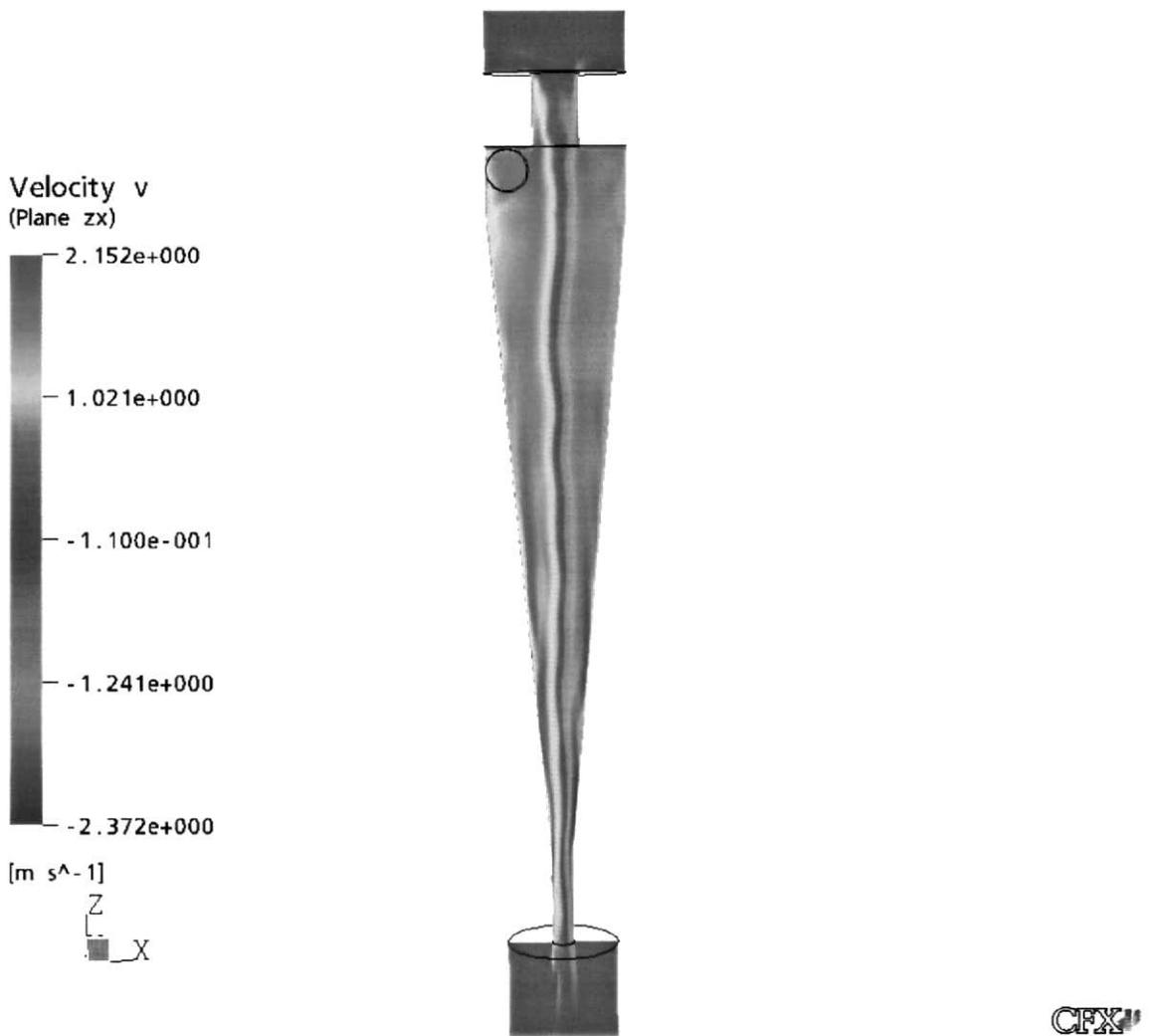


Figura 4.10-4 Distribuição da intensidade do componente azimutal da velocidade no plano axial
Modelo $k-\epsilon$ com a modificação proposta e $c_c = 0.004$

Apresentam-se, a seguir, os gráficos mostrando os perfis de velocidade determinados com os modelos, para determinadas alturas do hidrociclone. Por tratar-se de resultados com a modelagem tridimensional, foi escolhido arbitrariamente, para a coleta dos resultados e montagem dos gráficos, o plano axial normal ao eixo do bocal de alimentação.

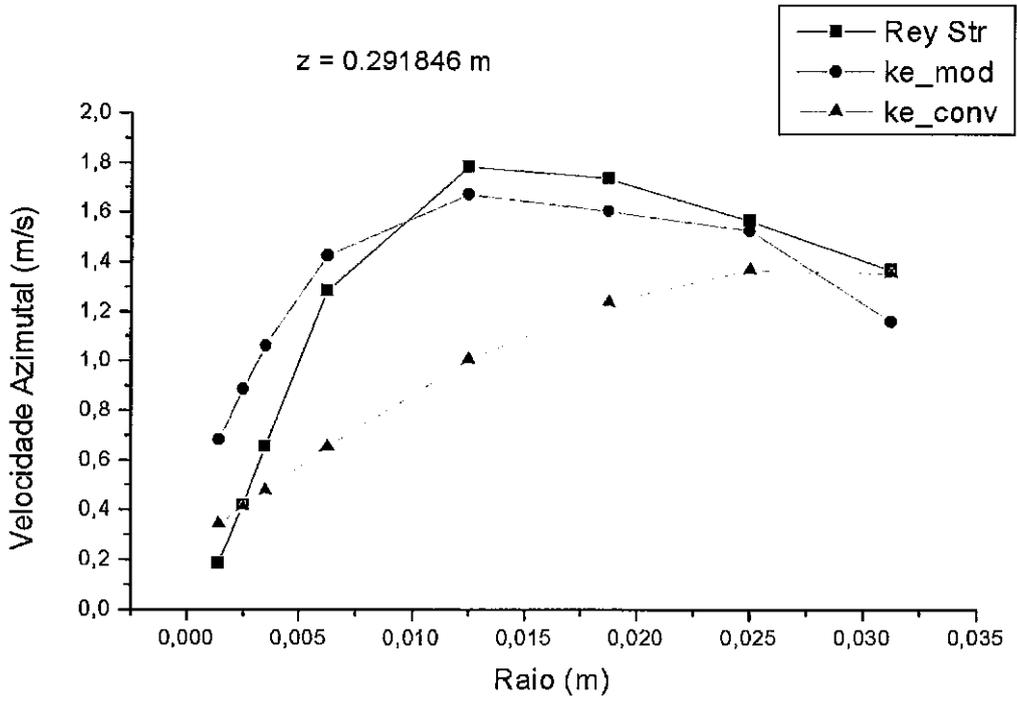


Figura 4.10-5 Perfil radial do componente azimutal da velocidade em $z = 0.291846$ m

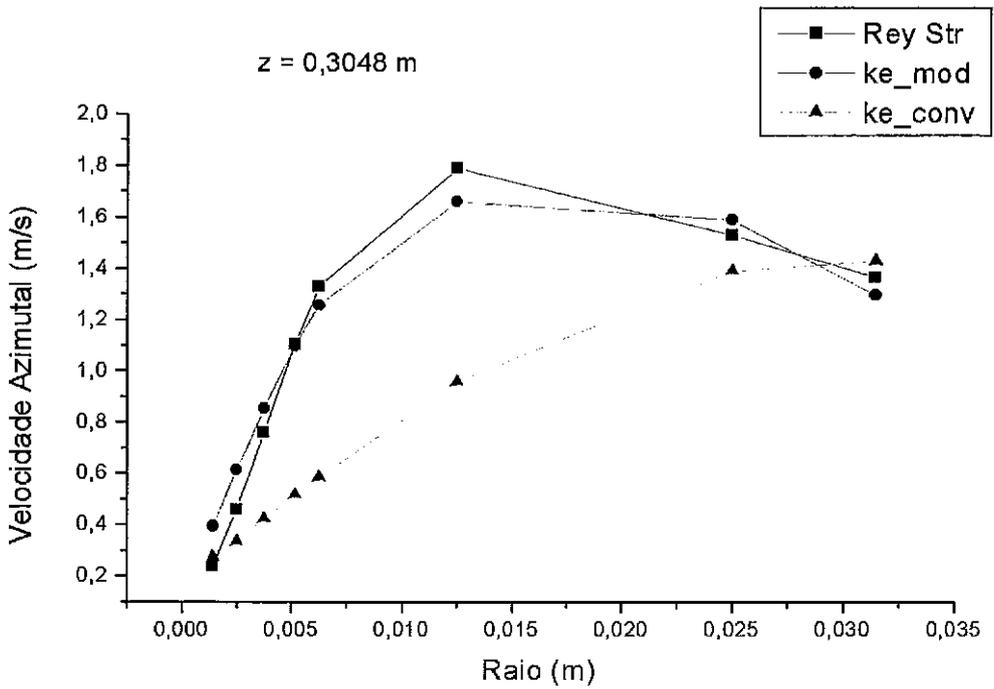


Figura 4.10-6 Perfil radial do componente azimutal da velocidade em $z = 0.3048$ m

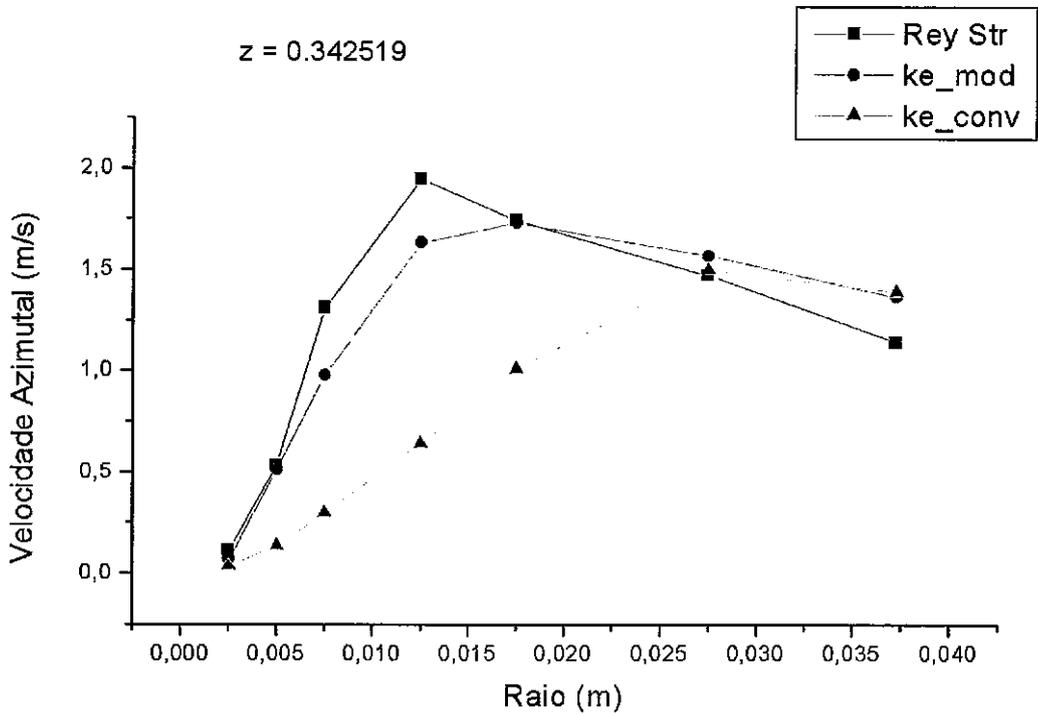


Figura 4.10-7 Perfil radial do componente azimutal da velocidade em $z = 0.342519$ m

Das figuras 4.10-5 a 7 observa-se que com a modificação proposta no modelo $k-\epsilon$ houve uma significativa melhora na captura do perfil de velocidade azimutal, conforme reproduzido pelo modelo do Tensor de Reynolds.

Deve ser ainda ressaltado que o tempo de CPU gasto com o modelo modificado foi de cerca de 80.000 s, para simular cerca de 1300 passos de tempo com passo variável conforme a evolução da solução, essa simulação foi rodada no modo *steady state*. Já para o modelo do Tensor de Reynolds foi adotado o modo transiente, e o tempo de CPU foi de cerca de 200.000 s. Esses tempos foram verificados com a utilização de processamento serial (uma só CPU), Pentium IV, *clock* 1.8 GHz.

4.11 Alguns resultados da simulação com o modelo de Simulação de Grandes Escalas

Os resultados, exibidos ao longo deste capítulo, tiveram por base os modelos de turbulência chamados de modelos de fechamento em um só ponto. Eles se baseiam nas equações de Reynolds para o escoamento médio e na modelagem – mais ou menos rigorosa, conforme o modelo adotado – dos momentos de segunda ordem no mesmo ponto do espaço. Essa abordagem é considerada na literatura, ver por exemplo Lesieur [1997], como adequada para os escoamentos de interesse da engenharia e para o projeto de equipamentos, mas não oferece uma compreensão detalhada dos processos físicos que ocorrem nos escoamentos complexos.

Como descrito no capítulo 3, seção 3.5, a Simulação de Grandes Escalas faz uso das equações transientes de Navier-Stokes, com uma malha espacial e temporal suficientemente refinada para captar diretamente da simulação as maiores estruturas do escoamento – fazendo uso de um modelo simplificado apenas para as menores estruturas, supostamente menos sensíveis às condições de contorno e portanto, mais próximas da condição de isotropia. Entretanto, o presente estágio de desenvolvimento de computadores digitais não permite uma abordagem adequada do escoamento em hidrociclones, usando essa técnica da Simulação de Grandes Escalas.

O escoamento no hidrociclone com a geometria considerada por Knowles et al., considerado nas simulações vistas neste capítulo, e que teve por base o primeiro conjunto de condições operacionais do equipamento, descrito na seção 4.5.2, leva a um número de Reynolds do escoamento, com base no diâmetro da porção cilíndrica do hidrociclone, de cerca de 50000. Esse valor do número de Reynolds para o escoamento em hidrociclones pode ser considerado baixo, pois deve-se observar que, como foi discutido na seção 4.6.3, as vazões de alimentação e as velocidades correspondentes ao experimento de Knowles foram cerca de um terço das normalmente empregadas em hidrociclones com dimensões similares às daquele utilizado no experimento. Além disso, a consideração de que a dimensão das maiores estruturas turbulentas está limitada ao diâmetro do hidrociclone,

pressupõe a hipótese de que não haverá a formação de estruturas turbulentas axiais ao equipamento, hipótese que, em função da ocorrência de fluxo reverso, pode ser inadequada, muito embora, como foi dito no capítulo 3, seção 3.4, a rotação tenda a alinhar preferencialmente os vórtices, colocando o eixo dos mesmos paralelo ao eixo do equipamento, o que reduziria a presença de estruturas turbilhonares em planos axiais.

Mesmo considerando essas hipóteses, com valores do número de Reynolds da ordem do acima citado, o número de elementos requeridos para uma adequada Simulação de Grandes Escalas do escoamento, ou seja, aquela em que 80% da energia do espectro de energia turbulenta seria resolvida diretamente, é da ordem de 10^9 . Admitindo-se, para essa estimativa que, no escoamento em estudo, esse número de elementos seria uma ordem de grandeza inferior ao número requerido para a Simulação Numérica Direta, como se verifica para a análise numérica de um escoamento em canal (ver Wilcox [2000]).

Nossa análise numérica utilizou um número de elementos entre 10^5 e 10^6 , portanto pelo menos três ordens de grandeza inferior ao desejado. E mesmo considerando tal reduzido número de elementos, foram requeridos cerca de dois meses de processamento em “cluster” de computadores (com 15 CPUs P4 com velocidade de 1.0 GHz), para se simular cerca de 2,5 segundos do escoamento – ou seja, pouco mais que o tempo de residência do fluido no interior do hidrociclone (que é de cerca de 2 s, para as condições consideradas).

Diante das limitações apontadas, poder-se-ia discutir a utilidade da análise aqui empreendida. Pope [2000], ao descrever a metodologia da Simulação de Grandes Escalas, faz referência à chamada *Very-Large-Eddy Simulation*, que faz uso de malhas muito grosseiras visando captar apenas as estruturas muito grandes do escoamento – com dimensão mínima de cerca de quatro vezes o número de elementos em cada direção, portanto contendo cerca de 64 elementos – e portanto incapaz de captar grande parte das estruturas turbulentas presentes, que são relativamente menores. Lesieur [1997], por sua vez, ao analisar o que considera uma “boa” Simulação de Grandes Escalas, pondera que uma resolução com baixa definição – malha grosseira – deve prever corretamente as propriedades estatísticas do escoamento, mas não a topologia correta do escoamento e,

evidentemente, nem mesmo a fase, ou seja, localização correta da estrutura; já uma simulação de alta definição, segundo esse autor, perderia apenas a fase, mas não a topologia.

O Prof. Aristeu da Silveira Neto (Universidade Federal de Uberlândia), que tem se dedicado à Simulação de Grandes Escalas e publicado diversos trabalhos na área, pondera que uma Simulação de (Muito) Grandes Escalas de escoamentos complexos, em malha grosseira, embora incapaz de fornecer resultados estatísticos do problema tão precisos como, por exemplo, a modelagem dos componentes do Tensor de Reynolds, fornece entretanto, uma informação qualitativa sobre as maiores estruturas turbilhonares da turbulência, que é bastante útil para uma compreensão de fenômenos físicos do problema em análise.

Admitindo, com os citados autores, que a metodologia possa ser empregada para uma análise qualitativa do problema, são mostrados, a seguir, alguns resultados obtidos em simulações realizadas no CFX, considerando duas malhas distintas. A primeira delas com cerca de 395.000 elementos e a segunda com cerca de 886.000. Ambas as simulações foram efetuadas em processamento paralelo, no “cluster” acima mencionado. Os resultados estão apresentados na forma de gráficos do domínio de escoamento que mostram superfícies de isovorticidade, ou seja, valores constantes do módulo do vetor vorticidade, visando dar idéia qualitativa das estruturas turbilhonares mais intensas. As figura 4.11.1 e 4.11.2 apresentam os resultados para a malha mais grosseira e as figuras 4.11.3 e 4.11.4 para a malha mais refinada. Em ambos os casos, considerou-se um seqüência de visualizações mostrando intensidades crescentes do módulo da vorticidade da esquerda para a direita e da primeira para a segunda figura. Ou seja, para a simulação com a malha de 395.000 elementos, o gráfico mais esquerda da figura 4.11.1 corresponde à menor intensidade de vorticidade mostrada, enquanto que o gráfico mais à direita da figura 4.11.2 corresponde à maior intensidade de vorticidade mostrada. Esse arranjo aplica-se analogamente para a malha de 886.000, considerando as figuras 4.11.3 e 4.11.4.

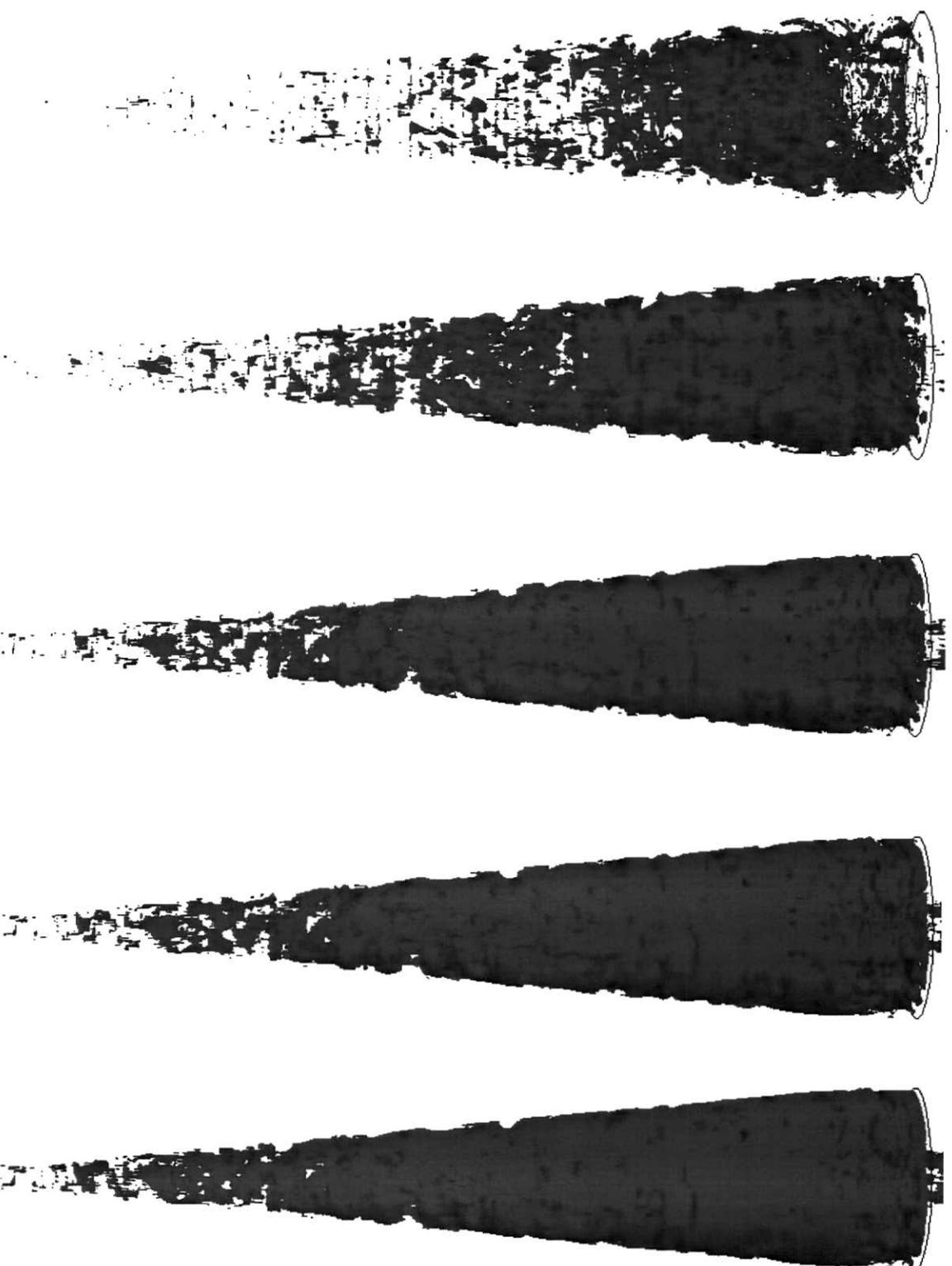


Figura 4.11.1 – Superfícies de isovorticidade – intensidade crescente da esquerda p/ direita – Malha 395.000 elementos

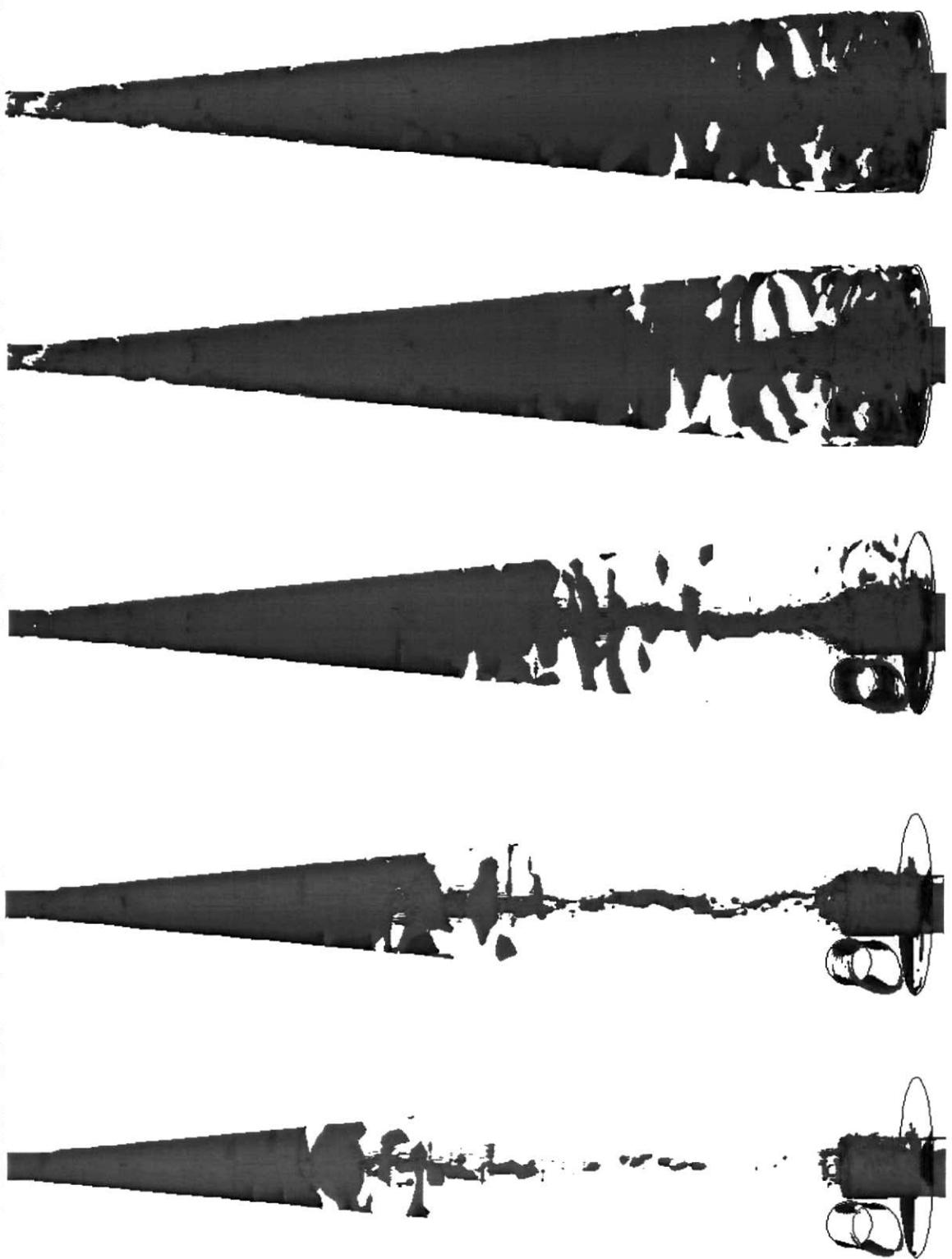


Figura 4.11.1 – Superfícies de isovorticidade – intensidade crescente da esquerda p/ direita – Malha 395.000 elementos



Figura 4.11.3 – Superfícies de isovorticidade – intensidade crescente da esquerda p/ direita – Malha 886.000 elementos

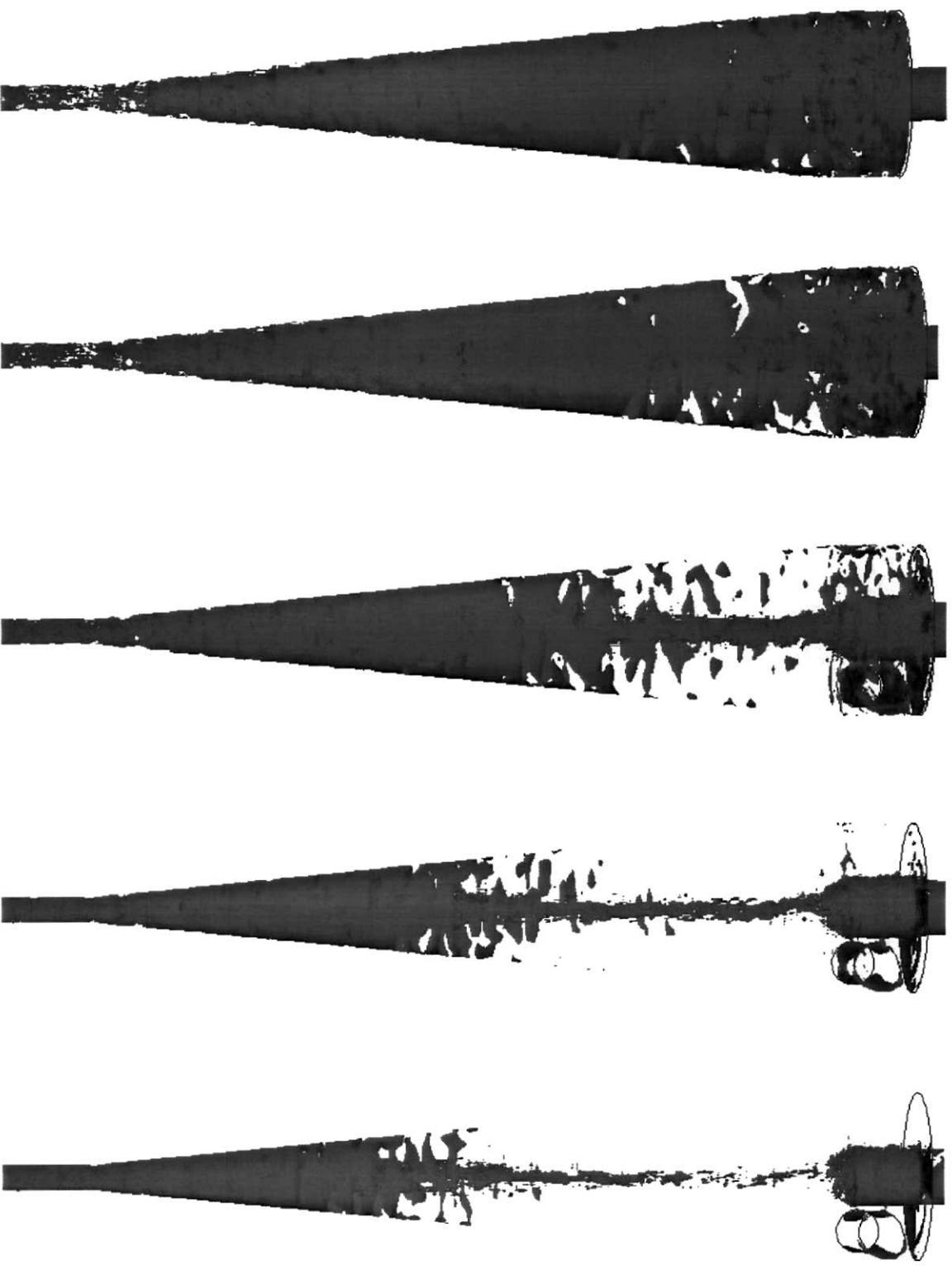


Figura 4.11.4 – Superfícies de isovorticidade – intensidade crescente da esquerda p/ direita – Malha 886.000 elementos

Como pode ser observado das figuras acima, não existem, como é de se esperar considerando a física do escoamento, diferenças significativas nos resultados com as duas malhas. Evidentemente, a malha mais refinada é capaz de captar um número maior de estruturas de isovorticidade, em função da maior resolução espacial, mas a análise que se segue é válida, tanto para a malha mais grosseira, como para a mais refinada.

Verifica-se que as estruturas turbilhonares de menor intensidade se encontram na parte superior do cone e não apresentam alinhamento preferencial perceptível. As estruturas turbilhonares de maior intensidade são mais freqüentes à medida que se caminha para o vértice do cone, como é de se esperar de considerações puramente inerciais, (devido à conservação do momento angular). Essas estruturas turbilhonares mais intensas configuram-se como estruturas anelares e/ou espiraladas ao redor do eixo do hidrociclone. Esse padrão de comportamento pode ser observado mesmo nos gráficos com estruturas de intensidade moderada, como é o caso dos últimos (a direita) gráficos das figuras 4.11.1 e 4.11.3, embora a elevada densidade das estruturas nesses gráficos prejudique a visualização, mas o padrão é definitivamente observável nas maiores intensidades, onde a menor densidade de tais estruturas facilita a visualização da forma anelar.

Esse comportamento das estruturas turbilhonares está coerente com o que foi discutido no capítulo 3 e nas seções anteriores deste capítulo, onde concluiu-se que a geometria do problema impõe uma certa organização nas estruturas turbulentas para o escoamento em análise, conduzindo a turbulência “desordenada” para uma certa organização espacial ou, como diz Lesieur [1997], para um comportamento “quasi-bidimensional”.

5.0 Conclusões e Recomendações Finais

O presente trabalho fez uma abrangente análise teórica e numérica do escoamento em um hidrociclone que funciona sem núcleo gasoso, visando subsídios de projeto e operação desse equipamento na indústria do petróleo, onde seu emprego, no denominado processamento primário de petróleo, tem aumentado recentemente, particularmente para a área de separação óleo/água.

Foram abordadas diversas classes de modelos, iniciou-se com os modelos mais simples, passíveis de um tratamento analítico, como é o caso da análise de fluido ideal, que apesar da deficiência fenomenológica de não consideração da viscosidade, é capaz de explicar algumas das mais importantes características desse complexo escoamento. Passou-se então para a análise numérica dos modelos de turbulência.

Verificou-se que modelos algébricos não são capazes de capturar as características dos perfis médios de velocidade observadas no escoamento no hidrociclone. Os modelos diferenciais baseados no conceito de viscosidade turbulenta, embora descrevendo razoavelmente os perfis de velocidade axial e radial, falharam na descrição do perfil do componente azimutal da velocidade.

Foi feita uma análise das razões físicas para a falha desses modelos em obter o perfil citado. O efeito ciclônico – ou seja, o efeito de comportamento aproximando-se ao vórtice livre para o componente azimutal da velocidade – é essencialmente um fenômeno verificado em fluidos de baixa viscosidade. Tanto é assim, que a solução do escoamento de fluido ideal no hidrociclone conduz ao perfil de vórtice livre para esse componente. Essa solução implicaria numa velocidade infinita sobre o eixo de rotação. Essa impossibilidade física é evitada pela atuação da viscosidade, que provoca o aparecimento de uma região central de rotação de corpo rígido. Essa região central é tanto maior quanto maior for o valor do coeficiente de difusão da quantidade de movimento – ou seja, quanto maior for a viscosidade do fluido, para as mesmas condições de contorno e iniciais.

A utilização de um modelo de turbulência que adota o conceito de viscosidade turbulenta, ou seja, um acréscimo no termo difusivo da equação do movimento, corresponde à adoção de um acréscimo no coeficiente de difusão viscosa, ou seja, a um aumento no efeito da viscosidade sobre o escoamento. Portanto tal abordagem na consideração da turbulência, no escoamento em questão, provoca uma extensão do tamanho da região sobre efeito de rotação de corpo rígido, que não corresponde ao problema físico. Em outras palavras, a abordagem da turbulência com base no conceito de incremento da difusividade molecular – embora útil em muitos problemas – não é adequada para o escoamento em hidrociclones.

A simulação com o modelo de equações diferenciais de transporte para cada um dos componentes do Tensor de Reynolds pôde captar, pelo menos qualitativamente, o perfil esperado para o componente azimutal da velocidade, que é constituído de um trecho central de rotação de corpo rígido e um trecho anular de comportamento de rotação próximo ao vórtice livre.

Foi apresentada, neste trabalho, uma correção ao modelo k - ϵ , com base numa formulação proposta por Launder [1977], para escoamentos com rotação. Tal proposta aumenta o termo de geração na equação da taxa de dissipação ϵ , reduzindo a intensidade de turbulência e, portanto, a viscosidade turbulenta. No presente trabalho, com base na física do problema, tal correção foi seletivamente aplicada a apenas uma parte do domínio, onde o perfil de velocidade azimutal assume comportamento de rotação de corpo rígido, uma vez que nessa região a análise física mostra que deve ocorrer atenuação da turbulência. Os parâmetros dessa proposta de correção foram selecionados de forma a reproduzir, com o modelo k - ϵ assim corrigido, o perfil de velocidade azimutal obtido com o modelo completo do Tensor de Reynolds e logrou-se êxito nessa proposta, uma vez que foi possível obter-se um bom grau de concordância entre os dois modelos. A vantagem da utilização do modelo corrigido reside no fato de que este, ao utilizar apenas mais duas equações diferenciais de transporte, para levar em conta a turbulência (em lugar das sete requeridas pelo modelo do Tensor de Reynolds), requer menores recursos computacionais (cerca de 1/3 do tempo de CPU).

Prosseguiu-se a análise do problema com a simulação do escoamento utilizando o modelo de Simulação de Grandes Escalas, onde, embora com malha espaço-temporal não muito refinada, conseguiu-se obter algumas informações qualitativas sobre estruturas turbilhonares presentes. Foi possível constatar, nessa análise, a existência de uma organização das estruturas turbilhonares, claramente visível nas estruturas com maior intensidade de vorticidade.

Deve ser ressaltada a carência de dados experimentais no tipo de hidrociclone aqui abordado, recomenda-se assim, que os estudiosos desse problema envidem esforços no sentido de obter-se esses dados para o escoamento em questão. Planeja-se participar desse esforço utilizando-se técnica de medição com laser (*Laser Doppler Anemometry* e *Particle Image Velocimetry*) em laboratório, em fase de montagem do Centro de Pesquisas da PETROBRAS.

6.0 Referências Bibliográficas

- ABCM, COPPE/UFRJ & IME/RJ (Editores) – *Primeira Escola da Primavera sobre Transição e Turbulência* - “Mini Cursos” – 21-25/Set./1998 – Rio de Janeiro/Brasil
- ABUJELALA, M.T. AND LILLEY, D.G. – “Limitations and Empirical Extensions of the k- ϵ Model as Applied to Turbulent Confined Swirling Flows” – *Chemical Engineering Communications*, vol. 31, pp. 223-236, 1984
- AHLSTEDT, H. – “Modelling of Confined Swirling Flows” – *Tampere University of Technology, Publication 49-DE89 914702*, 1987
- BARDINA, J.; FERZIGER, J.H. AND ROGALLO, R.S. – “Effect of Rotation on Isotropic Turbulence Computation and Modelling” – *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 154, pp. 321-336, 1985
- BATCHELOR, G.K. – *An Introduction to Fluid Dynamics* – Cambridge University Press, 1st ed. Cambridge, 1967
- BHATTACHARYYA, P. – “Theoretical Study of the Flow Field inside a Hydrocyclone with Vortex Finder Diameter Greater than that of Apex Opening / I. Laminar Case” – *Applied Scientific Research*, 36, 1980
- BHATTACHARYYA, P. – “Theoretical Study of the Flow Field inside a Hydrocyclone with Vortex Finder Diameter Greater than that of Apex Opening / II. Turbulent Case” – *Applied Scientific Research*, 36, 1980
- BLOOR, M.I.G.; INGHAM, D.B.; FERGUSON, W.J. – “A Viscous Model for Flow in the Hydrocyclone” – *The Institution of Chemical Engineers, Symposium Series N° 113*, 1989
- BLOOR, M.I.G. – “On Axially Symmetric Flow Models for Hydrocyclones” – 3rd *International Conference on Hydrocyclones*, Oxford, England, 30/Sept-02/Oct/1987

- BLOOR, M.I.G.; INGHAM, D.B. – “Theoretical of the Fluid Mechanics of Hydrocyclone Flow” – *Filtration and Separation*, pp. 266-269, July-August/1984
- BLOOR, M.I.G.; INGHAM, D.B. – “Theoretical Aspects of Hydrocyclone Flow” – *Progress in Filtration and Separation*, vol. 03, pp. 57-149, 1983
- BLOOR, M.I.G.; INGHAM, D.B. – “Turbulent Spin in a Cyclone” - *Trans. Instn. Chem. Eng.*, Vol. 53, pp. 1-6, 1975
- BLOOR, M.I.G.; INGHAM, D.B. – “The Leakage Effect in the Industrial Cyclone” - *Trans. Instn. Chem. Eng.*, vol. 53, pp. 7-11, 1975
- BOYSAN, F.; AYERS, W.H.; SWITHENBANK, J. – “A Fundamental Mathematical Modelling Approach to Cyclone Design” – *Trans. I. Chem. Eng.*, Vol. 60, pp. 222-230, 1982
- BRADSHAW, P. – “Effects of Streamline Curvature on Turbulent Flow” – *Advisory Group For Aerospace Research and Development (AGARD)* – North Atlantic Treaty Organization – AGARDograph no.169 – 1973
- BRADSHAW, P. – *An Introduction to Turbulence and its Measurement* – Pergamon Press – 1971
- BRADSHAW, P. – “The Analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow” – *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 36, part 1, pp.177-191, 1969
- BRODKEY, R.S. – “The Phenomena of Fluid Motion” – *Addison-Wesley Publishing Company*, 1967
- CANTWELL, B.J. – “Organized Motion in Turbulent Flow” – *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 13, pp. 457-515, 1981
- CAPELA MORAES, C.A.; HACKENBERG, C.M.; RUSSO, C. AND MEDRONHO, R.A. – *Theoretical Analysis of Oily Water Hydrocyclones - Hydrocyclones’ 96* – An International Conference – St. John’s College, Cambridge, UK, pp. 383-398, 2-4 April 1996

CHEN, C.P. – “Multiple-Scale Turbulence Model in Confined Swirling Jet Predictions” – *AIAA Journal*, vol.24, pp. 1717-1719, 1986

CHIOU, J.D.; CHIU, C.L. – “Fluid Flow and Motion of Solid Particles in Hydrocyclones” – *Ecoulements Solide Liquide*, vol. 2, pp. 21-31, 1990

CHOU, P.Y. – “On Velocity Correlations and the Solution of the Equations of Turbulent Flutuations” – *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, vol.3, 1945

CORRSIN, S. – “Turbulent Flow” – *American Scientist*, vol. 49, pp.300-325, 1961

DAVIDSON, M.R. – “Numerical Calculations of Flow in a Hydrocyclone Operating without an Air Core” – *Applied Mathematics Modelling*, Vol.12, pp. 1499-1505, April 1988

DUGGINS, R.K.; FRITH, P.C.W. – “Turbulence Effects in Hydrocyclones” - 3rd *International Conference on Hydrocyclones*, Oxford, England, pp. 75-81, 30/Sept-02/Oct/1987

DYAKOWISKI, T.; WILLIAMS, R.A. – “Modelling Turbulent Flow within a Small-Diameter Hydrocyclone” – *Chemical Engineering Science*, vol. 48, N^o 6, pp. 1143-1152, 1993

GIBSON, M.M. AND LAUNDER, B.E. – “Grounde Effects on Pressure Flutuations in Atmospheric Boundary Layer” – *Journal of Fluid Mechanics*, vol.86, Pt.3, pp. 491-511, 1978

HANJALIC, K.; LAUNDER, B.E. AND R. SCHIESTEL – “Multiple-Time-Scale Concept in Turbulent Transport Modelling” – *Turbulent Shear Flows*, vol. 2, pg. 36-49, 1980

HANJALIC, K. AND LAUNDER, B.E. – “A Reynolds Stress Model of Turbulence and its Application to Thin Shear Flows” – *Journal of Fluid Mechanics*, vol.52, pp. 609-638, 1972

HARGREAVES, J.H. AND SILVESTER, R.S. – “Computational Fluid Dynamics Applied to the Analysis of Deoling Hydrocyclone Performance” – *Trans IchemE*, vol 68, Part A, pp. 365-383, 1990

HINZE, J.O. – “Turbulence, An Introduction to Its Mechanism and Theory” – *McGraw Hill Book Company, Inc.* - 1975

HOFFMANN, P.H.; MUCK, K.C. AND BRADSHAW, P. – “The effect of concave surface curvature on turbulent boundary layers” – *Journal of Fluid Mechanics*, vol.161, pp. 371-403, 1985

HOFFMANN, P.H.; MUCK, K.C. AND BRADSHAW, P. – “The effect of convex surface curvature on turbulent boundary layers” – *Journal of Fluid Mechanics*, vol.161, pp. 347-369, 1985

HSIEH, K.T.; RAJAMANI, R.K. – “Mathematical Model of the Hydrocyclone Based on Physics of Fluid Flow” – *American Institute of Chemical Engineers’ Journal*, Vol. 37, N^o 5, pp. 735-745, May 1991

HSIEH, K.T.; RAJAMANI, K. – “Phenomenological Model of the Hydrocyclone: Model Development and Verification for Single-Phase Flow” – *International Journal of Mineral Processing*, vol. 22, pp. 223-237, 1988

KHODADADI, J.M. AND VLACHOS, N.S. – “Effects of Turbulence Model Constants on Computation of Confined Swirling Flows” – *Technical Notes, AIAA Journal*, vol. 28, n.4, pp. 750-752, 1990

KIM, S.W. AND CHEN C.P.- “A Multiple-Time-Scale Turbulence Model Based on Variable Partitioning of the Turbulent Kinetic Energy Spectrum” – *Numerical Heat Transfer*, Part B, vol.16, pp. 193-211, 1989

KNOWLES, S.R.; WOODS, D.R. AND FEUERSTEIN I.A. – “The Velocity Distribution within a Hydrocyclone Operating without an Air Core” – *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 51, pp. 263-271, June, 1973

LAKSHMINARAYANA, B. – “Turbulence Modeling for Complex Shear Flows” – *AIAA Journal*, vol. 24, no.12, pp. 1900-1917, 1986

LAUNDER, B.E.; PRIDDIN, C.H. AND SHARMA, B.I. – “The Calculation of Turbulent Boundary Layers on Spinning and Curved Surfaces” – *Journal of Fluids Engineering*, pp. 231-239, March 1977

LAUNDER, B.E.; REECE, G.J. AND RODI, W. – “Progress in the Development of a Reynolds Stress Turbulence Closure” – *Journal of Fluid Mechanics*, vol.68, pp. 537-566, 1975

LAUNDER, B.E. AND SPALDING, D.B. – “The Numerical Computation of Turbulent Flows” – *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 3* – North-Holland Publishing Company, pp. 269-289, 1974

LAUNDER, B.E. AND SHARMA, B.I. – “Application of Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow near a Spinning Disc” – *Lett. Heat Mass Transfer*, vol.1, 1974

LAUNDER, B.E. AND SPALDING, D.B. – “Turbulence Models and Their Application to the Prediction of Internal Flows” – *Heat and Fluid Flow*, vol. 2, no. 1, pp. 43-54, 1972

LAUNDER, B.E.; MORSE, A.; RODI, W. AND SPALDING, D.B. – “Prediction of Free Shear Flows – A Comparison of the Performance of Six Turbulence Models” – *Proc. Langley Free Shear Flows Conference* (NASA paper SP320), pp. 361-426, 20-21/Jul/1972

LESIEUR, M. – *Turbulence in Fluids* – Kluwer Publishing Co.- 1997

LILLEY D.G. AND CHIGIER, N.A. – “Nonisotropic Turbulent Stress Distribution in Swirling Flows from Mean Value Distribution” – *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, vol.14, pp. 573-585, 1971

- LUMLEY, J.L. – “Turbulence Modeling” – *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, pp. 1097-1103, 1983
- MALISKA, C.R. – *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional* – LTC, 1985
- Mellor, G.L. and Herring, H.J. – “A Survey of the Mean Turbulent Field Closure Models” – *AIAA Journal*, vol.11, No. 5, pp. 590-599, 1973
- MINIER, J.P.; SIMONIN, O. AND GABILLARD, M. – “Numerical Modelling of Cyclone Separators” – *11th International Conference on Fluidised Bed Combustion* – ASME – Montreal , pp. 1251-1259, April 1991
- PATANKAR, S.V. – *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* – Hemisphere Publishing Corporation, 1977
- PERICLEOUS, K.A.; RHODES, N.; CUTTING, G.W. – “A Mathematical Model for Predicting the Flow Field in a Hydrocyclone Classifier” – *2nd International Conference on Hydrocyclones*, Bath, England, pp. 27-40, 19-21/Sept/1984
- POPE, S. – *Turbulent Flows* – Cambridge University Press, 2000
- PRANDTL, L.- *Essentials of Fluid Dynamics, with Applications to Hydraulics, Aeronautics, Meteorology and other Subjects* – Blackie & Son Ltd. - 1952
- REYNOLDS, W.C. – “Computation of Turbulent Flows” – *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol.8, pp. 183-208, 1976
- RHODES, N.; PERICLEOUS, K.A.; DRAKE, S.N. – “The Prediction of Hydrocyclone Performance with a Mathematical Model” - *3rd International Conference on Hydrocyclones*, Oxford, England, pp. 51-58, 30/Sept-02/Oct/1987
- ROCHINO, A. AND LAVAN Z. – “Analytical Investigation of Incompressible Turbulent Swirling Flows in Stationary Ducts” – *Journal of Applied Mechanics*, pp. 151-158, June/1969

- RODI, W. AND MANSOUR, N.N. – “Low Reynolds number $k-\epsilon$ modelling with the aid of direct numerical simulation data” – *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 250, pp. 509-529, 1993
- RODI, W. – “Examples of Turbulence Models for Incompressible Flows” – *AIAA Journal*, vol. 20, no. 7, pp. 872-879, 1981
- ROMERO, J.; DA GAMA, R.S.; SAMPAIO, R – “Numerical Simulation of Flow in a Hydrocyclone” – *Relatório de Pesquisa e Desenvolvimento nº 17/98* – Maio de 1998 – Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC
- SCHLICHTING, H. – *Boundary-Layer Theory* – McGraw Hill Book Company – 1968
- SCHUBERT, H. – “A Hydrocyclone Separation Model in Consideration of the Turbulent Multi-Phase Flow” – *Particulate Science and Technology*, vol.3, pp. 1-13, 1985
- SILVA FREIRE, A.P. – *Lectures on Turbulent Flow* – COPPE / Federal University of Rio de Janeiro – Rio de Janeiro / Brazil – 1997
- SILVEIRA NETO, A – *Notas de Aula: Turbulência nos Fluidos Aplicada* – Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2003
- SIMKIN, D.J.; OLNEY, R.B. – “Phase Separation and Mass Transfer in a Liquid-Liquid Cyclone” – *American Institute of Chemical Engineers’ Journal*, pp. 545-551, December/1956
- SLOAN, D.G.; SMITH, P.J. AND SMOOT, L.D. – “Modelling of Swirl in Turbulent Flow Systems” – *Progress in Energy and Combustion Science*, vol.12, pp. 163-250, 1986
- SMALL, D.M.; FITT, A.D.; THEW, M.T. – “The Influence of Swirl and Turbulence Anisotropy on CFD Modelling for Hydrocyclones” – *Hydrocyclones’ 96 – An International Conference* – St. John’s College, Cambridge, UK, pp. 49-61, 2-4 April 1996
- SO, RONALD M.C. – “A turbulence Velocity Scale for Curved Shear Flows” – *Journal of Fluid Mechanics*, vol.70, pp. 37-57, 1975

Speziale, C.G.; Sarkar, S. & Gatski, T.B. – *Modelling the Pressure-Strain Correlation of Turbulence: an Invariant Dynamical Systems Approach* – *Journal of Fluid Mechanics*, vol 227, 1991

SPEZIALE, C.G. – “On Nonlinear $k-\ell$ and $k-\varepsilon$ models of turbulence” – *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 178, 1987

TAYLOR, G.I. – *The Boundary Layer in the Converging Nozzle of a Swirl Atomizer* – *Quart. Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 3, Pt.2 - 1950

WILCOX, D.C. – *Turbulene Modeling for CFD* – DWC Industries, Inc. - 2000

Apêndice A – Revisão bibliográfica

Neste apêndice é apresentada uma revisão descritiva/crítica dos principais artigos técnicos sobre escoamento turbulento, com linhas de corrente curvas e com rotação e sobre o escoamento em ciclones e hidrociclones. Essa análise tem por objetivo estabelecer um maior grau de detalhe dos conceitos discutidos objetivamente no capítulo 3.

Com relação aos artigos não específicos sobre hidrociclones, poder-se-ia separá-los, preliminarmente, em duas categorias: aqueles que tratam de linhas de corrente curvas e aqueles que tratam de rotação. Essa distinção não é, obviamente, precisa, uma vez que essas duas características se acham interligadas, mas pode-se caracterizar o segundo grupo, como aquele em que um escoamento em rotação é superposto a um escoamento ao longo do eixo de rotação, como no caso dos jatos rotativos, enquanto que no primeiro grupo estariam os escoamentos tangenciais a superfícies curvas (convexas ou côncavas).

As pesquisas sobre os temas acima citados têm sido abundantes, o que resulta num número muito grande de trabalhos disponíveis na literatura especializada. Procurou-se incluir nesta descrição aqueles trabalhos mais fundamentais para a análise do escoamento num hidrociclone.

Os trabalhos serão, como dito inicialmente, descritos e discutidos em detalhe, individualmente, neste apêndice. A referência completa dos artigos originais encontra-se no capítulo 6 (bibliografia). Faz-se inicialmente uma classificação desses trabalhos.

1º Grupo: Trabalhos que consideram abordagem essencialmente analítica, utilizando até mesmo hipótese de fluido ideal em parte do desenvolvimento:

Inclui-se apenas o trabalho de Rochino e Lavan, que data de 1969, como representante deste grupo, embora trabalhos anteriores de Taylor [1950] pudessem ser também incluídos. Trata de uma abordagem analítica do problema de um escoamento

girante, confinado em um duto cilíndrico. Utiliza uma extensão da hipótese de similaridade de von Karman, resolvendo as equações do movimento obtidas com a aplicação da teoria do transporte de vorticidade de Taylor modificada. As tensões turbulentas são expressas como função de uma viscosidade turbulenta – função dos gradientes radiais do componente azimutal da velocidade e da própria coordenada radial – e da taxa de deformação que, dada a hipótese de escoamento cilíndrico, é também função da coordenada radial. Esse trabalho não será detalhado neste apêndice uma vez que foi abordado na seção 3.2.1.

2º Grupo: Trabalhos que apresentam uma abordagem fenomenológica profunda e/ou extensa dos temas acima citados.

O primeiro desses trabalhos A-1, de 1973, constitui-se num extenso estudo sobre os efeitos da curvatura da linha de corrente sobre o escoamento turbulento, patrocinado pela OTAN, como parte dos trabalhos do grupo de pesquisas em aeronáutica. Trata-se de uma abordagem fundamental dos efeitos sobre o escoamento turbulento das taxas extras de deformação impostas ao fluido pela curvatura da linha de corrente e cujo efeito sobre a turbulência não é adequadamente representado pela hipótese de Boussinesq. Os conceitos discutidos nesse trabalho, foram introduzidos, por diversas vezes, nas seções 3 e 4 deste relatório.

O outro trabalho incluído neste grupo é o A-5, que, relativamente ao anterior, é um trabalho mais recente (1986) que embora apresente um cunho um pouco menos teórico e fundamental e mais voltado às aplicações na modelagem da turbulência, do que o trabalho anterior ainda apresenta uma discussão sobre os fenômenos físicos do problema suficientemente profunda para justificar sua colocação neste grupo. Trata-se também de um trabalho bastante extenso, que aborda, primariamente, o escoamento rotativo confinado em injetores de combustível para queimadores. É feita uma ampla discussão dos efeitos da rotação e, da recirculação dela decorrente, sobre a turbulência e analisadas as implicações nos modelos de turbulência com duas equações de transporte e nos modelos algébricos para o tensor de Reynolds, com a apresentação de resultados comparativos entre os modelos e experimentos.

O último trabalho deste grupo, A-6, apresenta uma análise dos fundamentos teóricos do problema bem mais reduzida do que os anteriores e poderia ser classificado no 3º Grupo abaixo. Foi aqui incluído, entretanto, por constituir-se numa apresentação de resultados comparativos obtidos com diversos modelos para o escoamento rotativo confinado em câmaras de combustão e também em ciclones. Foram utilizados na comparação os modelos, $k-\varepsilon$, $k-\varepsilon$ modificado e algébrico de tensões de Reynolds.

3º Grupo: Trabalhos que abordam modificação nos modelos de turbulência com duas equações ($k-\varepsilon$) aplicados à situações de rotação e linhas de correntes curvas

Embora o primeiro trabalho deste grupo, A-3, estude a camada limite e assim poderia ser agrupado no 4º Grupo abaixo, foi aqui agrupado por utilizar uma correção sobre o modelo com duas equações. Trata de camadas limite turbulenta sobre superfícies curvas, onde aplica-se o modelo $k-\varepsilon$ corrigido em função do parâmetro adimensional número de Richardson para a curvatura.

Outro trabalho deste grupo é o de Abujelala e Lilley [1984], que aborda uma análise do modelo $k-\varepsilon$ e $k-\varepsilon$ corrigido, quando utilizados na modelagem de escoamentos confinados com rotação, comparando com resultados experimentais de um escoamento confinado rotativo cilíndrico obtidos por um dos autores. Esse trabalho não será descrito neste apêndice, uma que vez que foi detalhado na seção 3.2.3.

O último trabalho deste grupo, A-7, visa também a modelagem de jatos rotativos confinados, com um modelo $k-\varepsilon$, no qual algumas constantes e parâmetros foram ajustados para melhor reprodução de dados experimentais nesse tipo de escoamento.

4º Grupo: Trabalhos que abordam a influência da curvatura da superfície sobre camadas limite turbulentas.

Inclui-se neste grupo apenas o trabalho A-4, que trata de uma análise teórica dos resultados experimentais obtidos pelo efeito de uma curvatura côncava da superfície

sobre a camada limite turbulenta, embora, um trabalho do mesmo autor que analisa o efeito da curvatura convexa – vide referência na seção 8.0 – esteja interligado a este.

5º Grupo: Trabalhos que abordam os efeitos da curvatura das linhas de corrente em modelos de fechamento de ordem superior

Inserimos neste apêndice uma breve discussão sobre os trabalhos, A-2, de Launder et al. ([1972], [1975], [1978]) – vide referências completas na seção 6.0 – que abordam a modelagem da turbulência com o uso de equações de transporte para os componentes do tensor de Reynolds. O artigo de [1975], é discutido em particular pelo fato de mostrar a superioridade desse tipo de modelagem para lidar com as taxas extras de deformação impostas pela curvatura da linha de corrente.

A-1 – Bradshaw [1973]

Esse artigo constitui-se num dos maiores (120 páginas) e mais abrangentes estudos publicados sobre os efeitos da curvatura da linha de corrente sobre o escoamento turbulento. Foi desenvolvido, com financiamento internacional no âmbito da OTAN, visando principalmente o desenvolvimento aeronáutico e balístico, ou seja, o escoamento de ar sobre aerofólios. Entretanto os conceitos teóricos ali tratados são bastante úteis para a compreensão dos efeitos da curvatura sobre a turbulência numa ampla variedade de casos de interesse para a engenharia. Muitos dos conceitos descritos nesse artigo já foram discutidos nas seções deste relatório, mas algumas idéias e fundamentos gerais sobre o assunto serão detalhados nesta seção do apêndice A.

A-1.1 – Descrição Geral dos Efeitos da Curvatura sobre a Turbulência

O artigo inicia com uma descrição de alguns escoamentos com linhas de corrente curva, nos quais a turbulência é significativamente modificada por essa curvatura. O autor menciona que muitos resultados experimentais, obtidos por vários pesquisadores (ver referência em Bradshaw [1973]), que as características turbulentas do escoamento, tais como tensões de Reynolds, mistura, espalhamento de jato, transferência de calor, etc., são modificadas na presença da curvatura da linha de corrente de um modo muito maior do que seria esperado pelas relações, usualmente consideradas, entre essas grandezas e as taxas de deformação em escoamentos cisalhantes simples. Isso significa que a presença de pequenas taxas extras de deformação superpostas a escoamentos cisalhantes simples não podem ser consideradas como pequenas perturbações, pois são capazes de transformá-los em escoamentos complexos, onde as expressões linearizadas que relacionam as características da turbulência com a taxa de deformação, tais como:

$$\text{Tensão Cisalhante} = \mu_T \times (\text{Taxa de Deformação Cisalhante}) \quad (\text{A-1.1})$$

não mais são válidas.

Considerando-se as dificuldades de estudar-se diretamente os escoamentos complexos, o artigo enfoca os efeitos de taxas extras de deformação aplicadas a escoamentos cisalhantes simples, ou seja, escoamentos nos quais uma taxa de deformação (digamos $\partial U/\partial y$) é substancialmente maior que as outras e as taxas de deformação secundárias não afetam a turbulência. Muitas vezes também, a hipótese de camada cisalhante delgada é também considerada. O que significa que o efeito da taxa extra de deformação sobre o escoamento, devido á curvatura, é desprezível.

Considerando o conceito de viscosidade turbulenta dado pela equação (A-1.1), o efeito da introdução de uma taxa extra de deformação (digamos $\partial V/\partial x$), no escoamento cisalhante simples, é o aumento da tensão cisalhante por um fator dado pela expressão:

$$f = 1 + \frac{\partial V/\partial x}{\partial U/\partial y} \quad (\text{A-1.2})$$

Como foi mencionado na seção 3.2.3, há evidência experimental abundante de que o efeito real obtido é na realidade muito maior do que o expresso por (A-1.2), mesmo para pequenos valores da “razão entre as taxas de deformação” ($(\partial V/\partial x)/(\partial U/\partial y)$), sendo da ordem de:

$$F = 1 + 10 \frac{\partial V/\partial x}{\partial U/\partial y} \quad (\text{A-1.3})$$

Muitas outras fontes de taxas extras de deformação, além da curvatura, são capazes de produzir efeitos sobre as tensões turbulentas que são muito maiores do que os efeitos explícitos dos termos extras que aparecem nas equações o movimento quando essas taxas de deformação adicionais são introduzidas. Assim, um fator de correção mais geral assumiria a forma:

$$F = 1 + 10 \frac{e}{\partial U/\partial y} \quad (\text{A-1.4})$$

Onde e representa a taxa extra de deformação proveniente de qualquer dessas outras fontes. O fator 10 na expressão acima é somente uma aproximação e é utilizado apenas para dar uma idéia do acréscimo real relativamente ao acréscimo esperado – este último, dado pela equação (A-1.3).

A-1.2 – Considerações sobre a física do efeito da curvatura

Bradshaw apresenta uma explicação tradicional para o efeito exacerbado da curvatura da linha de corrente sobre a turbulência. Essa explicação é baseada no movimento flutuante (pela turbulência) de um elemento de fluido que se encontra descrevendo uma linha de corrente curva do escoamento médio. Essa explicação foi elaborada por von Karman (ver referência em Bradshaw [1973]).

Se um elemento de fluido, em rotação ao redor de um eixo em um escoamento considerado, por simplicidade, sem atrito e axissimétrico, for deslocado na direção radial, pode-se assumir que esse elemento de fluido conservará sua quantidade de movimento angular, medido em relação ao centro de curvatura das linhas de corrente. Se o escoamento médio é tal que tem-se um decréscimo do momento angular quando o raio aumenta, isto é $\partial(Ur)/\partial r < 0$, o gradiente radial de pressões que mantém o escoamento médio em sua trajetória curva é pequeno demais para manter o elemento de fluido em equilíbrio em sua nova posição (pois esse elemento tem maior momento angular) e assim, o elemento de fluido continuará a se mover para fora (linhas de corrente de maior raio de curvatura). Se o momento angular do escoamento médio crescer com o raio ($\partial(Ur)/\partial r > 0$), então o elemento de fluido será forçado, pelo gradiente radial de pressões, a retornar à sua posição original (ao redor da qual vai, portanto, oscilar).

Essa dependência da estabilidade da flutuação turbulenta com o sentido do gradiente do momento angular é, de acordo com Bradshaw, um fenômeno observado experimentalmente. A oscilação de um elemento de fluido, como acima descrita, foi observada, se não em escoamentos com linha de corrente curva, pelo menos em

escoamentos com flutuação, os quais são análogos aos primeiros, como será visto adiante (ver também, neste apêndice, seção A-1.3).

A-1.3 – Equações para a descrição de escoamentos turbulentos com linhas de corrente curva e com rotação

Bradshaw inicialmente introduz os sistemas de coordenadas mais adequados ao estudo desses dois tipos de problemas. Ao primeiro, isto é, para a descrição dos escoamentos em linhas de corrente curvas, Bradshaw utiliza coordenadas referidas à linha de corrente, ou seja, o sistema (s, n, z) , onde s é medido ao longo da linha de corrente, n é normal a s na direção do menor raio de curvatura, e z é normal ao plano (s, n) . Para o escoamento em rotação ao redor de um eixo e , particularmente, para os escoamentos axissimétricos, o sistema de coordenadas cilíndricas usual é o utilizado, ou seja, o sistema (x, r, θ) , e para o caso da axissimetria tem-se ainda $[d()/d\theta] = 0$.

O autor também discute outras simplificações que podem ser consideradas numa situação bidimensional, onde a espessura da camada cisalhante é pequena comparada com o raio de curvatura. Ele afirma que, nesse caso, a curvatura pode ser ignorada no processo de obtenção das equações da camada limite, isto é, ambos os sistemas de coordenadas acima descritos – (s, n) e (x, r) – comportam-se similarmente ao sistema cartesiano usual (x, y) , mas para os propósitos de resolver as equações obtidas, num escoamento turbulento, os efeitos da curvatura serão muito maiores dos que aqueles que seriam esperados dos termos extras introduzidos na equações do escoamento médio ou nas equações das tensões turbulentas.

Considerando-se um fluido com propriedades constantes, escoamento incompressível e axissimétrico, as equações de Reynolds para o sistema de coordenadas cilíndrico (x, r, θ) , com componentes de velocidade (U, V, W) e respectivas flutuações (u, v, w) , ambas respectivamente nas direções x, r e θ são:

- direção axial (x):

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} - \frac{\partial \bar{uv}}{\partial r} - \frac{\bar{uv}}{r} + \\
 & + v \left(2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) + \frac{v}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r} \right)
 \end{aligned}
 \tag{A-1.5}$$

- direção radial (r)

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{W^2}{r} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial \bar{uv}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial r} - \frac{\bar{v}^2 - \bar{w}^2}{r} + \\
 & + v \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial x} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) + \frac{2v}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right)
 \end{aligned}
 \tag{A-1.6}$$

- direção azimutal (θ)

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{VW}{r} = & -\frac{\partial \bar{uw}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{vw}}{\partial r} - \frac{2\bar{vw}}{r} + \\
 & + v \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{W}{r^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{A-1.7}$$

E a equação da conservação de massa é dada por:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} = 0
 \tag{A-1.8}$$

Bradshaw discute a abordagem utilizada para simplificar e resolver essas equações em alguns casos de escoamentos com linhas de corrente curvas. Para os casos de escoamentos em rotação muito forte, como é o caso dos hidrociclones por exemplo, onde o componente azimutal (tangencial) da velocidade W é da mesma ordem de grandeza do componente axial U , a equação para a conservação da quantidade de movimento na direção r – equação (A1.1-5) – fica reduzida, por uma análise da ordem de magnitude dos seus termos, a seguinte forma:

$$\frac{W^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (\text{A-1.9})$$

Essa equação pode ser integrada na direção r , de algum raio de referência r_0 , onde a pressão é conhecida (digamos P_0), e derivada na direção x para produzir a o termo do gradiente de pressão da equação (A1.1-5). Resultando em:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(P - P_0)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{r_0}^r \frac{W^2}{r'} dr' \quad (\text{A-1.10})$$

As equações (A-1.9) e (A-1.10) são substituídas nas equações (A-1.6) e (A-1.5), respectivamente.

Para escoamentos com forte rotação, isto é, quando W é da mesma ordem de U , a expressão acima é da mesma ordem do termo $U \frac{\partial U}{\partial x}$ na equação (A-1.5) e, em consequência, a interação entre as equações (A-1.5) e (A-1.7) é assegurada pelo termo de pressão presente na equação (A-1.6).

Complementando a discussão acima, Bradshaw aborda as equações de transporte para as tensões de Reynolds, apresentando a metodologia para a obtenção dessas equações e discutindo a importância relativa de cada um dos seus termos.

A1.1.4 – Levando em conta o efeito da curvatura da linha de corrente sobre as tensões turbulentas

Para se um critério para avaliar os efeitos das taxas extras de deformação, o autor discute as condições de equilíbrio local em um escoamento cisalhante simples. Nessa condição assume-se que a taxa de produção de energia turbulenta é igual à taxa de dissipação, ou seja, temos que:

$$\text{“production”} = -\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} = \text{“dissipation”} \equiv \varepsilon \equiv \frac{(-\overline{uv})^{3/2}}{L} \quad (\text{A-1.11})$$

As expressões acima definem uma escala de comprimento para a dissipação L , que é dada pela equação (A-1.12), abaixo.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{(-\overline{uv})^{1/2}}{L} \quad (\text{A-1.12})$$

Mas a teoria do comprimento de mistura (ℓ) aplicada ao escoamento cisalhante simples conduz à mesma equação, ou seja:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{(-\overline{uv})^{1/2}}{\ell} \quad (\text{A-1.13})$$

Assim, podemos concluir que essas escalas de comprimento são as mesmas, no caso de equilíbrio local. Bradshaw afirma que no caso de não equilíbrio, a escala de comprimento L ainda é significativa enquanto que a escala ℓ não tem significado.

Os efeitos da curvatura da linha de corrente (ou outras taxas extras de deformação) na monografia de Bradshaw, são apresentados como fatores de correção aplicados sobre a escala de comprimento L . O autor afirma que esses fatores poderiam igualmente ser aplicados diretamente sobre os termos dissipativos das equações de transporte, mas a vantagem de se utiliza-los sobre a escala de comprimentos L e de considerar as hipóteses de equilíbrio local é uma determinação empírica mais fácil desses fatores de correção, sempre que a hipótese de equilíbrio local for razoável. Sob essas hipóteses, os fatores de correção determinados empiricamente podem representar precisamente e estritamente os efeitos somente da taxa extra de deformação. Bradshaw faz então uma afirmativa ousada: desde que L é uma escala de comprimentos significativa para a turbulência, mesmo em condições de não equilíbrio, os mesmos fatores de correção determinados empiricamente para as condições de equilíbrio local podem ser aplicados à escala de comprimento L , mesmo quando as hipóteses de equilíbrio local não se verificam.

Bradshaw estabeleceu, entretanto, que quando a condição de escoamento estudada não pode ser aproximadamente considerada como uma camada cisalhante delgada, mais de uma escala de comprimentos será necessária para descrever a turbulência. Ademais, deve ser considerado que a anisotropia causada pela proximidade de uma fronteira sólida não pode ser descrita por somente uma escala de comprimento.

O uso de um fator de correção para escoamentos em camadas cisalhantes delgadas é necessário mesmo quando um modelo de turbulência com duas equações é empregado, em lugar das formulações mais simples envolvendo comprimento de mistura e viscosidade turbulenta. Nesse caso, correções da ordem de F – equação (A1.1-3) – seriam necessários sobre os termos de destruição, redistribuição e transporte turbulento, além das correções da ordem de f – equação (A1.1-2) sobre os termos de produção. Fazendo uso da aproximação de equilíbrio local, é possível aplicar-se o fator de correção da ordem de F somente sobre o termo de dissipação.

Bradshaw, entretanto, enfatiza que para valores elevados das taxas extras de deformação, que resultam em grandes alterações nas maiores estruturas (vórtices) turbulentas que, por sua vez, são responsáveis pela maior parte do transporte turbulento, pode ser essencial aplicar-se o fator de correção aos termos de transporte, para representar adequadamente o efeito da taxa extra de deformação.

A-1.5 – Parâmetros para o fator de correção

Bradshaw recomenda que a aplicação, na forma acima prescrita, de um fator de correção F dado pela seguinte expressão:

$$F = 1 - \frac{\alpha}{2} R_f \quad (\text{A-1.14})$$

Onde é o adimensional número Richardson para o gradiente, que para uma camada cisalhante delgada e axissimétrica é dado por – no sistema de coordenadas (x, r, θ) :

$$R_r = \frac{2 \frac{W}{r} \overline{vw}}{\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{vw}{r} \frac{\partial}{\partial r}(W r)} \quad (\text{A-1.15})$$

Considerando a hipótese de equilíbrio local, segue que $\frac{\overline{vw}}{uv} = \frac{\partial W / \partial r}{\partial U / \partial r}$ e, também considerando-se efeitos de pequena curvatura ($W/r \ll \partial W / \partial r$), a equação (A-1.15) à seguinte forma aproximada:

$$R_r = \frac{2 \frac{W}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(W r)}{\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2} \quad (\text{A-1.16})$$

O fator α na equação (A-1.14) não pode ser, de acordo com o autor, uma constante absoluta e a variação em α é maior em escoamentos mais afastados da condição de equilíbrio local. Bradshaw também prescreve uma equação diferencial ordinária, obtida semi-empiricamente, para a determinação do que ele chama de “valor efetivo de α ”.

Conclusões:

Na seção A-3, à frente, é apresentado um modelo por Launder et al. [1977], para o cálculo da camada limite turbulenta sobre uma superfície curva que emprega um modelo a duas equações (k - ϵ) com um fator de correção baseado no número de Richardson para gradiente, aplicado sobre o termo de destruição na equação de ϵ . Os resultados obtidos pelos autores são muito melhores que aqueles obtidos, com o mesmo modelo, sem o emprego do fator de correção, para alguns escoamentos com curvatura da linha de corrente.

Algumas das condições descritas na seção A-3, e outras características de escoamentos mais complexos, são prevaletentes no interior de um hidrociclone, em consequência desse fato, a aplicação de um fator de correção sobre somente uma (e de certa forma arbitrariamente definida) escala de comprimentos não parece ser uma abordagem muito promissora para obtenção de um modelo adequado a esse tipo de escoamento. Bradshaw também afirma que, o fenômeno essencialmente não viscoso de surgimento de uma zona de recirculação próxima ao eixo de escoamentos com forte rotação ao redor desse eixo, como é o caso do hidrociclone, pode complicar tão profundamente o escoamento, que a análise rudimentar, como aquela aqui descrita, provavelmente não pode ser adequadamente aplicada a esse tipo de escoamento.

A-2 – Launder et al. ([1972],[1975],[1978])

Segue-se desta feita, uma breve discussão sobre um conjunto de três artigos por Launder et al. ([1972],[1975] e [1978]), que abordam a modelagem da turbulência através do uso das equações de transporte para os elementos do tensor de Reynolds, como introduzido na seção 3.4. Na verdade a seção 3.4 abordou uma forma mais abrangente desse tipo de modelagem do que a que aqui está sendo considerada.

Os artigos serão discutidos em ordem cronológica.

Hanjalic e Launder [1972], apresentaram o desenvolvimento de um modelo para o tensor de Reynolds num artigo que discutiu as hipóteses utilizadas para a modelagem de cada termo da equação de transporte. Essas discussões foram resumidas na seção 3.4. Somente uma versão mais simples o modelo proposto foi, entretanto, testada pelos autores, em simulações numéricas. Essa versão objetivava o estudo de escoamentos em camada limite bidimensional, onde somente um componente do tensor de Reynolds era significativo, sendo esse componente $-\overline{u_1 u_2}$. Os resultados foram comparados com resultados experimentais disponíveis para essa classe de escoamentos.

Nessa versão simples o modelo não pode ser apropriadamente incluído na categoria discutida na seção 3.4. Deveria ser mais adequadamente classificado como uma classe intermediária de modelos, entre o modelo k-ε convencional e o modelo completo para tensões de Reynolds. Na verdade poderíamos incluí-lo na categoria dos modelos k-ε de múltipla escala, só que em vez de serem empregadas duas faixas de energia representativas do espectro de energia turbulenta, emprega-se uma única faixa de energia turbulenta e uma equação de transporte adicional para a uma tensão cisalhante turbulenta, ou seja, essa proposta consiste em um modelo de turbulência com três equações diferenciais de transporte, uma para k , uma para ϵ e uma para a única tensão cisalhante considerada significativa.

O artigo de Launder, Reece e Rodi [1975], (LR&R), objetivou uma maior generalidade de aplicações do que o artigo anterior. Os autores propuseram um modelo completo para o tensor de Reynolds, o qual foi capaz de prever uma influência apreciável dos termos secundários da taxa de deformação, para escoamentos sobre superfícies curvas. Esse modelo é basicamente o mesmo apresentado na seção 3.4, embora o modelo encontrado naquela seção, considere uma proposta mais recente para o termo de redistribuição próximo à parede, termo que foi proposto por Gibson e Launder [1978].

LR&R compararam resultados fornecidos por seu modelo com resultados experimentais de várias classes de escoamentos turbulentos, incluindo escoamentos bidimensionais não homogêneos como escoamentos camadas cisalhantes de mistura e escoamentos em canais planos. Nenhum dos experimentos utilizados, entretanto, considerou superfícies curvas ou rotação. Entretanto, os autores mostram que a forma proposta para o termo pressão-deformação do modelo foi capaz de gerar um efeito de amplificação sobre o coeficiente que multiplica o termo de deformação secundária (como o associado à curvatura da linha de corrente) de aproximadamente uma ordem de grandeza superior ao que multiplica o termo de deformação principal, na equação da tensão cisalhante.

Os autores mostraram ainda que, adicionando o termo pressão-deformação, ou seja, o termo de redistribuição, com o termo de geração das tensões normais e levando-se em conta os valores $\overline{u_1^2} = 1.1k$ e $\overline{u_2^2} = 0.25k$ para as tensões normais, que

aproximadamente corretos para regiões próximas às paredes, o termo de deformação principal resulta em:

$$0.06k \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \left(1 + 8 \frac{\partial U_2 / \partial x_1}{\partial U_1 / \partial x_2} \right) \quad (\text{A-2.1})$$

O qual é coerente com a proposta de Bradshaw [1973] – ver capítulo 3, seção 3.2 – equação (3-5), com $\alpha = 8$ em lugar de 10).

Deve-se enfatizar que é devido a ação dos termos pressão-deformação (termos de redistribuição), que é produzido um efeito equivalente a amplificação do coeficiente da deformação secundária na equação para a tensão cisalhante do modelo de LR&R. Esse efeito é causado principalmente pela diferença de magnitude das tensões turbulentas normais, junto à parede. Isso se constitui numa representação fisicamente mais realista do que a simples abordagem considerando as abordagens baseadas no conceito de viscosidade turbulenta.

Gibson e Launder [1978]. Esse trabalho enfoca principalmente camadas limites atmosféricas, com consideração de efeitos térmicos e, em consequência, de flutuação. Pode ser considerado como uma continuação dos trabalhos prévios, nos quais, além das considerações adicionais dos efeitos de flutuação é, como foi dito acima, considerado um novo modelo para os termos de redistribuição junto às paredes. Essa característica do modelo é abordada na seção 3.3.

Conclusões:

O uso de equações de transporte para os componentes do tensor de Reynolds configura-se como a abordagem mais geral para evitarem-se os problemas resultantes dos modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta. O custo computacional elevado,

entretanto, faz com que se justifiquem as pesquisas na obtenção de correções, que aplicadas a modelos mais simples, possam produzir resultados satisfatórios.

A-3 – Launder, Priddin e Sharma [1977] (e Bradshaw [1969])

O trabalho desses autores, LP&S, usa uma extensão da proposta de Bradshaw, ou seja, abordar-se a curvatura da linha de corrente e a rotação de forma análoga à que se utiliza para o problema da flutuação por efeito térmico, no escoamento cisalhante turbulento.

No seu trabalho, Bradshaw adotou uma nova forma para o cálculo do comprimento de mistura em escoamentos em turbulentos cisalhantes, baseado num parâmetro adimensional, que é o número de Richardson. Esse parâmetro foi obtido por Bradshaw de uma analogia com o número de Richardson de gradiente para a flutuação, que representa a razão entre o empuxo e as forças de inércia.

O número de Richardson de gradiente, para a curvatura, que já foi descrito na seção 3.2.3, representa uma razão entre a força centrífuga (devida à curvatura da linha de corrente) e as forças de inércia. A expressão para o número de Richardson proposta por LP&S é a seguinte:

$$Ri_{\tau} = \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{2U}{r^2} \frac{\partial(rU)}{\partial y} \quad (\text{A-3.1})$$

Onde U é o componente da velocidade ao longo da linha de corrente, r é o raio de curvatura e y é a coordenada transversal, medida da parede sólida, na direção do raio de curvatura da superfície (e das linhas de corrente). (Notar que r e y representam a mesma direção coordenada, sendo que r é medido do centro de curvatura e y é medido da parede.

LP&S utilizaram a analogia proposta por Bradshaw para o cálculo de camadas limites turbulentas, mas em lugar de utilizarem o conceito de comprimento de mistura (ver Bradshaw [1973] e seção A1.1 deste apêndice), os autores utilizaram um modelo de

turbulência mais complexo: o modelo $k-\varepsilon$ para baixo número de Reynolds. Uma das constantes do modelo é transformada numa função do número de Richardson.

As equações do modelo $k-\varepsilon$ para baixo número de Reynolds, vistas na seção 3.2, juntamente com as equações para o escoamento médio, utilizadas por LP&S, considerando o sistema de coordenadas mostrado na figura (A-3.1), já considerando as hipóteses de camada limite, são as seguintes:

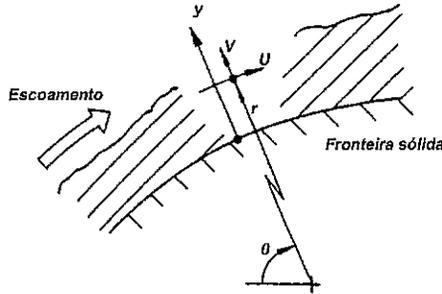


Figura (A-3.1) – Sistema de Coordenadas (adaptado de LP&S)

$$\rho U \frac{\partial(rU)}{r \partial \theta} + \rho V \frac{\partial(rU)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^3 (\mu + \mu_T) \frac{\partial(U/r)}{\partial y} \right] \quad (\text{A-3.2})$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho U^2}{r} \quad (\text{A-3.3})$$

A equação da continuidade é dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(Ur)}{\partial \theta} + \frac{\partial(Vr)}{\partial r} = 0 \quad (\text{A-3.4})$$

E as equações para as grandezas turbulentas são as seguintes:

$$\rho U \frac{\partial k}{r \partial \theta} + \rho V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k - \rho \varepsilon + 2\mu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{A-3.5})$$

$$\rho U \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{r \partial \theta} + \rho V \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} \right] - f_1 c_{\varepsilon 1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k - f_2 f_3 c_{\varepsilon 2} \rho \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} - c_3 \nu \mu_T \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 \quad (\text{A-3.6})$$

onde:

$$P_k = \rho \nu_T \left[\frac{r(\partial U/r)}{\partial y} \right]^2 \quad (\text{A-3.7})$$

O sistema de equações acima foi numericamente resolvido por LP&S. Os coeficientes empíricos são os mesmos mostrados na seção 3.2.3, as quais correspondem essencialmente ao mesmo modelo. Desse modo, a única diferença entre as equações apresentadas naquela seção e as equações acima encontram-se na função f_3 a qual representa a influência da curvatura e tem a forma:

$$f_3 = (1 - c_c Ri_T) \quad (\text{A-3.8})$$

Onde Ri_T é o número de Richardson – equação (A-3.1).

O valor do coeficiente c_c foi determinado dentro da faixa [0.0 – 0.5], como aquele que melhor ajusta os dados experimentais. O resultado obtido foi $c_c = 0.2$.

Da expressão para o número de Richardson – equação (A-3.1) – pode ser visto que a derivada presente é o gradiente radial do quantidade de movimento angular. Se esse gradiente é negativo, como é o caso num hidrociclone por exemplo, supondo-se a região de vórtice livre, onde a quantidade de movimento angular decresce quando o raio r cresce, então os efeitos na equação de transporte para a dissipação da energia cinética turbulenta são tais que decrescem a dissipação e, portanto, aumentam a energia cinética turbulenta. Consequentemente, a influência do número do termo dependente do número

de Richardson é de fazer crescer a viscosidade turbulenta sobre superfícies côncavas, como é esperado, e um efeito inverso é produzido sobre superfícies convexas (ver Bradshaw [1973] e A-1).

LP&S resolveram numericamente o sistema de equações acima mostrado e compararam as predições para os dois valores da constante c_c , $c_c = 0$ (sem considerar os efeitos de curvatura) e $c_c = 0.2$, para os perfis da quantidade de movimento angular sobre uma superfície curva, obtendo melhor concordância com os dados experimentais.

A-4 – Hoffmann, Muck and Bradshaw [1985]

Trata-se de dois artigos que mostram os resultados experimentais e as conclusões advindas desses experimentos, sobre o efeito da curvatura da superfície sobre uma camada limite turbulenta. O primeiro desses artigos estuda a curvatura convexa e o segundo a côncava.

Os autores ressaltam que, embora os resultados obtidos sejam específicos para camadas limite turbulentas, há uma grande probabilidade de que grande parte das conclusões obtidas possam ser qualitativamente aplicadas a outras onde ocorram camadas cisalhantes curvas.

Os artigos concluem que os efeitos provenientes dos dois tipos de curvatura (convexa e côncava) são completamente diferentes. As principais diferenças a serem destacadas são:

- Na superfície convexa com curvatura suave, há uma tendência de atenuação da turbulência previamente existente (proveniente da camada limite à montante do início do trecho com curvatura). No caso da curvatura côncava o efeito é oposto, ou seja, há tendência ao aumento da turbulência.
- A superfície convexa não produz mudanças significativas nas estruturas turbulentas, ou seja, a forma (média estatística) dos vórtices turbulentos não é

significativamente alterada quando do início do trecho em curvatura convexa. No caso das superfícies côncavas entretanto, as estruturas turbulentas sofrem alteração significativa. Atribui-se esse fato não só ao efeito direto da curvatura mas também ao efeito indireto provocado pelos vórtices longitudinais de Taylor-Görtler (vide Schillichting [1967]).

- O tempo de resposta à influência da curvatura é significativamente maior para o caso da superfície convexa relativamente ao caso da superfície côncava. Esse resultado é, segundo os autores, esperado se considerarmos que a curvatura estabilizante (convexa) simplesmente atenua os vórtices turbulentos existentes, enquanto que a curvatura desestabilizante (côncava) produz um crescimento (quasi-ínviscido) dos vórtices longitudinais cuja intensidade é somente refreada pelos gradientes das tensões de Reynolds que eles mesmos geram.

Esses trabalhos concluem ainda que embora os efeitos da superfície com curvatura côncava sobre uma camada limite turbulenta sejam bastante significativos no sentido de aumentar a intensidade da turbulência, esses efeitos sobre a turbulência são ainda menores do que os decorrentes da ação direta sobre a linha de corrente – de forças de corpo –, num escoamento sobre uma superfície plana, forçando essa linha de corrente a curvar-se, como no caso da ação de uma força centrífuga.

Essa conclusão mostra que o problema do escoamento num hidrociclone é ainda mais complexo, já que os dois efeitos estão presentes.

A-5 – Sloan, Smith and Smoot [1986]

Esses autores, daqui em diante referidos com SS&S, realizaram um amplo e abrangente estudo sobre a modelagem da turbulência em escoamentos com rotação. A abordagem do estudo visa basicamente o estudo de queimadores, ou seja, a modelagem de jatos girantes confinados, mas muitas discussões teóricas são relevantes a várias classes de escoamentos rotativos. Comparativamente ao estudo realizado por Bradshaw [1973] (vide seção A-1.1), o artigo de SS&S enfoca basicamente a modelagem da turbulência, enquanto que aquele é um estudo mais fundamental sobre os efeitos da curvatura na

estrutura da turbulência. O último trabalho tem ainda, obviamente, a vantagem de incluir treze anos a mais de pesquisas na área da turbulência.

Breve revisão sobre a influência da rotação

SS&S descrevem inicialmente, qualitativamente, o perfil do componente azimutal (ou tangencial) de velocidade, ou seja, a variação radial desse componente. Como já descrito anteriormente, esse perfil pode ser considerado como uma combinação do perfil associado ao vórtice forçado, junto ao eixo do equipamento, e o perfil de vórtice livre, na região mais externa, junto às paredes do tubo. A discussão que segue a definição inicial do perfil é a descrição qualitativa do padrão de evolução das estruturas principais do escoamento, num sistema de jato girante confinado. Analisa-se especialmente a chamada estabilidade do vórtice (incluindo o fenômeno denominado – quebra do vórtice) e o comportamento, do que esses autores chamam de bolha, que é a região de recirculação de fluido, com linhas de corrente fechadas, que se forma próximo ao eixo, imediatamente a jusante da câmara de alimentação.

A região de recirculação em um hidrociclone não assume a forma de bolha, uma vez que há uma remoção axial de fluido localizada na seção à montante (relativamente à corrente de alimentação). Mas a reversão axial do escoamento é causada basicamente pelas mesmas razões, já descritas qualitativamente na seção 2 do corpo principal deste relatório.

A explicação para a ocorrência do escoamento reverso está baseada na seguinte equação (equação (A-1.9)):

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{W^2}{r} \quad (\text{A-5.1})$$

Essa equação representa o balanço entre a força centrífuga agindo sobre um volume de fluido e as forças de pressão atuando sobre sua superfície. Se a equação acima for integrada com respeito a r do eixo à parede do tubo e diferenciada na direção axial, resulta:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{r=0} \cong \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{r=R} - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^R \left(\rho \frac{W^2}{r}\right) dr \quad (\text{A-5.2})$$

Num escoamento girante confinado (como no caso do hidrociclone, o primeiro termo do lado direito da equação (A-5.2) é negativo (isto é a pressão sobre as paredes decai continuamente a medida que se avança na direção axial afastando-se da seção de alimentação). O integrando na equação acima (quantidade de movimento angular integrada ao longo do raio) também decai continuamente com a distância axial ao longo do tubo; assim, o gradiente axial é negativo. Desse modo, conclui-se que o lado esquerdo da equação acima pode mudar de sinal, isto é, pode ser induzido um gradiente adverso de pressão significativo sobre o eixo, o qual desacelera o escoamento axial do fluido (junto ao eixo), provocando a quebra do vórtice. Essa é a razão para a reversão do escoamento, que ocorre num hidrociclone, nas vizinhanças do eixo.

Deve ser observado que, embora o termo do momento angular integrado sobre o raio, na equação (A-5.2) acima seja sujeito a todos os termos de transporte presentes na equação da quantidade de movimento, ou seja, inercial (convectivo), viscoso e turbulento, o ruptura do vórtice é governada primariamente pelos termos de inércia e pode ser classificada como um fenômeno essencialmente invíscido.

Modelagem da Turbulência

SS&S procederam à derivação dos modelos de turbulência apropriados para lidar com as zonas de recirculação, induzidas pela rotação do fluido ao redor do eixo, acima descritas.

Esses autores partiram das equações de Reynolds em coordenadas cilíndricas (x, r, θ) , nas quais os componentes da velocidade média e das flutuações de velocidade são respectivamente (U, V, W) e (u, v, w) . As equações abaixo assumem ainda o estado estacionário, fluido newtoniano com propriedades constantes $(\rho$ e $\mu)$, ausência de forças de corpo e axissimetria.

Continuidade:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (\text{A-5.3})$$

Componente axial da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (U^2 + \overline{u^2}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV + r\overline{uv}) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(vr \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \\ & - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(vr \frac{\partial V}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-5.4})$$

Componente radial da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (VU + \overline{vu}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV^2 + r\overline{v^2}) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(vr \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \\ & - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(vr \frac{\partial V}{\partial r} \right) - 2v \frac{V}{r^2} + \frac{1}{r} (\overline{W^2} + \overline{w^2}) \end{aligned} \quad (\text{A-5.5})$$

Componente azimutal da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (WU + \overline{wu}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rVW + r\overline{vw}) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(vr \frac{\partial W}{\partial r} \right) = \\ & - \frac{1}{r} (VW + \overline{vw}) - v \frac{W}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{A-5.6})$$

Nas equações acima são incógnitas U , V , W e P , além das correlações duplas $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$, \overline{uv} , \overline{uw} and \overline{vw} .

As correlações duplas assumem-se determinadas pela expressão de Boussinesq (equação (3-4) – seção 3.2), ou seja:

$$-\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + \nu_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A-5.7})$$

Essas correlações, expressas no sistema de coordenadas acima descrito e com as hipóteses mencionadas acima, são as seguintes:

$$-\overline{u^2} = -\frac{2}{3}k + 2v_\tau \frac{\partial U}{\partial x} \quad (\text{A-5.8})$$

$$-\overline{v^2} = -\frac{2}{3}k + 2v_\tau \frac{\partial V}{\partial r} \quad (\text{A-5.9})$$

$$-\overline{w^2} = -\frac{2}{3}k + 2v_\tau \frac{V}{r} \quad (\text{A-5.10})$$

$$-\overline{uv} = v_\tau \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (\text{A-5.11})$$

$$-\overline{uw} = v_\tau \frac{\partial W}{\partial x} \quad (\text{A-5.12})$$

$$-\overline{vw} = v_\tau \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \quad (\text{A-5.13})$$

Substituindo (A-5.8) a (A-5.13) em (A-5.4) a (A-5.6), estas últimas equações assumem a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) - \frac{\partial}{\partial x} \left((v + v_\tau) \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(v + v_\tau) \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{2}{3}k \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((v + v_\tau) \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(v + v_\tau) \frac{\partial V}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-5.14})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(VU) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rV^2) - \frac{\partial}{\partial x} \left((v + v_T) \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(v + v_T) \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \\ & - \frac{\partial}{\partial r} \left(P + \frac{2}{3} k \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((v + v_T) \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(v + v_T) \frac{\partial V}{\partial r} \right) - 2(v + v_T) \frac{V}{r^2} + \frac{W^2}{r} \end{aligned} \quad (\text{A-5.15})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(WU) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rVW) - \frac{\partial}{\partial x} \left((v + v_T) \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(v + v_T) \frac{\partial W}{\partial r} \right) = \\ & - \frac{VW}{r} - (v + v_T) \frac{W}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{A-5.16})$$

Considerando-se as equações (A-5.3) e (A-5.14) a (A-5.16), as incógnitas são somente os valores do campo médio de velocidades e a viscosidade efetiva isotrópica $v_e = v + v_T$.

O fechamento do problema é então realizado pelo uso do modelo a duas equações, ou seja:

$$v_e = c_\mu \frac{k}{\varepsilon^2} \quad (\text{A-5.17})$$

Onde $c_\mu = 0.09$ e k e ε são dados pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(Uk)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rVk)}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_e}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{v_e}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) = \\ & v_e \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{V}{r} \right)^2 \right] + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right\} - \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{A-5.18})$$

$$\frac{\partial(U\varepsilon)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV\varepsilon)}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_e}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{v_e}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) =$$

$$c_{\varepsilon 1} v_e \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{V}{r} \right)^2 \right] + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right\} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) - c_{\varepsilon 2} \left(\frac{\varepsilon^2}{k} \right)$$

(A-5.19)

Onde $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $c_{\varepsilon 1} = 1.44$ and $c_{\varepsilon 2} = 1.92$.

As equações (A-5.3) e (A-5.14) a (A-5.19) formam o modelo convencional a duas equações (veja seção 3.2.3) expresso em coordenadas cilíndricas para um escoamento axissimétrico, em regime estacionário, de um fluido newtoniano com propriedades constantes.

Os autores seguem, analisando uma correção do modelo para levar em conta os efeitos de escoamento rotativo e de curvatura da linha de corrente.

Correções para a curvatura das linhas de corrente

Da analogia entre curvatura e flutuação (Bradshaw [1969]) é definido um número de Richardson de gradiente para a curvatura:

$$Ri_\tau = \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{2U_s}{R_c^2} \frac{\partial(R_c U_s)}{\partial R_c}$$

(A-5.20)

Onde R_c é o raio de curvatura local da linha de corrente e U_s é a velocidade média ao longo da linha de corrente, isto é:

$$U_s = \frac{(U^2 + V^2)^{1/2}}{2}$$

(A-5.21)

E

$$R_c = \frac{(U^2 + V^2)^{3/2}}{UV \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) + U^2 \frac{\partial V}{\partial x} - V^2 \frac{\partial U}{\partial r}} \quad (\text{A-5.22})$$

Esse parâmetro é usado num fator de correção que multiplica o coeficiente $c_{\epsilon 1}$ no termo de destruição de dissipação na equação de transporte para ϵ , isto é, no último termo da equação (A1.5-19). Assim, esse termo assume a seguinte forma:

$$\text{“Destruição da taxa de dissipação”} \equiv c_{\epsilon 2} (1 - c_c Ri_T) \frac{\epsilon^2}{k} \quad (\text{A-5.23})$$

onde $c_c = 0.2$ (ver Launder, Priddin and Sharma [1977]).

Outra opção para levar-se em conta os efeitos de curvatura da linha de corrente é modificar diretamente a viscosidade turbulenta, por meio de um fator de correção c_μ aplicado sobre o coeficiente – equação (A-5.17).

Não é possível definir-se qualquer uma dessas opções como mais apropriada, uma vez que ambas não apresentam o caráter anisotrópico necessário para representar adequadamente as taxas extras de deformação impostas pela curvatura. Entretanto, é razoável concluir-se que, quando o fator corretivo é aplicado diretamente sobre a viscosidade turbulenta, os efeitos da curvatura são impostos instantaneamente ao escoamento, enquanto que, com a correção aplicada ao termo de destruição da taxa de dissipação da energia cinética turbulenta, seus efeitos se farão sentir por meio de uma equação de transporte e, portanto, alguma defasagem entre a curvatura e seus efeitos sobre a turbulência devem ser esperados.

Rodi e Leschziner [1981], (ver referência em Sloan et al. [1986]), propuseram uma forma funcional para o coeficiente c_μ , a qual é baseada numa versão simplificada do modelo de tensões algébricas de Gibson e Launder. Esse coeficiente, expresso em coordenadas de linha de corrente, é o seguinte:

$$c_{\mu} = \frac{0.09}{1 + 8K_1^2 \left(\frac{k^2}{\varepsilon^2} \right) \left(\frac{\partial U_s}{\partial n} + \frac{U_s}{R_c} \right) \frac{U_s}{R_c}} \quad (\text{A-5.24})$$

Onde $K_1 = 0.27$, U_s é a velocidade ao longo da linha de corrente, R_c é o raio de curvatura e n é a coordenada normal à linha de corrente (na direção de R_c). A faixa de resultados da expressão (A-5.24) é arbitrariamente limitada entre 0.025 e 0.09. Essa faixa indica que a forma funcional expressa pela equação (A-5.24) está limitada a condições de escoamento onde os efeitos de curvatura sobre a turbulência se produzem no sentido de reduzir a intensidade da turbulência, para escoamentos sobre superfícies curvas convexas.

Sloan et al. [1986], mencionam que o uso da expressão para baseada no modelo algébrico para tensões de Reynolds – equação (A-5.24) – embora não apresentando grande generalidade, tem um desempenho ligeiramente melhor que a correção na equação da taxa de dissipação, para algumas regiões do escoamento com linhas de corrente curvas.

Correções para escoamento (girantes) com rotação

As propostas acima descritas são recomendadas para escoamentos com linhas de corrente curvas, sem rotação ao redor de um eixo (*swirl*). Para os escoamentos que apresentam acentuada rotação, algumas versões modificadas, das duas abordagens acima mencionadas, foram propostas; ou seja, correção nos termos fonte da equação de dissipação e correção no coeficiente da viscosidade turbulenta.

As propostas de fatores de correção para modificar o modelo k - ε tradicional para levar em conta a influência da rotação são baseadas na compreensão física dos efeitos sobre a turbulência do particular tipo de rotação considerado. Como foi visto na seção 2.0, o perfil do componente azimutal (ou tangencial) da velocidade num hidrociclone, por exemplo, pode ser aproximado pela combinação de uma região central que se comporta basicamente como rotação de corpo rígido (vórtice forçado) e um região anular, mais

afastada do eixo e próxima das paredes, na qual um comportamento irrotacional – de vórtice livre – prevalece.

A análise tradicional das condições de equilíbrio de um elemento de fluido (por exemplo, uma partícula de fluido deslocada pela flutuação turbulenta) é explicada no apêndice 1, seção A1.1.2 (seguindo von Karman – vide referência em Bradshaw [1973]).

Na região de vórtice forçado, o momento angular do campo de escoamento médio cresce com o raio e , de acordo com a mencionada teoria, o deslocamento do elemento de fluido sofrerá a atuação de uma força restauradora. Assim, essa região pode ser considerada uma região com efeitos estabilizantes, ou seja a força centrífuga age no sentido de reduzir a intensidade de turbulência. O efeito oposto é esperado na região de vórtice livre, isto é, nessa região a intensidade de turbulência tende a elevar-se em consequência da rotação.

De acordo com Sloan et al. [1986], entretanto, o raciocínio acima deve ser empregado com cautela, na presença do fenômeno, citado acima, de “quebra do vórtice” e nas zonas de recirculação, pois nesses casos a turbulência é afetada de modo mais complexo. Por essa razão esses autores analisaram, para a região de vórtice forçado, tanto as correções estabilizadoras quanto as desestabilizadoras.

Um número de Richardson, análogo ao proposto para o efeito de curvatura da linha de corrente, ou seja, considerado como uma relação entre a força centrífuga gerada pela rotação e a força de inércia que atuam sobre uma partícula de fluido, foi proposto por Launder et al. [1977] – apêndice A – seção A-3 – e assume a seguinte forma:

$$Ri_s = \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{W}{r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right) \quad (\text{A-5.25})$$

A correção é novamente introduzida como uma modificação, com a mesma forma funcional, do termo de destruição da dissipação na equação para ε , isto é, no último termo da equação (A-5.19), resultando em:

$$\text{“Destruição da taxa de dissipação”} \equiv c_{\varepsilon 2} (1 - c_s Ri_s) \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{A-5.26})$$

Onde $c_s = 0.002$.

SS&S observaram que um valor muito elevado do número de Richardson faz com que o termo de destruição sofra uma mudança fisicamente irreal de sinal.

Srinivasan et al. (ver referência em Sloan et al. [1986]) propuseram uma forma para a correção do termo de destruição da taxa de dissipação que evita o problema mencionado acima. A forma, considerando tanto a correção para curvatura da linha de corrente quanto para rotação, é a seguinte:

$$\text{“Destruição da taxa de dissipação”} \equiv c_{\varepsilon 2} \exp(-c_s Ri_s - c_c Ri_c) \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{A-5.27})$$

Onde $c_s = c_c = 0.2$. Verifica-se que para rotações fortes a correção para curvatura é normalmente desprezível.

Boysan – numa comunicação privada com referência em Sloan et al. [1986] – propôs outra forma para a correção do termo de destruição da dissipação, que é mais adequada que as duas formas acima apresentadas, no caso de forte rotação. Esta é a forma proposta por Boysan:

$$\text{“Destruição da taxa de dissipação”} \equiv [c_{\varepsilon 2} / (1 + c_s Ri_s)] \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{A-5.28})$$

Onde $c_s = 0.05$.

A-1.6 – Ahlstedt [1987]

Trata-se de uma publicação com base numa tese de licenciatura da Universidade de Tecnologia de Tampere, na Finlândia. O tema da tese é a modelagem de escoamentos confinados com rotação (*confined swirling flows*).

Uma observação interessante do autor, ao comentar o desempenho inadequado dos modelos de turbulência com duas equações na previsibilidade desse tipo de escoamento – mesmo daqueles modelos modificados para esse fim –, é o fato de que ele ressalta que pouca importância é geralmente atribuída às condições de contorno na alimentação e acrescenta que muitas das imprecisões nos cálculos são devidas à esse fato do que propriamente ao modelo de turbulência.

Como amplamente discutido neste trabalho, evidentemente os modelos de turbulência baseados no conceito de viscosidade turbulenta têm deficiência intrínseca para captar as características dos escoamentos aqui discutidos, entretanto, modelos com duas equações modificados especificamente para linha de corrente curva e rotação, ou ainda os modelos que teoricamente apresentam faixa de aplicação mais abrangente como o $k-\varepsilon$ não lineares ou o de dupla escala, estes últimos capazes de captar algumas das características anisotrópicas do escoamento, somente produzirão resultados satisfatórios se forem consideradas condições de contorno adequadas.

O autor inicia o trabalho com uma descrição das diversas aplicações na engenharia desse tipo de escoamento, em seqüência parte para uma apresentação teórica das equações do escoamento médio e das equações e dos modelos de turbulência ($k-\varepsilon$ convencional, $k-\varepsilon$ modificado e modelo algébrico para as tensões de Reynolds).

Considerando U o componente axial da velocidade, V o componente radial e W o componente azimutal, e considerando que as flutuações turbulentas são representadas pelas mesmas letras, mas minúsculas e, considerando um sistema de coordenadas cilíndrico (x, r, θ), as equações do escoamento médio, considerando axissimetria, são abaixo reproduzidas:

Continuidade:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rV) = 0 \quad (\text{A-6.1})$$

Conservação da quantidade de movimento na direção axial:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mu \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{uv}) \quad (\text{A-6.2})$$

Conservação da quantidade de movimento na direção radial:

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(2r \mu \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] - \frac{2\mu}{\rho} \frac{V^2}{2r} - \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{v^2}) + \frac{\overline{w^2}}{r} + \frac{W^2}{r} \quad (\text{A-6.3})$$

Conservação da quantidade de movimento na direção azimutal:

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \mu \frac{\partial}{\partial r} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial r} \frac{W}{r} \right] - \frac{\partial \overline{uw}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{vw}) + \frac{\overline{vw}}{r} + \frac{VW}{r} \quad (\text{A-6.4})$$

A-7 – Khodadadi e Vlachos [1990]

Trata-se de uma breve comunicação sobre a comparação entre resultados experimentais (medidas de velocidade axial e azimutal) obtidas em um trabalho de Weske e Sturov – ver referência em Khodadadi e Vlachos [1990] – e o modelo k - ϵ modificado proposto por Abujelala e Lilley, abordado no capítulo 3, seção 3.2.3. O experimento considera um escoamento axial num tubo, superpondo-se um movimento de rotação do fluido, ao redor do eixo do tubo. O perfil de velocidade azimutal, na seção de alimentação, é

aproximadamente o de rotação de corpo rígido, ou seja, máxima velocidade na parede do tubo, com decaimento linear para o eixo.

Esses autores concluíram que o decaimento axial do perfil radial do componente azimutal da velocidade é relativamente bem previsto tanto pelo modelo $k-\varepsilon$ convencional, como pelo modificado, não apresentando este último, vantagens significativas. Quanto à distribuição da energia cinética turbulenta, os dois modelos funcionam adequadamente para baixos níveis de rotação ao redor do eixo, mas apresentam resultados muito pobres quando o nível de rotação é elevado.

APÊNDICE B

LISTAGEM DA ROTINA COMPUTACIONAL EM FORTRAN, PARA IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO $k-\epsilon$ MODIFICADO (CAP. 3, SEÇÃO 3.4) AO SIMULADOR CFX-5.6

```
#include "cfx5ext.h"
dllexport(source_eps)
  SUBROUTINE SOURCE_EPS (
    & NLOC, NRET, NARG, RET, ARGS, CRESLT, CZ,DZ,IZ,LZ,RZ )
CC
CC Modificacao do Termo fonte da Equacao de epsilon.
CC -----
CC Input
CC -----
CC NLOC - size of current locale
CC NRET - number of components in result
CC NARG - number of arguments in call
CC ARGS() - (NLOC,NARG) argument values
CC
CC -----
CC Modified
CC -----
CC Stacks possibly.
CC
CC -----
CC Output
CC -----
CC RET() - (NLOC,NRET) return values
CC CRESLT - 'GOOD' for success
CC
CC -----
CC Details
CC -----
CC
CC=====
C -----
C Preprocessor includes
C -----
#include "MMS.h"
#include "stack_point.h"
C
C -----
C Argument list
```

```

C -----
  INTEGER NLOC,NARG,NRET
C
  CHARACTER CRESLT*(*)
C
  REAL ARGS(NLOC,NARG), RET(NLOC,NRET)
C
  INTEGER IZ(*)
  CHARACTER CZ(*)*(1)
  DOUBLE PRECISION DZ(*)
  LOGICAL LZ(*)
  REAL RZ(*)
C
C -----
C Local Variables
C -----
c Variaveis
  REAL THETA(NLOC), RAI0(NLOC), SIN_T(NLOC), COS_T(NLOC)
  REAL DVTDR(NLOC), VT(NLOC),VISCT(NLOC), CGS, CFS
  REAL CEPS1(NLOC),CEPS2(NLOC),PK(NLOC)
  CHARACTER CFROMI*5, CFROMR*15
  EXTERNAL CFROMI, CFROMR
C
C -----
C Stack pointers
C -----
  __stack_point__ pGRAD_V
C
C =====
C -----
C Executable Statements
C -----
C
C Initialise RET() to zero.
  CALL SET_A_0( RET, NLOC*NRET )
C
C Calculo da Viscosidade turbulenta
  CALL CALC_VT(VISCT,ARGS(1,5),ARGS(1,6),NLOC)
C OBTENCAO DO GRAD VELOCIDADE
  CALL USER_GETVAR( 'Water at 25 C.Velocity.Gradient', CRESLT,
  & pGRAD_V, CZ, DZ, IZ, LZ, RZ )
C CALCULO DE PK
  CALL CALC_PK(PK,RZ(pGRAD_V),ARGS(1,5),VISCT,NLOC)

```

```

C Definicao do Theta
  CALL CALC_THETA(THETA,ARGS(1,1),ARGS(1,2), NLOC)

C Definicao do RAIIO
  CALL CALC_RAIO(RAIO,ARGS(1,1),ARGS(1,2), NLOC)

C Definicao do Seno
  CALL CALC_SIN_THETA(SIN_T,THETA,NLOC)

C Definicao do Cosseno
  CALL CALC_COS_THETA(COS_T,THETA,NLOC)

C Calculo da deriv de Vtheta no raio.
  CALL CALC_DERIV(DVTDR,ARGS(1,1),ARGS(1,2),ARGS(1,3),ARGS(1,4),
&RAIO,RZ(pGRAD_V),NLOC )

C Calculo de Vtheta
  CALL CALC_VTHETA(VT,ARGS(1,3),ARGS(1,4),SIN_T, COS_T, NLOC)

  CALL USER_PEEKR( 'CGS', 1, CGS, 'WARN', CRESLT, CZ )
  CALL USER_PEEKR( 'CFS', 1, CFS, 'WARN', CRESLT, CZ )

C CALCULO DAS CONSTANTES
  CALL CALC_CEPS(CEPS1,CEPS2, ARGS(1,5),ARGS(1,6),VT,
+             RAIIO,DVTDR,CFS, CGS, NLOC)

C CALCULO DO TERMO FONTE
  CALL
CALC_SOURCE(RET(1,1),CEPS1,CEPS2,PK,ARGS(1,5),ARGS(1,6),NLOC)
C
C Set success flag.
  CRESLT = 'GOOD'
C
  END

C=====
  SUBROUTINE CALC_SOURCE(SEPS,CEPS1,CEPS2,PK,TK,EPS,N)

C-----
C CALCULAR NOVO TERMO FONTE PARA EQ,.EPSILON
C-----
C Input arguments
C-----
C number of points
  INTEGER N
C
C VARIAVEIS TURBULENTAS K e EPSILON

```

```

      REAL TK(N), EPS(N)
C CONSTANTES TURBULENTAS Ceps1 e Ceps2
      REAL CEPS1(N), CEPS2(N)
C PRODUCAO DE K
      REAL PK(N)

C-----
C Output arguments
C-----
      REAL SEPS(N)
C-----
C Locals
C-----
      INTEGER I
C
      DO I = 1, N

      IF(TK(I).GT.1.E-5) THEN

          SEPS(I)=(EPS(I)/TK(I))*(PK(I)*(CEPS1(I)-1.44)
&      -EPS(I)*997.0*(CEPS2(I)-1.92))

          ELSE

          SEPS(I)=0.0

          ENDIF

      ENDDO
C
      END
C=====
      SUBROUTINE CALC_VT(
& VISCT, TK, EPS, N )
C-----
C CALCULAR A VISCOSIDADE TURBULENTA
C-----
C Input arguments
C-----
C number of points
      INTEGER N
C
C VARIAVEIS TURBULENTAS K e EPSILON
      REAL TK(N), EPS(N)

C-----
C Output arguments

```

```

C-----
      REAL VISCT(N)
C-----
C Locals
C-----
      INTEGER I
C
      DO I = 1, N

          IF(EPS(I).GT.1.0E-5) THEN

              VISCT(I)=0.09*997.0*(TK(I)*TK(I)/EPS(I))

          ELSE

              VISCT(I)=0.0

          ENDIF

      ENDDO
C
      END

C=====
      SUBROUTINE CALC_PK(PK,GRAD_V,TK,VISCT,N)

C -----
C CALCULAR O TERMO DE PRODUCAO de K
C-----
C Input arguments
C-----
C number of points
      INTEGER N
C
C TENSOR GRADIENTE DA VELOCIDADE
      REAL GRAD_V(3,N,3)
C VARIAVEL TURBULENTA K
      REAL TK(N)
C VISCOSIDADE TURBULENTA MU_T
      REAL VISCT(N)

C-----
C Output arguments
C-----
      REAL PK(N)
C-----
C Locals

```

```

C-----
  INTEGER IN, IDIR
  REAL NORMAL, CRUZ12, CRUZ13, CRUZ23
C
  DO IN = 1, N
    NORMAL = 0.0
  DO IDIR=1,3
    NORMAL = NORMAL+2.0*GRAD_V(IDIR,IN, IDIR)*
&      (VISCT(IN)*GRAD_V(IDIR,IN, IDIR)-TK(IN)*997.0/3.0)
  ENDDO

  CRUZ12 = (GRAD_V(1,IN,2)+GRAD_V(2,IN,1))*
&      (GRAD_V(1,IN,2)+GRAD_V(2,IN,1))

  CRUZ13 = (GRAD_V(1,IN,3)+GRAD_V(3,IN,1))*
&      (GRAD_V(1,IN,3)+GRAD_V(3,IN,1))

  CRUZ23 = (GRAD_V(2,IN,3)+GRAD_V(3,IN,2))*
&      (GRAD_V(2,IN,3)+GRAD_V(3,IN,2))

  PK(IN)=NORMAL+VISCT(IN)*(CRUZ12+CRUZ13+CRUZ23)

  ENDDO
C
  END

```

```

C-----
  SUBROUTINE CALC_THETA(
&   T, X, Y, N )
C-----
C Transformar para coordenada cilindrica theta
C-----
C Input arguments
C-----
C number of points
  INTEGER N
C
C coordinates
  REAL X(N), Y(N)
C
C input table
C X values are X.
C Y values are Y.
C T values are Theta.

C-----
C Output arguments

```

```

C-----
      REAL T(N)
C-----
C Locals
C-----
      INTEGER I
      PARAMETER PI=3.14159265359
C
      DO I = 1, N

          T(I)=ATAN(Y(I)/X(I))
C
      ENDDO
C
      END

C-----
      SUBROUTINE CALC_RAIO(
& R, X, Y, N )
C-----
C Transformar para coordenada cilindrica raio
C-----
C Input arguments
C-----
C number of points
      INTEGER N
C
C coordinates
      REAL X(N), Y(N)
C
C input table
C X values are X.
C Y values are Y.
C T values are Theta.

C-----
C Output arguments
C-----
      REAL R(N)
C-----
C Locals
C-----
      INTEGER I
C
      DO I = 1, N

          R(I)=SQRT(Y(I)*Y(I)+X(I)*X(I))

```

```
C
    ENDDO
C
    END
```

```
C=====
C      SUBROUTINE CALC_SIN_THETA(
C      & ST, T, N )
```

```
C-----
C Transformar para coordenada cilindrica theta
```

```
C-----
C Input arguments
```

```
C-----
C number of points
C      INTEGER N
```

```
C
C coordinates
C      REAL T(N)
```

```
C
C input table
C T values are Theta.
```

```
C-----
C Output arguments
C-----
C      REAL ST(N)
```

```
C-----
C Locals
C-----
C      INTEGER I
```

```
C
C      DO I = 1, N
```

```
          ST(I)=SIN(T(I))
```

```
C
C      ENDDO
C
C      END
```

```
C=====
C      SUBROUTINE CALC_COS_THETA(
C      & CT, T, N )
```

```
C-----
C Transformar para coordenada cilindrica theta
```

```
C-----
C Input arguments
```

```
C-----
```

```

C number of points
  INTEGER N
C
C coordinates
  REAL T(N)
C
C input table
C T values are Theta.

```

```

C-----
C Output arguments
C-----

```

```

  REAL CT(N)

```

```

C-----
C Locals
C-----

```

```

  INTEGER I

```

```

C
  DO I = 1, N

```

```

    CT(I)=COS(T(I))

```

```

C
  ENDDO

```

```

C
  END

```

```

C-----
SUBROUTINE CALC_DERIV(
& DVTDR, X, Y, U, V, R, GRAD_V, N )

```

```

C-----
C Calculo da Derivada da Vel Azi em r

```

```

C-----
C Input arguments
C-----

```

```

C number of points
  INTEGER N

```

```

C
C coordinates
  REAL X(N), Y(N), U(N), V(N), R(N), GRAD_V(3,N,3)

```

```

C-----
C Output arguments
C-----

```

```

  REAL DVTDR(N)

```

```

C-----
C Locals
C-----

```

```

C      INTEGER I
C
      DO I = 1, N
          DVTDR(I)=(X(I)*X(I)*GRAD_V(2,I,1)-X(I)*X(I)*X(I)*V(I)/(R(I)*
+          R(I))+X(I)*V(I)-X(I)*Y(I)*GRAD_V(1,I,1)+X(I)*X(I)*Y(I)*
+          U(I)/(R(I)*R(I))+X(I)*Y(I)*GRAD_V(2,I,2)+Y(I)*Y(I)*Y(I)*
+          U(I)/(R(I)*R(I))-Y(I)*U(I)-Y(I)*Y(I)*GRAD_V(1,I,2)-X(I)*
+          Y(I)*Y(I)*V(I)/(R(I)*R(I)))/(R(I)*R(I))
C
      ENDDO
C
      END

```

```

C=====
      SUBROUTINE CALC_VTHETA(
&  VTHETA, VX, VY, ST, CT,N )
C-----
C Calculo da Velocidade Azimutal
C-----
C Input arguments
C-----
C number of points
      INTEGER N
C
C coordinates
      REAL ST(N), CT(N), VX(N), VY(N)
C-----
C Output arguments
C-----
      REAL VTHETA(N)
C-----
C Locals
C-----
      INTEGER I
C
      DO I = 1, N
          VTHETA(I)=ABS(CT(I)*VY(I)-ST(I)*VX(I))
      ENDDO
C
      END

```

```

C=====
C      SUBROUTINE CALC_CEPS(CEPS1,CEPS2,TK,EPS,VTHETA,
+      RAIO,DVTDR,CFS,CGS,N)
C-----
C Calculo das constantes turbulentas Ceps1 e Ceps2
C-----
C Input arguments
C-----
C number of points
      INTEGER N
C
C SYSTEM VARIABLES
      REAL RAIO(N), TK(N), EPS(N),RI(N),CFS,CGS,VTHETA(N)
      REAL DVTDR(N)
C-----
C Output arguments
C-----
      REAL CEPS1(N)
      REAL CEPS2(N)
C-----
C Locals
C-----
      INTEGER I
C
      DO I = 1, N

          IF (DVTDR(I).GE.0.0) THEN

              IF ((RAIO(I).GT.1E-5).AND.(EPS(I).GT.1E-5)) THEN

                  RI(I)=TK(I)*VTHETA(I)*(DVTDR(I)+VTHETA(I)/RAIO(I))
+                  /EPS(I)/RAIO(I)

                  ELSE

                      RI(I) = 0.0

                  ENDIF

                  CEPS1(I) = 1.44
                  CEPS2(I) = 1.92*(1.0-CGS*RI(I))

              ELSE

                  IF ((RAIO(I).GT.1E-5).AND.(EPS(I).GT.1E-5)) THEN

```

```

&          RI(I)=TK(I)*VTHETA(I)*(DVTDR(I)-VTHETA(I)/RAIO(I))
/EPS(I)/RAIO(I)
          ELSE

          RI(I) = 0.0

          ENDIF

          CEPS1(I) = 1.44*(1.0+CFS*RI(I))
          CEPS2(I) = 1.92

          ENDIF

ENDDO
C
END

```