

**ANÁLISE ASSINTÓTICA DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS
NA REGIÃO DE SEPARAÇÃO**

Daniel Onofre de Almeida Cruz

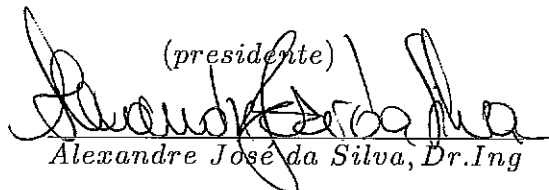
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Aprovado por :

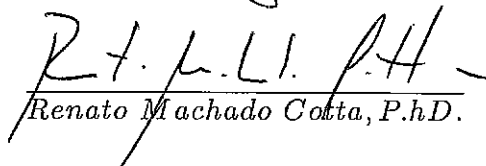


Atila P. Silva Freire, P.h.D.

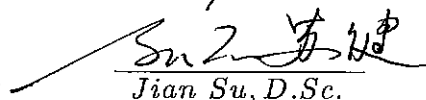
(presidente)



Alexandre José da Silva, Dr. Ing



Renato Machado Cotta, P.h.D.



Jian Su, D.Sc.



Gustavo Rachid Böldstein, P.h.D.

RIO DE JANEIRO

maio de 1996

CRUZ,DANIEL ONOFRE DE ALMEIDA

Análise Assintótica de Escoamentos Turbulentos na Região de Separação.

(Rio de janeiro) 1996

xiv, 132 p 29,7 cm (COPPE/UFRJ,D.Sc.,

Engenharia Mecânica, 1996)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Fenômenos de Transporte I. COPPE/UFRJ II. Título (Série)

À Ana, Natália e a meus pais

AGRADECIMENTOS

À Atila Pantaleão Silva Freire pela dedicada e competente orientação, e cuja amizade representa mais que os conhecimentos adquiridos durante este trabalho.

Aos amigos do Laboratório de Mecânica da Turbulência Guilherme Terra, Patrícia, Leonardo, Nicolau, Jader, Leandro, Adriana, Luiz Claudio, Flávio pelo companheirismo que tornou mais agradável o ambiente de trabalho.

À Guilherme Camozzato, Emanuel N. Macêdo e João Alves pelo auxílio prestado durante a implementação da parte numérica deste trabalho, e a Mila Rosendal pela cuidadosa revisão do texto.

Ao CNPQ que apoiou financeiramente este trabalho.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de doutor em ciências (D.Sc.)

ANÁLISE ASSINTÓTICA DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS NA REGIÃO DE SEPARAÇÃO

Daniel Onofre de Almeida Cruz

maio de 1996

Orientador : Atila P. Silva Freire

Programa : Engenharia Mecânica

Neste trabalho a estrutura assintótica de escoamentos turbulentos na região de separação será obtida através da utilização do método da variável intermediária, juntamente com argumentos de análise dimensional. Ambos os fenômenos fluidodinâmico e térmico serão estudados, nestes dois casos a estrutura assintótica obtida adapta-se suavemente aos efeitos causados pelo processo de separação e, no caso térmico é a primeira vez, dentro do conhecimento deste autor, que a análise assintótica da região de separação é feita. No caso fluidodinâmico a estrutura assintótica obtida leva em conta os efeitos difusivos na direção da

componente paralela à superfície sólida sendo diferente dos demais trabalhos existentes na literatura.

Novas formas da conhecida "lei da parede" logarítmica serão deduzidas, tanto para o caso térmico quanto para o caso fluidodinâmico, válidas inclusive na região de escoamento reverso. Na região de separação será mostrado que os perfis de velocidade e temperatura não são proporcionais, como acontece longe do ponto de descolamento. Este fato indica que a conhecida analogia de Reynolds, não pode ser aplicada próximo ao ponto de descolamento.

A utilização dessa novas "leis da parede" como condição de contorno em um modelo de turbulência do tipo $K - \epsilon$ será feita. Como será mostrado os resultados obtidos são bastante promissores.

Abstract of the thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor in Science (D.Sc.).

**ASYMPTOTIC ANALYSIS OF TURBULENT FLOWS
IN THE SEPARATION REGION**

Daniel Onofre de Almeida Cruz

may, 1996

Supervisor : Atila P. Silva Freire

Department : Mechanical Engeneering

In the present work, the asymptotic structure of the velocity and the temperature boundary layers are studied. The application of the single limit concept of Kaplun together with some hypotheses about the order of magnitude of the turbulent shear stress terms gives an one deck structure near to the separation point which is distinct from those obtained by other authors. The new structure shows clearly how the importance of the turbulent terms diminishes as the separation point is approached and the classical law of the wall vanishes. The log law is then shown to reduce to the half-power law of Stratford. For the temperature case, the log law is, on the other hand, shown to reduce to an inverse to the half-power law. Both, the asymptotic structure of thermal turbulent boundary layer and the inverse

half-power law are deduced here for the first time. All theoretical results are compared with some experimental data. An implementation of a two-equation differential model is carried out which uses the newly developed laws of the wall as boundary conditions. The results better the previously presented RSM and classical $K - \epsilon$ simulations of the velocity and the temperature fields.

GLOSSÁRIO

LETRAS LATINAS

C_1, C_2, C_2 - Constantes com relação a variável y , relativas a lei da parede fluidodinâmica

C_{t1}, C_{t2}, C_{t3} - Constantes com relação a variável y , relativas a lei da parede térmica

C_f - Tensão cizalhante adimensional na superfície sólida $\tau_w / \frac{1}{2} \rho U_\infty$

C_p - Calor específico a pressão constante

Ec - Número de Eckert $U_\infty^2 / C_p \Delta T$

L - Comprimento característico do escoamento não viscoso

L_c - Comprimento característico da região interna fluidodinâmica

L_{ct} - Comprimento característico da região interna térmica

\tilde{P} - Pressão dimensional

P - Pressão adimensional

P_w - Pressão adimensional na parede

Pr - Número de Prandtl ν / α

q_w - Fluxo de calor na parede

Re - Número de Reynolds $U_\infty L / \nu$

St - Número de Stanton $q_w / \rho C_p U_\infty (T_\infty - T_0)$

\tilde{T} - Temperatura dimensional

T - Temperatura adimensional $T - T_0 / (T_\infty - T_0)$

\tilde{T}_∞ - Temperatura do fluido

\tilde{T}_0 - Temperatura da superfície sólida

T_r - Temperatura característica da região interna

\tilde{u} - Velocidade dimensional tangente a superfície sólida

u - Velocidade adimensional \tilde{u}/U_∞

U_∞ - Velocidade do escoamento não perturbado

U_r - Velocidade característica da região interna

\tilde{v} - Velocidade dimensional normal a superfície sólida

v - Velocidade adimensional \tilde{v}/U_∞

\tilde{x} - Coordenada dimensional tangente a superfície sólida

x - Coordenada adimensional

X_d - Posição do ponto de descolamento

\tilde{y} - Coordenada dimensional normal a superfície sólida

y - Coordenada adimensional \tilde{y}/L

LETRAS GREGAS

α - Difusividade térmica

ϵ - u_r/U_∞

$\hat{\epsilon}$ - $1/RePr$

$\tilde{\epsilon}$ - $1/Re$

ϵ_t - $T_r/\tilde{T} - \tilde{T}_0$

η - Fator de escala da variável y

Δ - Fator de escala da variável x

τ - Tensão cizalhante

τ_w - Tensão cizalhante na superfície sólida

τ_{ij} - Tensão turbulenta

θ_{ij} - Fluxo de calor turbulento

ρ - Massa específica

μ - Viscosidade

ν - Viscosidade cinemática μ/ρ

ÍNDICE

Ficha catalogáfica	<i>ii</i>
Dedicatória	<i>iii</i>
Agradecimentos	<i>iv</i>
Resumo	<i>v</i>
Abstract	<i>vii</i>
Glossário	<i>ix</i>
Índice	<i>xii</i>
Capítulo I	01
1.1 Introdução	01
1.2 Estado da arte	02
1.2.1 A separação laminar	03
1.2.2 A separação turbulenta	05
1.2.3 As leis da parede	10
1.2.4 Resultados experimentais	11
Capítulo II	13
2.1 Método da variável intermediária	13
Capítulo III A Estrutura Assintótica da Camada Limite Dinâmica Turbulenta	18

3.1 As equações do movimento	18
3.2 Análise assintótica	21
3.2.1 Análise longe da região de separação	22
3.2.2 Análise na região de separação	37
3.3 A estrutura assintótica fluidodinâmica	44
 Capítulo IV A Estrutura Assintótica da Camada Limite Térmica Turbulenta	 52
4.1 Definição do problema	52
4.2 Análise assintótica	55
4.2.1 Análise longe da região de separação	55
4.2.2 Análise na região de separação	69
4.3 A estrutura assintótica térmica	71
 Capítulo V As Leis da Parede	 77
5.1 Lei da parede fluidodinâmica	77
5.2 Lei da parede térmica	85
 Capítulo VI Análise dos Resultados	 90
6.1 Alguns resultados experimentais	90

6.2 Implementação numérica	92
6.2.1 O modelo de turbulência $K - \epsilon$	104
6.2.2 As leis da parede como condição de contorno	105
6.2.2.1 Caso fluido dinâmico	105
6.2.2.1 Caso térmico	105
6.3 Comparação dos resultados	106
Capítulo VII	117
7.1 Conclusão	117
7.2 Sugestões para trabalhos futuros	118
Bibliografia	120
Apêndice	130

CAPÍTULO I

1.1 INTRODUÇÃO

O fenômeno de separação de camada limite constitui-se, ainda hoje, em um dos principais desafios à ciência da mecânica dos fluidos. Devido à grande frequência com que este fenômeno ocorre em problemas de interesse em engenharia, como por exemplo, no escoamento em torno de aerofólios e em pás de turbinas, muitos esforços tem sido feitos no sentido de se determinar como se comporta o escoamento na região de separação e de escoamento reverso. Este conhecimento também é muito importante na determinação do modo pelo qual a troca de calor ocorre nessas regiões.

Uma outra motivação, mais geral, da análise a ser aqui apresentada seria a extensão para escoamentos com gradiente de pressão adverso, de estudos já realizados sobre a influência de certos fatores como transpiração ([35],[57],[59],[76],[78]), rugosidade([65]), compressibilidade ([57],[60],[62]) e transferência de calor([15],[57]) sobre os escoamentos em camada limite turbulenta.

Neste trabalho, o método da variável intermediária (Kaplun (1967)) juntamente com argumentos de análise dimensional, serão utilizados na determinação da estrutura assintótica do escoamento turbulento na região de separação. Ambos os casos, fluidodinâmico e térmico, serão estudados. Será mostrado que longe do ponto de descolamento o escoamento apresenta uma estrutura de três camadas (decks). Da combinação (matching) das soluções válidas para duas dessas camadas, surge a conhecida lei logarítmica, a qual será obtida através de argumentos puramente assintóticos, sem a utilização de um modelo de turbulência.

Na região de separação será visto que as duas camadas próximas à parede se unem em apenas uma camada. Este fato torna clara a razão pela qual a lei logarítmica deixa de

ser válida próximo ao ponto de descolamento, pois as camadas de cuja combinação esta lei provinha, fundem-se em uma única camada.

A análise assintótica do caso térmico fornece uma estrutura bem semelhante à apresentada pelo fenômeno fluidodinâmico. Neste caso porém, longe do ponto de descolamento, apenas duas camadas são necessárias para descrever o perfil de temperatura.

Além do que já foi dito acima serão deduzidas extensões das leis logarítmicas térmica e fluidodinâmica válidas ao longo de todo o escoamento, inclusive na regiões de separação e de escoamento reverso. Tanto no caso térmico quanto no caso fluidodinâmico estas novas expressões apresentam um comportamento logarítmico para os perfis de temperatura e velocidade na região de escoamento reverso. Este comportamento está de acordo com os experimentos realizados sobre o fenômeno como será mostrado posteriormente. As consequências da implementação destas expressões como condição de contorno em um modelo de turbulência do tipo $k-\epsilon$ serão mostradas. Como será visto através da comparação com experimentos, os resultados são promissores.

1.2 ESTADO DA ARTE

Faremos nessa seção uma análise dos principais resultados obtidos sobre a estrutura assintótica dos escoamentos em camada limite; ambos os casos laminar e turbulento serão tratados. Serão comentados também alguns importantes resultados experimentais relativos ao escoamento turbulento na região de separação bem como algumas variantes da conhecida lei logarítmica válidas para gradientes de pressão adverso. A geometria do fenômeno aqui tratado aparece na figura I.1

1.2.1 A SEPARAÇÃO LAMINAR

As primeiras tentativas de descrever o comportamento da camada limite laminar quando $\tau_w \rightarrow 0$ foram feitas por Howarth(1938) na década de trinta que resolveu as equações de Navier-Stokes numericamente. Alguns anos mais tarde, no final da década de quarenta, Goldstein(1948) baseado em uma solução obtida numericamente por Hartree, propôs uma solução analítica para a equação de camada limite laminar na forma de uma expansão em série, que descreve assintoticamente o comportamento da velocidade na região do ponto de descolamento. Em seu trabalho Goldstein demonstrou pela primeira vez analiticamente, a existência de uma singularidade na solução das equações de camada limite quando a tensão na parede tende a zero. Ficando claro, portanto, que a formulação clássica de camada limite, com o gradiente de pressão fornecido unicamente pelo escoamento externo, não pode ser utilizada na região de separação. Ainda segundo Goldstein, próximo ao ponto de descolamento a tensão na parede apresenta um comportamento do tipo $\tau_w \propto (X - Xd)^{\frac{1}{2}}$ onde Xd representa a posição do ponto de descolamento. A versão para escoamentos turbulentos do trabalho de Goldstein encontra grandes dificuldades no fato de que as tensões turbulentas precisam ser modeladas adequadamente. Deste modo, a questão de como a tensão na parede tende a zero, (segundo a teoria de camada limite) já respondida por Goldstein para o caso laminar, permanece ainda em aberto.

Posteriormente outros autores ([5],[6],[7],[70],[71]) utilizando o mesmo procedimento, aprimoraram a solução obtida por Goldstein considerando inclusive o caso em que há troca de calor com a superfície sólida. Estes autores demonstraram que a "singularidade de Goldstein" poderia ser removida, caso a influência da espessura de deslocamento sobre o escoamento externo fosse adequadamente considerada através de uma interação viscosa-não viscosa. Os casos compressível bem como o caso com injeção de fluido através da parede também foram estudados.

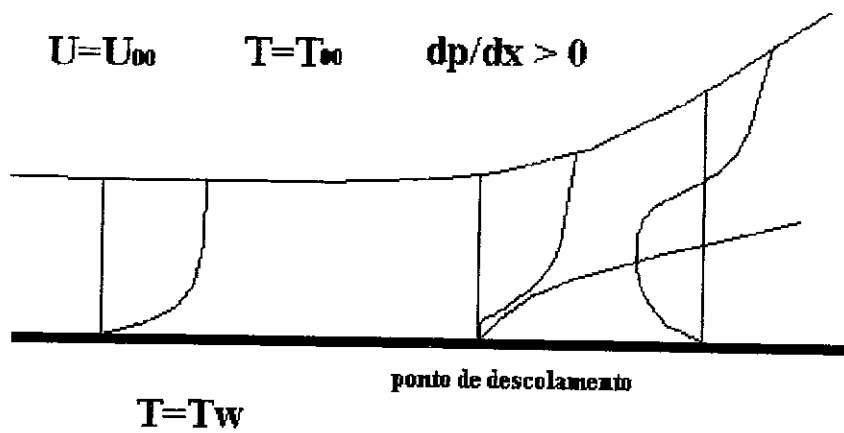


Figura I-1 : Definição do problema

Nos últimos anos alguns autores, utilizando a técnica conhecida como dos três pisos , abordaram o problema de separação da camada limite laminar([57] fornece uma abrangente revisão destes trabalhos). Este procedimento consiste em dividir a equação de camada limite em expressões menos complexas simplificando assim o problema.

1.2.2 A SEPARAÇÃO TURBULENTA

Os primeiros autores a empregar de modo mais sistemático o método de análise assintótica no estudo de escoamentos turbulentos foram Yajnik (1970) e Mellor (1972). Mais recentemente Sychev e Sychev (1987) também utilizaram o método das expansões assintóticas combinadas, no estudo das equações médias de Reynolds. Em todos os trabalhos acima citados, as escalas principais do problema analisado são obtidas assumindo-se o balanço de forças que seria válido em cada região do escoamento. Como veremos posteriormente, as mesmas escalas podem ser obtidas através do conceito de equação principal desenvolvido por Kaplun (1967).

Os principais conceitos, técnicas e resultados relativos aos problemas de análise assintótica podem ser encontrados nos seguintes trabalhos: Van Dyke (1964), Cole(1968), Lagstrom e Casten (1972)e Nayfeh(1981).

Segundo a teoria assintótica desenvolvida por Yajnik-Mellor a camada limite turbulenta longe do ponto de descolamento apresenta duas regiões principais. Este ponto de vista tem como fundamento resultados experimentais que demonstram existir dentro da camada limite turbulenta sobre uma placa plana duas regiões distintas. Uma região próxima à parede onde a "lei da parede", representada pela equação abaixo

$$\frac{u}{u_\tau} = f\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right),$$

na qual $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ e τ_w é a tensão de cisalhamento na parede, é válida, e uma região mais afastada da superfície sólida onde a conhecida "lei da esteira"(ou "law of the wake" ou ainda

"defect law") tem validade. Nessa região a componente u da velocidade obedece à seguinte relação:

$$\frac{u - U_\infty}{u_\tau} = g\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

Na equação acima U_∞ representa a velocidade fora da camada limite e δ representa a espessura da camada limite.

Baseados nestes resultados Yajnik e Mellor desenvolveram uma expansão assintótica em torno do parâmetro $\epsilon = u_\tau/U_\infty$, considerado pequeno. A estrutura assintótica de Yajnik-Mellor aparece descrita na figura abaixo.

Sychev e Sychev (1987) e Silva Freire e Hirata(1990) propuseram uma terceira região além das duas já acima citadas. Essa nova região representa um equilíbrio entre os termos de inércia e os termos de difusão turbulenta, e é necessária no tratamento de escoamentos sujeitos a gradientes de pressão adversos.

No caso do escoamento turbulento próximo ao ponto de descolamento, poucos são os trabalhos que procuram apresentar uma análise assintótica do problema. Dentre estes, os principais são os artigos de Melnik (1989) e de Neish e Smith (1992).

Em seu estudo, Melnik procurou contornar uma das principais dificuldades existentes na extensão da teoria de Yajnik-Mellor para escoamentos onde ocorre separação. Esta dificuldade consiste no fato de, próximo ao ponto de descolamento, a linearização dos termos de inércia na região externa da camada limite não ser mais possível. Ou seja, a conhecida lei da esteira(defect law), perde a validade na região de separação.

Segundo Melnik este problema poderia ser resolvido através de uma expansão assintótica feita em torno de dois parâmetros. Um destes parâmetros seria o mesmo utilizado na teoria de Yajnik-Mellor ($\epsilon = 1/\ln Re$) enquanto , o segundo parâmetro surgiria do modelo de turbulência empregado na análise(Cebeci - Smith (1977)).

Esta nova "teoria de dois parâmetros", fornece uma estrutura de três camadas para os escoamentos em camada limite turbulenta, sujeita a um gradiente adverso de pressão.

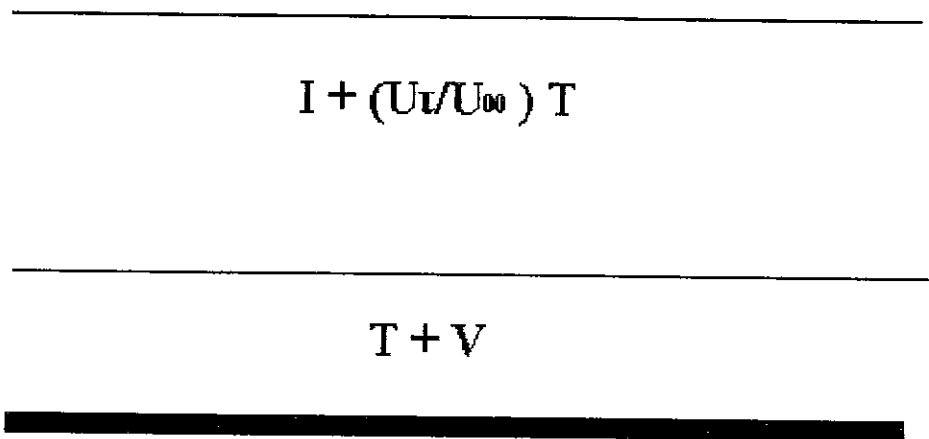


Figura I-2 : Estrutura assintótica da camada limite turbulenta longe da separação segundo Mellor.

Estas três camadas apresentam as seguintes características. Na camada mais externa ("outer layer") o escoamento é basicamente governado pelos termos de inércia, existindo apenas uma pequena influência causada pela presença das tensões turbulentas. Na camada intermediária ("equilibrium layer"), a qual representa a principal modificação introduzida pela teoria de Melnik sobre os trabalhos de Yajnik e Mellor, a velocidade é obtida assumindo-se uma pequena perturbação em torno de uma velocidade de deslizamento ("slip velocity"), obtida a partir da solução da camada mais externa. Esta camada é a grande responsável pela modificação do perfil de velocidade, e pelo conseqüente aumento da espessura de deslocamento, na região de separação. Finalmente, próximo à parede, aparece a camada interna ("wall layer"), onde ocorre o balanço entre as tensões turbulentas e viscosas.

Na teoria desenvolvida por Melnik o acoplamento ("matching") entre a camada intermediária e a camada interna é feita assumindo-se a existência de uma região onde a velocidade apresenta um comportamento logarítmico. Deste modo, a teoria de Melnik não pode ser aplicada na imediata vizinhança do ponto de descolamento, onde resultados experimentais atestam a não existência de um perfil logarítmico.

O principal objetivo da introdução de um "segundo parâmetro" na teoria de Yajnik-Mellor feita por Melnik seria o de prever as modificações causadas na lei da esteira devido ao processo de separação. Este novo parâmetro ($O(\alpha) = O(\epsilon)$) possibilita o aparecimento da já mencionada região intermediária, a qual, segundo Melnik, próximo ao ponto de descolamento, representa o balanço entre os termos de inércia e os termos de difusão turbulenta. Como será mostrado posteriormente, uma região com o balanço de forças acima mencionado surge naturalmente da aplicação do conceito de equação principal de Kaplun às equações de camada limite turbulenta. Neste caso porém, a relação entre as ordens de grandeza dos parâmetros ϵ e Re altera-se ao longo do escoamento, sendo diferente portanto da estrutura proposta por Melnik na qual esta relação é dada por $\epsilon = \frac{1}{Re}$ ao longo de todo o escoamento. No decorrer da análise a ser feita aqui, será demonstrado que esta relação está vinculada diretamente a existência de um perfil logarítmico próximo à parede. Como já foi dito acima a lei logarítmica

perde a validade na região de separação. Deste modo, a teoria proposta por Melnik somente pode ser utilizada no tratamento de escoamentos sujeitos a um gradiente de pressão adverso antes da separação

Adotando um procedimento diferente, Neish e Smith também procuraram analisar o comportamento assintótico da equação de camada limite turbulenta na região de separação.

Em seu trabalho, Neish e Smith construíram gradualmente a estrutura assintótica do escoamento turbulento partindo do caso laminar, através da introdução de um fator apropriado no modelo de turbulência de Cebeci-Smith (1977). Fazendo-se variar a ordem de grandeza desse fator, de zero até um, o escoamento também sofreria uma variação contínua do caso laminar até o caso completamente turbulento.

A estrutura assintótica proposta por Neish e Smith apresenta três regiões distintas ao longo da direção do escoamento. A primeira região, a mais distante do ponto de descolamento, apresenta a clássica estrutura de duas camadas, bastante semelhante a estrutura obtida por Mellor (1972) em seu trabalho. A segunda região é construída com o objetivo de resolver a já mencionada dificuldade produzida pela perda de validade da lei da esteira. Deste modo, esta região fica sendo composta também por duas camadas, uma mais externa onde o escoamento é governado por um balanço entre os termos de inércia e o gradiente de pressão, e onde o déficit de velocidade não é mais de ordem superior, e uma mais interna onde o balanço entre as tensões turbulentas e viscosas ocorre.

Na imediata vizinhança do ponto de descolamento aparece a terceira região do escoamento, na qual a equação completa de camada limite é assumida como sendo válida. Ou seja, o escoamento não apresenta mais várias camadas, e sim apenas uma onde todos os termos da equação de camada limite possuem a mesma ordem de grandeza. Essa região está de pleno acordo com os resultados obtidos neste trabalho, surgindo como consequência do procedimento aqui empregado.

Como visto analisando-se os trabalhos de Melnik e Neish-Smith, a principal dificuldade encontrada na extensão da teoria de Yajnik-Mellor para a região de separação, consiste no

tratamento adequado da chamada região da esteira. Esta dificuldade surge em virtude da maneira como essa região foi modelada longe do ponto de descolamento. Segundo a teoria de Yajnik-Mellor, a velocidade u em uma camada mais afastada da parede poderia ser considerada como tendo basicamente o valor da velocidade do escoamento fora da camada limite, com uma pequena correção de ordem superior provocada pela presença das tensões turbulentas. Nas proximidades do ponto de descolamento, entretanto, a influência causada pela presença das tensões turbulentas não pode mais ser considerada pequena, invalidando assim a hipótese original de Yajnik-Mellor.

No presente trabalho, a utilização do conceito de equação principal de Kaplun, permite uma análise mais completa da estrutura assintótica do escoamento turbulento longe da região de separação. Será mostrado que a chamada região da esteira, da maneira como foi definida na teoria de Yajnik-Mellor, aparece como domínio de validade de uma equação intermediária a ser definida posteriormente.

Uma vez estabelecida esta nova estrutura assintótica, válida longe do ponto de descolamento, a sua extensão para a região de separação pode ser feita através da utilização de um parâmetro pequeno adequado, característico do problema. Este parâmetro será definido por meio de uma equação algébrica, obtida através de um balanço das forças dominantes no fenômeno.

Como veremos posteriormente a estrutura assintótica obtida para valores não nulos da tensão na parede, adapta-se suavemente aos efeitos causados pela separação, tornando desnecessário a introdução de novas camadas (Melnik), ou de regiões adicionais (Neish-Smith).

1.2.3 AS LEIS DA PAREDE

Ao longo das últimas décadas, vários trabalhos foram publicados com o objetivo de determinar qual seria a forma de uma lei da parede válida na região de separação. Entre os primeiros e os mais importantes artigos está o de Stratford (1959) o qual demonstrou que

junto da parede a velocidade apresenta um comportamento de forma $u \sim y^{1/2}$ próximo ao ponto de descolamento. Posteriormente Townsend (1960) desenvolveu uma versão da lei da parede aplicável tanto na região de separação como longe desta. Esta nova lei contudo, não esclarecia quais deveriam ser os parâmetros característicos, utilizados na adimensionalização de u e y , que pudessem ser empregados ao longo do escoamento, à montante do ponto de descolamento.

Outros autores (Mellor e Gibson (1966), MacDonald (1968), Perry e Schofield (1973), Kader e Yaglon (1970), Schofield (1981), Durbin e Beltcher (1992), Gersten (1988)), promoveram avanços no tratamento do escoamento próximo ao ponto de descolamento, tratando principalmente dos parâmetros característicos válidos na região de separação. Nenhum destes trabalhos contudo, estende a análise para a região à montante do ponto de descolamento.

1.2.4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Devido a enorme importância tecnológica do fenômeno de separação, vários trabalhos experimentais foram realizados com o objetivo de analisar o escoamento próximo aos pontos de descolamento e recolamento da camada limite turbulenta.

Simpson et al(1981) realizou uma extensa pesquisa sobre a separação turbulenta bidimensional usando um gradiente de pressão do tipo que ocorre em um aerofólio. Entre seus principais resultados está o fato de que plotando-se os perfis de velocidade na região de escoamento reverso adimensionalizados como $\frac{u}{U_n} = f\left(\frac{y}{Ln}\right)$ onde U_n representa a velocidade negativa máxima e Ln o valor da coordenada y onde esta velocidade ocorre; estes perfis aparentemente apresentam algum tipo de similaridade. A lei da parede clássica dada por $\frac{u}{U_\tau} = f\left(\frac{yU_\tau}{\nu}\right)$ não é consistente com este resultado pois enquanto o parâmetro clássico $\frac{\nu}{u_\tau}$ decresce na região separada o novo parâmetro Ln apresenta um crescimento. Além disso Simpson constatou que próximo à parede as flutuações turbulentas são de ordem de grandeza igual a apresentada pelo escoamento médio embora baixos níveis de tensão turbulenta este-

jam presentes. Segundo o próprio Simpson seus resultados sugerem que na região separada as tensões de Reynolds devem ser modeladas relacionando-se as mesmas com a estrutura da turbulência e não ao gradiente médio local da velocidade.

Thompson e Whitelaw (1995) também estudaram o escoamento turbulento bidimensional em torno de um aerofólio na região de separação e de escoamento reverso. Estes autores, como no caso de Simpson, também provaram que a lei logarítmica clássica não é adequada para descrever o escoamento próximo à parede na região separada, embora exista uma região onde uma lei logarítmica é válida. Outro resultado importante mostrado pelos autores foi a constatação de que as tensões normais de Reynolds são pelo menos tão importantes quanto as tensões cisalhantes na região de separação.

Dengel e Fernholz(1990) analisaram os efeitos de pequenas mudanças no gradiente de pressão sobre a separação turbulenta bidimensional incompressível atestando a importância de χ_w (parâmetro de escoamento reverso) na descrição do fenômeno.

Vogel (1984) e Vogel e Eaton (1985) estudaram detalhadamente o escoamento turbulento com troca de calor em torno de um degrau descendente. Entre seus principais resultados está o fato de que a analogia entre a tensão na parede média e o número Stanton utilizada para escoamentos em placas planas não é válida na região de separação e de escoamento reverso onde o valor máximo do coeficiente de troca térmica ocorre nas imediações do ponto de descolamento onde a tensão na parede é nula. Outro importante resultado é a determinação de que é a região próxima a parede a principal responsável pela determinação do fluxo de calor pois nessa região ocorrem os maiores gradientes de temperatura.

Outros autores ([1],[2],[4],[19],[20],[22],[42]-[46],[52],[83] e [85]) também realizaram importantes experimentos sobre o assunto.

CAPÍTULO II

2.1 MÉTODO DA VARIÁVEL INTERMEDIÁRIA

Será feito neste capítulo uma introdução ao método da variável intermediária (Kaplun (1967), Silva Freire e Hirata (1990)). O objetivo aqui é mostrar como esta técnica pode ser utilizada, para obter soluções aproximadas de uma equação diferencial cujo termo de derivada de maior ordem está multiplicado por um parâmetro pequeno ϵ . Isto é feito dividindo-se a equação diferencial em um conjunto de equações aproximadas as quais são uniformemente válidas em diferentes partes do domínio. As equações aproximadas são obtidas aplicando-se um processo de limite à equação diferencial original.

O processo de limite acima mencionado (η - *limit*) aplicado à uma equação $E(x, y; \epsilon)$ é definido como se segue:

Seja a variável intermediária \hat{x} tal que,

$$\hat{x}\eta(\epsilon) = x, \tag{II - 1}$$

onde $\eta(\epsilon)$ é uma função arbitrária de ϵ .

Então o limite em η de $E(x, y; \epsilon)$ é:

$$\lim_{\eta} E(x, y; \epsilon) = \lim E(\hat{x}\eta(\epsilon), y; \epsilon), \tag{II - 2}$$

com $\epsilon \rightarrow 0$ e \hat{x} fixo.

A definição acima é de grande importância para o que vem a seguir. Esta definição será estudada com mais detalhes juntamente com alguns importantes conceitos no exemplo abaixo:

Considere o problema de camada limite descrito pela seguinte equação:

$$\epsilon \ddot{y} + (1 + \epsilon) \dot{y} + y = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = 1. \quad (II - 3)$$

Com o objetivo de obter uma solução aproximada da equação acima substituiremos (II-1) em (II-3) obtendo:

$$\frac{\epsilon}{\eta^2} \ddot{\hat{y}} + \frac{(1 + \epsilon)}{\eta} \dot{\hat{y}} + \hat{y} = 0, \quad (II - 4)$$

onde $\hat{y} = y(\eta \hat{x})$, $\dot{\hat{y}} = \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}}$ e $\ddot{\hat{y}} = \frac{d^2\hat{y}}{d\hat{x}^2}$.

Dependendo da ordem de η , cada termo da equação (II-4) terá uma ordem formal em ϵ . As derivadas são consideradas como tendo formalmente ordem um assim, o primeiro termo de (II-4) é formalmente de ordem ϵ/η^2 .

Aplicando agora o limite em η à equação (II-4), teremos o conjunto de equações aproximadas para as várias ordens de η .

$$O(\eta) = 1: \quad \dot{\hat{y}} + \hat{y} = 0 \quad (II - 5.a)$$

$$O(\epsilon) < O(\eta) < 1: \quad \dot{\hat{y}} = 0 \quad (II - 5.b)$$

$$O(\eta) = O(\epsilon): \quad \ddot{\hat{y}} + \dot{\hat{y}} = 0 \quad (II - 5.c)$$

$$O(\eta) < O(\epsilon): \quad \ddot{\hat{y}} = 0. \quad (II - 5.d)$$

As equações (II-5.a, c) possuem uma importante propriedade. Se η é tal que o processo de limite em η aplicado a (II-5.a) e (II-5.c) fornece (II-5.b). Estas duas equações são consideradas como sendo "ricas o suficiente" para conter (II-5.b). Lagestrom e Casten (1972) fazem as seguintes definições:

Definição 1:

Se E é uma equação e $\lim_{\eta_1} E = E_1$, $\lim_{\eta_2} E = E_2$ e ainda $\lim_{\eta_2} E_1 = E_2$, então E_1 contém E_2 .

Definição 2:

O domínio formal de validade de uma equação F , relativa à uma equação original E , é ordem de grandeza de η tal que $\lim_{\eta} E$ ou é igual a F ou é igual a alguma equação contida em F .

Deste modo, de acordo com as definições acima, os domínios de validade das equações (II-5.a) e (II-5.c) são respectivamente:

$$D_e = \{\eta/O(\eta) > O(\epsilon)\}, \quad (II - 6.a)$$

e

$$D_i = \{\eta/O(\eta) < O(\epsilon)\}. \quad (II - 6.b)$$

As equações (II-5.a) e (II-5.c) podem ser chamadas de equações principais pois elas contém todas as informações presentes na equação original (II-4). As demais equações ((II-5.b) e (II-5.d)) são chamadas de equações intermediárias.

Supondo agora que existe alguma relação entre os domínios formais de validade definidos pelos conjuntos (II-6.a) e (II-6.b) e o domínio real de validade das soluções das equações (II-5.a) e (II-5.b), então pode-se justificar a combinação (matching) entre as soluções interna e externa. Usando a noção de que equações "vizinhas" devem fornecer soluções também "vizinhas", Kaplun (1967) enunciou o seguinte princípio heurístico:

Princípio:

Se y é a solução de uma equação E e E^* é uma equação aproximada, então existe uma solução y^* de E^* cujo domínio de validade inclui o domínio formal de validade de E .

Este princípio não é sempre verdadeiro e, em particular, ele falha quando pequenos termos causam grandes efeitos, após um processo de integração. No presente caso, contudo,

este princípio pode ser aplicado. A interseção dos domínios D_e e D_i é dada por:

$$D_e \cap D_i = \{\eta/\epsilon \ll \eta \ll 1\}. \quad (II - 7)$$

Continuaremos agora com o processo de determinação uma solução aproximada do problema (II-3). Resolvendo as equações (II-5.a) e (II-5.b) obteremos as soluções externa e interna respectivamente, as quais são obtidas por:

$$f(\hat{x}) = A e^{-\hat{x}}, \quad (II - 8.a)$$

$$g(\hat{x}) = B + C e^{-\hat{x}}. \quad (II - 8.b)$$

Uma vez que o domínio de (II-6.a) inclui o ponto $x = 1$, logo a equação (II-8.a) deve satisfazer a condição de contorno $y(1) = 1$. Sendo assim, teremos:

$$f(x) = e^{1-x}. \quad (II - 9)$$

A solução interna então deve satisfazer a condição de contorno em $x = 0$, portanto:

$$B + C = 0. \quad (II - 10)$$

Como se pode notar, uma terceira condição se faz necessária para que possamos determinar os valores de B e C . Esta condição virá do fato de que as soluções externa e interna devem ser iguais na interseção de seus domínios (veja a equação (II-7)) ou seja,

$$\lim_{\eta} f(x) = \lim_{\eta} g(x/\epsilon), \epsilon \ll \eta \ll 1, \quad (II - 11)$$

onde $\hat{x} = x$ para a solução externa e $\hat{x} = \frac{x}{\epsilon}$ para a solução interna. Aplicando a condição (II-11) às equações (II-8.b), (II-9) e (II-10) teremos que:

$$B = e, \quad C = -e, \quad (II - 12)$$

Assim, a função pode ser rescrita na forma:

$$g(x) = e - e^{1-\frac{x}{\epsilon}}. \quad (II - 13)$$

Uma vez obtidas as equações (II-9) e (II-13), cada uma válida em uma parte do domínio da equação (II-3), podemos agora combiná-las de modo a obter uma solução aproximada única, válida ao longo de todo intervalo $[0, 1]$. Para obter esta solução aproximada usaremos aqui o método da adição composta. Neste método, as soluções interna e externa são somadas e sua parte em comum é subtraída. Fazendo isto, temos então a seguinte expressão:

$$y_{ap}(x) = e^{1-x} - e^{1-\frac{x}{\epsilon}}, \quad (II - 14)$$

onde $y_{ap}(x)$ representa a solução aproximada procurada. Esta solução pode ser comparada com a solução do problema original, a qual é dada abaixo:

$$y(x) = \left(\frac{1}{(1/e^{\frac{1}{\epsilon}} - 1/e)} \right) (e^{-\frac{x}{\epsilon}} - e^{-x}). \quad (II - 15)$$

CAPÍTULO III

A ESTRUTURA ASSINTÓTICA DA CAMADA LIMITE DINÂMICA TURBULENTO

Neste capítulo, faremos uma análise do comportamento assintótico da camada limite turbulenta no limite quando $Re \rightarrow \infty$. Com o objetivo de tornar a análise mais geral, não faremos uso aqui de um modelo de turbulência, para o fechamento das equações de Reynolds. O procedimento desenvolvido por Kaplun(1967), será utilizado juntamente com argumentos de análise dimensional, na determinação das escalas principais (equações principais) do problema em questão. A definição de um novo parâmetro de escala u_R (Cruz e Silva Freire (1994)), o qual pode ser empregado tanto na região de separação quanto longe desta, fornece uma estrutura assintótica que se adapta suavemente aos efeitos decorrentes do processo de separação. Tal estrutura proporciona ainda, uma explicação sobre como a lei logarítmica desaparece quando $x \rightarrow x_d$, onde x_d representa a posição do ponto de descolamento.

3.1 AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Trataremos aqui o escoamento como sendo bidimensional, incompressível e turbulento; além disto, consideraremos que o fluido se move sobre uma superfície plana, sujeita a uma distribuição de pressão prescrita (Simpson (1981)). Deste modo, as equações médias do movimento podem ser escritas como sendo:

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xx}}{\partial \tilde{x}} + \nu \left[\frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial \tilde{x}^2} \right], \quad (III - 1.1a)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yy}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yx}}{\partial \tilde{x}} + \nu \left[\frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{x}^2} \right], \quad (III - 1.1b)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0. \quad (III - 1.1c)$$

Nas equações acima, o til denota quantidades dimensionais; \tilde{x} e \tilde{y} são as coordenadas tangente e normal à superfície; \tilde{u} e \tilde{v} representam as componentes do vetor velocidade nas direções de \tilde{x} e \tilde{y} respectivamente e \tilde{P} representa a pressão. Os termos $\tilde{\tau}_{xy}$, $\tilde{\tau}_{xx}$, $\tilde{\tau}_{yy}$ e $\tilde{\tau}_{yx}$ são as componentes do tensor de Reynolds. O sistema de equações acima está sujeito às seguintes condições de contorno:

em $\tilde{y} = 0$

$$\tilde{u}(\tilde{x}, 0) = 0, \quad (III - 1.2a)$$

$$\tilde{v}(\tilde{x}, 0) = 0, \quad (III - 1.2b)$$

em $\tilde{y} = \tilde{y}_c$

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}_c) = \tilde{u}_{0c}(\tilde{x}), \quad (III - 1.2c)$$

$$\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}_c) = \tilde{v}_{0c}(\tilde{x}), \quad (III - 1.2d)$$

em $\tilde{x} = \tilde{x}_{1c}$

$$\bar{u}(\tilde{x}_{1c}, \tilde{y}) = \bar{u}_{1c}(\tilde{y}), \quad (III - 1.2.e)$$

$$\bar{v}(\tilde{x}_{1c}, \tilde{y}) = \bar{v}_{1c}(\tilde{y}), \quad (III - 1.2.f)$$

em $\tilde{x} = \tilde{x}_{2c}$

$$\bar{u}(\tilde{x}_{2c}, \tilde{y}) = \bar{u}_{2c}(\tilde{y}), \quad (III - 1.2.g)$$

$$\bar{v}(\tilde{x}_{2c}, \tilde{y}) = \bar{v}_{2c}(\tilde{y}), \quad (III - 1.2.h)$$

As funções $\bar{u}_{0c}, \bar{u}_{1c}, \bar{u}_{2c}, \bar{v}_{0c}, \bar{v}_{1c}, \bar{v}_{2c}$ são, previamente conhecidas. Como o conjunto de equações (III-1.1a, b, c) representa o escoamento turbulento plenamente desenvolvido, o ponto x_{1c} deve ser tomado a jusante do processo de transição.

A adimensionalização das equações (III-1.1a, b, c) será feita utilizando-se um comprimento e uma velocidade características do escoamento não viscoso (baseados nas dimensões do tunel de vento e na velocidade de entrada deste, por exemplo), dados por L e U_∞ respectivamente. Os componentes do tensor de Reynolds, contudo, serão adimensionalizados através de uma velocidade própria do processo de difusão turbulenta u_R , a qual representa a ordem de grandeza das flutuações e será definida posteriormente. Sendo assim, definiremos as seguintes variáveis: $u = \frac{\tilde{u}}{U_\infty}, v = \frac{\tilde{v}}{U_\infty}, P = \frac{\tilde{P}}{\rho U_\infty^2}, x = \frac{\tilde{x}}{L}, y = \frac{\tilde{y}}{L}, \tau_{ij} = \frac{\tilde{\tau}_{ij}}{u_R^2}$.

Substituindo as equações acima no sistema (III-1.1a, b, c) obtém-se:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \epsilon^2 \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right] + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial u^2}{\partial y^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \right], \quad (III - 1.3a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \epsilon^2 \left[\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right] + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial v^2}{\partial y^2} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} \right], \quad (III - 1.3b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (III - 1.3c)$$

onde Re é o número de Reynolds $Re = \frac{UL}{\nu}$ e $\epsilon = \frac{u_R}{U_\infty}$.

3.2 ANÁLISE ASSINTÓTICA

Aplicaremos agora o método da variável intermediária desenvolvido por Kaplun (1967) às equações (III-1.3a, b, c). Dividiremos esta análise em duas partes. A primeira será efetuada em uma região longe do ponto de descolamento, onde a tensão de cisalhamento na parede desempenha um papel relevante na estrutura assintótica do problema. Nesta região, os termos de difusão na direção de x são pouco importantes quando comparados com os termos de difusão na direção de y e, além disto, temos que $u \gg v$. A união destes fatores possibilita grandes simplificações nas equações do movimento, como será visto mais adiante. Na segunda parte da análise trataremos do problema próximo ao ponto de descolamento. O escoamento na região de separação é bastante diferente do que será tratado na primeira parte da análise, uma vez que nenhuma das propriedades características apresentadas pelo escoamento longe da região de separação, permanece válida quando $x \rightarrow xd$ (xd representa a posição do ponto de descolamento).

3.2.1 - ANÁLISE LONGE DA REGIÃO DE SEPARAÇÃO

Como primeiro passo na análise do problema, devemos definir quais são os parâmetros pequenos envolvidos. Como já foi mencionado, o estudo feito aqui se processa no limite quando $Re \rightarrow \infty$, portanto, o termo $1/Re$ representa um destes parâmetros. Um segundo parâmetro é dado por $\epsilon = \frac{u_R}{U_\infty}$, pois já é sabido que $U_\infty \gg u_R$. O segundo passo a ser dado é a definição das seguintes variáveis de escala:

$$x_\Delta = \frac{x - xd}{\Delta(\epsilon, \tilde{\epsilon})}, \quad (III - 2.1a)$$

$$y_\eta = \frac{y}{\eta(\epsilon, \tilde{\epsilon})}. \quad (III - 2.1b),$$

onde $\tilde{\epsilon} = \frac{1}{Re}$.

Devido a natureza não linear do problema, e a presença dos termos de difusão turbulenta, temos que não apenas as variáveis independentes devem ser escalonadas (“esticadas”), mas o mesmo também deve ocorrer com as componentes da velocidade, nas direções de x e y , ou seja, com u e v (Cole(1968), Nayfeh(1981)).

Neste caso, porém, uma análise mais detalhada sobre as possíveis ordens de grandeza desses dois termos, pode ser feita. Como u é obtido a partir da solução do sistema (III-1.3.a,b,c), ele deve ser da forma $u = u(x, y, \epsilon, \tilde{\epsilon})$. Como ϵ e $\tilde{\epsilon}$ são muito menores que um ($\epsilon \gg 1$ e $\tilde{\epsilon} \gg 1$), assumiremos aqui, que u pode ser expresso por uma expansão assintótica dupla, nos parâmetros ϵ e $\tilde{\epsilon}$ da seguinte forma:

$$u(x, y, \epsilon, \tilde{\epsilon}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^i \tilde{\epsilon}^j u_{ij}(x, y). \quad (III - 2.2)$$

Deste modo, baseados na equação acima, definiremos uma nova variável de escala dada por:

$$u_\theta = \frac{u(x, y)}{\epsilon^i \tilde{\epsilon}^j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (III - 2.3)$$

onde os valores de i e j serão determinados no decorrer da análise. No caso da componente v da velocidade temos que, pela equação da continuidade e pelas equações (III-2.1a, b) e (III-2.3),

$$\frac{V}{\eta} \sim \frac{\epsilon^i \tilde{\epsilon}^j}{\Delta} \Rightarrow V \sim \eta \frac{\epsilon^i \tilde{\epsilon}^j}{\Delta}.$$

Isto nos sugere que V , pode ser escalonado da forma:

$$V_\theta = \frac{\Delta}{\eta} \frac{V}{\epsilon^i \tilde{\epsilon}^j}. \quad (III - 2.4a)$$

O mesmo procedimento adotado na obtenção da equação (III-2.3) pode ser empregado no caso da pressão. Deste modo, teremos:

$$P_\theta = \frac{P(x, y)}{\epsilon^m \tilde{\epsilon}^n}. \quad (III - 2.4b)$$

Para efetuarmos os cálculos assumiremos a princípio que $2i=m$ e $2j=n$.

A substituição das equações (III-2.1a, b), (III-2.3), (III-2.4a) e (III-2.4b) no sistema (III-1.3a, b, c) resulta:

$$\frac{\epsilon^{2i} \tilde{\epsilon}^{2j}}{\Delta} \left[\hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} \right] = - \frac{\epsilon^m \tilde{\epsilon}^n}{\Delta} \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial x_\Delta} + \epsilon^i \tilde{\epsilon}^{j+1} \left[\frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta^2} + \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta^2} \right] +$$

$$\epsilon^2 \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_\eta} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x_\Delta} \right], \quad (III - 2.5a)$$

$$\epsilon^{2i} \tilde{\epsilon}^{2j} \frac{\eta}{\Delta^2} \left[\hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial y_\eta} \right] = - \frac{\epsilon^m \tilde{\epsilon}^n}{\eta} \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial y_\eta} + \epsilon^i \tilde{\epsilon}^{j+1} \frac{\eta}{\Delta} \left[\frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 \hat{v}_\theta}{\partial y_\eta^2} + \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial^2 \hat{v}_\theta}{\partial x_\Delta^2} \right] +$$

$$\epsilon^2 \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y_\eta} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x_\Delta} \right], \quad (III - 2.5b)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial y_\eta} = 0. \quad (III - 2.5c)$$

onde $u_\theta(x, y) = \hat{u}_\theta(x_\Delta, y_\eta)$, $v_\theta(x, y) = \hat{v}_\theta(x_\Delta, y_\eta)$ e $P_\theta(x, y) = \hat{P}_\theta(x_\Delta, y_\eta)$.

Antes de prosseguirmos com a análise, devemos fazer algumas hipóteses a respeito do sistema de equações acima. Observando as equações e considerando o fato de o escoamento ser turbulento, ou seja, de que os termos de difusão turbulenta não podem ser desprezados (na primeira ordem de aproximação) em todas as regiões do escoamento, chegamos a seguinte relação:

$$\lim_{\tilde{\epsilon}, \epsilon \rightarrow 0} \Delta^{-1} \frac{\epsilon^{3i} \tilde{\epsilon}^{3j+1}}{\epsilon^4} \leq 1. \quad (III - 2.6)$$

onde $\epsilon^i \tilde{\epsilon}^j$ representa a ordem de grandeza da velocidade u , na região onde os termos de difusão turbulenta e os termos de inércia tem a mesma ordem de grandeza. Essa região deve existir obrigatoriamente já que caso contrário, teríamos apenas o balanço entre os termos de inércia e os termos de difusão viscosa em uma primeira ordem de aproximação, o que, como já foi mencionado acima, não ocorre no escoamento completamente turbulento.

A adoção desta hipótese pode parecer arbitrária e formulada independentemente do método da variável intermediária. Isto contudo não é verdadeiro, pois a análise de Kaplun aplicada às equações (III-2.5) apresenta três alternativas todas com significado físico. Duas delas estão representadas pela inequação (III-2.6) e a terceira fornece a camada limite laminar. Esta hipótese, na verdade, deve ser feita em virtude da não utilização de um modelo de turbulência para o fechamento das equações de Reynolds

Como será mostrado posteriormente, a igualdade presente na expressão (III-2.6) é satisfeita apenas na região de separação. Longe do ponto de descolamento temos que, a desigualdade é estritamente válida. Este fato implica na existência de duas equações (escalas) principais dentro da camada limite turbulenta, cuja combinação (matching) dará como resultado a conhecida lei logarítmica.

Uma hipótese adicional deve ser feita com respeito à ordem de grandeza das componentes do tensor de Reynolds. Foi assumido aqui que a ordem de grandeza desses termos não varia entre as duas escalas principais (acima mencionadas) presentes no escoamento, longe da separação. Além disto, a seguinte equação é válida $0(\tau_{ij}) = 0(\epsilon^2)$ (Mellor(1972)).

Faremos agora variar o parâmetro η , com o objetivo de obter as equações principais do problema. Por estarmos tratando neste caso com o escoamento longe da região de separação, temos que $0(\Delta) = 0(1)$. Deste modo, para $0(\eta) = 0(1)$ o sistema de equações (III-2.5a, b, c) no limite com $\tilde{\epsilon} \rightarrow 0$ e $\epsilon \rightarrow 0$, assume a forma

$$\hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} = \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial x_\Delta}, \quad (III - 2.7a)$$

$$\hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial y_\eta} = \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial y_\eta}, \quad (III - 2.7b)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial y_\eta} = 0. \quad (III - 2.7c)$$

Nessa região, devido a necessidade de atender às condições de contorno, o valor dos expoentes i, j, m e n deve ser nulo, ou seja, $m = n = i = j = 0$. Como se pode notar, quando $0(\Delta) = 0(\eta) = 0(1)$ os efeitos decorrentes da presença da viscosidade são irrelevantes. Sendo assim, o sistema original composto pelas equações de Reynolds se reduz às conhecidas equações de Euler, obtidas para fluidos ideais. A influência dos termos difusivos somente se faz notar em uma região mais próxima à superfície sólida como veremos agora. No caso em que $0(\eta) = 0(\epsilon^2)$ temos como resultado as seguintes equações:

$$\hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} = -\frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_\eta}, \quad (III - 2.8a)$$

$$\frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial y_\eta} = 0, \quad (III - 2.8b)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial y_\eta} = 0. \quad (III - 2.8c)$$

A obtenção do valor de η e dos expoentes i e j foi feita através do seguinte procedimento. Por hipótese, existe uma região onde a ordem de grandeza dos termos de inércia é igual a ordem de grandeza das tensões turbulentas. Este fato pode ser representado pela equação abaixo:

$$\epsilon^{2i} \tilde{\epsilon}^{2j} = \frac{\epsilon^2}{\eta},$$

ou ainda

$$\eta = \epsilon^{2-2i} \tilde{\epsilon}^{-2j}, \quad (III - 2.9a)$$

onde $\epsilon^i \epsilon^j$ representa a ordem de grandeza da velocidade u , na região onde os termos de inércia e de difusão turbulenta na direção de y tem a mesma ordem de grandeza .

O balanço de forças representado pela equação acima somente pode ocorrer para valores de η menores que 1, pois para $\eta = 1$, temos que as equações (III-2.7a, b, c) são válidas. Sendo assim, temos a seguinte relação:

$$\eta = \epsilon^{2-2i} \tilde{\epsilon}^{-2j} < 1. \quad (III - 2.9b)$$

Como se pode notar, a relação(III-2.9b) somente pode ser verdadeira se o expoente i for nulo ou seja, se $i = 0$. Assim, apenas o expoente j precisa ser determinado, isto será feito com auxílio da relação (III-2.6). Pela expressão (III-2.9b)temos que:

$$\epsilon^{2-2i} \tilde{\epsilon}^{-2j} < 1 \Rightarrow \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}^j} < 1. \quad (III - 2.9c)$$

Substituindo (III-2.9c) em (III-2.6) e fazendo $i = 0$ teremos :

$$\frac{\tilde{\epsilon}^{4j}}{\epsilon^4} \tilde{\epsilon}^{1-j} < 1. \quad (III - 2.9d)$$

Na inequação acima o termo $\tilde{\epsilon}^{4j}/\epsilon^4$ é sempre maior que 1 (por (III-2.9c)). Logo, o único valor de j que torna a expressão (III-2.9d) verdadeira é $j = 0$. Deste modo, o valor de η é dado por $\eta = \epsilon^2$.

Fazendo $0(\eta) = 0(\epsilon^{i-2} \tilde{\epsilon}^{j+1})$, onde o produto $\epsilon^i \tilde{\epsilon}^j$ representa a ordem de grandeza da componente u da velocidade nessa região do escoamento (a qual ainda permanece desco-

nhecida), obtém-se um balanço entre os termos de difusão viscosa e turbulenta, dado pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_\eta} + \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta^2} = 0, \quad (III - 2.10a)$$

$$\frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial y_\eta} = 0, \quad (III - 2.10b)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial y_\eta} = 0. \quad (III - 2.10c)$$

Pode-se demonstrar, através da expressão (III-2.6), que a região onde as equações acima são válidas, está bem mais próxima à superfície sólida do que a região média ($0(\eta) = 0(\epsilon^2)$). Deste modo, o domínio de validade das equações acima será chamado de região interna. Uma outra informação interessante, pode ser obtida integrando-se a equação (III-2.10a). Fazendo isto teremos:

$$\tau_{xy} + \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} = \frac{\tau_w}{\rho u_R^2}, \quad (III - 2.11)$$

onde τ_w representa a tensão na parede.

Como se pode notar, observando-se a equação (III-2.11), a tensão de cisalhamento não varia com y ao longo de toda a região interna e, além disso, é igual a tensão de cisalhamento na parede. Esta informação será de grande importância na determinação do comprimento e da velocidade característica da região interna do escoamento.

Seria possível, caso adotássemos um modelo de turbulência adequado, considerarmos para todos os fins práticos, a nossa análise como encerrada neste ponto. Pois, embora não saibamos os valores de i e j (e conseqüentemente de η) para a região interna do problema, nada nos impede teoricamente, de resolver as equações (III-2.7a, b, c), (III-2.8a, b, c) e

(III-2.10 a, b,c) e obter assim o valor de u . O problema original, bastante complexo, foi reduzido a um conjunto de três sistemas de equações que, embora ainda apresentem uma certa dificuldade de resolução, são bem mais simples que o sistema (III-2.5a, b, c). Cada um dos três sistemas seria resolvido e, posteriormente, suas soluções seriam combinadas de modo a fornecer uma solução que fosse válida ao longo de toda a região fluida.

Cabe ressaltar a diferença entre o problema aqui tratado e o caso laminar. Em nossa análise, encontramos que o escoamento turbulento se divide em três regiões principais, sendo muito diferente, portanto, do caso laminar onde apenas duas regiões principais aparecem.

Embora a determinação do perfil de velocidade implique necessariamente na utilização de uma relação adicional entre o termo de tensão turbulenta τ_{xy} e a velocidade média, muitas informações ainda podem ser obtidas, sem o emprego de um modelo de turbulência. Fazendo uso de argumentos de análise dimensional, podemos determinar a velocidade e o comprimento característicos da região interna. A idéia aqui é assumir que esse comprimento característico pode ser usado como a escala principal desta região, ou seja, $0(\eta) = 0(L_c)$. Como já foi mencionado, uma das principais propriedades da região interna é o fato de a tensão de cisalhamento ser constante e igual à tensão na parede. Além disso, a difusão viscosa da quantidade de movimento é muito importante nessa parte do escoamento. Sendo assim, qualquer que seja o comprimento característico L_c , este deve resultar da combinação dos parâmetros τ_w, ρ, μ . Deste modo, o comprimento característico L_c fica sendo dado por:

$$L_c = \frac{\mu}{\sqrt{\rho\tau_w}},$$

ou ainda, utilizando-se o conceito de viscosidade cinemática

$$L_c = \frac{\nu}{\sqrt{\tau_w/\rho}}. \quad (III - 2.12)$$

Como na região interna do escoamento (ver a equação (III-2.11)),

$$0 \text{ (tensões turbulentas)} = 0 \text{ (tensões viscosas)} = 0 \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right).$$

logo,

$$0(u_R^2) = 0 \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right). \quad (III - 2.13)$$

Definindo agora a velocidade de atrito u_τ da forma

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}.$$

Temos como consequência da equação (III-2.13) que

$$0(u_R) = 0(u_\tau). \quad (III - 2.14)$$

Rescrevendo agora a equação (III-2.12) em uma forma adimensional e utilizando a definição de velocidade de atrito, teremos:

$$\hat{L}_c = \frac{1}{Re \frac{u_\tau}{U_\infty}},$$

onde $\hat{L}_c = L_c/L$. Deste modo, devido a equação (III-2.14), a ordem de grandeza de \hat{L}_c expressa em termos dos parâmetros $\tilde{\epsilon}$ e ϵ , fica sendo dada por:

$$0(\hat{L}_c) = 0 \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon} \right). \quad (III - 2.15)$$

De posse da equação (III-2.15), podemos agora determinar a ordem de grandeza da componente da velocidade na região interna. Nessa região do escoamento sabemos que

$$0(\eta) = 0(\hat{L}_c) = 0\left(\epsilon^{i-2}\tilde{\epsilon}^{j+1}\right). \quad (III - 2.16)$$

A substituição de (III-2.15) em (III-2.16) então fornece

$$0\left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon}\right) = 0\left(\epsilon^{i-2}\tilde{\epsilon}^{j+1}\right).$$

Igualando os expoentes de ϵ e $\tilde{\epsilon}$ obteremos, $i = 1$ e $j = 0$. Deste modo, a ordem de grandeza de u na região interna é,

$$0(u) = 0(\epsilon). \quad (III - 2.17)$$

A principal consequência da expressão acima é o fato de que na região interna do problema a ordem de grandeza da velocidade é igual a ordem de grandeza das flutuações. Isto nos sugere que a velocidade de atrito u_τ pode ser usada para adimensionalizar u nessa parte do escoamento. A mesma conclusão pode ser obtida, através de um procedimento semelhante utilizado na determinação de L_c .

Como se pode notar, existe uma diferença entre a ordem de grandeza das componentes da velocidade nas regiões média ($0(\eta) = 0(\epsilon^2)$), e interna ($0(\eta) = 0\left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon}\right)$). Isto significa que se u pode ser expresso na forma dada pela equação (III-2.2), em ambas as regiões, então teríamos $u_{0i}(x, y)$ como sendo nulo na região interna do escoamento enquanto que na região média o mesmo não acontece, ou seja, $u_{0m}(x, y) \neq 0$. Deste modo, para podermos fazer a combinação (matching) entre essas duas regiões, devemos considerar também a influência do termo $u_{1m}(x, y)$, na solução problema. Como existe uma região de interseção entre os

domínios de validade dos sistemas de equações (III-2.8a, b,c) e (III-2.10a, b, c), logo a influência do termo acima ($u_{1m}(x, y)$), deve ser considerada no sistema (III-2.8a, b, c) e não nas equações gerais de Reynolds, dadas pelo sistema (III-2.5a, b, c). Obviamente, o mesmo resultado deve ser alcançado em qualquer um dos procedimentos acima mencionados. Assim, apenas os termos presentes nas equações (III-2.8a, b, c) tem importância na solução do escoamento na região média, ficando os demais termos da equação de Reynolds com sua influência restrita a aproximações de ordem superior à segunda.

Considerando agora a expansão assintótica dos termos presentes nas equações (III-2.8a, b, c), teremos até a segunda ordem de aproximação

$$u_m = u_{0m} + \epsilon u_{1m},$$

$$v_m = v_{0m} + \epsilon v_{1m},$$

$$P_m = P_{0m} + \epsilon P_{1m},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy0m} + \epsilon \tau_{xy1m},$$

onde o subíndice m é relativo à região média do escoamento.

Substituindo as equações acima no sistema (III-2.8a, b, c) e igualando os termos de mesma ordem, obtém-se:

$\epsilon^0 \rightarrow$

$$u_{0m} \frac{\partial u_{0m}}{\partial x} + v_{0m} \frac{\partial u_{0m}}{\partial y \epsilon^2} = - \frac{\partial P_{0m}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy0m}}{\partial x}, \quad (III - 2.18a)$$

$$\frac{\partial P_{0m}}{\partial y_{\epsilon^2}} = 0, \quad (III - 2.18b)$$

$$\frac{\partial u_{0m}}{\partial x} + \frac{\partial v_{0m}}{\partial y_{\epsilon^2}} = 0. \quad (III - 2.18c)$$

$\epsilon^1 \longrightarrow$

$$u_{1m} \frac{\partial u_{0m}}{\partial x} + u_{0m} \frac{\partial u_{1m}}{\partial x} + v_{0m} \frac{\partial u_{1m}}{\partial y_{\epsilon^2}} + v_{1m} \frac{\partial u_{0m}}{\partial y_{\epsilon^2}} =$$

$$-\frac{\partial P_{1m}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy1m}}{\partial y_{\epsilon^2}}, \quad (III - 2.19a)$$

$$\frac{\partial P_{1m}}{\partial y_{\epsilon^2}} = 0, \quad (III - 2.19b)$$

$$\frac{\partial u_{1m}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1m}}{\partial y_{\epsilon^2}} = 0. \quad (III - 2.19c)$$

onde $y_{\epsilon^2} = y_{\eta}$ para $\eta = \epsilon^2$.

Fazendo a combinação entre as soluções válidas para as regiões média e interna, obtém-se, no caso da componente u da velocidade (Nayfeh(1981))que existe uma região na qual

$$u_{0m}(0, x) + \epsilon u_{1m}\left(y \frac{1}{\epsilon^2}, x\right) = \epsilon u_{1i}\left(y \frac{\epsilon}{\epsilon}, x\right),$$

ou ainda

$$u_{0m}(0, x) = \epsilon \left(u_{1i}\left(y \frac{\epsilon}{\epsilon}, x\right) - u_{1m}\left(y \frac{1}{\epsilon^2}, x\right) \right). \quad (III - 2.20)$$

onde $u_{0m}(y\frac{1}{\epsilon^2}, x)$ foi assumida como sendo analítica, em torno de $y = 0$ e $u_{0m}(0, x)$ é o primeiro termo de uma expansão desta função, em série de Taylor. Na equação (III-2.20) o termo u_{1i} representa a primeira componente da velocidade na região interna do escoamento.

Ao analisarmos a equação (III-2.20), notamos uma aparente discrepância entre as ordens de grandeza de seus membros. Sendo assim, a única maneira desta igualdade ser verdadeira, seria se no limite, com $\epsilon \rightarrow 0$ e $\tilde{\epsilon} \rightarrow 0$, a tendência combinada desses dois parâmetros dentro do argumento das funções u_{1i} e u_{1m} , anulasse o efeito causado pela multiplicação do lado esquerdo da equação por ϵ . O significado matemático desta afirmação é de que a derivada do lado esquerdo da equação (III-2.20) com relação à ϵ , deve ser nula, ou seja:

$$u_{1i}\left(\frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}}, x\right) - u_{1m}\left(y\frac{1}{\epsilon^2}, x\right) + \epsilon\left(2y\frac{1}{\epsilon^3}u'_{1m}\left(y\frac{1}{\epsilon^2}, x\right) + y\left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}} - \frac{d\tilde{\epsilon}}{d\epsilon}\frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}^2}\right)u'_{1i}\left(\frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}}, x\right)\right) = 0. \quad (III - 2.21)$$

onde $u'_{1m} = \frac{\partial u_{1m}}{\partial y_{\epsilon^2}}$, $u'_{1i} = \frac{\partial u_{1i}}{\partial y_{\frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}}}}$, $y_{\epsilon^2} = y\frac{1}{\epsilon^2}$ e $y_{\frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}}} = y\frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}}$.

Derivando novamente a equação (III-2.20), desta vez com relação à y , obtém-se

$$-\frac{1}{\epsilon^2}u'_{1m}\left(y\frac{1}{\epsilon^2}, x\right) + \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}}u'_{1i}\left(\frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}}, x\right) = 0 \Rightarrow u'_{1m}\left(y\frac{1}{\epsilon^2}, x\right) = \frac{\epsilon^3}{\tilde{\epsilon}}u'_{1i}\left(\frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}}, x\right), \quad (III - 2.22)$$

onde a notação é a mesma usada em (III- 2.21). Substituindo agora as equações (III- 2.20) e (III- 2.22) em (III- 2.21), teremos

$$-\frac{u_{0m}(0, x)}{\epsilon} = 2y \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}} u'_{1i}\left(y \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}}, x\right) + y \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}} \left(1 - \frac{d\tilde{\epsilon}}{d\epsilon} \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}}\right) u'_{1i}\left(y \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}}, x\right) \Rightarrow$$

$$-u_{0m}(0, x) = y \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}} u'_{1i}\left(y \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}}, x\right) \left(3\epsilon - \frac{d\tilde{\epsilon}}{d\epsilon} \frac{\epsilon^2}{\tilde{\epsilon}}\right). \quad (III - 2.23)$$

O termo entre parênteses, do lado direito da equação (III- 2.23) deve, ser de ordem 1. Este fato tem como consequência a seguinte relação:

$$\frac{d\tilde{\epsilon}}{d\epsilon} \frac{\epsilon^2}{\tilde{\epsilon}} = c_0, \quad (III - 2.24)$$

sendo c_0 uma constante positiva.

Resolvendo (III- 2.24) encontramos que

$$\epsilon = -\frac{c_0}{\ln \tilde{\epsilon}}. \quad (III - 2.25)$$

A equação (III- 2.25) fornece um importante resultado a respeito dos dois parâmetros envolvidos em nossa análise. Torna-se claro pela equação (III- 2.25) que estes não são independentes, como se poderia pensar a princípio. Além disto, temos a seguinte consequência

$$\lim_{\tilde{\epsilon} \rightarrow 0} \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon^n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Este resultado concorda plenamente com a hipótese (III- 2.6), demonstrando assim, a consistência da análise feita aqui.

De posse da relação (III- 2.24), podemos rescrever a equação (III- 2.23) da seguinte forma:

$$u_{0m}(x) = c_0 y_{\frac{\xi}{\epsilon}} u'_{1i}(y_{\frac{\xi}{\epsilon}}, x) + O(\epsilon).$$

A solução dessa equação diferencial fornece, em uma primeira ordem de aproximação

$$u_{1i}(y_{\frac{\xi}{\epsilon}}, x) = \frac{u_{0m}(x)}{c_0} \ln y_{\frac{\xi}{\epsilon}} + g(x). \quad (III - 2.26)$$

Esta é a bem conhecida lei logarítmica, uma das características mais importantes dos escoamentos em camada limite turbulenta. Na análise aqui apresentada, essa lei foi obtida através de argumentos puramente assintóticos sendo, portanto, independente do modelo de turbulência a ser adotado no fechamento das equações de Reynolds. Como veremos posteriormente, as duas regiões cuja combinação (matching) resulta a lei logarítmica, tendem a se unir quando a tensão na parede tende a zero. Este é o motivo pelo qual a lei logarítmica desaparece na região de separação. Uma dedução matematicamente mais rigorosa dessa lei, pode ser obtida através da utilização de duas relações clássicas conhecidas como lei da esteira e lei da parede. Essa dedução fornece ainda uma expressão que relaciona a espessura da camada limite turbulenta com a tensão na parede.

3.2.2 ANÁLISE NA REGIÃO DE SEPARAÇÃO

Antes de começarmos a estudar o comportamento assintótico das equações na região de separação, devemos primeiramente determinar quais são as principais mudanças impostas pelo desaparecimento da tensão na parede, sobre os parâmetros pequenos envolvidos nesta análise. Essas mudanças devem influenciar basicamente o comportamento de ϵ pois o parâmetro restante $\tilde{\epsilon} \left(= \frac{1}{Re} \right)$, depende exclusivamente das propriedades do fluido e de grandezas características do escoamento. Observando o caso anterior, notamos que longe do ponto de descolamento, a ordem de grandeza do parâmetro ϵ é dada por $0(\epsilon) = 0 \left(\frac{u_\tau}{U_\infty} \right)$. Ou seja, a tensão de cisalhamento na parede exerce influência direta sobre a estrutura assintótica do problema através da velocidade de atrito $u_\tau \left(= \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \right)$. O mesmo comportamento não pode, ocorrer na região de separação, visto que, nessa parte do escoamento, a tensão na parede tende a zero. Sendo assim, com o objetivo de ganhar alguma informação sobre o problema, expandiremos os termos presentes na equação (III- 1.3a), na forma de séries de potência, em torno do ponto $y = 0$, resultando

$$u = a_1(x)y + a_2(x)\frac{y^2}{2} + a_3(x)\frac{y^3}{3} + \dots, \quad (III - 2.27a)$$

$$v = -a'_1(x)\frac{y^2}{2} - a'_2(x)\frac{y^3}{6} - a'_3(x)\frac{y^4}{12} + \dots, \quad (III - 2.27b)$$

$$P = P_w(x) + P_1(x)y + P_2(x)\frac{y^2}{2} + P_3(x)\frac{y^3}{3} + \dots, \quad (III - 2.27c)$$

$$\tau_{xx} = \theta_1(x)y + \theta_2(x)\frac{y^2}{2} + \theta_3(x)\frac{y^3}{4} + \dots, \quad (III - 2.27d)$$

$$\bar{\tau} = \tau_{xy} + \tilde{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_0(x) + \tau_1(x)y + \tau_2(x)\frac{y^2}{2} + \dots \quad (III - 2.27e)$$

Nas equações acima as condições de não deslizamento e de não penetrabilidade foram utilizadas para fornecer $a_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$. Além disso, baseados no estudo feito anteriormente na região interna do escoamento, agrupamos os termos de difusão (viscosa e turbulenta) na direção de y . Após substituirmos as expressões (III-2.27a, b, c, d, e) em (III- 1.3a) e equacionarmos os coeficientes de mesma potência em y teremos:

$$\tau_0(x) = \tau_w / \rho U_\infty^2,$$

$$\tau_1(x) = \frac{dP_w}{dx},$$

$$\tau_2(x) = \frac{dP_1}{dx} + \tilde{\epsilon} a_1''(x) + \theta_1'(x).$$

Deste modo, a equação (III- 2.27e) pode ser rescrita como

$$\tau_{xy} + \tilde{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} + y \frac{dP_w}{dx} + \frac{y^2}{2} \left(\frac{dP_1}{dx} + \tilde{\epsilon} a_1'' + \theta_1' \right) + \dots \quad (III - 2.28)$$

Com a expressão (III- 2.28), podemos agora, através de uma análise de escalas, determinar como o parâmetro ϵ se adapta aos efeitos do desaparecimento da tensão na parede.

Como já foi mostrado anteriormente, a região interna do escoamento longe do ponto de descolamento apresenta as seguintes características:

$$0 \text{ (tensões turbulentas)} = 0 \text{ (tensões viscosas)} = 0(\epsilon^2),$$

e

$$0(y) = 0 \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon} \right).$$

A substituição dessas duas relações na equação (III- 2.28) e a utilização da definição da velocidade de atrito fornecem

$$0(\epsilon^2) = 0 \left(\frac{u_\tau^2}{U_\infty^2} + \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon} \frac{dP_w}{dx} + \frac{\tilde{\epsilon}^2}{\epsilon^2} \frac{1}{2} \left(\frac{dP_1}{dx} + \tilde{\epsilon} a_1'' + \theta_1' \right) + \dots \right). \quad (III - 2.29)$$

Para que possamos determinar corretamente o comportamento assintótico da equação (III- 2.29), devemos primeiramente descobrir qual dos termos presentes no lado direito da equação é o de menor ordem. A determinação deste termo deve ser feita com cautela, já que na região de separação $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = 0$. Deste modo, o termo de menor ordem próximo ao ponto de descolamento, fica sendo dado por $\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon} \frac{dP_w}{dx}$. Isto significa que uma função capaz de fornecer a ordem de grandeza de ϵ , tanto longe quanto perto do ponto de descolamento, deve obrigatoriamente depender de u_τ^2/U_∞^2 e de $\tilde{\epsilon}/\epsilon \frac{dP_w}{dx}$. Portanto, a equação (III- 2.29) pode ser reescrita na forma

$$0(\epsilon^2) = 0 \left(\frac{u_\tau^2}{U_\infty^2} + \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon} \frac{dP_w}{dx} \right).$$

A expressão acima nos sugere que a ordem de grandeza do ϵ ao longo de todo o escoamento pode ser obtida encontrando-se a maior raiz real da seguinte equação algébrica

$$\epsilon^3 - \frac{u_\tau^2}{U_\infty^2} \epsilon - \tilde{\epsilon} \frac{dP_w}{dx} = 0. \quad (III - 2.30a)$$

Como já foi dito, esta equação deve ser válida ao longo de todo o escoamento, tanto na região de separação quanto longe desta. Deste modo, antes de utilizá-la, devemos primeiramente verificar a coerência de seu comportamento nesses casos limite. Para facilitar nossa análise, dividiremos a equação (III- 2.30a) por ϵ^3 , obtendo

$$1 - \frac{u_\tau^2}{U_\infty^2} / \epsilon^2 - \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon^3} \frac{dP_w}{dx} = 0. \quad (III - 2.30b)$$

Longe do ponto de descolamento, temos que a tensão na parede é diferente de zero e, além disso, a equação (III- 2.25) é válida. Deste modo, no limite com $\epsilon \rightarrow 0$ e $\tilde{\epsilon} \rightarrow 0$, teremos

$$1 - \frac{u_\tau^2}{U_\infty^2} / \epsilon^2 = 0 \Rightarrow \epsilon = \frac{u_\tau}{U_\infty}.$$

ou seja, o mesmo resultado fornecido pela equação (III- 2.14). No caso do escoamento na região de separação, temos que a tensão na parede é nula, portanto, $u_\tau^2 = 0$. Assim, a equação (III- 2.30b) fica dada por

$$1 - \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon^3} \frac{dP_w}{dx} = 0 \Rightarrow \epsilon = \sqrt[3]{\tilde{\epsilon} \frac{dP_w}{dx}}, \quad (III - 2.31a)$$

ou ainda, na forma dimensional

$$u_R = \sqrt[3]{\nu \frac{d\tilde{P}_w}{\rho d\tilde{x}}}. \quad (III - 2.31b)$$

A expressão acima está de acordo com trabalhos anteriores (Stratford(1959), Mellor e Gibson(1966) e Durbin e Belcher(1992)), os quais sugerem que a velocidade definida pela equação (III- 2.31b), deve ser utilizada para adimensionalizar u , na parte interna do escoamento próximo ao ponto de descolamento. Na análise até aqui apresentada, o seguinte fato merece ser ressaltado: o gradiente de pressão que aparece nas equações (III- 2.30a) e (III- 2.30b), somente é igual ao gradiente de pressão externo, fornecido pela solução das equações de Euler, na região longe do ponto de descolamento. Como veremos posteriormente, na região

de separação $\frac{dP}{dy}$ tornã-se importante, causando assim, a diferença entre $\frac{dP_w}{dx}$ e o gradiente de pressão externo. Esta diferença, contudo, não altera a ordem de grandeza assintótica de $\frac{dP_w}{dx}$, a qual continua sendo um. Este fato aparece confirmado nos dados experimentais de Thompson e Whitelaw (1995). Uma dedução dos resultados aqui obtidos sem a utilização da relação (III- 2.32) será apresentada no apêndice.

Comparando-se as equações (III- 2.25) e (III- 2.31a), percebemos imediatamente a grande diferença existente entre o comportamento do parâmetro ϵ , longe e perto do ponto de descolamento. Como se pode notar, na região de separação, a relação entre as ordens de grandeza ϵ e $\tilde{\epsilon}$ é dada por:

$$O(\epsilon) = O\left(\sqrt[3]{\tilde{\epsilon} \frac{dP_w}{dx}}\right) = O(\sqrt[3]{\tilde{\epsilon}}). \quad (III - 2.32)$$

sendo bastante diferente, portanto, da relação válida para a região longe do ponto de descolamento.

Com o objetivo de obter o comportamento assintótico das equações na região de separação, aplicaremos aqui o mesmo procedimento empregado na seção 2.1. Neste caso, porém, as equações principais serão fornecidas através da variação do parâmetro Δ . Este processo será aplicado sobre as equações principais já obtidas da seção 2.1 ou seja, o conjunto formado pelas equações (III-2.7a,b,c), (III-2.8a,b,c), (III-2.10a,b,c). Isto será feito tendo como principal motivo, a observação de como o desaparecimento da tensão na parede, influi na estrutura assintótica do problema. Como será mostrado, alguns termos que possuem ordem de grandeza superior, quando $O(\Delta) = O(1)$, tornam-se importantes na região de separação.

Começaremos nossa análise pela região onde a ordem de grandeza dos termos de difusão, viscosa e turbulenta, de quantidade de movimento na direção de y são equivalentes. Essa região, já definida como sendo a região interna, apresenta duas importantes características dadas por $O(u) = O(\epsilon)$ e $O(\eta) = O(\tilde{\epsilon}/\epsilon)$. Deste modo, para $O(\Delta) = O(\tilde{\epsilon}/\epsilon)$, temos que os termos de difusão de quantidade de movimento na direção de x também tornam-se relevante, pois,

$o(\eta) = 0(\Delta)$. Nesse caso, porém, devido a grande proximidade com relação ao ponto de descolamento, conclue-se que a tensão de cisalhamento na parede é praticamente nula. Logo a ordem de grandeza dos parâmetros de escala Δ e η também pode ser definida como sendo

$$0(\Delta) = 0(\eta) = 0(\tilde{\epsilon}/\epsilon) = (\epsilon^2). \quad (III - 2.33)$$

Substituindo agora a equação (III- 2.33) no sistema (III- 2.5a, b, c) e respeitando as já mencionadas características da região interna, encontramos o seguinte sistema de equações

$$\hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} = -\frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta^2} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x_\Delta}, \quad (III - 2.34a)$$

$$\hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial y_\eta} = -\frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial^2 \hat{v}_\theta}{\partial y_\eta^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_\theta}{\partial x_\Delta^2} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x_\Delta}, \quad (III - 2.34b)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial y_\eta} = 0. \quad (III - 2.34c)$$

No sistema acima, observa-se que todos os termos das equações (III- 2.34a) e (III- 2.34b), tem ordem um. Deste modo, os expoentes presentes nas equações (III- 2.5a, b) ficam, neste caso, dados por $m = 2$ e $n = 0$.

Analisando o sistema (III- 2.34a, b, c) encontramos que, próximo ao ponto de descolamento, nenhuma simplificação pode ser feita nas equações (III- 2.5a, b, c). Portanto, na região de separação, existe apenas um conjunto de equações principais, representado pelas equações de Reynolds completas. Com o desaparecimento da tensão de cisalhamento na parede, duas das principais escalas presentes no escoamento longe da separação se fundem em uma única escala, como mostra a equação (III- 2.33). Uma consequência direta dessa fusão é o desaparecimento da região, onde a velocidade é descrita por uma função logarítmica (III- 2.26).

Isto ocorre devido ao fato de tal região somente existir, em virtude da combinação (matching) das funções geradas pelas equações diferenciais, correspondentes a cada uma dessas escalas.

Um outro importante resultado pode ser obtido observando-se o comportamento da região média quando a tensão na parede tende a zero. A característica principal dessa região do escoamento é o equilíbrio entre as ordens de grandeza dos termos de inércia, do gradiente de pressão e do termo de difusão turbulenta. Isto pode ser expresso pela seguinte equação

$$O\left(\frac{\epsilon^{2p}\tilde{\epsilon}^{2q}}{\Delta}\right) = O\left(\frac{\epsilon^2}{\eta}\right), \quad (III - 2.35)$$

onde $\epsilon^{2p}\tilde{\epsilon}^{2q}/\Delta$ representa a ordem de grandeza dos termos de inércia e do gradiente de pressão, e ϵ^2/η representa a ordem de grandeza dos termos de difusão turbulenta. Longe do ponto de descolamento, os valores de p, q, Δ e η são conhecidos, $p = q = 0, \Delta = 1$ e $\eta = \epsilon^2$, bem como a relação entre ϵ e $\tilde{\epsilon}$, $\epsilon = -c_0/\ln \tilde{\epsilon}$

Para que possamos obter o comportamento dessa região próximo ao ponto de descolamento, faremos variar o parâmetro Δ na equação (III- 2.8a) assumindo $\eta = \epsilon^2$. Sendo assim, temos que uma equação principal surge para $\Delta = \epsilon^2$. Como a chamada região média representa, por hipótese, o balanço entre os termos de inércia e os termos de tensão turbulenta logo pela equação (III- 2.33), temos que:

$$\epsilon^{2p}\tilde{\epsilon}^{2q} = \epsilon^2. \quad (III - 2.36)$$

Como na região de separação $\epsilon^3 = \tilde{\epsilon}$, a equação (III- 2.36) assume a forma,

$$\epsilon^{2p+6q} = \epsilon^2,$$

deste modo,

$$p = 1 \text{ e } q = 0.$$

A substituição dos valores de $\eta (= \epsilon^2)$ e $\Delta (= \epsilon^2)$ juntamente com os valores de p e q acima obtidos, nas equações (III- 2.5) e fazendo uso da relação entre ϵ e $\tilde{\epsilon}$ ($\epsilon^3 = \tilde{\epsilon}$) válida na região de separação resulta no sistema (III- 2.34).

3.3 A ESTRUTURA ASSINTÓTICA FLUIDODINÂMICA

Nesta seção, a estrutura assintótica do escoamento turbulento, bidimensional, desenvolvendo-se sobre uma superfície sólida e sujeito a um gradiente de pressão adverso será esquematizada. Será mostrado que longe da região de separação, o sistema de equações original dado pelas equações de Reynolds pode ser dividido em três sistemas mais simples, cada um correspondendo a uma região do escoamento. Esses sistemas serão obtidos através do método da variável intermediária e do conceito de equação principal desenvolvidos por Kaplun(1967). Da combinação das soluções fornecidas por cada um desses sistemas obtém-se uma solução geral válida ao longo de toda a região do escoamento longe da separação. O resultado da divisão do sistema original em outros menores pode ser visto abaixo.

Conservação da quantidade do movimento na direção de x :

$$0(\eta) = 0(1) \quad : \quad \hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial x_\Delta} = 0, \quad (III - 3.1a)$$

$$0(\epsilon^2) < 0(\eta) < 0(1) \quad : \quad \hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial x_\Delta} = 0, \quad (III - 3.1b)$$

$$0(\eta) = 0(\epsilon^2) \quad : \quad \hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial x_\Delta} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_\eta}, \quad (III - 3.1c)$$

$$0(\tilde{\epsilon}/\epsilon) < 0(\eta) < 0(\epsilon^2) \quad : \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_\eta} = 0, \quad (III - 3.1d)$$

$$0(\eta) = 0(\tilde{\epsilon}/\epsilon) \quad : \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_\eta} + \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta^2} = 0, \quad (III - 3.1e)$$

$$0(\eta) < 0(\tilde{\epsilon}/\epsilon) \quad : \quad \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta^2} = 0. \quad (III - 3.1f)$$

Conservação da quantidade de movimento na direção y :

$$0(\eta) = 0(1) \quad : \quad \hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial y_\Delta} = 0, \quad (III - 3.1g)$$

$$0(\eta) < 0(1) \quad : \quad \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial y_\eta} = 0. \quad (III - 3.1h)$$

Na dedução das equações acima, foram usados os valores já conhecidos de η , correspondentes a cada uma das equações principais. Observando-se as equações acima, notamos que para valores do parâmetro η dados por $\eta = 1$, $\eta = \epsilon^2$ e $\eta = \tilde{\epsilon}/\epsilon$ aparecem equações mais "ricas" que as outras. Estas equações são mais "ricas" no sentido de que qualquer das demais expressões esta contida em alguma delas. Além disso estas equações não estão contidas em nenhuma outra, deste modo estas expressões são chamadas de equações principais do problema em questão.

Na estrutura representada pelas equações (III- 3.1), a região onde a componente u da velocidade apresenta um comportamento logarítmico é dada pelo domínio de validade da

expressão (III- 3.1d), a qual representa a região de acoplamento ("matching") entre as regiões média e interna obtidas na seção 3.2.1. Isto significa que a velocidade da lei logarítmica está restrita à região onde o transporte de quantidade de movimento se dá, basicamente, devido à difusão turbulenta.

Como dito no capítulo I muitos trabalhos foram feitos com o objetivo de estudar a estrutura assintótica do escoamento bidimensional, turbulento desenvolvendo-se sobre uma superfície sólida e longe da separação. Em seu trabalho, Yajnik (1979) foi um dos primeiros a empregar, de modo sistemático, o método das expansões assintóticas combinadas, no estudo da camada limite turbulenta. Postulando, nesse caso, a divisão do escoamento em duas regiões, uma externa de caráter basicamente convectivo, onde as tensões de Reynolds são correções de segunda ordem e uma interna, onde as tensões turbulentas são da mesma ordem de grandeza, das tensões viscosas. Os parâmetros de escala característicos de cada uma dessas regiões, foram então obtidos, assumindo-se o comportamento logarítmico da componente u da velocidade de acoplamento (matching). Uma análise mais consistente foi feita por Mellor (1972) em seu artigo, no qual, embora postulasse a existência das regiões acima mencionadas, empenhou-se no sentido de demonstrar a existência da lei logarítmica, como sendo uma consequência da estrutura assintótica do problema. Outro avanço importante foi a obtenção da ordem de grandeza da componente u da velocidade, na região interna do escoamento através apenas de argumentos provenientes da análise assintótica. Questionando a validade da divisão do escoamento na camada limite turbulenta, nas duas regiões já citadas, Sychev e Sychev(1987) e Silva Freire e Hirata (1990) propuseram a existência de uma região intermediária, onde a ordem de grandeza dos termos inerciais é igual a ordem de grandeza dos termos de difusão turbulenta. Silva Freire e Hirata aplicaram o método da variável intermediária aos escoamentos em camada limite turbulenta, encontrando uma estrutura assintótica de duas camadas diferente da proposta pelos demais autores acima citados. Cabe ressaltar que, na grande maioria destes trabalhos, a espessura da camada limite turbulenta foi assumida como sendo uma das escalas principais do escoamento. No presente

trabalho, entretanto, a análise feita através do método da variável intermediária, não inclui a espessura da camada limite turbulenta entre os parâmetros relevantes do problema. Fato este, que contrasta com o caso do escoamento laminar, onde a espessura da camada limite é uma escala principal, na análise assintótica das equações.

No caso do escoamento próximo ao ponto de descolamento, observamos que muitas das características presentes na região longe da separação, deixam de ser válidas. Uma delas é a estrutura assintótica de duas regiões da camada limite turbulenta, a qual transforma-se em uma estrutura composta de apenas uma região principal.

Com o desaparecimento da tensão de cisalhamento na parede, a velocidade de atrito u_τ , não pode mais ser usada na adimensionalização das componentes do tensor de Reynolds, como foi feito no caso do escoamento longe da separação. Deste modo, uma nova velocidade característica foi desenvolvida, definida através de uma equação algébrica (eq. 2.28a), válida tanto na região de separação quanto longe desta. A definição de uma velocidade que substitua u_τ na região de separação, é ainda hoje motivo de controvérsias. Muitos trabalhos foram publicados com o objetivo de resolver esta questão (Perry e Schofield(1972), Schofield(1981), Schofield(1986), MacDonald(1968), Mellor e Gibson(1966), Kader e Yaglon(1979)) sem, contudo, solucionar de modo definitivo o problema. No presente trabalho, a dedução da equação (III- 2.28a) foi feita, tendo como principal objetivo, a determinação da variação da ordem de grandeza da velocidade u_R , para fins da análise assintótica aqui apresentada. Apesar disso, devido a concordância do seu comportamento nos casos limite com os resultados obtidos por vários autores (Stratford(1969), Durbin e Belcher(1992)), a equação (III- 2.30a) foi utilizada também de modo quantitativo, no cálculo da tensão de cisalhamento na parede.

Uma vez conhecida a variação da ordem de grandeza de u_R foi possível então determinar a estrutura assintótica do problema na região de separação. Tal estrutura pode ser obtida, partindo-se das equações (III- 3.1). Fazendo variar o parâmetro Δ , temos que, estas assumem a forma:

$$0(\Delta) = 0(1) \quad : \quad \hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial x_\Delta} = 0, \quad (III - 3.2a)$$

$$0(\epsilon^2) < 0(\Delta) < 0(1) \quad : \quad \hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial x_\Delta} = 0, \quad (III - 3.2b)$$

$$0(\Delta) = 0(\epsilon^2) \quad : \quad \hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial x_\Delta} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_\eta}, \quad (III - 3.2c)$$

$$0(\tilde{\epsilon}/\epsilon) < 0(\Delta) < 0(\epsilon^2) \quad : \quad \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_\eta} = 0, \quad (III - 3.2d)$$

$$0(\Delta) = 0(\tilde{\epsilon}/\epsilon) \quad : \quad \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta^2} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_\eta} = 0, \quad (III - 3.2e)$$

$$0(\Delta) < 0(\tilde{\epsilon}/\epsilon) \quad : \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_\Delta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_\Delta^2} = 0. \quad (III - 3.2f)$$

Nas equações acima, considerou-se que a ordem de grandeza dos termos de inércia e do gradiente de pressão, não se alteram na região de separação, como já havia sido mencionado.

A estrutura do escoamento fornecida pelas equações (III- 3.2) ainda parece apresentar próximo à parede duas regiões distintas como no caso longe da região de separação. Devemos notar, contudo, que de acordo com a equação (III- 2.33) na região de separação, $0(\epsilon^2) = 0(\tilde{\epsilon}/\epsilon)$. Sendo assim, as duas expressões (III- 3.2 c) e (III- 3.2 e) combinam-se dando origem ao seguinte conjunto de equações:

$$0(\Delta) = 0(1) \quad : \quad \hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial x_\Delta} = 0, \quad (III - 3.3a)$$

$$0(\epsilon^2) < 0(\Delta) < 0(1) \quad : \quad \hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial x_\Delta} = 0, \quad (III - 3.3b)$$

$$0(\Delta) = 0(\epsilon^2) \quad : \quad \hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial x_\Delta} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_\eta} + \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta^2 \partial y_\eta}, \quad (III - 3.3c)$$

$$0(\Delta) < 0(\epsilon^2) \quad : \quad \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta^2 \partial y_\eta} = 0, \quad (III - 3.3d)$$

O mesmo processo, aplicado na equação da conservação da quantidade de movimento, na direção de y , fornece

$$0(\Delta) = 0(1) \quad : \quad \hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial y_\Delta} = 0, \quad (III - 3.3e)$$

$$0(\epsilon^2) < 0(\Delta) < 0(1) \quad : \quad \hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial x_\theta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial y_\eta} = 0, \quad (III - 3.3f)$$

$$0(\Delta) = 0(\epsilon^2) \quad : \quad \hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial y_\eta} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_\eta} + \frac{\partial^2 \hat{v}_\theta}{\partial x_\Delta^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_\theta}{\partial x_\Delta^2 \partial y_\eta}, \quad (III - 3.3g)$$

$$0(\Delta) = 0(\epsilon^2) \quad : \quad \frac{\partial^2 \hat{v}_\theta}{\partial x_\Delta^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_\theta}{\partial x_\Delta^2 \partial y_\eta}, \quad (III - 3.3h)$$

As equações (III- 3.3c) e (III- 3.3g) mostram que, na região de separação, as equações de Reynolds completas, devem ser usadas na descrição do escoamento. Apesar disto, a utilização das equações de camada limite no estudo do fenômeno de separação, tem sido feita por vários autores, fornecendo resultados razoáveis. Como exemplo deste tipo de procedimento, podemos citar o trabalho de Melnik(1989), já analisado no capítulo I, no qual o autor propõe uma nova teoria assintótica, baseada em uma expansão em torno de dois parâmetros. Um desses parâmetros é dado pela forma adimensional da velocidade de atrito, ou seja, u_τ/U_∞ e, o parâmetro restante é definido através do modelo de turbulência utilizado na análise. Levando

em conta a semelhança matemática existente entre a equação da camada limite laminar e a região externa da camada limite turbulenta modelada, utilizando as equações de Cebeci-Smith(1977), Melnik empregou a já bem estabelecida teoria dos três pisos (triple deck), para obter informações sobre o escoamento na região de separação. Embora apresente resultados interessantes, o trabalho acima apresenta algumas inconsistências, como a utilização da lei logarítmica na região de separação, por exemplo. Outro importante artigo foi publicado por Neish e Smith(1992), onde os autores, utilizando novamente o modelo de turbulência de Cebeci- Smith, procuram relacionar o fenômeno de separação com o escoamento encontrado na borda de fuga de uma placa plana. A estrutura assintótica do escoamento tanto longe quanto próximo ao ponto de descolamento aparece na figura abaixo.

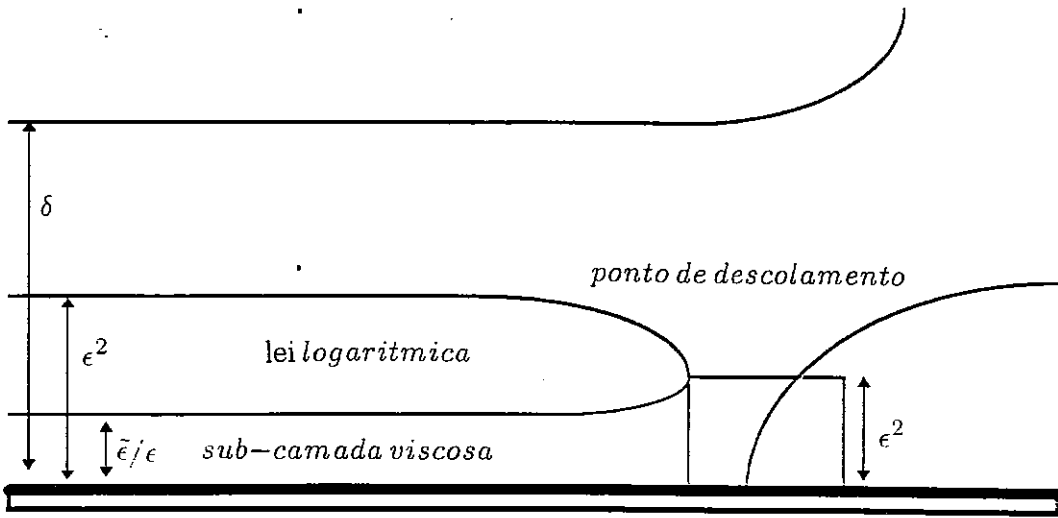


Figura III-1 : Estrutura assintótica fluidodinâmica

CAPÍTULO IV

A ESTRUTURA ASSINTÓTICA DA CAMADA LIMITE TÉRMICA TURBULENTA

Faremos neste capítulo uma análise da estrutura assintótica da forma turbulenta da equação da energia, no limite quando $RePr \rightarrow \infty$, onde Pr representa o número de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$. Aplicaremos aqui o mesmo procedimento empregado no caso das equações de Reynolds, não fazendo uso de um modelo para a descrição dos termos turbulentos. O procedimento desenvolvido por Kaplun(1967) será novamente utilizado na determinação das escalas principais (equações principais) deste novo problema. Com o auxílio do parâmetro u_R , definido no capítulo anterior, definiremos uma nova temperatura característica t_R , a qual pode ser utilizada tanto longe quanto próximo ao ponto de descolamento. Será mostrado que para valores do número de Prandtl Pr próximos da unidade, a estrutura assintótica do problema térmico se assemelha à do caso dinâmico. Nos casos limites porém, mostraremos que a diferença entre essas duas estruturas assintóticas se torna bastante acentuada.

4.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Analisaremos aqui o fenômeno da troca de calor entre uma superfície sólida e um meio fluido escoando sobre essa superfície. Consideraremos o problema como sendo bidimensional, turbulento e incompressível. Os efeitos decorrentes dos processos de dissipação não serão considerados, assim como os efeitos provenientes de escoamentos provocados por diferenças de massa específica. Deste modo a equação média da energia pode ser escrita como sendo:

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \tilde{\theta}_{vt}}{\partial \tilde{y}} + \alpha \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial \tilde{\theta}_{ut}}{\partial \tilde{x}} + \alpha \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2}. \quad (IV - 1.1)$$

Na equação acima, o til representa quantidades dimensionais. Como no caso do problema dinâmico, \tilde{x} e \tilde{y} são as coordenadas tangente e normal à superfície, \tilde{u} e \tilde{v} representam as componentes da velocidade nas direções de \tilde{x} e \tilde{y} , e \tilde{T} é a temperatura. Os termos $\tilde{\theta}_{ut}$ e $\tilde{\theta}_{vt}$ representam a difusão turbulenta de calor nas direções de \tilde{x} e \tilde{y} respectivamente, e α é dado por $\alpha = k/\rho c_p$, onde k é a difusividade térmica, ρ a massa específica do fluido e c_p o calor específico à pressão constante, os quais foram assumidos como sendo independentes da temperatura. A equação (IV-1.1) está sujeita às seguintes condições de contorno:

em $\tilde{y} = 0$:

$$\tilde{T}(\tilde{x}, 0) = T_0, \quad (IV - 1.2a)$$

em $\tilde{y} = \tilde{y}_0$:

$$\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}_c) = T_{0c}(\tilde{x}), \quad (IV - 1.2b)$$

em $\tilde{x} = \tilde{x}_{1c}$:

$$\tilde{T}(\tilde{x}_{1c}, \tilde{y}) = T_{1c}(\tilde{y}), \quad (IV - 1.2c)$$

em $\tilde{x} = \tilde{x}_{2c}$:

$$\tilde{T}(\tilde{x}_{2c}, \tilde{y}) = T_{2c}(\tilde{y}), \quad (IV - 1.2d)$$

Nas expressões (IV-1.2b, c, d) as funções $T_{0c}(\tilde{x})$, $T_{1c}(\tilde{y})$ e $T_{2c}(\tilde{y})$ são previamente conhecidas. Definiremos agora as seguintes variáveis adimensionais:

$$u = \frac{\tilde{u}}{U_\infty}, \quad (IV - 1.3a)$$

$$v = \frac{\tilde{v}}{U_\infty}, \quad (IV - 1.3b)$$

$$T = \frac{\tilde{T} - \tilde{T}_0}{\tilde{T}_\infty - \tilde{T}_0}, \quad (IV - 1.3c)$$

$$y = \frac{\tilde{y}}{L}, \quad (IV - 1.3d)$$

$$x = \frac{\tilde{x}}{L}, \quad (IV - 1.3e)$$

$$\theta_{ij} = \frac{\tilde{\theta}_{ij}}{t_R u_R}. \quad (IV - 1.3f)$$

Nas expressões (T.1.3), temos que U_∞ e L são grandezas características do escoamento não viscoso, como já havia sido mencionado no capítulo III. As temperaturas \tilde{T}_∞ e \tilde{T}_0 , correspondem respectivamente à temperatura do fluido e da superfície, sobre a qual o escoamento se processa. O parâmetro t_R , fica sendo definido pela equação abaixo:

$$t_R = \frac{q_w}{\rho c_p u_R}. \quad (IV - 1.4)$$

onde q_w é o fluxo de calor na parede e u_R é uma velocidade característica definida pela equação (IV-2.28a). A temperatura t_R , da maneira como foi definida, pode ser utilizada ao longo de todo o escoamento inclusive na região de separação pois, embora a tensão cisalhante na parede desapareça no ponto de descolamento, o mesmo não acontece com o fluxo de calor, o qual, não se anula mesmo nessa região. Substituindo agora as equações (IV-1.3) em (IV-1.1) teremos:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \epsilon \epsilon_t \left(\frac{\partial \theta_{vt}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{ut}}{\partial x} \right) + \frac{1}{RePr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right), \quad (IV - 1.5)$$

onde Re é o número de Reynolds e Pr representa o número de Prandtl.

O parâmetro ϵ é o mesmo utilizado no capítulo III, ou seja, $\epsilon = u_R/U_\infty$, no caso de ϵ_t temos que este é dado por $\epsilon_t = t_R/(\tilde{T}_\infty - \tilde{T}_0)$. Muitos trabalhos experimentais sugerem não haver diferença entre as ordens de grandeza de ϵ e de ϵ_t . Como veremos posteriormente este fato somente é verdadeiro para valores do número de Prandtl próximos da unidade.

4.2 ANÁLISE ASSINTÓTICA

Seguiremos aqui o mesmo procedimento utilizado no caso da análise assintótica das equações de Reynolds. O método da variável intermediária (Kaplun(1967)) novamente será empregado na determinação do comportamento assintótico da equação (IV-1.5). Primeiramente a região longe do ponto de descolamento será estudada e, posteriormente, o comportamento da equação na região de separação será analisado.

4.2.1 ANÁLISE LONGE DA REGIÃO DE SEPARAÇÃO

Observando a equação (IV-1.5), notamos que dois parâmetros pequenos devem ser considerados para que possamos determinar o seu comportamento assintótico. O primeiro parâmetro é dado pelo inverso do produto dos números de Reynolds e de Prandtl, e será definido como $\hat{\epsilon}$, ou seja, $\hat{\epsilon} = 1/RePr$. O segundo parâmetro, que aparece multiplicando os termos de difusão turbulenta, é igual ao produto $\epsilon \epsilon_t$. Sendo assim definiremos agora a

seguinte variável de escala:

$$\hat{T}_\beta = \frac{T(x, y)}{\epsilon^r \epsilon_t^s \hat{\epsilon}^k}. \quad (IV - 2.1)$$

Na formulação da equação (IV-2.1) foram utilizados os mesmos argumentos empregados na dedução das expressões (II-2.3) e (II-2.5), apenas foi feita aqui uma distinção entre os parâmetros ϵ e ϵ_t , com o objetivo de tornar a análise mais geral. Substituindo deste modo a equação (IV-2.1) em (IV-1.5) juntamente com as equações (II-2.1a), (II-2.1b), (II-2.3) e (II-2.4) teremos,

$$\frac{\epsilon^{i+r} \epsilon_t^s \tilde{\epsilon}^j \hat{\epsilon}^k}{\Delta} \left(u_\theta \frac{\partial \hat{T}_\beta}{\partial x_\Delta} + v_\theta \frac{\partial \hat{T}_\beta}{\partial y_\eta} \right) = \epsilon \epsilon_t \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \theta_{vt}}{\partial y_\eta} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \theta_{ut}}{\partial x_\Delta} \right) + \epsilon^r \epsilon_t^s \hat{\epsilon}^{k+1} \left(\frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 \hat{T}_\beta}{\partial y_\eta^2} + \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial^2 \hat{T}_\beta}{\partial x_\Delta^2} \right). \quad (IV - 2.2)$$

onde $T_\beta(x, y) = \hat{T}_\beta(x_\Delta, y_\eta)$.

Para empregarmos o método da variável intermediária e assim determinarmos o comportamento assintótico da equação (IV-2.2), devemos primeiramente formular algumas hipóteses a respeito do problema. Pelo ao fato do fenômeno estudado se processar no regime turbulento as derivadas dos componentes do tensor de Reynolds não podem ser desprezadas em todas as regiões do escoamento. Este fato tem como consequência a seguinte relação

$$\Delta^{-1} \epsilon^{-2+i+2r} \epsilon_t^{2s-2} \tilde{\epsilon}^j \hat{\epsilon}^{1+2k} \leq 1, \quad (IV - 2.3)$$

onde $\epsilon^i \tilde{\epsilon}^j$ e $\epsilon^r \epsilon_t^s \hat{\epsilon}^k$, representam as ordens de grandeza da componente u da velocidade e da temperatura T , na região onde os termos convectivos são da mesma ordem de grandeza

dos termos de difusão turbulenta de calor. O parâmetro Δ , é o mesmo que aparece na equação (III-2.1a). Analogamente ao caso dinâmico, a desigualdade é estritamente válida na região longe da separação. Somente próximo ao ponto de descolamento, a igualdade torna-se importante.

De modo semelhante ao caso fluidodinâmico, a relação(III-2.3) representa duas das três possíveis relações que surgem como consequência da aplicação do método de Kaplun à equação(IV-2.2). A relação restante implica em que a camada limite térmica seja laminar, a qual não será estudada aqui.

Uma segunda hipótese a ser feita diz respeito à ordem de grandeza dos termos de difusão turbulenta. Assumiremos aqui, que esta não varia entre as duas regiões principais do escoamento a serem obtidos. Além disto, para fins da análise assintótica aqui efetuada, $O(\theta_{i,j}) = O(\epsilon\epsilon_t)$ de modo semelhante ao caso fluidodinâmico.

Uma vez formuladas as duas hipóteses acima, podemos agora variar o parâmetro η com o objetivo de obter as equações principais do problema em questão. Como estamos tratando neste caso com o problema longe da região de separação, a ordem de grandeza do parâmetro Δ fica sendo dada por $O(\Delta) = O(1)$. Sendo assim, para $O(\eta) = O(\epsilon^{1-i-r}\epsilon_t^{1-s}\tilde{\epsilon}^{-j}\hat{\epsilon}^{-k})$ temos que no limite com $\epsilon\epsilon_t \rightarrow 0$ a equação (IV-2.2) assume a forma:

$$u_\theta \frac{\partial \hat{T}_\beta}{\partial x_\Delta} + v_\theta \frac{\partial \hat{T}_\beta}{\partial y_\eta} = \frac{\partial \theta_{vt}}{\partial y_\eta}. \quad (IV - 2.4)$$

Aparece aqui uma marcante diferença entre o fenômeno fluidodinâmico e o fenômeno térmico. No caso fluidodinâmico o primeiro conjunto de equações principais surge para $O(\eta) = O(1)$, este fato se deve basicamente à equação da conservação da quantidade de movimento na direção de v , cuja forma para $O(\eta) = O(\epsilon^2)$ não se reduz aos termos de inércia para $O(\eta) = O(1)$. No caso do fenômeno térmico, temos que a equação da energia comporta-se de modo semelhante à equação da conservação da quantidade de movimento na direção de u ou seja, para $O(\eta) = O(1)$ a equação (IV-2.2) reduz-se aos termos convectivos os

quais estão contidos na equação (IV-2.4). Deste modo para $O(\eta) = O(\epsilon^{1-i-r} \epsilon_t^{1-s} \epsilon^{-j} \hat{\epsilon}^{-k})$ obtem-se uma equação "mais rica" que para $O(\eta) = O(1)$.

Os valores dos expoentes $i, r, s,$ e k podem ser obtidos a partir de uma analogia com o caso dinâmico. Observando o sistema (III-2.8), notamos que na região onde os termos convectivos possuem a mesma ordem de grandeza dos termos de difusão turbulenta, as ordens de grandeza das componentes da velocidade e de η são dadas por $0(u) = 0(1), 0(v) = 0(\frac{\eta u}{\Delta}) = 0(\eta)$ e $0(\eta) = 0(\epsilon^2)$. Isto nos sugere os seguintes valores para os expoentes acima citados, $i = 0, r = s = 0$ e $j = k = 0$. De fato, como a equação (IV-2.4) representa o balanço entre os termos convectivos e os termos de difusão turbulenta do calor somente, é natural que a ordem de grandeza de η nessa região deva ser independente de $\hat{\epsilon}$ e de $\tilde{\epsilon}$. Além disso, como a equação (IV-2.4) deve atender às condições de contorno longe da parede é de se esperar que $0(\hat{T}_\beta) = 0(1)$. Sendo assim, a ordem de grandeza do parâmetro η na região onde a equação (IV-2.4) é válida passa a ser dada por:

$$0(\eta) = 0(\epsilon \epsilon_t). \quad (IV - 2.5)$$

Um outro importante resultado da analogia feita acima, pode ser obtido, analisando-se suas consequências sobre a relação (IV-2.3). Substituindo os valores acima adotados para os expoentes i, r, s e k em (IV-2.3) teremos a seguinte relação:

$$\frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_t^2 \epsilon^2} < 1. \quad (IV - 2.6)$$

A qual é bem semelhante à sua versão para o caso dinâmico, dada pela equação (II-2.6) como já era de se esperar. Além disso, será mostrado posteriormente que quando $Pr = 1$, estas duas expressões são idênticas.

Continuando nossa análise, faremos agora $0(\eta) = 0(\epsilon^{r-i}\epsilon_t^{s-1}\tilde{\epsilon}^{k+1})$ onde o produto $\epsilon^r\epsilon_t^s\tilde{\epsilon}^k$ representa a ordem de grandeza da temperatura nessa região do problema. Deste modo, a equação (IV-2.2) pode ser simplificada, fornecendo a seguinte expressão:

$$\frac{\partial\theta_{vt}}{\partial y_\eta} + \frac{\partial^2\hat{T}_\beta}{\partial y_\eta^2} = 0. \quad (IV - 2.7)$$

A equação acima representa um balanço entre os termos de difusão turbulenta de calor e de condução térmica. Pode-se demonstrar utilizando-se a expressão (IV-2.3) que $0(\epsilon^{r-i}\epsilon_t^{s-1}\tilde{\epsilon}^{k+1}) < 0(\epsilon_t\epsilon)$, ou seja, o domínio de validade da equação (IV-2.7) encontra-se mais próximo à superfície sólida do que a região onde a equação (IV-2.4) é válida. Um outro importante resultado pode ser obtido integrando-se a expressão (IV-2.7). Fazendo isto, teremos

$$\theta_{vt} + \frac{\partial\hat{T}_\beta}{\partial y_\eta} = \frac{q_w}{\rho c_p t R u_R}. \quad (IV - 2.8)$$

Na equação acima q_w representa o fluxo de calor na parede. Analisando-se a expressão (IV-2.8), notamos que existe uma região do problema onde o fluxo de calor independe da variável y e, além disso, é igual ao fluxo de calor na parede. Este resultado será utilizado posteriormente na determinação da temperatura e do comprimento característicos da região interna.

As expressões (IV-2.4) e (IV-2.7) representam as equações principais do problema aqui tratado longe do ponto de descolamento, pois todas as informações necessárias para a determinação do perfil de temperatura em uma primeira ordem de aproximação estão contidas nelas. Resolvendo cada uma destas equações e posteriormente combinando-as, encontraríamos uma solução válida ao longo de toda a região longe do ponto de descolamento. Claramente, para que o procedimento acima descrito possa ser empregado, é necessário adotar um modelo

de turbulência para relacionar o perfil médio de temperatura com o termo de difusão turbulenta de calor. Este fato não impede contudo, que muitas informações importantes possam ser obtidas sem a utilização de um modelo de turbulência. Um exemplo disto, é o comprimento característico da região interna, o qual pode ser determinado através da utilização de argumentos de análise dimensional. Observando a região interna do problema, notamos que a ordem de grandeza de η onde a equação (IV-2.7) é válida, deve obrigatoriamente ser função do produto ρc_p , do coeficiente de difusividade térmica K , do fluxo de calor na parede q_w e da velocidade característica da região interna u_R . Deste modo, o comprimento característico L_{ct} fica sendo dado por

$$L_{ct} = \frac{K}{\rho c_p u_R}. \quad (IV - 2.9)$$

Como se pode notar, o fluxo de calor na parede não aparece explicitamente na expressão (IV-2.9). Deste modo, aparentemente, o comprimento característico da região interna, deve independe do parâmetro q_w . Esta hipótese contudo, não é verdadeira pois, devido a estreita relação existente entre o campo de velocidade e o campo de temperatura, o fluxo de calor na parede exerce sua influência sobre L_{ct} , através da velocidade u_R . Nessa região do problema u_R apresenta a mesma ordem de grandeza da velocidade de atrito u_τ (veja a equação (IV-2.14)), sendo portanto, função da tensão do cisalhamento na parede. Pode-se obter facilmente, utilizando-se o procedimento conhecido como analogia de Reynolds (Schlichting(1962)), uma relação entre o fluxo de calor na parede e a tensão cisalhante. Tal relação explicaria de que maneira a influência do parâmetro q_w sobre o comprimento característico da região interna L_{ct} se manifesta.

Introduzindo a viscosidade cinemática na equação (IV-2.9) e rescrevendo em uma forma adimensional, teremos,

$$\hat{L}_{ct} = \frac{1}{RePr \frac{u_\tau}{U_\infty}},$$

onde $\hat{L}_{ct} = L_{ct}/L$. Substituindo na equação acima, as definições de $\hat{\epsilon}$ e de ϵ , obtém-se a seguinte relação para a ordem de grandeza de L_{ct} ,

$$O(\hat{L}_{ct}) = O\left(\frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon}\right). \quad (IV - 2.10)$$

Uma vez conhecida a ordem de grandeza de \hat{L}_{ct} , podemos agora determinar a ordem de grandeza da temperatura T na região interna da camada limite térmica. Nesta região do problema sabemos que

$$O(\eta) = O(\hat{L}_{ct}) = O(\epsilon^{R-1} \epsilon_t^{s-1} \hat{\epsilon}^{k+1}). \quad (IV - 2.11)$$

Substituindo a equação (IV-2.10) em (IV-2.11) teremos,

$$O\left(\frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon}\right) = O(\epsilon^{r-1} \epsilon_t^{s-1} \hat{\epsilon}^{k+1}).$$

Igualando-se os expoentes de $\hat{\epsilon}$ e ϵ na expressão acima obtém-se $r = 0$, $k = 0$ e $s = 1$. Logo a ordem de grandeza de T na região interna é dada por,

$$O(T) = O(\epsilon_t). \quad (IV - 2.12)$$

Analogamente ao caso do problema fluidodinâmico, a ordem de grandeza da temperatura na região interna do problema é igual a ordem de grandeza das flutuações térmicas. Este fato nos sugere que a temperatura t_R deve ser utilizada na adimensionalização de T , nessa região. Com esse objetivo, devemos calcular o valor de t_R para algum ponto x_R onde $O(x_R - x_d) = O(1)$. A semelhança entre o problema térmico e o caso fluidodinâmico, continua na diferença existente entre as ordens de grandeza da temperatura na região média, onde $O(\eta) = O(\epsilon \epsilon_t)$, e na região interna onde $O(\eta) = O\left(\frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon}\right)$. Sendo assim, empregaremos aqui o mesmo procedimento utilizado no tratamento desta questão no caso fluidodinâmico. Deste modo, consideramos a

expansão assintótica dos termos presentes na equação (IV-2.4) até a segunda ordem, para obter as seguintes equações;

$$u_m = u_{0m} + \epsilon u_{1m},$$

$$v_m = \epsilon \epsilon_t (v_{0m} + \epsilon v_{1m}),$$

$$T_m = T_{0m} + \epsilon_t T_{1m},$$

$$\theta_m = \theta_{00} + \epsilon_t \theta_{10m} + \epsilon \theta_{01m}.$$

Onde os índices na expansão da temperatura representa o expoente de ϵ_t e na expansão do termo de difusão turbulenta, representa ϵ_t e ϵ respectivamente. O índice m denota, como no caso fluidodinâmico, a região média. Embora não saibamos até o momento a relação entre as ordens de grandeza dos parâmetros ϵ e ϵ_t , é natural assumir que correção da primeira ordem do perfil de temperatura deve ser devido às flutuações térmicas. Qualquer que seja a influência de ϵ sobre T esta, se existir, deve ser da forma ϵ^r onde $\epsilon_t > \epsilon^r$. No caso do termo turbulento, a expansão apresentada acima é a única forma consistente com a análise aqui apresentada como veremos posteriormente. Substituindo as expansões acima na equação (IV-2.4) teremos:

$$\epsilon_t^0 \longrightarrow$$

$$u_{0m} \frac{\partial T_{0m}}{\partial x} + v_{0m} \frac{\partial T_{0m}}{\partial y_\eta} = \frac{\partial \theta_{00m}}{\partial y_\eta}, \quad (IV - 2.13a)$$

$$\epsilon_t^1 \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \epsilon_t u_{0m} \frac{\partial T_{1m}}{\partial x_\Delta} + \epsilon_t v_{0m} \frac{\partial T_{1m}}{\partial y_\eta} &= \epsilon_t \frac{\partial \theta_{10m}}{\partial y_\eta} + \\ \epsilon u_{1m} \frac{\partial T_{0m}}{\partial x_\Delta} + \epsilon v_{0m} \frac{\partial T_{0m}}{\partial y_\eta} &+ \epsilon \frac{\partial \theta_{01m}}{\partial y_\eta}. \end{aligned} \quad (IV - 2.13b)$$

Na dedução da equação (IV-2.13b), foi considerado o caso onde $O(\epsilon) = O(\epsilon_t)$ por ser este de maior importância pois, é equivalente a assumir o número de Prandtl como tendo ordem de grandeza igual a 1, como veremos

posteriormente, representando assim o que acontece em fluidos como o ar e água. Nos demais casos onde $O(\epsilon) < O(\epsilon_t)$ ou $O(\epsilon) > O(\epsilon_t)$, a equação (IV-2.13b) sofreria algumas modificações não apresentando, por exemplo os três últimos termos do lado direito do sinal de igualdade. Estes termos fariam parte de uma equação da ordem de ϵ . Fazendo agora a combinação (matching), entre as soluções do sistema (IV-2.13) e da equação (IV-2.7) encontramos a seguinte relação:

$$T_{0m}(0, x) + \epsilon_t T_{1m}(y \frac{1}{\epsilon \epsilon_t}, x) = \epsilon_t T_{1i}(y \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon}, x),$$

ou ainda,

$$T_{0m}(0, x) = \epsilon_t (T_{1i}(y \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon}, x) - T_{1m}(y / \epsilon \epsilon_t, x)). \quad (IV - 2.14)$$

Na equação (IV-2.14), os índices i e m são relativos à regiões interna e média respectivamente, além disso, $T_{0m}(y / (\epsilon \epsilon_t), x)$ foi expandida em série de Taylor em torno de $y = 0$, e $T_{0m}(0, x)$ é o primeiro termo desta expansão. Novamente, devemos derivar a equação (IV-2.14) com relação a T , assim como no caso fluidodinâmico. Fazendo isto teremos:

$$T_{1i} - T_{1m} + \epsilon_t \left(y \cdot \left(\frac{d\epsilon}{d\epsilon_t} \cdot \frac{1}{\hat{\epsilon}} - \frac{d\hat{\epsilon}}{d\epsilon_t} \frac{\epsilon}{\hat{\epsilon}^2} \right) T'_{1i} + y \cdot \left(\frac{1}{\epsilon\epsilon_t^2} + \frac{d\epsilon}{d\epsilon_t} \frac{1}{\epsilon\epsilon_t^2} \right) T'_{1m} \right) = 0, \quad (IV - 2.15)$$

onde $T'_{100i} = \frac{\partial T_{100i}}{\partial y_{\hat{\epsilon}/\epsilon}}$, $T'_{100m} = \frac{\partial T_{100i}}{\partial y_{\epsilon\epsilon_t}}$, $y_{\hat{\epsilon}/\epsilon} = y \cdot \frac{\epsilon}{\hat{\epsilon}}$ e $y_{\epsilon\epsilon_t} = \frac{y}{\epsilon\epsilon_t}$. Derivando novamente a equação (IV-2.14), desta vez com relação a y obtém-se:

$$T'_{1i} \frac{\epsilon^2 \epsilon_t}{\hat{\epsilon}} = T'_{1m}. \quad (IV - 2.16)$$

Substituindo agora as equações (IV-2.14) e (IV-2.16) em (IV-2.15), temos que esta assume a forma:

$$-T_{0m}(0, x) = y_{\hat{\epsilon}/\epsilon} T'_{1i} \left(2 \frac{d\epsilon}{d\epsilon_t} \frac{\epsilon_t^2}{\epsilon} - \frac{d\hat{\epsilon}}{d\epsilon_t} \frac{\epsilon_t^2}{\hat{\epsilon}} + \epsilon_t \right). \quad (IV - 2.17)$$

Naturalmente, o termo de maior ordem dentro dos parênteses do lado esquerdo da expansão (IV-2.17), deve ser de ordem 1. A determinação de qual destes termos, apresenta esta ordem de grandeza, pode ser feita utilizando-se a equação (III-2.23), para obter uma relação entre $\hat{\epsilon}$ e ϵ , eliminando assim um desses parâmetros. Deste modo, teremos a seguinte equação como sendo válida:

$$\epsilon = \frac{-c_0}{\ln \hat{\epsilon} + \ln Pr}, \quad (IV - 2.18a)$$

ou ainda,

$$d\epsilon = \frac{c_0}{\hat{\epsilon}(\ln \hat{\epsilon} + \ln Pr)^2} \cdot d\hat{\epsilon} \quad (IV - 2.18b)$$

A substituição das equações (IV-2.18 a) e (IV-2.18 b), em (IV-2.17) fornece:

$$-T_{0m}(0, x) = y_{\hat{\epsilon}/\epsilon} T_{1\hat{i}}(\epsilon_t - 2 \frac{d\hat{\epsilon}}{d\epsilon_t} \frac{\epsilon_t^2}{\hat{\epsilon}(\ln \hat{\epsilon} + \ln Pr)} - \frac{d\hat{\epsilon}}{d\epsilon_t} \frac{\epsilon_t^2}{\hat{\epsilon}}). \quad (IV - 2.19)$$

Logo, no limite com $\hat{\epsilon} \rightarrow 0$, o termo de maior ordem entre parênteses é dado por $\frac{d\hat{\epsilon}}{d\epsilon_t} \frac{\epsilon_t^2}{\hat{\epsilon}}$. Este fato, somado a necessidade de o lado esquerdo da equação (IV-2.19) ser de ordem 1, tem como consequência a relação abaixo:

$$\frac{d\hat{\epsilon}}{d\epsilon_t} \frac{\epsilon_t^2}{\hat{\epsilon}} = c_1, \quad (IV - 2.20)$$

onde c_1 uma constante positiva de ordem 1. A solução de (IV-2.20) fornece:

$$\epsilon_t = -\frac{c_1}{\ln \hat{\epsilon}}. \quad (IV - 2.21)$$

A equação (IV-2.21) relaciona dois importantes parâmetros característicos do problema térmico. Utilizando esta equação e a expressão (II-2.23), podemos obter uma relação, entre as ordens de grandeza das flutuações de velocidade e de temperatura. Tal relação aparece escrita abaixo:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_t} = \frac{c_0}{c_1} \left(1 + \frac{\ln Pr}{\ln Re}\right). \quad (IV - 2.22)$$

Considerando as respectivas definições de ϵ e ϵ_t , e o fato de que longe da região de separação, a velocidade característica u_R , pode ser assumido com sendo igual à velocidade de fricção u_τ . Obtemos, a partir da equação (IV-2.22) e da relação $O(t_R) = O\left(\frac{q_w}{c_p u_R}\right)$ a seguinte expressão:

$$q_w(x) = c_p \frac{T_\infty - T_w}{U_\infty} \frac{c_1}{c_0} \frac{\tau_w(x)}{\left(1 + \frac{\ln Pr}{\ln Re}\right)}, \quad (IV - 2.23a)$$

ou ainda em uma forma adimensional:

$$S_t(x) = \frac{1}{2} \frac{c_1}{c_0} \frac{C_f(x)}{\left(1 + \frac{\ln Pr}{\ln Re}\right)}. \quad (IV - 2.23b)$$

Onde S_t representa o número de Stanton o qual é dado por $S_t = \frac{q_w}{\rho c_p (T_\infty - T_w) U_\infty}$. A relação entre o fluxo de calor na parede, e a tensão de cisalhamento, representada pelas equações (IV-2.23 a, b), é conhecida como analogia de Reynolds (Schlichting (1962)). Como se pode notar as equações (IV-2.23 a, b) foram obtidas sem a utilização de um modelo de turbulência, sendo portanto, uma consequência direta da estrutura assintótica do problema. Uma vez conhecida a equação (IV-2.20), podemos rescrever a expansão (IV-2.19), em uma primeira ordem de aproximação, da forma:

$$T_0(0, x) = y_{\hat{\epsilon}/\epsilon} T'_{1i} c_1, \quad (IV - 2.24)$$

cuja solução é dada por:

$$T_{1i} = \frac{T_0(0, x)}{c_1} \ln y_{\hat{\epsilon}/\epsilon} + g_t(x). \quad (IV - 2.25)$$

Essa equação é a versão térmica da conhecida lei logarítmica, característica dos escoamentos da camada limite turbulenta. No problema aqui tratado a equação (IV-1.25) foi obtida como consequência da análise assintótica efetuada, independentemente portanto, do modelo de turbulência a ser empregado no fechamento da equação (IV-1.5). A análise feita até aqui mostrou que, longe do ponto de descolamento, o problema térmico apresenta duas escalas

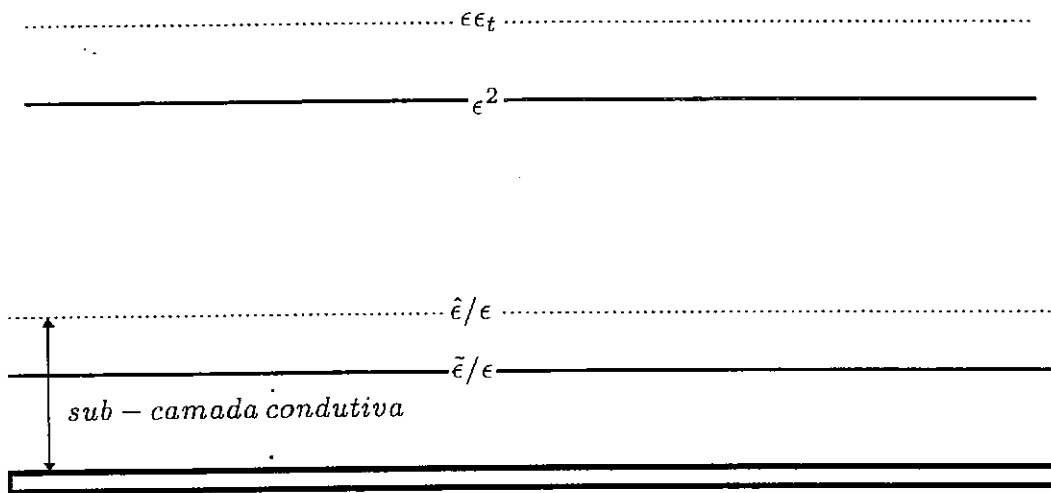


Figura IV-1 : Estrutura assintótica térmica longe da região de separação $Pr < 1$. ___ caso térmico ____ caso fluidodinâmico.

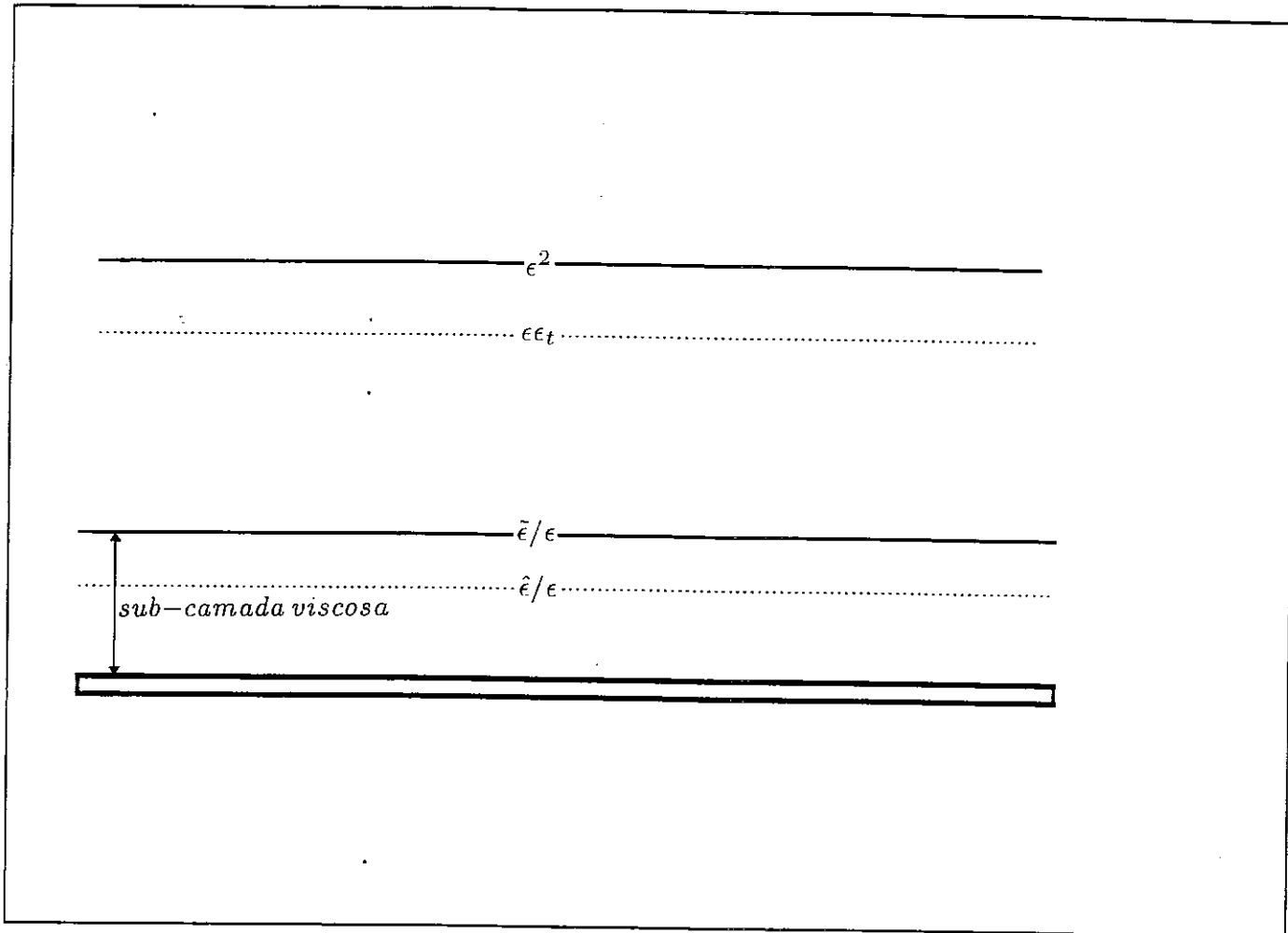


Figura IV-2 : Estrutura assintótica térmica longe da região de separação $Pr > 1$. ___ caso térmico ____ caso fluidodinâmico.

principais, cujas ordens de grandeza dependem não apenas do número de Reynolds, como no caso fluidodinâmico, mas também do número de Prandtl. Este resultado tem como consequência o fato de, para $O(Pr) \neq O(1)$, as estruturas assintóticas destes dois problemas não serem coincidentes. Este fenômeno aparece retratado nas figuras IV-1 e IV-2

4.2.2 ANÁLISE NA REGIÃO DE SEPARAÇÃO

Devido a relação existente entre o caso térmico, e o caso fluidodinâmico, devemos começar nossa análise, considerando algumas propriedades do escoamento turbulento, na região de separação. Como foi mostrado no capítulo anterior, a região onde a componente u da velocidade apresenta um comportamento logarítmico, desaparece próximo ao ponto de descolamento, devido a fusão das duas escalas principais próximas a parede. Fisicamente, isto significa que a região onde o transporte de quantidade de movimento é feito pela ação dos termos de difusão turbulenta, desaparece quando a tensão da parede tende a zero. O fenômeno acima descrito, somado ao fato das flutuações turbulentas, dependerem do problema fluidodinâmico nos sugere que, na região de separação, as duas escalas principais do problema térmico também devem se fundir devido ao desaparecimento da região, onde os termos de difusão turbulenta são os principais responsáveis pelo transporte de calor. O mesmo resultado pode ser obtido, considerando-se o acoplamento (matching), entre as duas supostas equações principais, existentes na região de separação, como mostraremos a seguir.

Como primeiro passo de nossa análise, devemos determinar qual a ordem de grandeza da região de separação no caso térmico. Esta informação pode ser obtida fazendo-se variar o parâmetro Δ e observando-se o comportamento das duas regiões principais existentes no escoamento longe do ponto de descolamento. Aplicaremos este procedimento na chamada região interna. Essa região apresenta as seguintes características, $O(u) = O(\epsilon)$, $O(\eta) =$

$O(\hat{\epsilon}/\epsilon)$ e $O(T) = O(\epsilon_t)$, além do fato da ordem de grandeza dos termos de difusão viscosa e turbulenta serem iguais. Sendo assim, para $O(\Delta) = O(\frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon})$ os termos de difusão de calor na direção de x tornam-se importantes. Deste modo, $O(\Delta) = O(\hat{\epsilon}/\epsilon)$ surge como um candidato a escala característica da região de separação. O mesmo procedimento aplicado a região média, onde a ordem de grandeza dos termos convectivos é igual a ordem de grandeza dos termos de difusão turbulenta na direção de y e onde $O(\eta) = O(\epsilon^2)$ resulta em que para $O(\Delta) = O(\epsilon\epsilon_t)$ os termos de difusão turbulenta na direção de x também tornam-se importantes, deste modo $\epsilon\epsilon_t$ também aparece como uma possível escala característica.

Como apenas uma das escalas acima obtidas ($\hat{\epsilon}/\epsilon$ e $\epsilon\epsilon_t$) pode ser considerada como escala característica do problema térmico na região de separação, e como esta escala deve ser igualmente válida em ambas as regiões do problema acima mencionado (região interna e região média), então para podermos determinar qual destas escalas é a verdadeira, devemos primeiramente encontrar quais as condições necessárias para que $O(\Delta) = O(\frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon})$ torne os termos difusivos na direção x importantes na região média e, analogamente $O(\Delta) = O(\frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon})$ torne os termos difusivos na direção x relevantes na região interna. A condição necessária em ambos os casos é a mesma, a qual pode ser vista abaixo:

$$\frac{\epsilon^2 \epsilon_t}{\hat{\epsilon}} = 1, \quad (IV - 2.26a)$$

ou ainda

$$\epsilon\epsilon_t = \frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon}.$$

Ou seja, as duas escalas que aparece em nossa análise são na verdade uma única escala. Utilizando agora as relações entre $\tilde{\epsilon}$, $\hat{\epsilon}$ e ϵ dadas por $\hat{\epsilon} = \tilde{\epsilon}/Pr$, $\tilde{\epsilon} = \epsilon^3$ válidas próximo ao ponto de descolamento, podemos rescrever a equação (IV-2.26a) da seguinte forma:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_t} = Pr. \quad (IV - 2.26b)$$

Ou seja, na região de separação, as ordens de grandeza das flutuações térmicas e de velocidade, estão relacionadas unicamente através do número de Prandtl, não sofrendo influência portanto, do número de Reynolds, como no caso longe da separação.

Uma consequência direta das equações (IV-2.26 a, b) é a fusão das duas escalas obtidas longe da região de separação. Sendo assim, existe apenas uma equação principal, próximo ao ponto de descolamento, a qual pode ser vista abaixo:

$$u_\theta \frac{\partial \hat{T}_\beta}{\partial x_\Delta} + v_\theta \frac{\partial \hat{T}_\beta}{\partial y_\eta} = \frac{\partial \theta_{tv}}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \theta_{tu}}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial^2 \hat{T}_\beta}{\partial y_\eta^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}_\beta}{\partial x_\Delta^2}. \quad (IV - 2.27)$$

Analisando a equação (IV-2.27), notamos que quando a tensão cizalhante na parede tende a zero, nenhuma simplificação pode ser feita na equação da energia. Este resultado já era esperado devido ao fato de, na região de separação, as derivadas com relação a x tornarem-se importantes, invalidando assim, a principal hipótese empregada nas simplificações da camada limite.

4.3 A ESTRUTURA ASSINTÓTICA TÉRMICA

Neste capítulo, a estrutura assintótica da equação da energia na sua forma bidimensional, incompressível e turbulenta é analisada, empregando-se os conceitos desenvolvidos por Kaplun (1967), além do método das expansões assintóticas combinadas, e de argumentos de análise dimensional. Mostra-se que, longe do ponto de descolamento, a equação original pode

ser dividida em duas equações mais simples, cujas soluções depois de combinadas, representam a solução geral do problema. A consequência da divisão da equação original, em outras mais simples, válidas em determinados domínios, pode ser vista abaixo:

$$O(\eta) = O(1) : u_{\theta} \frac{\partial \hat{T}_{\beta}}{\partial x_{\Delta}} + v_{\theta} \frac{\partial \hat{T}_{\beta}}{\partial y_{\eta}} = 0, \quad (IV - 3.1a)$$

$$O(\epsilon\epsilon_t) < O(\eta) < O(1) : u_{\theta} \frac{\partial \hat{T}_{\beta}}{\partial x_{\Delta}} + v_{\theta} \frac{\partial \hat{T}_{\beta}}{\partial y_{\eta}} = 0, \quad (IV - 3.1b)$$

$$O(\eta) = O(\epsilon\epsilon_t) : u_{\theta} \frac{\partial \hat{T}_{\beta}}{\partial x_{\Delta}} + v_{\theta} \frac{\partial \hat{T}_{\beta}}{\partial y_{\eta}} = \frac{\partial \theta_{tv}}{\partial y_{\eta}}, \quad (IV - 3.1c)$$

$$O(\hat{\epsilon}/\epsilon) < O(\eta) < O(\epsilon\epsilon_t) : \frac{\partial \theta_{tv}}{\partial y_{\eta}} = 0, \quad (IV - 3.1d)$$

$$O(\eta) = O(\hat{\epsilon}/\epsilon) : \frac{\partial \theta_{tv}}{\partial y_{\eta}} + \frac{\partial^2 \hat{T}_{\beta}}{\partial y_{\eta}^2} = 0, \quad (IV - 3.1e)$$

$$O(\eta) < O(\hat{\epsilon}/\epsilon) : \frac{\partial^2 \hat{T}_{\beta}}{\partial y_{\eta}^2} = 0. \quad (IV - 3.1f)$$

Como vemos, as escalas principais presentes no conjunto de equações (IV-3.1), não foram obtidas unicamente, através do método da variável intermediária. Isto se deve basicamente, à não utilização de um modelo de turbulência para o fechamento da equação, além da não linearidade presente no problema. Esta dificuldade é portanto intrínseca ao problema aqui tratado.

Observando as equações acima notamos que a região de acoplamento entre as duas equações principais (IV-3.1 c) e (IV-3.1 e), é dada pelo domínio de validade da expressão (IV-3.1 d). Portanto a região onde a temperatura tem um comportamento logarítmico é a mesma na qual os termos de difusão turbulenta são as principais responsáveis pelo transporte de calor, como já havia sido mencionado.

Um importante resultado obtido na análise longe do ponto de descolamento, foi a relação entre as ordens de grandeza, das flutuações de temperatura e de velocidade, dada pela equação (IV-2.22). Esta equação tem como consequência, o fato de as flutuações térmica e fluidodinâmica, somente serem de mesma ordem, quando a ordem de grandeza do número de Prandtl for igual a um. Caso este, verificado experimentalmente e por Orlando et al (1974). Sendo assim, embora a difusão molecular seja muito pequena quando comparada com a difusão causada pelas flutuações de velocidade e de temperatura, o transporte turbulento depende, pelo menos indiretamente, dos coeficientes de difusão molecular α e ν , onde $\alpha = K/\rho c_p$.

Uma outra consequência da equação (IV-2.22) é dada pela analogia de Reynolds, descrita pela expressão (IV-2.23 b). Esta expressão embora tenha sido obtida utilizando apenas argumentos de análise assintótica, é bem semelhante a relação proposta por Van Driest (Schlichting (1962)). Este fato nos sugere, que a expressão (IV- 2.23 b) pode fornecer bons resultados quantitativos, para o uso em engenharia, uma vez conhecidos os valores adequados, das constantes c_0 e c_1 .

No caso do escoamento na região de separação, a estrutura apresentada pelo conjunto de equações (IV-3.1) deixa de ser válida. Isto ocorre devido ao fato de que próximo ao ponto de descolamento, a região onde o transporte de calor é feito principalmente pelas flutuações turbulentas desaparece. Deste modo as duas equações principais presentes no fenômeno longe da separação (IV-3.1 c) e (IV-3.1 e), fundem-se em apenas uma equação principal, na qual a difusão de calor na direção de x também é considerada. A estrutura assintótica do problema na região de separação é dada pela seguintes equações:

$$O(\eta) > O(\epsilon\epsilon_t) : u_\theta \frac{\partial \hat{T}_\beta}{\partial x_\Delta} + v_\theta \frac{\partial \hat{T}_\beta}{\partial y_\eta} = 0, \quad (IV - 3.2a)$$

$$O(\eta) = O(\epsilon\epsilon_t) : u_\theta \frac{\partial \hat{T}_\beta}{\partial x_\Delta} + v_\theta \frac{\partial \hat{T}_\beta}{\partial y_\eta} = \frac{\partial \theta_{tv}}{\partial y_\eta} + \frac{\partial \theta_{tu}}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial^2 \hat{T}_\beta}{\partial y_\eta^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}_\beta}{\partial x_\Delta^2}, \quad (IV - 3.2b)$$

$$O(\eta) < O(\epsilon\epsilon_t) : \frac{\partial^2 \hat{T}_\beta}{\partial y_\eta^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}_\beta}{\partial x_\Delta^2} = 0. \quad (IV - 3.2c)$$

Um importante fato a ser ressaltado, é a diferença existente entre as ordens de grandeza das flutuações de temperatura e de velocidade, longe e próximo ao ponto de descolamento. Na região de separação as flutuações térmicas e fluidodinâmicas, estão relacionadas unicamente através do número de Prandtl. Além disto, quando a tensão na parede tende a zero, o fluxo de calor em $y = 0$ embora diminua, não se anula sugerindo assim a não existencia de uma analogia de Reynolds, válida até o ponto de descolamento. A estrutura assintótica da equação (IV-1.5) pode ser vista graficamente abaixo. Os casos limite nos quais $Pr \geq 1$ ou $Pr \leq 1$ são comparados com o fenômeno fluidodinâmico.

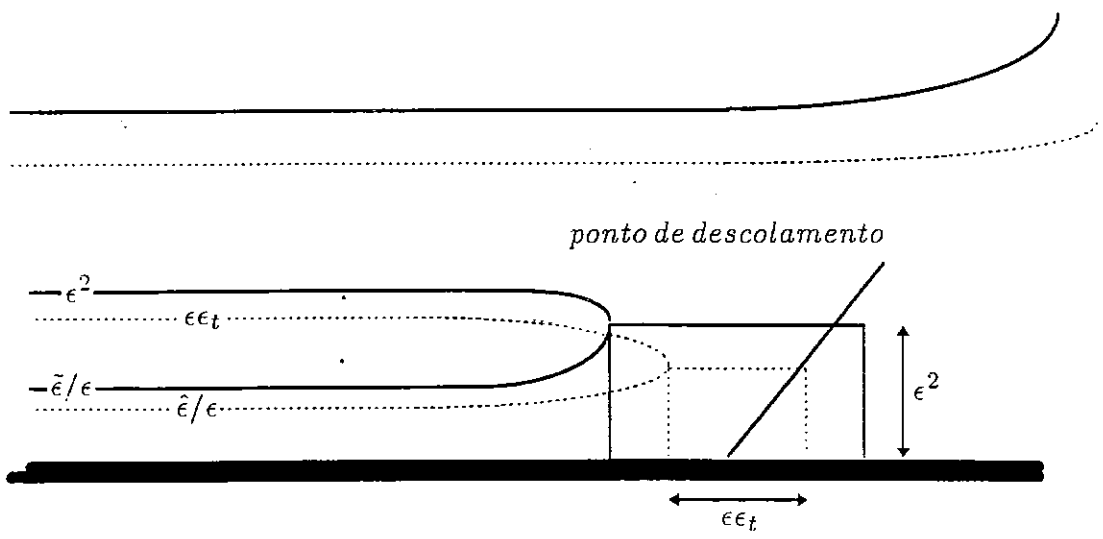


Figura IV-3 : Estrutura assintótica térmica na região de separação $Pr > 1$. _ _ _ caso térmico _ _ _ caso fluidodinâmico.

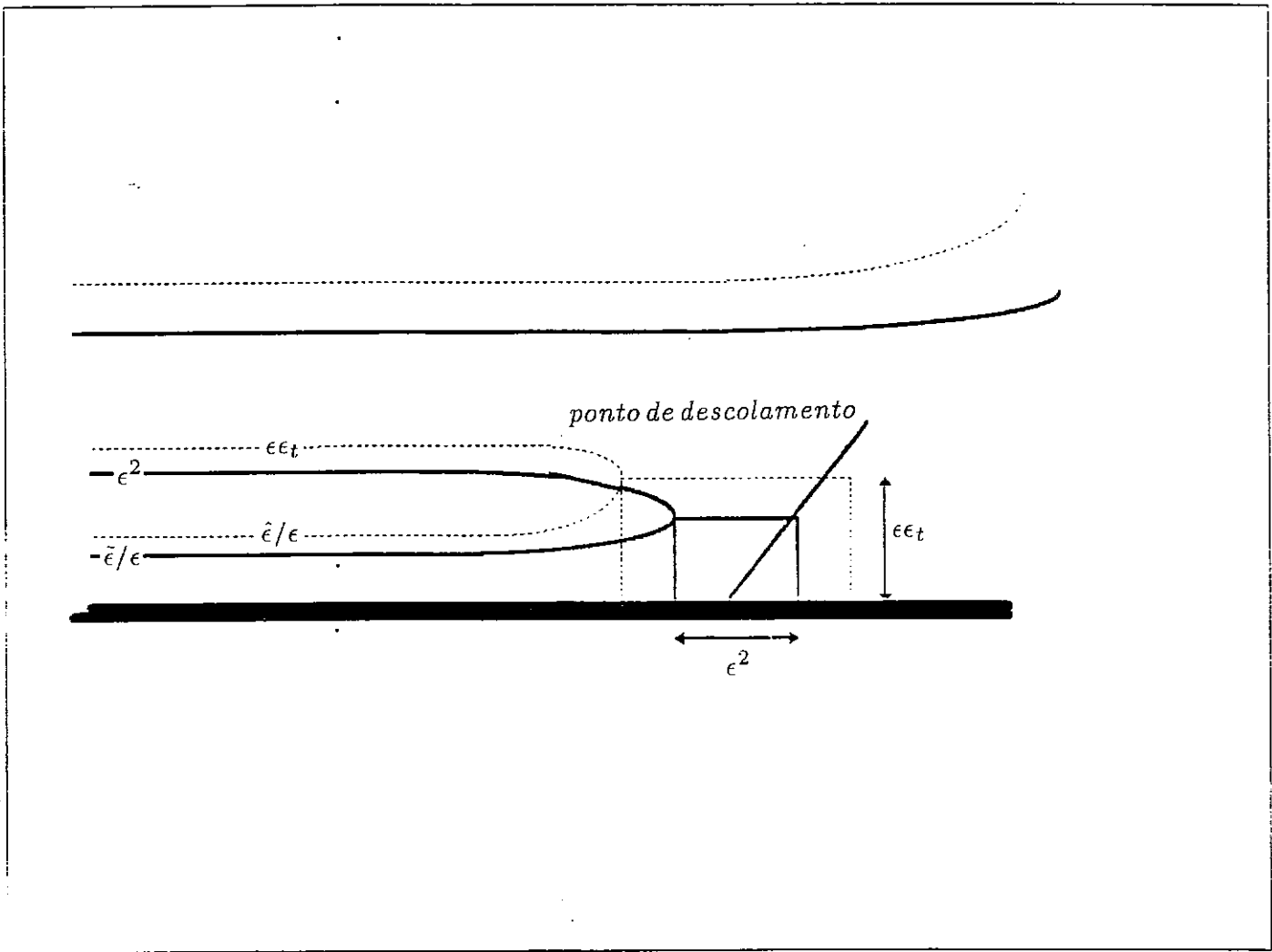


Figura IV-4 : Estrutura assintótica térmica na região de separação $Pr < 1$. ___ caso térmico ____ caso fluidodinâmico.

CAPÍTULO V

AS LEIS DA PAREDE

Nos capítulos anteriores foi demonstrada a existência de uma região, próxima à parede, onde os perfis da velocidade e da temperatura apresentam um comportamento logarítmico. Este comportamento contudo, está restrito ao escoamento longe do ponto de descolamento, limitando assim, a aplicação deste conhecimento. Com o objetivo de contornar essa dificuldade, deduzimos neste capítulo, expressões para as leis da parede térmicas e fluidodinâmica, válidas ao longo de todo o escoamento.

Tais expressões serão obtidas através de argumentos de análise dimensional, sem a utilização de um modelo de turbulência. Um novo comprimento e uma nova velocidade características do problema, válidos inclusive na região separada, também serão propostos.

Comparações dos resultados aqui apresentados, com os experimentos de Simpson et al(1981) e Thompson e Whitelaw (1985) demonstram uma boa concordância.

5.1 LEI DA PAREDE FLUIDODINÂMICA

Seja o gradiente da componente u da velocidade, na direção normal à parede dado por $\partial u/\partial y$. A existência desse gradiente, próximo à parede, está relacionado à presença de um fluxo de quantidade de movimento, representado pela tensão cizalhante τ , entre as camadas de fluido. Deste modo, supondo que fora da subcamada viscosa, o gradiente da velocidade não deve depender explicitamente, da viscosidade molecular ν , temos a seguinte expressão

como sendo válida:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f[y, \rho, \tau], \quad (V - 1.1)$$

onde y é a distância até a parede, ρ a massa específica do fluido e τ é a tensão cisalhante. Outros autores utilizando a análise dimensional chegaram a expressões semelhantes à equação (V-1.1). Dentre eles podemos citar Gersten (1988), Landau e Lifshitz (1987) e Kader e Yaglon (1978). Observando a equação (V-1.1), notamos que a única combinação dos parâmetros τ , ρ , e y cuja dimensão é a mesma do gradiente de velocidade, é dada por $\sqrt{|\tau/\rho|}/y$. Deste modo teremos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \pm \frac{1}{k} \frac{\sqrt{|\tau/\rho|}}{y}, \quad (V - 1.2)$$

onde k é a constante de Von Kármán, e o sinal a ser adotado é o mesmo apresentado pela tensão τ . Para podermos resolver a equação (V-1.2), é necessário primeiramente determinar o comportamento da tensão de cisalhamento τ , com relação a variável y . Uma boa aproximação desse comportamento pode ser obtida expandindo-se a função $\tau(y)$ em série de Taylor em torno do ponto $y = 0$. Fazendo isto, obtém-se:

$$\tau = \tau_w + \frac{dP_w}{dx} y + O(y^2). \quad (V - 1.3)$$

Onde τ_w e P_w são respectivamente os valores da tensão de cisalhamento e da pressão da parede. Devido ao fato da análise feita aqui restringir-se a uma região muito próxima à parede, apenas os dois primeiros termos da expressão (V-1.3) serão consideradas. Substituindo-se a equação (V-1.3) em (V-1.2) temos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \pm \frac{1}{k} \frac{\sqrt{|\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y|}}{y}. \quad (V - 1.4)$$

A integração da equação (V-1.4) fornece três funções diferentes dependendo da relação entre $\frac{\tau_w}{\rho}$ e $\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y$. Tais funções são apresentadas abaixo:

caso 1, $\frac{\tau_w}{\rho} \geq 0 \rightarrow$

$$u = \frac{2}{k} \sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{k} \ln \frac{\sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} - \sqrt{\tau_w/\rho}}{\sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \sqrt{\tau_w/\rho}} + C_1(x) \quad (V - 1.5a)$$

caso 2, $\frac{\tau_w}{\rho} \leq 0$ e $|\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y| \geq |\tau_w/\rho| \rightarrow$

$$u = \frac{2}{k} \sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \frac{\tau_w/\rho}{\sqrt{-\tau_w/\rho}} \frac{2}{k} \arctan \sqrt{\frac{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y}{-\tau_w/\rho}} + C_2(x) \quad (V - 1.5b)$$

caso 3, $\frac{\tau_w}{\rho} \leq 0$ e $|\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y| \leq |\tau_w/\rho| \rightarrow$

$$u = -\frac{2}{k} \sqrt{-\tau_w/\rho - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} - \frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{k} \ln \left| \frac{\sqrt{-\tau_w/\rho - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} - \sqrt{-\tau_w/\rho}}{\sqrt{-\tau_w/\rho - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \sqrt{-\tau_w/\rho}} \right| + C_3(x) \quad (V-1.5c)$$

As equações (V-1.5), representam uma generalização da chamada lei da parede. Cada equação descreve o comportamento da componente u da velocidade, próximo da parede, sob determinadas condições. No primeiro caso, a equação (V-1.5) representa o comportamento da lei da parede na região à jusante do ponto de descolamento. Como se pode notar, esta equação se reduz à lei logarítmica clássica, quando a relação $|\tau_w/\rho| \gg |\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y|$ for válida. Quando a tensão na parede se anula, temos que o perfil de velocidade se torna proporcional a \sqrt{y} , como foi mostrado anteriormente por Stratford (1959). No segundo caso, a equação (V-1.5 b) pode ser considerada como sendo uma transição, entre as forma da lei da parede válidos a montante do ponto do descolamento (caso 1), e na região de escoamento reverso (caso 3). Finalmente no terceiro caso, temos a equação (V-1.5 c) como sendo responsável pela descrição do fenômeno, na região onde u é negativa. Analogamente ao que acontece no caso 1, a equação (V-1.5 c) também apresenta um comportamento logarítmico, quando a relação $|\tau_w/\rho| \gg |\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y|$ for verdadeira. Neste caso contudo, o sinal negativo na frente do termo logarítmico, indica que o escoamento acontece na direção contrária ao descrito no primeiro caso, como já se poderia esperar. Uma representação mais detalhada dos domínios de validade das equações (V-1.5), pode ser observada na figura V-1.

Muitos trabalhos experimentais atestam a presença de uma "lei logarítmica" na região do escoamento reverso (Simpson et al (1981), Thompson e Whitelaw (1985)). Esta é a primeira vez, contudo, que dentro do conhecimento deste autor, é feita uma dedução analítica deste comportamento.

Uma vez obtidas as equações (V-1.5), surge uma importante questão: quais seriam as variáveis de similaridade adequadas, para descrever o fenômeno do escoamento próximo à

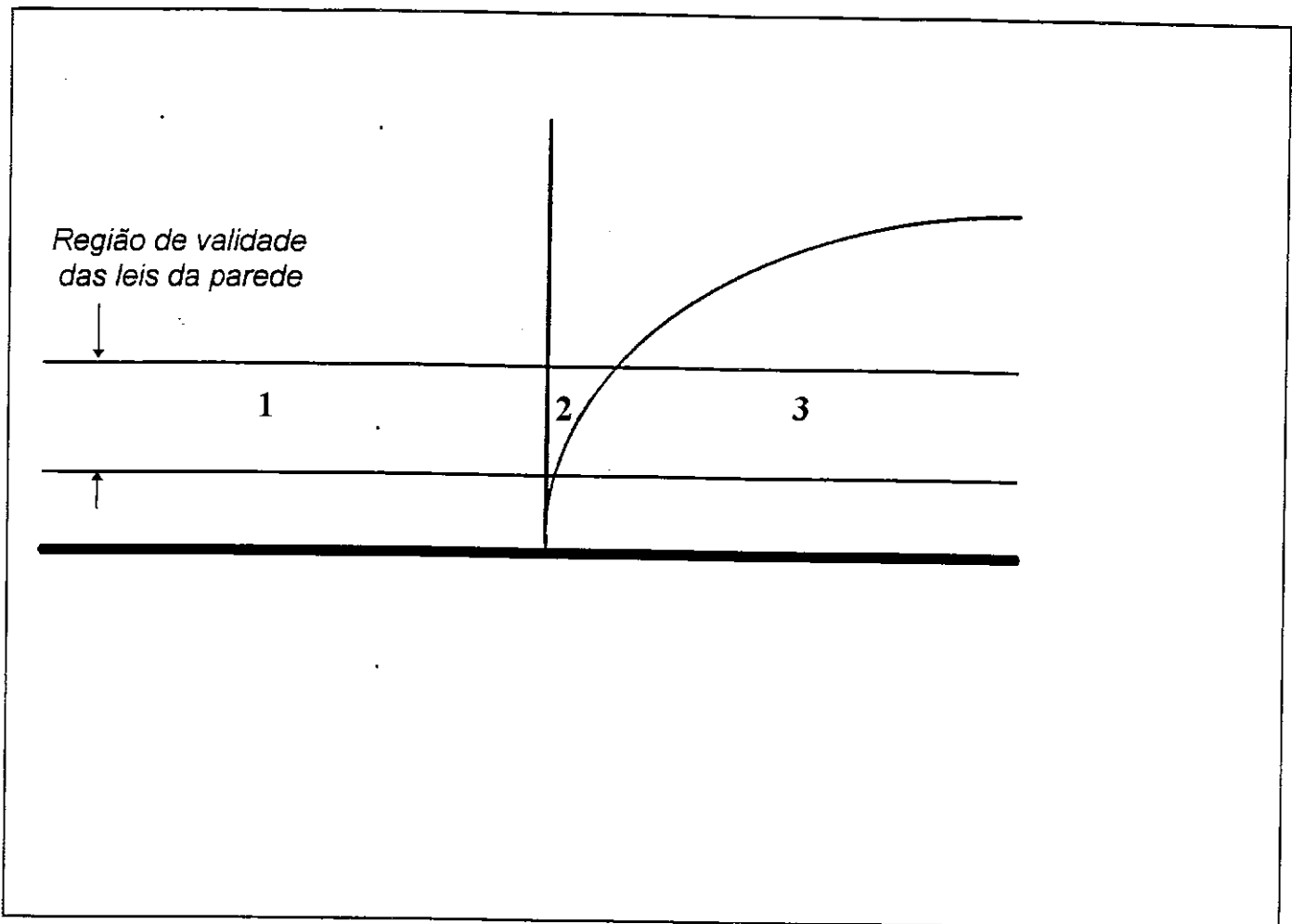


Figura V-1 : Domínios de validade das equações (V-1.5)

parede? A obtenção dessas variáveis não constitui uma tarefa simples, pois qualquer tentativa de determiná-las rigorosamente, empregando-se as equações de Reynolds, implicaria na utilização de um modelo adequado de turbulência. Além disso, os dados experimentais disponíveis no momento não são conclusivos sobre quais variáveis de similaridade são apropriadas ao escoamento separado (a jusante do ponto de descolamento).

Observando-se a equação (V-1.5 c) concluímos que longe do ponto de descolamento onde $|\tau_w/\rho| \gg \left| \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y \right|$, esta equação assume a seguinte forma:

$$u = -\frac{2}{k} \sqrt{-\tau_w/\rho} - \frac{\sqrt{-\tau_w/\rho}}{k} \ln \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} \left(\frac{-\rho}{\tau_w} \right) \frac{y}{4} + C_3(x).$$

A expressão acima sugere a utilização de $\sqrt{-\tau_w/\rho}$ como sendo a velocidade característica da região interna do escoamento, a jusante do ponto de descolamento. Tal velocidade pode ser portanto empregada na adimensionalização de u nessa região. No caso do comprimento característico da região interna, podemos determinar a sua ordem de grandeza através do seguinte procedimento: Seja o escoamento na camada viscosa o qual é descrito pela equação abaixo:

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} = 0. \quad (V - 1.6)$$

Resolvendo a equação acima e aplicando as condições de contorno na parede, teremos:

$$u = \frac{\tau_w}{\nu\rho}y + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} \frac{y^2}{2\nu}. \quad (V - 1.7)$$

Considerando agora, como no caso do escoamento a montante do ponto de descolamento, que os parâmetros de adimensionalização aplicáveis na subcamada viscosa são válidas em toda a região interna, podemos adimensionalizar a equação (V-1.7) da seguinte maneira:

$$u^*u_\tau = \frac{\tau_w}{\nu\rho}L_c y^* + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} \frac{L_c^2}{2\nu} y^{*2}. \quad (V - 1.8)$$

Onde $u^* = u/u_\tau$, $y^* = y/L_c$, $u_\tau = \sqrt{|\tau_w/\rho|}$ e L_c é o comprimento característico procurado. Assumindo ainda que, nessa região, $0(u^*) = 0(y^*) = 0(1)$, podemos resolver a equação (V-1.8) para L_c obtendo:

$$L_c = \frac{\frac{-\tau_w}{\rho} \pm \left| \frac{\tau_w}{\rho} \right| \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\tau_w} \right)^2 \nu \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} 2u_\tau}}{\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx}}. \quad (V - 1.9a)$$

Nos casos em que o gradiente de pressão for nulo o parâmetro L_c reduz-se ao caso clássico ou seja, ν/u_τ .

Fazendo o limite quando $\nu \rightarrow 0$ podemos rescrever a equação (V-1.9a) da seguinte forma:

$$L_c = \frac{\frac{-\tau_w}{\rho} \pm \left| \frac{\tau_w}{\rho} \right| \left(1 + \left(\frac{\rho}{\tau_w} \right)^2 \nu \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} u_\tau + \dots \right)}{\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx}}. \quad (V - 1.9b)$$

Devido ao fato de que L_c deve ser positivo, desprezaremos o sinal negativo na equação (V-1.9 b). Deste modo, desconsiderando os termos de ordem superior, o valor de L_c fica dado por:

$$L_c = 2 \left| \frac{\tau_w}{\rho} \right| / \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx}. \quad (V - 1.10)$$

O procedimento acima descrito também é aplicável, a montante do ponto de descolamento onde $\tau_w/\rho > 0$. Nesse caso, a equação (V-1.9 b) fornece o seguinte resultado conhecido:

$$L_c = \frac{\nu}{u_\tau}. \quad (V - 1.11)$$

Como se pode notar, o comportamento limite de L_c , válido na região de escoamento reverso, é bastante diferente do valor clássico encontrado a montante do ponto de descolamento ($L_c = \frac{\nu}{u_\tau}$). Uma das principais diferenças está no fato de que o comprimento característico da parede na região separada, depende diretamente do gradiente de pressão $\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx}$. O mesmo como se sabe, não ocorre no escoamento a montante da região de separação, onde a influência

do gradiente de pressão se manifesta, de maneira indireta, através da tensão cisalhante na parede τ_w . A forte influência do gradiente de pressão, na estrutura de escoamento na região onde $\tau_w < 0$, já era esperada, pois a própria existência dessa região, está vinculada à presença de um gradiente de pressão adverso.

Os trabalhos experimentais de Simpson et al (1981) e Thompson e Whitelaw (1985) demonstram que o comprimento característico clássico da região da parede ($\frac{\nu}{u_\tau}$) não é adequado para descrever o fenômeno na região de escoamento reverso. Além disso, segundo Simpson et al (1981), qualquer que seja o valor de L_c na região separada, este não pode variar inversamente com a tensão de cisalhamento na parede τ_w , como ocorre no caso clássico. Ou seja, o comportamento de L_c descrito pela equação (V-1.10), está de acordo com os experimentos realizados sobre o fenômeno .

5.2 LEI DA PAREDE TÉRMICA

Analogamente ao caso fluidodinâmico, começaremos nossa análise estudando o comportamento do gradiente de temperatura, na direção normal à parede, o qual é dado por $\frac{\partial T}{\partial y}$. Considerando a semelhança existente entre os fluxos de calor e de quantidade de movimento, além do fato de que fora da subcamada condutiva, o gradiente de temperatura não deve depender explicitamente da condutividade térmica (κ), temos a seguinte relação como sendo válida:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = g[y, \rho, C_p, q_w, \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|], \quad (V - 2.1)$$

onde $T = \tilde{T} - \tilde{T}_w$, \tilde{T} e \tilde{T}_w representam as temperaturas do fluido e da parede respectivamente, ρ representa a massa específica do fluido, c_p o calor específico a pressão constante, q_w é o fluxo de calor através da parede e $|\frac{\partial u}{\partial y}|$ o gradiente de velocidade na direção de y . Assumindo agora que o gradiente de temperatura deve depender diretamente da primeira potência do fluxo de calor na parede (q_w), então a única combinação dos parâmetros acima cuja dimensão é a mesma de $\frac{\partial T}{\partial y}$, é dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{q_w}{\rho c_p} \frac{1}{(y^2 |\frac{\partial u}{\partial y}|)}, \quad (V - 2.2)$$

onde a é uma constante. Substituindo agora a expressão (V-1.4) em (V-2.2) teremos:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = a k \frac{q_w}{\rho c_p} \frac{1}{y \sqrt{|\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y|}} \quad (V - 2.3)$$

Integrando-se a equação (V-2.3) obtém-se um conjunto de três funções, cada uma válida em uma determinada região de escoamento. Estas funções com seus respectivos domínios de validade são mostradas abaixo:

caso 1, $\frac{\tau_w}{\rho} \geq 0 \rightarrow$

$$T = \frac{1}{k_t} \frac{q_w}{\rho c_p} \frac{1}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} \ln \frac{\sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} - \sqrt{\tau_w/\rho}}{\sqrt{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \sqrt{\tau_w/\rho}} + Ct_1(x, P_r) \quad (V - 2.4a)$$

caso 2, $\frac{\tau_w}{\rho} \leq 0$ e $|\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y| \geq |\tau_w/\rho| \rightarrow$

$$T = \frac{1}{k_t} \frac{q_w}{\rho c_p} \frac{2}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} \arctan \sqrt{\frac{\tau_w/\rho + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y}{-\tau_w/\rho}} + Ct_2(x, P_r) \quad (V - 2.4b)$$

caso 3, $\frac{\tau_w}{\rho} \leq 0$ e $|\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y| \leq |\tau_w/\rho| \rightarrow$

$$T = \frac{1}{k_t} \frac{q_w}{\rho c_p} \frac{2}{\sqrt{\frac{-\tau_w}{\rho}}} \ln \left| \frac{\sqrt{-\tau_w/\rho - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} - \sqrt{-\tau_w/\rho}}{\sqrt{-\tau_w/\rho - \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \sqrt{-\tau_w/\rho}} \right| + Ct_3(x, P_r), \quad (V - 2.4c)$$

onde $k_t = \frac{1}{k a}$. As equações (V-2.4) descrevem o comportamento do perfil de temperatura na região próxima à parede, ao longo de todo escoamento. Uma análise do comportamento dessas equações pode ser feita, de modo a verificar sua consistência, em alguns casos limites. Observando a equação (V-2.4a) notamos que esta, representa o comportamento da lei da parede térmica na região a jusante do ponto de descolamento. Deste modo, esta equação deve reduzir-se à forma logarítmica quando $|\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y| \ll |\tau_w/\rho|$. Como se deve notar, isto de fato acontece. No caso da região de separação quando $\tau_w \rightarrow 0$, a equação (V-2.4) assume a seguinte forma:

$$T = \frac{1}{k_t} \frac{q_w}{\rho c_p} \frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y}} + Ct_1(x, P_r). \quad (V - 2.5)$$

Como os domínios de validade das equações (V-2.4 a) e (V-2.4 b) tem em comum o ponto onde a tensão na parede é nula $\tau_w = 0$, a expressão (V-2.5) deve necessariamente representar o comportamento da equação (V-2.4 b), no limite quando $\tau_w \rightarrow 0$. Este fato pode ser facilmente verificável através do uso da seguinte relação:

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots, \quad x \geq 1. \quad (V - 2.6)$$

Substituindo-se (V-2.6) em (V-2.4 b), e fazendo o limite quando $\tau_w \rightarrow 0$ teremos:

$$T = \frac{1}{k_t} \frac{q_w}{\rho c_p} \frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y}} + \bar{C}t_2(x, P_r). \quad (V - 2.7)$$

Onde $\bar{C}t_2(x, P_r) = \frac{\pi}{2} / \sqrt{\frac{-\tau_w}{\rho}} + Ct_2(x, P_r)$. Naturalmente, a função $\bar{C}t_2(x, P_r)$ deve ser finita quando $\tau_w \rightarrow 0$. As equações demonstram que, embora a tensão de cisalhamento na parede se anule no ponto de descolamento, o mesmo não acontece com o fluxo de calor na parede. Sendo assim, qualquer forma de analogia de Reynolds que relacione diretamente $\frac{\tau_w}{\rho}$ com q_w , não pode ser aplicada na região de separação. Este fato foi confirmado experimentalmente nos trabalhos de Vogel e Eaton (1985) e Aiba (1985). A transição entre as equações (V-2.4 b) e (V-2.4 c), é mais simples de ser verificada. Para que esta ocorra de maneira suave, basta apenas que as funções Ct_2 e Ct_3 sejam iguais nesta região intermediária. A equação (V-2.4 c) apresenta ainda um comportamento logarítmico quando $|\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y| \ll |\tau_w/\rho|$, o qual é bastante semelhante ao descrito pela expressão (V-2.4 a), longe do ponto de descolamento.

Como já foi mostrado, o mesmo não acontece com o caso fluidodinâmico, devido à presença do escoamento reverso. A temperatura característica utilizada para adimensionalizar T , na região de escoamento reverso, onde a lei logarítmica for válida, é dada abaixo:

$$T_\tau = \frac{q_w}{\rho c_p \sqrt{|\frac{\tau_w}{\rho}|}} \quad (V - 2.8)$$

Substituindo a expressão (V-2.8) em (V-2.4 c) e utilizando a relação (V-2.10) no limite quando $\frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y / |\frac{\tau_w}{\rho}|$ teremos:

$$T^* = \frac{1}{k_t} \ln \frac{y^*}{2} + Ct_3(P_\tau), \quad (V - 2.9)$$

onde $T^* = T/T_\tau$ e $y^* = y/L_c$. A equação (V-2.9) representa a já mencionada lei logarítmica térmica, válida na região de escoamento reverso. Uma equação bem semelhante é válida a jusante do ponto de descolamento, neste caso porém, o valor L_c assume a sua forma clássica ($L_c = \nu / \sqrt{|\frac{\tau_w}{\rho}|}$). Infelizmente, os dados experimentais disponíveis na literatura sobre este assunto são escassos e não fornecem todos os parâmetros necessários para que se possa comparar os resultados aqui apresentados sobre os parâmetros de similaridade característicos da região interna diretamente com os experimentos. Esta comparação contudo, pode ser feita de maneira indireta, através da utilização das equações (V-2.4) como condição de contorno na parede em modelos de turbulência ($K - \epsilon$, por exemplo). Os resultados obtidos utilizando-se este procedimento, seriam comparados aos parâmetros fornecidos na literatura.

CAPÍTULO VI

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo será feita uma comparação entre os resultados obtidos nos capítulos anteriores com os dados experimentais disponíveis na literatura. A generalizações das leis logarítmicas térmica e fluidodinâmica serão utilizadas como condição de contorno em um modelo de turbulência do tipo $K - \epsilon$. os valores de C_f e do número de Stanton obtidos através desse procedimento serão comparados com os experimentos de Vogel e Eaton(1985) , Driver e Segmiller (1985) e Dengel e Fernholz (1990) como também com outros modelos de turbulência, mostrando bons resultados.

6.1 ALGUNS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Simpson et al (1980) e Thompson e Whitelaw (1995) realizaram uma extensa investigação experimental sobre o escoamento na região de separação e de escoamento reverso. Em ambos os trabalhos a presença de um perfil logarítmico para a velocidade próximo à parede foi demonstrado existir, na região onde a tensão na parede é negativa. Quanto à questão de quais deveriam ser as variáveis de similaridade adequadas para descrever o escoamento nessa nova região logarítmica, ambos os trabalhos concordam em que, para os casos estudados, as variáveis clássicas válidas para o escoamento à jusante do ponto descolamento não podem ser aplicadas unicamente ao longo da região de escoamento reverso. Em seu trabalho Simpson propôs serem a velocidade máxima negativa (U_n) e sua distância até a parede (L_n) os parâmetros de similaridade característicos dessa região do escoamento.

No caso térmico, Vogel e Eaton (1985) analisaram detalhadamente o escoamento em um degral expensor sujeito a um fluxo de calor constante através da parede. Nas figuras VI-1, VI-2 e VI-3 aparecem os perfis de temperatura na região de escoamento reverso. Como se pode notar, em todos eles aparece nitidamente uma região onde a temperatura apresenta um perfil logarítmico, como previsto pelas equações deduzidas no capítulo anterior.

Segundo a análise assintótica aqui apresentada, a lei logarítmica clássica deixa de ser válida na região de separação, sendo substituída, segundo as equações deduzidas no capítulo V por funções do tipo $u \sim y^{1/2}$ para o caso fluidodinâmico e $T_\infty - T \sim y^{-1/2}$ para o caso térmico.

Na figura VI-4 vemos o perfil de temperatura próximo ao ponto onde a tensão na parede é nula ($X^* = (X - X_r)/X_r = 0.05$ Vogel e Eaton (1985)). Nesta figura a presença de uma região onde o perfil de temperatura apresenta um comportamento de forma $T_\infty - T \sim y^{-1/2}$ pode ser vista claramente. A presença de uma subcamada viscosa próximo à parede e de uma "região da esteira" próximo ao escoamento externo também podem ser notadas.

O perfil de velocidade comporta-se qualitativamente, de maneira diferente do perfil de temperatura na região de separação. A figura VI-5 (dados de Dengel e Fernholz(1990)) mostra um comportamento do tipo $u \sim y^{1/2}$ para o campo de velocidade próximo à parede quando $\tau_w = 0$. Este resultado já havia sido previsto por Stratford (1959). Contudo, as equações deduzidas no capítulo V indicam que este comportamento deve se estender para uma região de escoamento reverso adjacente ao ponto onde a tensão na parede é nula. As figuras VI-6 a VI-9 (dados de Dengel e Fernholz (1990)) mostram que, de fato, isto acontece.

A diferença existente entre os comportamentos dos campos de velocidade e de temperatura, mostra que a hipótese de proporcionalidade entre essas grandezas não pode ser válida próximo do ponto onde a tensão na parede é nula. Este fato levanta a questão sobre a validade da utilização do conceito do número de Prandtl turbulento em todas as regiões do escoamento principalmente na região de separação.

Os comportamentos apresentados nos gráficos acima citados foram, salvo menção em

contrário, previstos aqui pela primeira vez, dentro do conhecimento deste autor.

6.2 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Verificaremos agora o comportamento das novas leis da parede quando utilizadas como condição de contorno próximo à parede em um modelo de turbulência do tipo $K - \epsilon$. As características principais das equações a serem resolvidas aparecem descrita abaixo. No caso fluidodinâmico temos:.

Conservação de massa

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (VI - 2.1a)$$

Conservação de quantidade de movimento na direção x

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + \overline{\rho u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv + \overline{\rho u'v'}) = -\frac{\partial P}{\partial x}. \quad (VI - 2.1b)$$

Conservação de quantidade de movimento na direção y

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + \overline{\rho v'^2}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv + \overline{\rho u'v'}) = -\frac{\partial P}{\partial y}. \quad (VI - 2.1c)$$

Nas equações(VI-2.1) os termos u' e v' representam as flutuações turbulentas. Os termos de difusão viscosa foram desprezados nas equações da conservação da quantidade de movimento assumindo que grandes índices de turbulência estão presentes no

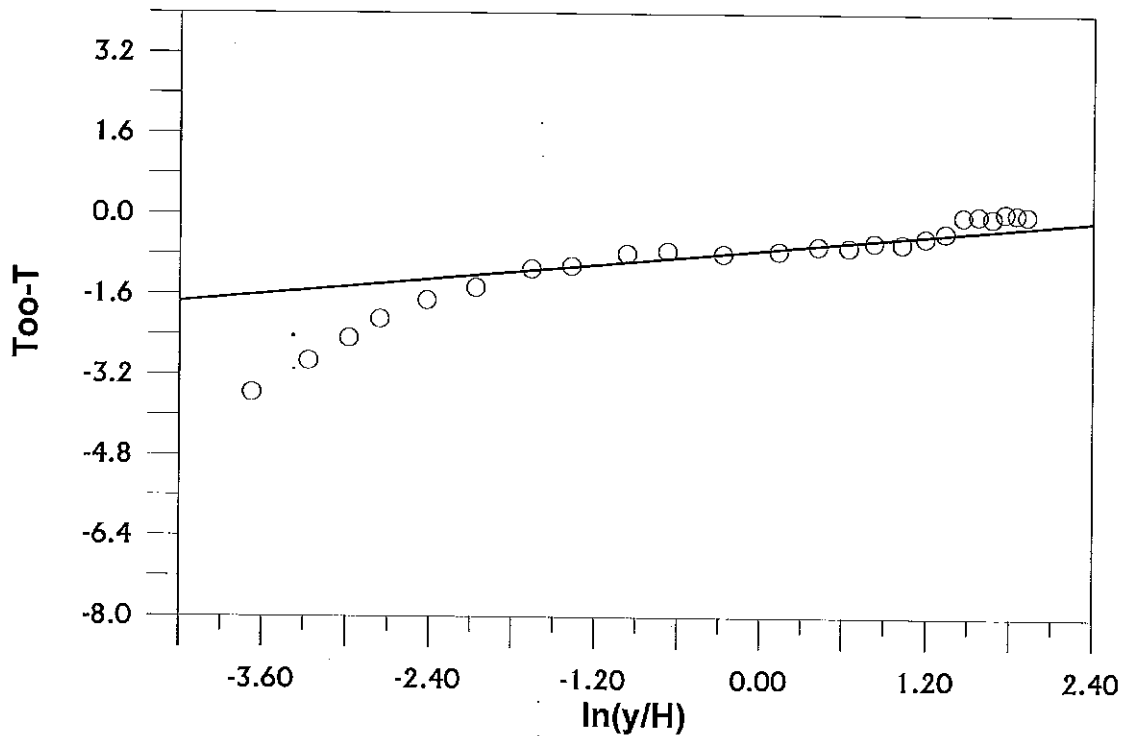


Figura VI-1 : Perfil de temperatura em $X^* = -0.35$

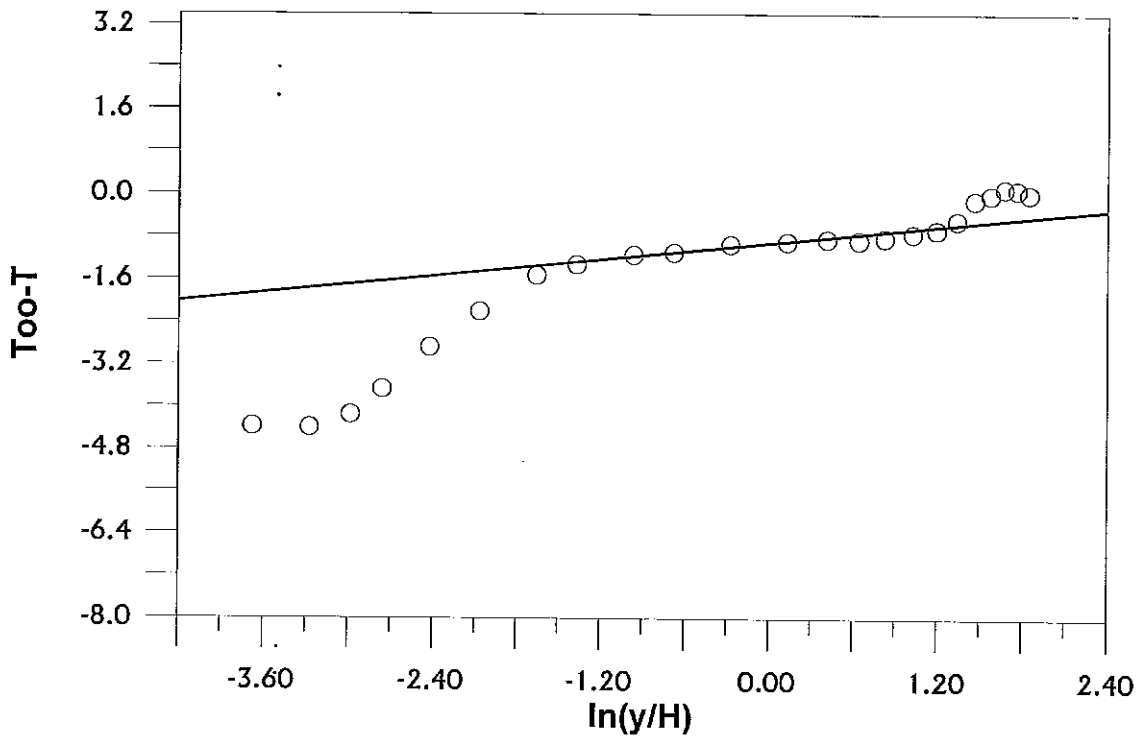


Figura VI-2 : Perfil de temperatura em $X^* = -0.55$

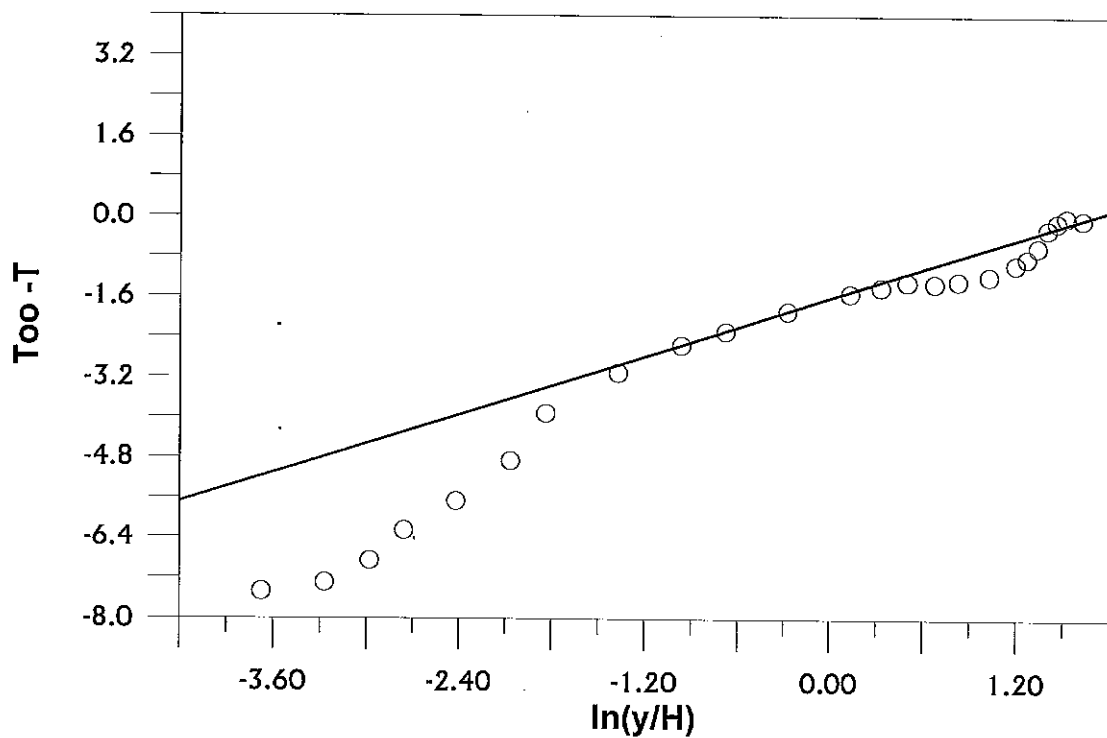


Figura VI-3 : Perfil de temperatura em $X^* = -0.75$

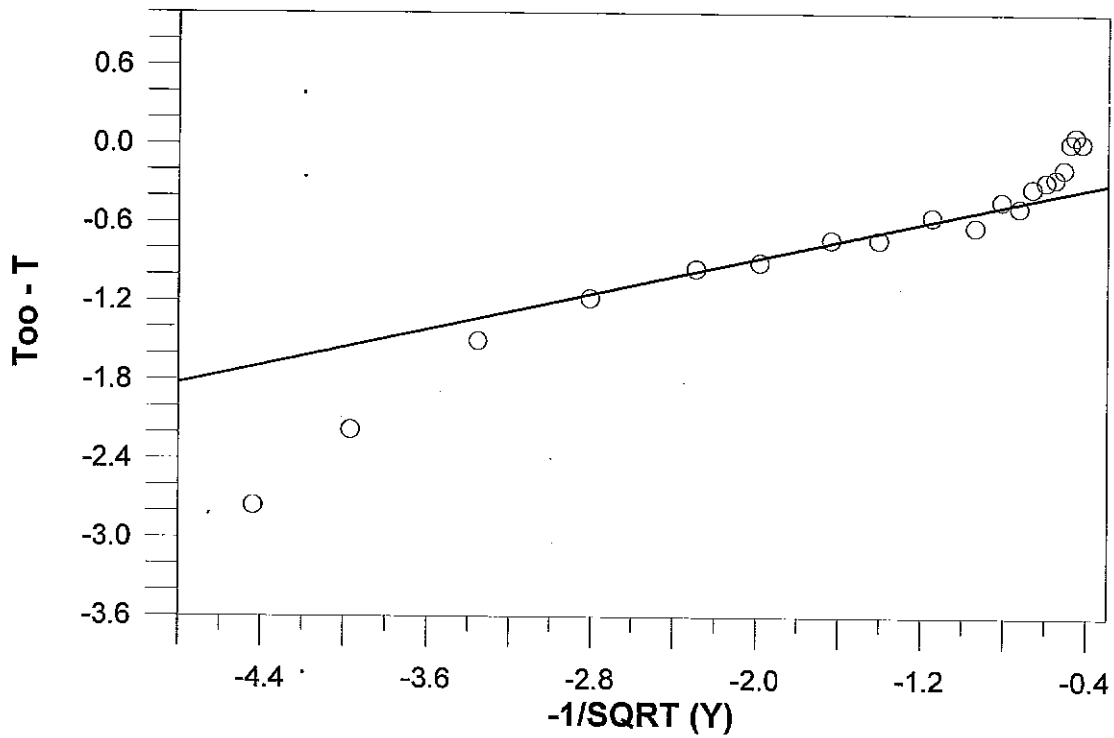


Figura VI-4 : Perfil de temperatura $X^* = 0.05$

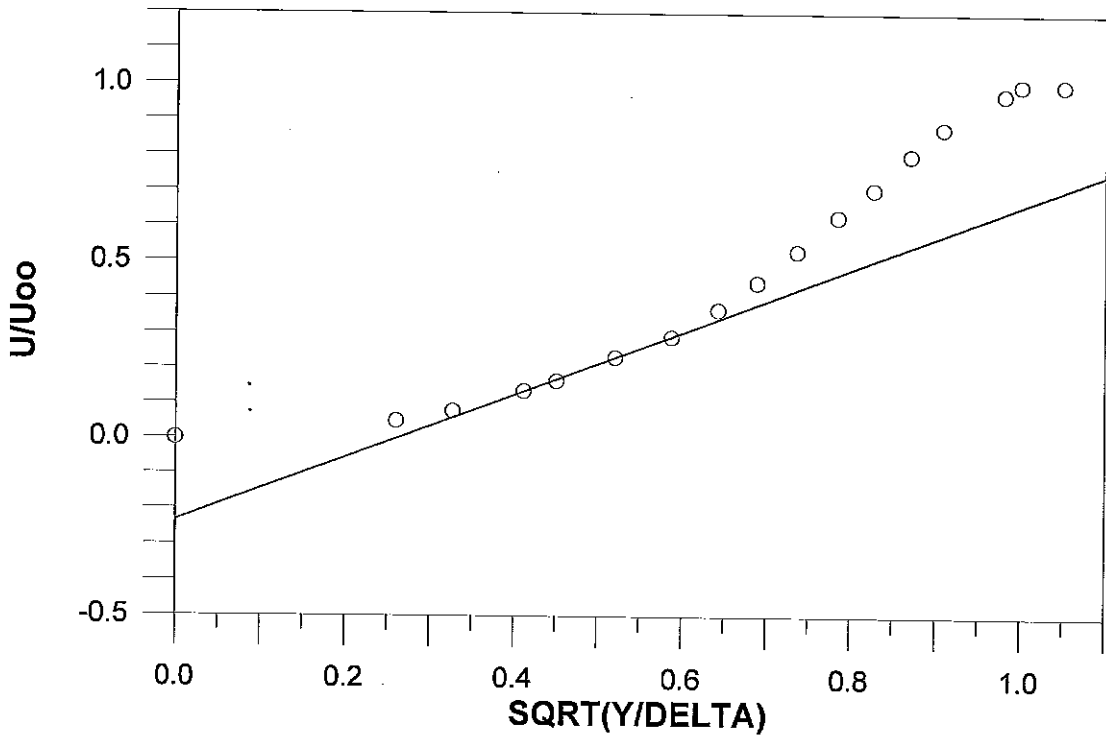


Figura VI-5 : Perfil de velocidade $C_f=0.0$

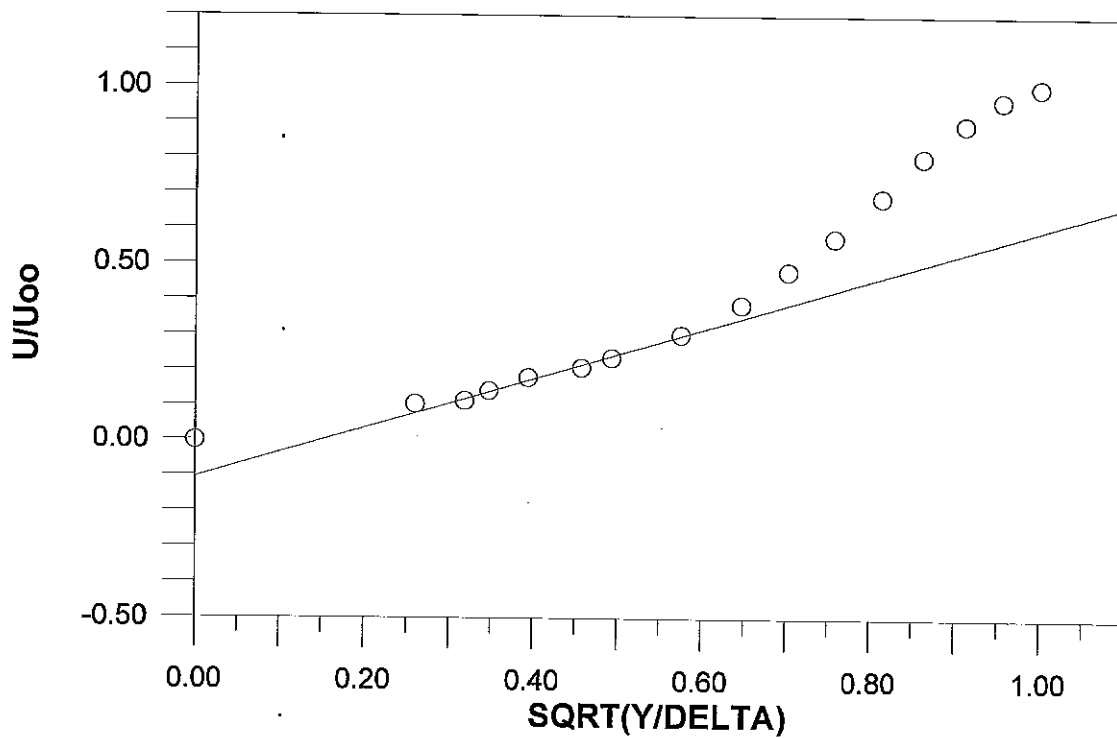


Figura VI-6 : Perfil de velocidade $CF=-0.4 E-4$

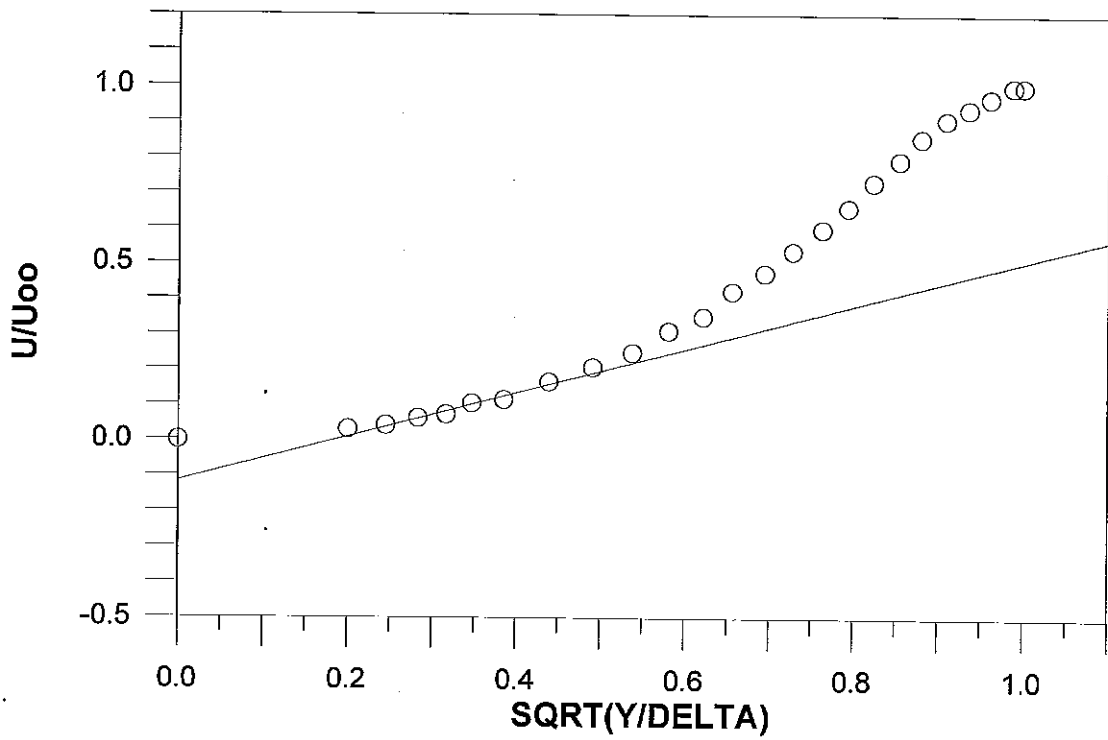


Figura VI-7 : Perfil de velocidade $C_f = -1.52 \text{ E-4}$

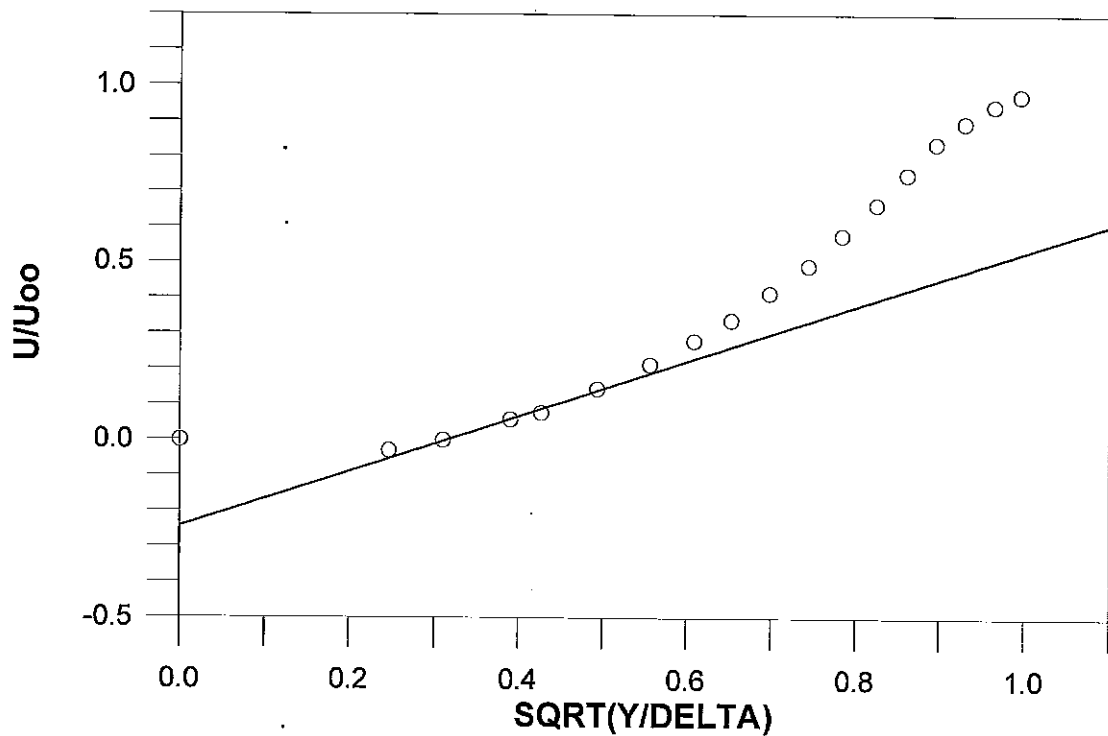


Figura VI-8 : Perfil de velocidade $C_f = -3.4 \text{ E-}4$

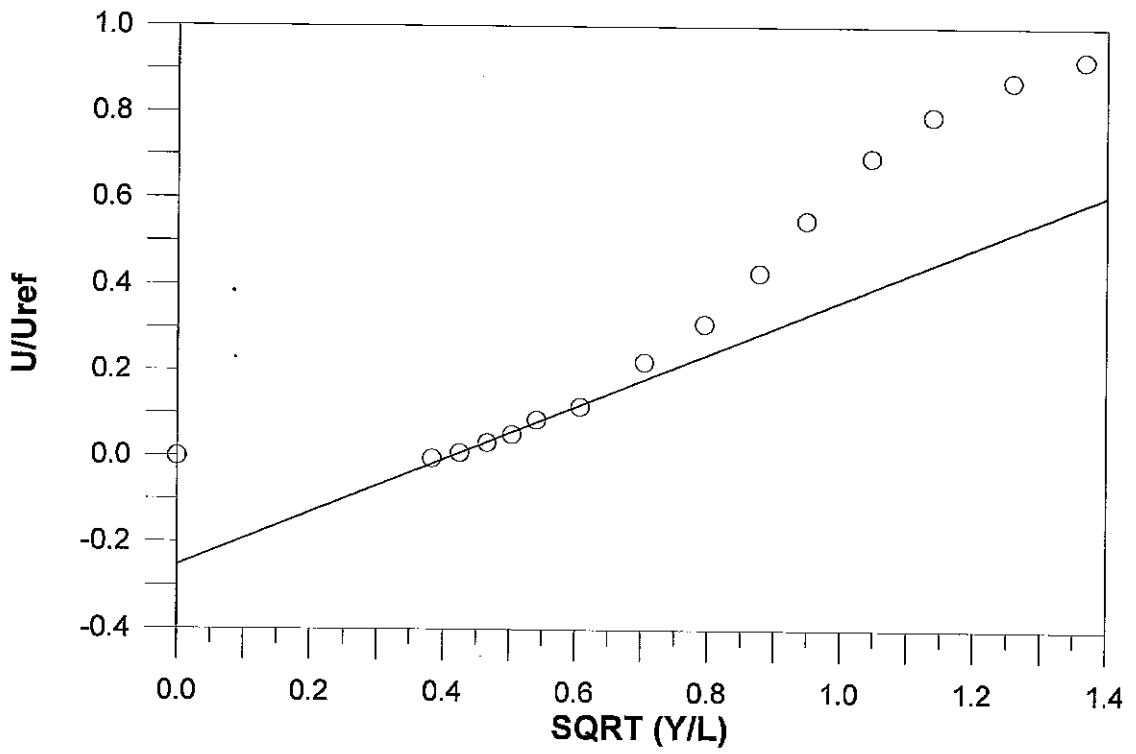


Figura VI-9 : Perfil de velocidade $X^* = -0.13$

escoamento. Esta é uma aproximação comum feita no cálculo de escoamentos turbulentos quando a lei da parede é utilizada como condição de contorno, embora em modelos mais recentes a difusão viscosa da quantidade de movimento já seja considerada. (Chieng e Launder (1980), Ciofalo e Collins (1989) e Johnson e Launder(1982) ver também Bortolus (1995)).

O modelo de turbulência empregado no fechamento dos termos $\overline{\rho u'^2}$, $\overline{\rho u'v'}$ e $\overline{\rho v'^2}$ é o da viscosidade turbulenta. Deste modo as componentes do tensor de Reynolds ficam sendo dadas por:

$$-\overline{\rho u'^2} = 2\mu_t \frac{\partial u}{\partial y} - 2/3\rho K, \quad (VI - 2.2a)$$

$$-\overline{\rho v'^2} = 2\mu_t \frac{\partial v}{\partial y} - 2/3\rho K, \quad (VI - 2.2b)$$

$$-\overline{\rho u'v'} = \mu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (VI - 2.2c)$$

Onde μ_t é a viscosidade turbulenta e K representa a energia cinética turbulenta a qual é dada por:

$$K = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}). \quad (VI - 2.3)$$

Substituindo as definições (VI-2.2) nas equações (VI-2.1)teremos:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u^2 - \mu_t \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv - \mu_t \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial P^*}{\partial x} + S_u, \quad (VI - 2.4a)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v^2 - \mu_t \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv - \mu_t \frac{\partial v}{\partial x}) = -\frac{\partial P^*}{\partial y} + S_v, \quad (VI - 2.4b)$$

onde os termos fonte S_u e S_v são:

$$S_u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_t \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (VI - 2.5a)$$

$$S_v = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_t \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (VI - 2.5b)$$

A pressão modificada P^* é dada pela equação abaixo:

$$P^* = P + \frac{2}{3} \rho K. \quad (VI - 2.6)$$

Na maioria das situações práticas $P \gg 2/3 \rho K$ sendo portanto $P^* \cong P$.

No caso térmico, a equação a ser resolvida é a equação da conservação da energia a qual é dada abaixo :

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u H + \overline{\rho u' H'}) \frac{\partial}{\partial y} (\rho v H + \overline{\rho v' H'}) = S_H. \quad (VI - 2.7)$$

Na expressão acima H' , é o termo de flutuação de H ; $\overline{\rho u' H'}$ e $\overline{\rho v' H'}$ representam os fluxos turbulentos de energia . De maneira análoga ao caso fluidodinâmico o termo de difusão molecular de energia foi desprezado. Tal procedimento somente apresenta consistência física para números de Prandtl próximos da unidade.

Os termos de difusão turbulenta estão relacionados com os gradientes médios de temperatura através das seguintes relações.

$$-\overline{\rho u' H'} = \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (VI - 2.8a)$$

$$-\overline{\rho v' H'} = \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (VI - 2.8b)$$

Onde Pr_t representa o número de Prandtl turbulento. A substituição das equações (VI-2.8) em (VI-2.7) fornece:

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u H - \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v H - \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial H}{\partial y} \right) = S_H. \quad (VI - 2.9)$$

6.2.1 O MODELO DE TURBULÊNCIA $K - \epsilon$

O modelo $K - \epsilon$ (Launder e Spalding (1974)) fornece uma expressão para a viscosidade turbulenta (μ_t) utilizando dois parâmetros característicos dos escoamentos turbulentos, a energia cinética K e a taxa de dissipação por unidade de massa ϵ , a qual representa a quantidade de energia cinética transformada em energia interna do fluido. Através de argumentos dimensionais encontramos a seguinte relação para a viscosidade turbulenta:

$$\mu_t = \rho c_\mu \frac{K^2}{\epsilon}. \quad (VI - 2.10)$$

Onde c_μ é uma constante empírica. Os valores de K e ϵ são fornecidos através das seguintes equações de transporte semi-empíricas:

$$\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u K - \frac{\mu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v K - \frac{\mu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial y}) = P_K - \rho \epsilon \quad (VI - 2.11)$$

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \epsilon - \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \epsilon - \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y}) = \frac{\epsilon}{K} (c_{\epsilon 1} P_K - c_{\epsilon 2} \rho \epsilon). \quad (VI - 2.12)$$

Onde a taxa de produção (P_K) é dada por:

$$P_k = \mu_t [2 \frac{\partial u^2}{\partial x} + 2 \frac{\partial v^2}{\partial y} + (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})^2]. \quad (VI - 2.13)$$

Os valores das constantes que aparecem no modelo são os seguintes, $c_\mu = 0.09$, $c_{\epsilon 1} = 1.44$, $c_{\epsilon 2} = 1$, $\sigma_K = 1$, $\sigma_\epsilon = 1.3$, $Pr_t = 0.6 \dots 0.86$.

6.2.2 AS LEIS DA PAREDE COMO CONDIÇÃO DE CONTORNO

6.2.2.1 CASO FLUIDODINÂMICO

No presente trabalho, o fluxo de quantidade de movimento junto à parede foi calculado através das seguintes relações:

para $\tau_w \geq 0$:

$$\tau_w = \kappa c_\mu^{\frac{1}{4}} \frac{\rho \sqrt{K}}{\ln E1 y_1} u_p,$$

para $\tau_w < 0$:

$$\tau_w = \kappa c_\mu^{\frac{1}{4}} \frac{\rho \sqrt{K}}{\ln E2 y_2} u_p.$$

Na equação acima temos que u_p representa a velocidade no primeiro nó próximo a parede, $y_1 = y_p c_\mu^{\frac{1}{4}} \rho \sqrt{K} / \nu$, $y_2 = y_p / L_c$, y_p representa a distância do primeiro nó fora da parede até a parede L_c é dado pela equação (V-1.8) com u_τ sendo dado por $c_\mu^{\frac{1}{4}} \rho \sqrt{K}$ e $E1$ e $E2$ são constantes tais que $\ln E1 = 5$ e $\ln E2 = 8.1$.

6.2.2.2 CASO TÉRMICO

No caso térmico a seguinte equação foi utilizada como condição de contorno próximo à parede.

$$\frac{(H_c - H_w) \rho c_\mu^{\frac{1}{4}} K_c^{\frac{1}{2}}}{Q_w} = \frac{Pr_t}{\kappa} \ln \left| \frac{\sqrt{\tau_w / \rho + \frac{dP}{dx} y_2} - \sqrt{\tau_w / \rho}}{\sqrt{\tau_w / \rho + \frac{dP}{dx} y_2} + \sqrt{\tau_w / \rho}} \right| + Ct + Cq.$$

Na equação acima H_c e K_c representam os valores da entalpia e da energia cinética

no primeiro nó fora da parede, Q_w é o fluxo de calor na parede e C_q é dado pelas equações abaixo:

$$C_q = 12.5Pr^{2/3} + 2.12 \ln Pr - 5.3, \quad \text{se } Pr > 0.5,$$

$$C_q = 12.5Pr^{2/3} + 2.12 \ln Pr - 1.5, \quad \text{se } Pr \leq 0.5.$$

No caso da energia cinética turbulenta e da dissipação temos que as condições de contorno próximo a parede ficam sendo dadas por:

$$\frac{\mu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial y} = 0,$$

$$\epsilon_c = c_\mu^{3/4} \frac{K_c^{3/2}}{\kappa y_c}.$$

6.3 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Faremos agora uma comparação dos resultados aqui obtidos com alguns dados experimentais e com diferentes teorias. Para isso utilizaremos o programa CAST (1989) o qual faz uso do método dos volumes finitos (Patankar (1972),(1980)). Este programa foi modificado para utilizar as leis da parede aqui deduzidas como condição de contorno. O objetivo aqui é chamar a atenção para as potencialidades da utilização das equações deduzidas no capítulo V como condição de contorno em modelos de turbulência, embora neste caso apenas os casos limite dessas equações tenham sido implementados. A figura VI-10 apresenta as linhas de corrente para o escoamento em torno de um degrau expensor o qual representa a geometria aqui utilizada como caso teste.

A figura VI-11 mostra a variação do perfil de velocidade ao longo do escoamento, tratando a mudança de direção da velocidade próximo à parede. No caso térmico esta mu-

dança de sinal do campo de temperatura não ocorre. Deste modo, uma figura semelhante à figura VI-11 não pode ser feita.

Na figura VI-12 aparecem os valores de C_f obtidos utilizando-se o modelo $K - \epsilon$ para calcular o escoamento em torno de um degrau expensor. Observa-se que os resultados obtidos utilizando-se a nova lei logarítmica como condição de contorno para a região de escoamento reverso são melhores que os obtidos quando a lei logarítmica clássica é utilizada. Como se pode notar, os valores de C_f a jusante do ponto onde a tensão na parede é nula são praticamente idênticos nos dois casos pois nessa região ambos utilizam a lei logarítmica clássica. É importante notar contudo que na região a montante desse ponto os valores fornecidos pela relação aqui deduzida se mostram bastante superiores.

Na figura VI-13 aparecem novamente os valores de C_f para o escoamento em torno de um degrau expensor sendo que neste caso a comparação é feita entre vários modelos de turbulência. Cabe ressaltar que, embora de implementação menos complexa, os resultados obtidos através do uso da nova lei logarítmica são, neste caso, comparáveis aos obtidos com modelos mais complexos como RSM e superiores aos fornecidos pelo modelo $K - \epsilon$ utilizando função de parede.

Os valores do número de Stanton são mostrados na figura V-14 para a geometria de um degrau expensor, como nos casos anteriores, com fluxo de calor constante através da parede inferior. Os resultados obtidos fazendo-se uso da nova "lei da parede" térmica como condição de contorno em um modelo $k - \epsilon$ reproduzem bem os dados experimentais, embora alguma discrepância ainda ocorra. Essa discrepância existe provavelmente devido a questionável utilização do conceito de Prandtl turbulento na região de escoamento reverso.

As figuras VI-15, VI-16, VI-17, VI-18 mostram uma comparação entre os perfis de velocidade fornecidos pelo presente trabalho e os resultados experimentais de Vogel e Eaton (1985). Como se pode notar a concordância entre ambos é considerável, sendo que em alguns gráficos o perfil de velocidade é reproduzido com grande precisão.

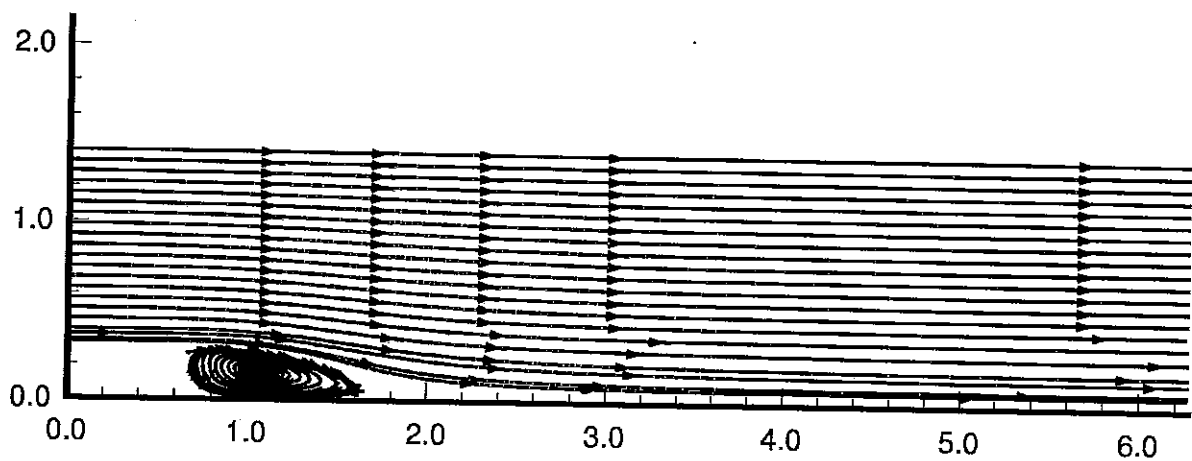


Figura VI-10 : Linhas de corrente

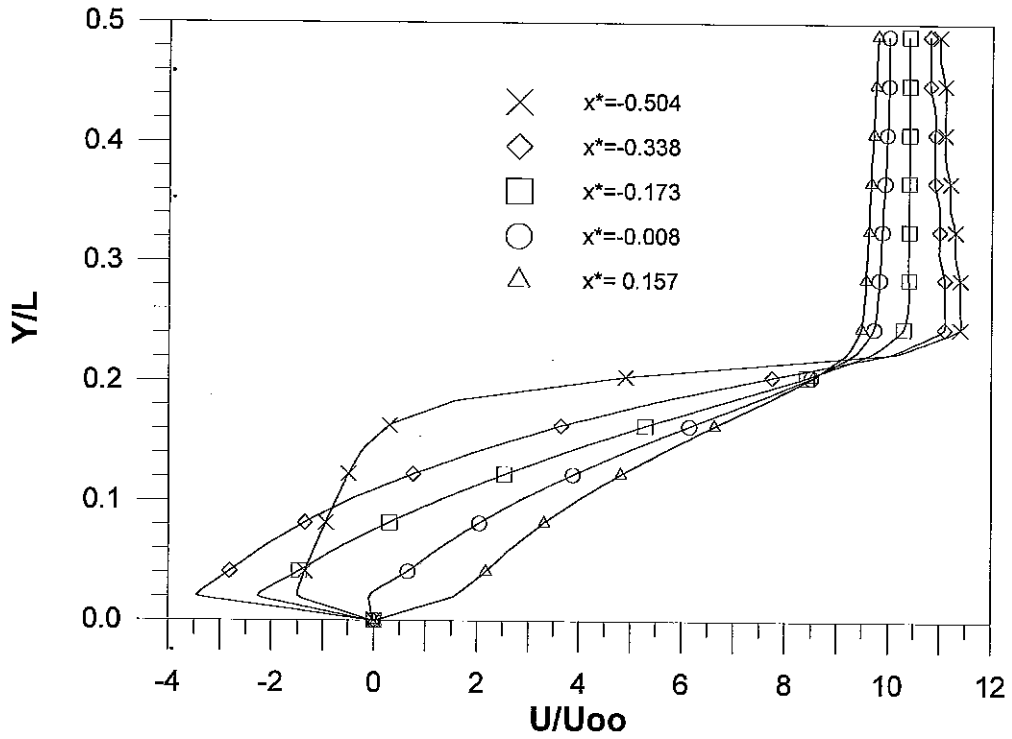


Figura VI-11 : Comparação entre perfis de velocidade

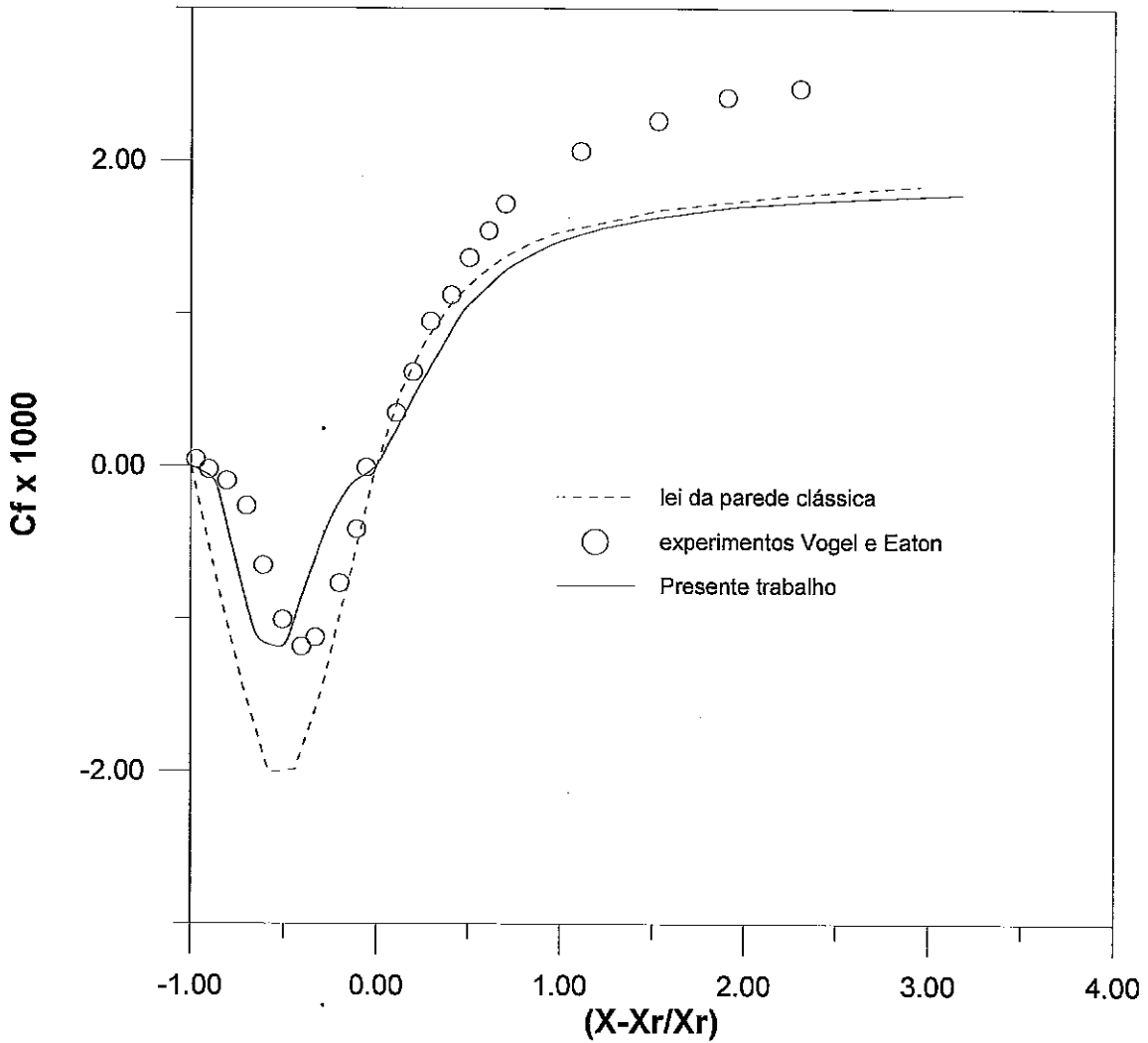


Figura VI-12 : Comparação dos valores de C_f fornecidos pela formulação clássica e pelo presente trabalho

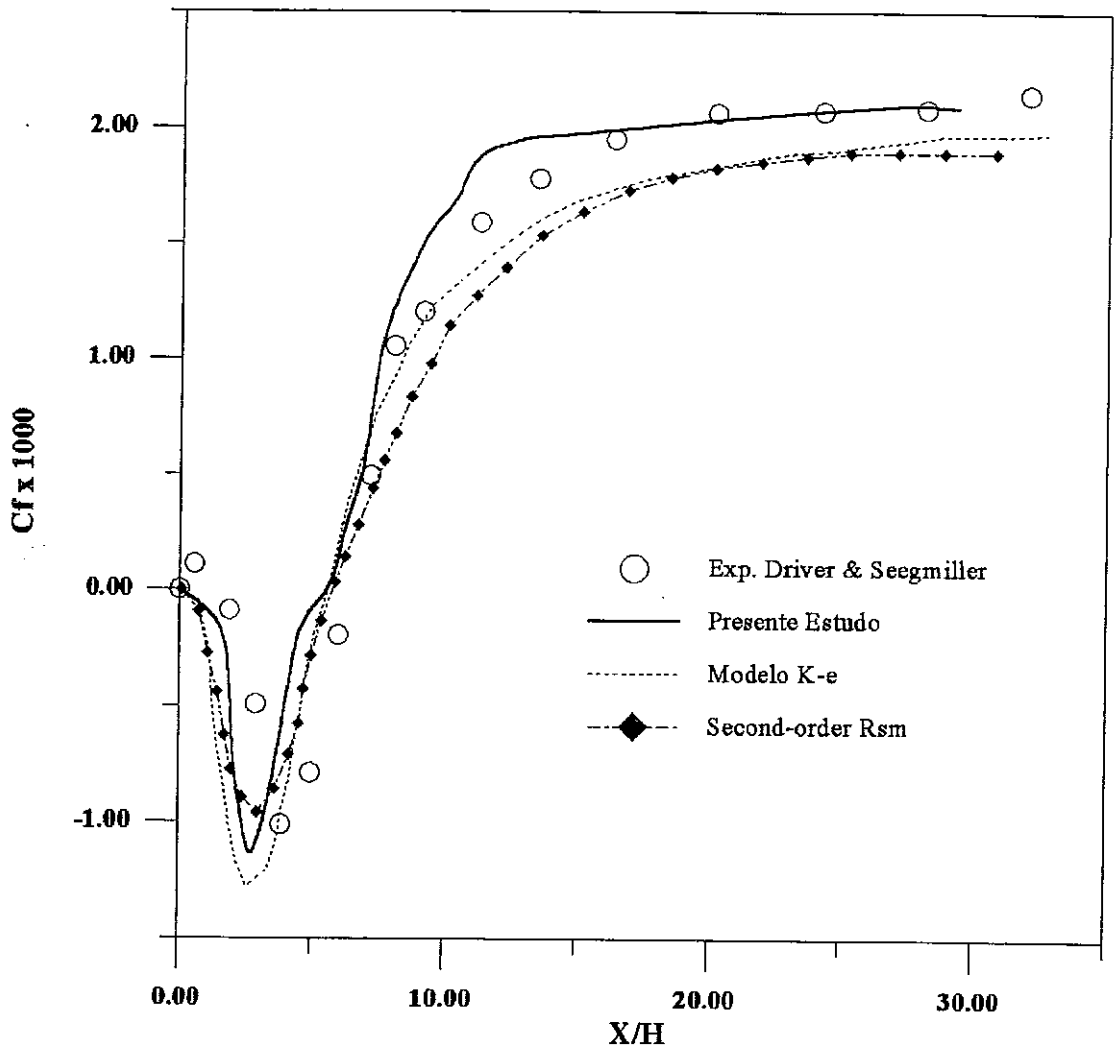


Figura VI-13 : Comparação dos valores de C_f fornecidos pelo pelo presente trabalho com outros modelos de turbulência.

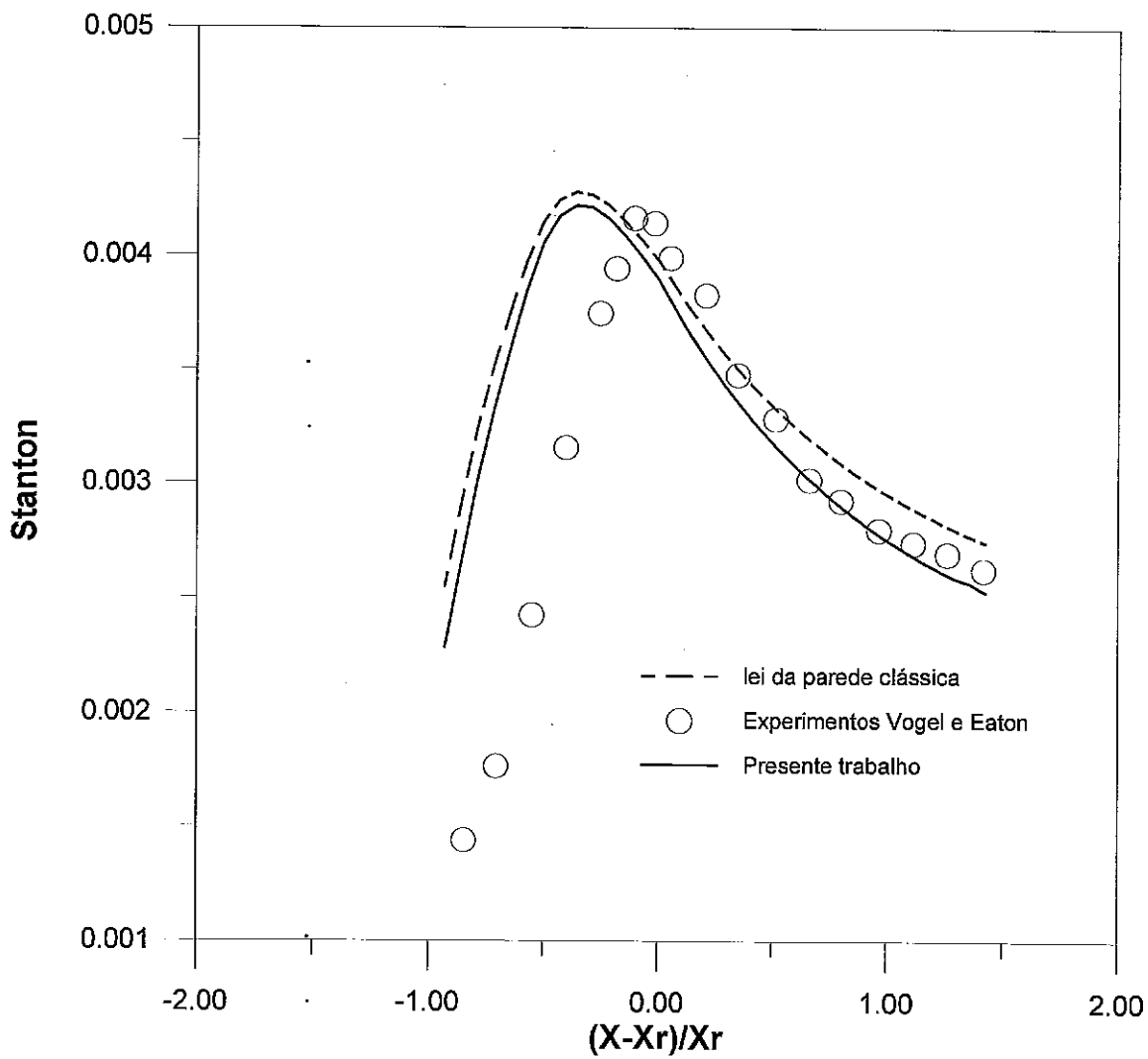


Figura VI-14 : Comparação entre os valores do número de Stanton

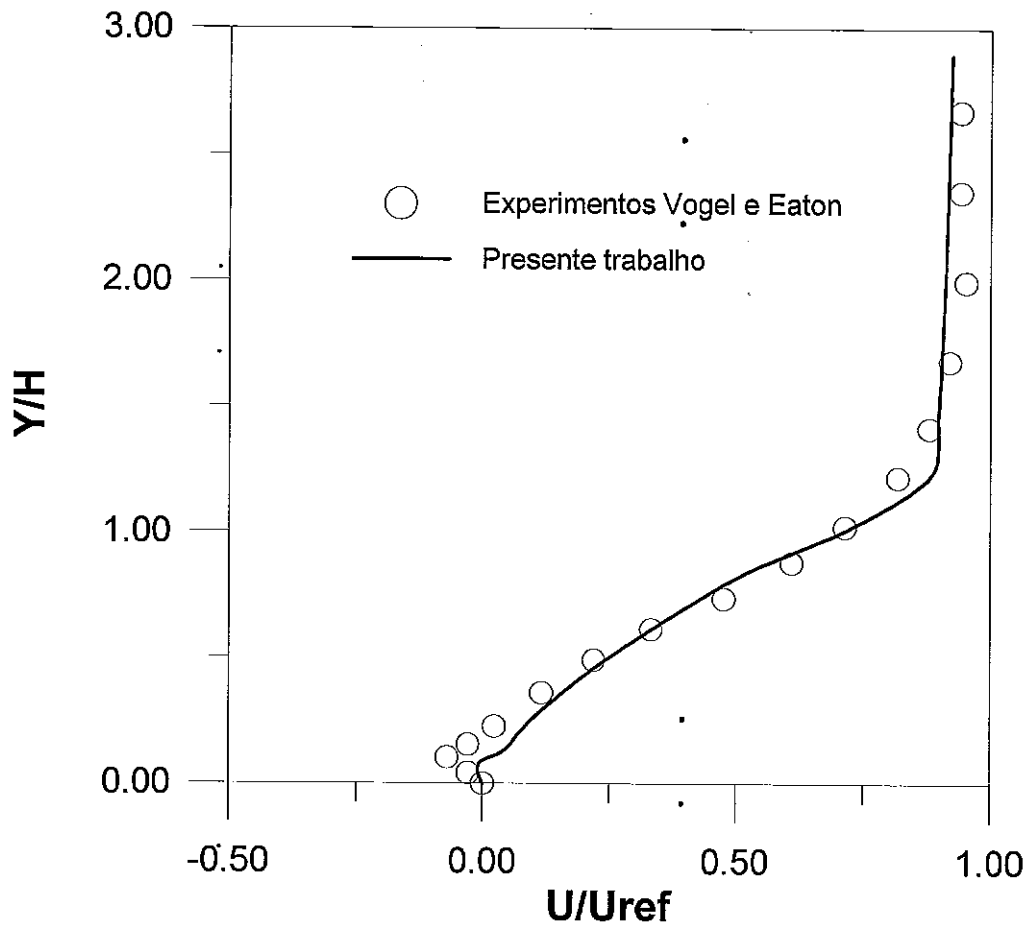


Figura VI-15 : Comparação dos perfis de velocidade $X^* = - 0.11$

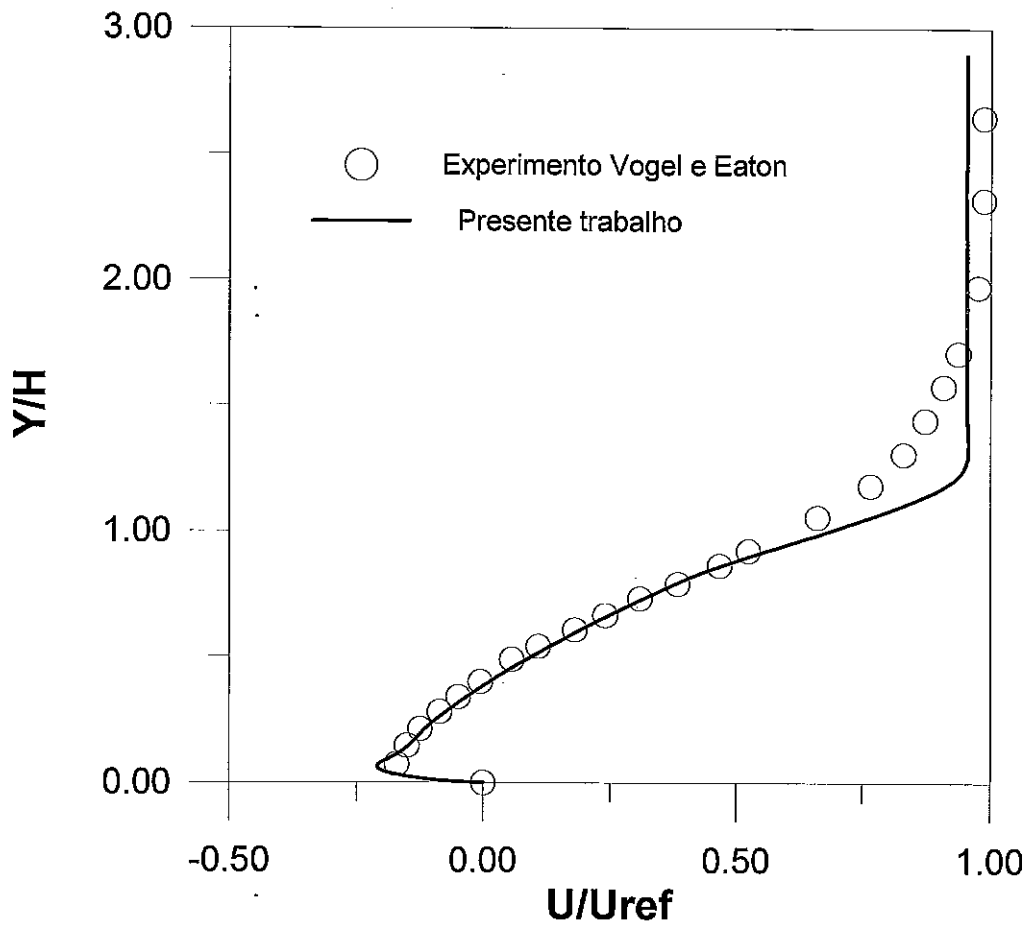


Figura VI-16 : Comparação dos perfis de velocidade $X^* = -0.32$

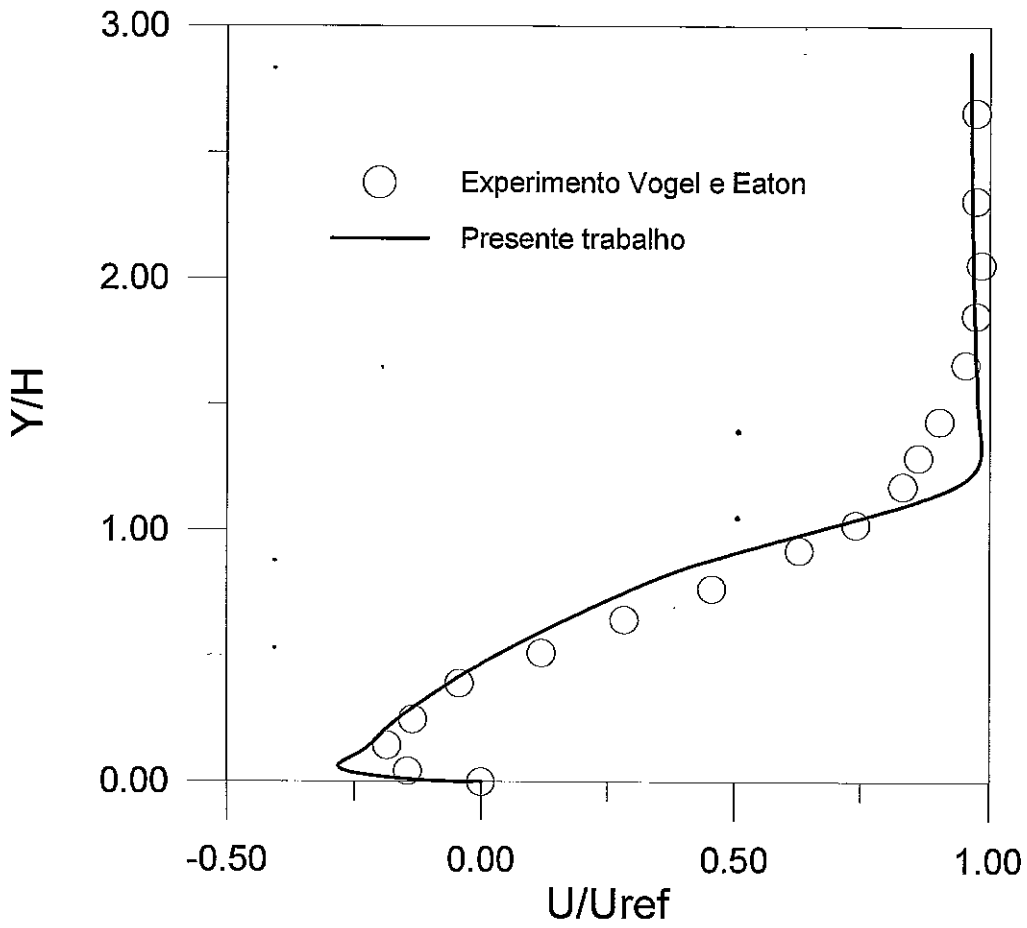


Figura VI-17 : Comparção dos perfis de velocidade $X^* = -0.44$

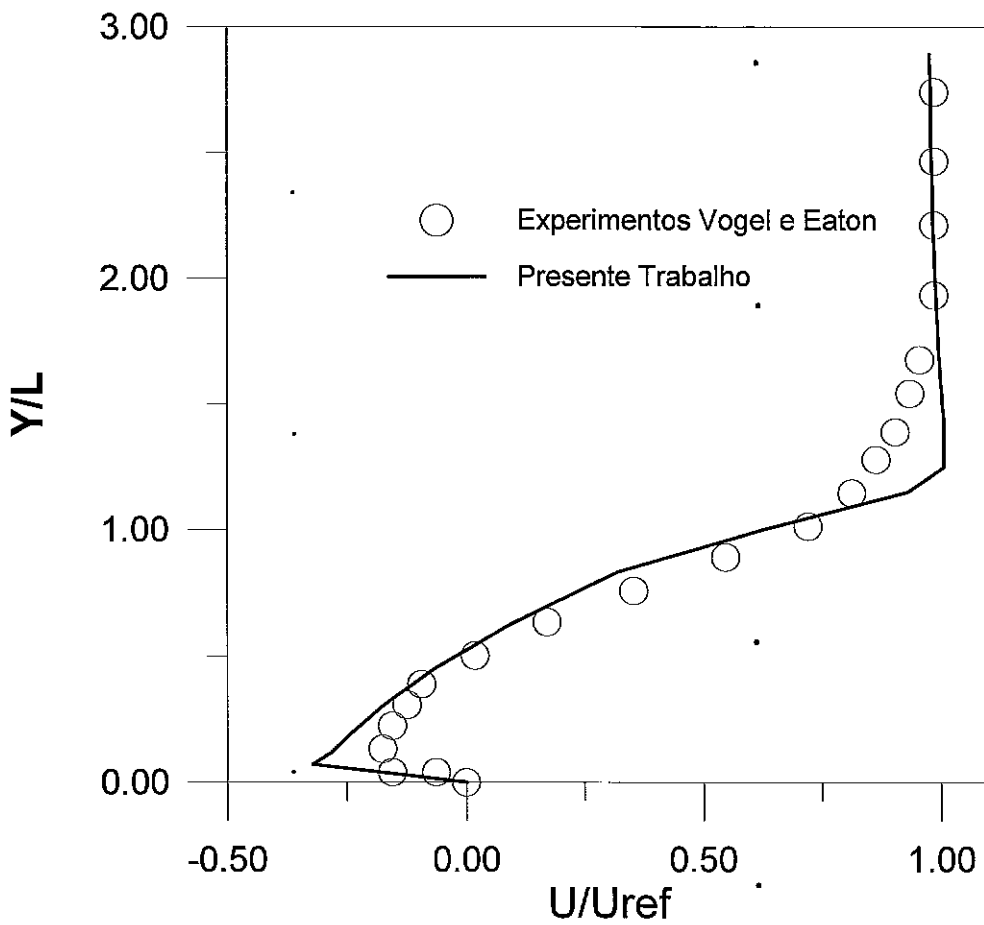


Figura VI-18 : Comparação dos perfis de velocidade $X^*=-0.55$

CAPÍTULO VII

7.1 CONCLUSÃO

No presente trabalho, o método da variável intermediária juntamente com argumentos de análise dimensional foram utilizados para obter a estrutura assintótica do escoamento turbulento, próximo ao ponto de descolamento. Foi mostrado que longe da região de separação a camada limite turbulenta apresenta uma estrutura de duas "camadas" (decks). Esta estrutura contudo difere da proposta por Mellor(1972), como foi mostrado por Silva Freire e Hirata (1990), pois apresenta uma região onde os termos de inércia são equilibrados pelos termos de tensão turbulenta. Esta região possibilita um melhor tratamento assintótico do escoamento próximo ao ponto de descolamento pois independe da existência da chamada região da esteira a qual perde a validade próximo ao ponto de descolamento. Da combinação (matching) das equações válidas para as duas "camadas" próximas à parede, surge a conhecida lei logarítmica, obtida sem a utilização de um modelo de turbulência. Próximo ao ponto de descolamento constata-se que as duas "camadas" acima mencionadas unem-se em apenas uma. Este fato também torna claro, a maneira pela qual a lei logarítmica desaparece na região de separação.

A estrutura assintótica do fenômeno térmico também foi deduzida, sendo muito semelhante à apresentada no caso fluidodinâmico. Foi mostrado também que a ordem de grandeza das flutuações térmica e fluidodinâmica não são necessariamente iguais. A relação entre a ordem de grandeza dessas flutuações depende, como pode ser visto na equação (IV-2.22), dos valores do número de Reynolds e Prandtl.

No capítulo V foram deduzidas novas formas da lei da parede fluidodinâmica e térmica válidas ao longo de todo escoamento, inclusive na região do escoamento reverso. Foi mostrado

que na região de separação os perfis de temperatura e velocidade não estão relacionados através de uma constante como acontece longe do ponto de descolamento. Este resultado concorda com os experimentos de Vogel e Eaton(1985) que indicam não ser a conhecida analogia de Reynolds, válida na região de separação. Na região de escoamento reverso foi visto que o campo de temperatura apresenta um comportamento logarítmico próximo à parede. No caso do campo de velocidade alguns trabalhos experimentais (Simpson(1981) e Dengel e Fernholz (1990)) demonstram também a existencia de um perfil logarítmico junto à parede. Estes comportamentos foram deduzidos analiticamente aqui pela primeira vez, dentro do conhecimento deste autor.

No capítulo VI as "leis da parede" aqui deduzidas são comparadas com resultados experimentais como se pode notar, aparece claramente uma "região logarítmica" no campo de temperatura próximo à parede e, na região de separação o perfil de temperatura apresenta um comportamento de tipo $T \sim -y^{-1/2}$ como mostrado pelas equações do capítulo V. As possibilidades da utilização dessas "leis da parede" como condição de contorno em um modelo de turbulência do tipo $K - \epsilon$ também se mostraram bastante promissoras.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para futuros trabalhos podemos citar primeiramente, a realização de um número maior de experimentos sobre o problema de separação turbulenta com transferência de calor. Nesses experimentos grande atenção deveria ser dada à determinação de quais seriam as variáveis de similaridade adequadas para descrever os campos de temperatura e de velocidade próximos à parede, na região de escoamento reverso, caso estas existam. Outro ponto importante a ser estudado seria uma análise mais detalhado sobre a a a influência do gradiente de pressão na parede sobre o fluxo de calor.

A extensão dos resultados aqui obtidos para escoamentos que devem ser modelados utilizando-se as três dimensões, os quais aparecem frequentemente em problemas de en-

genharia, merece ser tentada. A análise da influencia de fatores como injeção de fluido através da parede, rugosidade e compressibilidade sobre escoamentos sujeitos a gradientes de pressão adversos deve resultar em novas "leis da parede" as quais, alem de contribuir para um melhor entendimento desses fenômenos podem ainda ser utilizadas como condição de contorno em modelos de turbulência. Este trabalho já foi iniciado (Silva Freire et al (1995)) tendo-se comprovado que, longe da região de separação, os efeitos da dissipação viscosa somente são importantes quando $O(Ec) = O(1/u_\tau)$, onde Ec é o número de Eckert.

A utilização do método da variável intermediária proporciona uma análise mais geral dos escoamentos em camada limite podendo fornecer aproximações de ordem superior para o problema. Essas aproximações podem ser usadas por exemplo para uma melhor análise do fenômeno de transição, e da singularidade existente no ponto de descolamento quando a aproximação de camada limite é utilizada.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ADAMS, E. "Experiments on the Structure of Turbulent Reattaching Flow," Ph.D. thesis, Thermoscience Div., Mech. Engrg. Dept., Stanford Univ.(1984)
- [2] AMANO, R. S." A Study of a Turbulent Flow Downstream of an Abrupt Pipe Expantion," AIAA J. Vol. 21, 10, oct., pp 1400-1405.
- [3] AIBA, S., "Heat Transfer Around a Circular Cylinder Near a Plane Surface", Journal of Heat Transfer Vol 107 pp 916-921 nov (1985).
- [4] AUNG, W. "An Experimental Study of Laminar Heat Transfer Downstream of Backsteps," J. of Heat Transfer, Vol. 105 No. 4 pp. 823-829. (1983).
- [5] BUCKMASTER, J., "The Behaviour of a Laminar Compressible Boundary Layer on a Cold Wall Near a Point of Zero Skin Friction", J. of Fluid Mech., 44, 273 (1970)
- [6] BUCKMASTER, J., "The Unsteady EVolution of Singularity at Separation", J. Eng. Math. 5,(3), 223 (1973)
- [7] BUCKMASTER, J., "Separation and Compressible Boundary Layer", J. Eng. Math., 5 (1),71 (1971)
- [8] CEBECI, T., e BRADSHAW, P., "Momentum Transfer in Boundary Layers", Hemisphere Publishing Corporation (1977)
- [9] CHIENG C. C. e LAUNDER B. E." On the Calculation of Turbulent Heat Transfer Transport Downstream From an Abrupt Pipe Expantion," Numerical Heat Transfer Vol.3, pp. 189-207 (1980)

- [10] CIOFALO H. e COLLINS M.W. "K- ϵ Predictions of Heat Transfer in Turbulent Recirculating Flows Using an Improved Wall Treatment", Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 15, 1989, pp. 21-47 (1989)
- [11] COLE, J.D. , "Perturbation Methods in Applied Mathematics", Blaisdell Publishing Company (1968).
- [12] CRUZ, D.O.A. e SILVA FREIRE, A.P., "The Asymptotic Structure of The Thermal Turbulent Boundary Layer Near a Separation Point", Proceedings of the International Symposium on Turbulence Heat and Mass Transfer, PORTUGAL, (1994).
- [13] CRUZ, D.O.A. e SILVA FREIRE, A.P., "The Asymptotic Structure of The Thermal Turbulent Boundary Layer Near a Separation Point", Begell House Inc. Publishers (1995).
- [13] CRUZ, D.O.A. e PELLEGRINI C.C., "Uma Análise por Similaridade da Região Externa de Camadas Limites Turbulentas", XII COBEM Brasília, DF (1993).
- [14] CRUZ, D.O.A. e SILVA FREIRE, A.P., "Influence of the Dissipation Function on the Turbulent Boundary Layer Temperature Solution", I Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste Natal, RN (1991).
- [15] CRUZ, D.O.A. e SILVA FREIRE, A.P., "Escala Características da Camada Limite Turbulenta na Região de Separação", II Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste João Pessoa, PB (1992).
- [16] CRUZ, D.O.A. e SILVA FREIRE, A.P., "A Separation Criterion For the Turbulent Boundary Layer", IV ENCIT Rio de Janeiro, RJ (1992).
- [17] CRUZ, D.O.A. e SILVA FREIRE, A.P., "The Thermal Turbulent Boundary Layer Near A Separation Point : Law of The Wall Formulation", XIII COBEM Belo Horizonte, MG (1995).

- [18]DENGEL, P. e FERNHOLZ, H.H. "An Experimental Investigation of an Incompressible Turbulent in the Vicinity of Separation", J. Fluid Mech. Vol 212, pp 615-636 (1990)
- [19]DRIVER, D. M. e H. L. SEEGMILLER, "Features of a Reattaching Turbulent Shear Layer Subject to an Adverse Pressure Gradient," Paper AIAA-82-1029, AIAA/ASME 3rd Joint Thermophysics, Fluids, Plasma and Heat Transfer Conference, June 7-11, St.Louis, MO.(1982)
- [20]DRIVER, D. M. e H. L. SEEGMILLER, "Features of a Reattaching Turbulent Shear Layer in Divergent Channel Flow", AIAA J. Vol. 23, no. 2 pp.163-171 (1985)
- [21]DUBIN,P.A. e BELCHER,S.E.," Scaling of Adverse Pressure Gradient Turbulent Boundary Layer" J. Fluid Mech. Vol 238 pp 699-722, (1992).
- [22]DURST,F. e G. TROPEA, " Turbulent Backward Facing Step Flows in Two Dimensional Ducts and Channels," Proc. 3rd Symp. on Turbulent Shear Flows, Univer. of California-Davis, Sept. 9-11 pp.18.1-18.6. (1981)
- [23]EATON,J. e J. P. JOHNSTON " Turbulent Flow Reattachment: An Experimental Study of the Flow an dstructure Behind a Backward Facing Step," Report MD-39, Stanford Univ. Stanford Ca, June (1980).
- [24]ERDÉLYI,A.," Asymptotic Expantions, Dover, New York, (1956)
- [25]GESTERN,K.,"Introduction to Asymptotics Theory For Turbulent Flow", ZAMM Vol 69, S. T555-T558, (1988).
- [26]GOLDSTEIN, S., "On Laminar Boundary Layer Flow Near a Position of Separation" , A. J. Mech. Appl. Math.,1, 43 (1948)
- [27]HOWARTH,L. "On the Solution of Laminar Boundary Layer Equation", Proc. Roy. Soc.

A, 164, 547 (1938)

[28]HWANG,R.R. e PÉNG,Y.F. "Computation of Backward-Facing Step Flows by a Second-Order Reynolds Stress Closure Model" Inter. Journal for Numerical Methods In Fluids,Vol 21, pp 223-235 (1995).

[29]JOHNSON R. W. e LAUNDER B. E. " Discussion of on The Calculation of Turbulent Heat Transport Downstream Form an Abrupt Pipe Expantion", Numerical Heat Transfer , Vol. 5 pp-189-212. (1982)

[30]KADER,B.A. e YAGLOM,A.M., "Similarity Treatment of Moving Equilibrium Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients",J. Fluid Mech. Vol 89 part 2 pp 305-342, (1978).

[31]KAPLUN,S., "Fluid Mechanics and Singular Pertubation", Academic Press (1967).

[32]LAGESTROM,P.A. e CASTEN,R.G., "Basics Concepts Underlying Singular Perturbation Techniques" SIAM Review Vol 14,No 1 (1972)

[33]LANDAU,L.D. e LIFSHITZ, E.M., Fluid Mechanics, Second Edition, Pergamon Press.

[34]LAUNDER B. E. e SPALDING D. B." The Numerical Computation of Turbulent Flows", Computer Methods in Applied Mechanics, Vol. 3 pp.269-289 (1974)

[35]MACDONALD,H.J., "The Effects of Pressure Gradients in the Law of the Wall in Turbulent flow",J. Fluid Mech. Vol 35, part 2, 311,(1968).

[36]MEDEIROS, M.A.F. e SILVA FREIRE,A. P." The Transfer of Heat In Turbulent Boundary Layers With Injection or Suction: Universal Laws and Stanton Numbers Equations", Inter. J. Heat Mass Transfer Vol. 35. 4. PP.991-995 (1992).

[37]MELLOR,G.L. e GIBSON,M.D., " Equilibrium Turbulent Boundary Layers", J. Fluid

Mech. Vol 24,part 2,225 (1966).

[38]MELLOR,G.L., "The Large Reynolds Number Asymptotic Theory of the Turblent Boundary Layers", Int. J. Engng. Sci. ,Vol 10, 851 (1972).

[39]MELNIK,R.E.," An Asymptotic Theory of Turbulent Separation", Comp. Fluids Vol 17, 165, (1989).

[40]NAYFEH,A.H.,"Introduction to Pertubation Tecniques", Willey-Interscience Publications, (1981).

[41]NAYFEH,A.H.,"Triple Deck Structure",Computer and Fluids ,Vol 20 , N3, pp 269-292, (1990).

[42] NEISH,A. e SMITH,F.T., "On The Separation in Flow Past a Bluff Body" J. Fluid Mech. Vol 241, pp 443-467, (1992).

[43]OTA, T., et alli "Temperature and Velocity Field in the Separated and Reattached Flow Over a Blunt Flat Plates," Bulletin of The JSME, Vol. 22. No. 177, Mar., p. 402(1980)

[44]OTA, T., e N. KON,"Turbulent Transfer of Momentum and Heat in a Separated and Reattached Flow Over a Blunt Flat Plate," J. of Heat Transfer Vol. 102, Nov., p.749 (1980)

[45]OTA, T., e N. KON,"Heat Transfer in The Separated and Reattached Flow on a Blunt Flat Plate," J. of Heat Transfer, Nov. , 1974 p 459. (1979)

[46]OTA, T., e N. KON,"Heat Transfer in The Separated and Reattached Flow on a Blunt Flat Plate -Effects of Nose Shape," Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol 22 pp.197-206 (1979)

[47]OTA, T., e N. KON,"Heat Transfer in Axisymetric Separated and Reattached Flow Over a Longitudinal Blunt Circular Cylinder," J. of Heat Transfer,February p.155(1977)

- [48]PATAKAR,S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publ. Corp., Washington (1980).
- [49]PATANKAR, S. V., SPALDING, D. B."A Calculation Procedure for Heat Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows", Int. J. Heat Mass Transfer ,Vol. 15 pp. 1787-1806 (1972)
- [50]PERIC, M. e SCHEUERER, G."CAST - A Finite Volume Method For Predicting Two-Dimensional Flow and Heat Transfer Phenomena", GRS- Technische Notiz Srr-89-01 Sep. (1989).
- [51]PERRY,A.E. e SCHOFIELD,W.H., "Mean Velocity and Shear Stress Distribution in Turbulent Boundary Layers", The Physics of Fluids, Vol 16 ,(12), 2068, (1973).
- [52]PRANDTL, L., "Über Flüssigkeitsbewegung Bei Sehr Kleiner Reibung", Proceedings 3rd Inter. Math. Congr. Heidelberg (1904)
- [53]PRONCHICK,S.W. e S.J.KLINE "An Experimental Investigation of the structure of a Turbulent Reattaching Flow Behind a Backward Facing Step," Report MD-42, Thermoscience Div. Dept. of Mech. Engrg., Stanford Univ., stanford CA. june (1983)
- [54]SCHLICHTING,H., " Boundary Layer Theory", Macgraw-Hill Book Company (1962).
- [55]SCHOFIELD,W.H., "Equilibrium Boundary Layers in Moderate to Strong Adverse Pressure Gradients", J. Fluid Mech. Vol 113 ,91, (1981).
- [56]SCHOFIELD,W.H., "Two Dimensional Separating Turbulent Boundary Layers", A.I.A.A. Journal, Vol 24 ,(10), 1611, (1986).
- [57]SHILOH,K. ; SHIVAPRASAD,B.G. e SIMPSON, R.L. "The Structure of a Separating Turbulent Boundary Layer. Part 3 Transverse Velocities Measurements", J. Fluids Mech.

133, 75 (1981).

[58]SMITH,F.T. "Modelling of Separating Flow and its Stability", J. of Theo. and Applied Mech., número especial, 47 (1986).

[59]SILVA FREIRE,A.P. , CRUZ,D.O.A. e PELLEGRINI,C.C.,"Velocity and Temperature Distribution in Compressible Turbulent Boundary Layers With Heat and Mass Transfer", Inter. J. Heat Mass Transfer. 3 Vol.13 pp 2507-2515 (1995).

[60]SILVA FREIRE,A.P. e HIRATA,M.H.,"Approximate Solution to Singular Perturbation Problems : The Intermediate Variable Technique", J. of Mathematical Analysis and Applications.Vol 145, (1), 241,(1990).

[61]SILVA FREIRE,A. P. "An Asymptotic Solution for Transpired incompressible Turbulent Boundary Layers", Inter. J. Heat Mass Transfer Vol. 31, 5 pp. 1011-1021 (1988).

[62]SILVA FREIRE,A. P."An Asymptotic Approach for Shock-Wave/Transpired Turbulent Boundary Layer Interaction",ZAMP Vol.39, pp. 478-503 (1988).

[63]SILVA FREIRE,A. P."An Extension of the Transpired Skin-Friction Equation to Compressible Turbulent Boundary Layers", J. Heat Mass Transfer Vol. 31, 11 pp. 2395-2398 (1988).

[64]SILVA FREIRE,A. P."On the Matching Conditions for a Two-Deck Compressible Turbulent Boundary Layer Model", ZAMM Vol.69.4 pp. 100-104 (1989).

[65]SILVA FREIRE,A. P."A Detailed Review of a Solution Procedure for Shock Wave/Turbulent Boundary Layer Interaction Problems", Revista Brasileira de Ciências Mecânicas. Vol. XI, 3 pp.198-211 (1989).

[66]SILVA FREIRE,A. P. "Asymptotic Structure and Characteristics of Turbulent Boundary

Layers: Short Review and Recent Developments”, Research Trends in Heat and Mass Transfer PP. 203-218 (1991).

[67]SILVA FREIRE,A. P.” Analysis of Thermal Turbulent Boundary Layer Over Rough Surfaces”, III ENCIT Itapema, SC (1990).

[68]SIMPSON,R.L. , CHEW,Y.T. e SHIVAPRASAD,B.G.,”The Structure of a separating Turbulent Boundary Layer , Part 1. Mean Flow and Reynolds Stresses”, J. Fluid Mech. Vol 113.23,(1981).

[69]SIMPSON, R. L. ; CHEW, Y.T. e SHIVAPRASAD,B. G.,”The Structure of a Separating Turbulent Boundary Layer. Part 2 Higher Order Turbulence Results”J. Fluid Mech. Vol 113.53,(1981).

[70]SIMPSON, R. L. ; SHIVAPRASAD,B. G. e CHEW, Y.T.,”The Structure of a Separating Turbulent Boundary Layer. Part 4 Effects of Periodic Free Stream Unsteadness”,J. Fluid Mech. Vol 113.219,(1981).

[71]SIMPSON, R.L.; STRICKLAND , J. H. e BARR, P.W.,”Features of a Separating Turbulent Boundary Layer in the Vicinity of Separation”,J. Fluid Mech. Vol 79-3, 553 (1977).

[72]STEWARTSON, K.,”The Behaviour of a Laminar Compressible Boundary Layer Near a Point of Zero Skin Friction”,J. Fluid Mech. Vol 12,177,(1961).

[73]STEWARTSON, K.,”On the Goldstein’s Theory of Laminar Separation”, Quart. J. Mech. Appl. Math., 11,339 (1958)

[74]STRATFORD,B.S.,”An Experimental Flow With Zero Skin Friction Throughout its Region of Pressure Rise”,J. Fluid Mech. Vol 5,17,(1959).

[75]SU, J. e SILVA FREIRE,A. P.”Spatial Development of Free Shear Layer Instability by a

Discrete Vortex Method”, III ENCIT Itapema, Santa Catarina (1990).

[76]SU, J. e SILVA FREIRE,A. P.” The Response of a Laminar Boundary Layer To Pulse Type Pertubations”, IV ENCIT Rio de janeiro, RJ (1992).

[77]SU, J. e SILVA FREIRE,A. P.” A Numerical Study of the Response of a Laminar Boundary Layer to Pulse Type Pertubations”, 8th International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows. Swansea, UK (1993).

[78]SU, J. , SILVA FREIRE,A. P. e SANDIM C. L.”A Comparative Study of Four Algebraic Turbulence Models for Transpired Turbulent Boundary Layers With an Adverse Pressure Gradient”, XII COBEM. Brasilia, DF (1993).

[79]SU, J. e SILVA FREIRE,A. P.”The Response of a Laminar Boundary Layer to Periodic Wall Pertubations”, V ENCIT, São Paulo, SP (1994).

[80]SU, J. , SILVA FREIRE,A. P. e ROSENDAL M.A.” A Modified Near Wall $K - \epsilon$ Turbulence Model for Transpired Turbulent Boundary Layers”, XIII COBEM, Belo Horizonte, MG (1995).

[81]SYCHEV,V.V. e SYCHEV,V.V., ”On Turbulent Boundary Layer Structure”, P.M.M. U.R.S.S. ,Vol 51,(4) ,462 .(1987).

[82]THOMPSON, B.E. e WHITELOW,I.H.,”Characteristics of a Trailing Edge flow With Turbulent Boundary Layer Separation”,J. Fluid Mech. Vol 157 , 305 , (1995).

[83]TOWNSEND ,A.A.,”Equilibrium Layers and Wall Turbulence” J. Fluid Mech. Vol 11,97 , (1960).

[84]WALTERICK, R. E., et al. ”Experiments and Computation on Two Dimensional Turbulent Flow Over a Backward Facing Step,” paper AIAA-84-0013, AIAA 22nd Aerospace

Science Meeting, jan. 9-12, Reno Nevada (1984)

[85]WASON, W. "Asymptotic Expantions for Ordinary Differencial Equations", Interscience, New York (1968)

[86]WESTPHAL,R. "Experimental Study of Flow Reattachment in a Single Sided Sudden Expantion," PhD Dissertation, Dept of Mech. Engrg., Stanford Univ. Stanfor CA,Dec (1982) (avaible as NASA contractor Report 3765, Jan. 1984)

[87]YAJNIK, K.S.,"Asymptotic Theory of Turbulent Flow"'J. Fluid Mech. Vol 42, part 2, 441 ,(1970).

[88]VAN DIKE, M."Pertubations Methods in Fluid Mechanics", Academic Press, New Press, New York (1964)

[89]VOGEL, J. C."Heat Transfer and Fluid Mechanics Measurements in the Turbulent Reat-taching Flow Behind a Backward Facing Step", PhG Thesis, Stanford Univ. (1984)

[90]VOGEL,J.C. e EATON,J.K.,"Combined Heat Transfer and Fluid Dynamic Measurements Downstream of a Backward Facing Step",Jouunal of Heat Transfer, Vol 107 , pp 922-929, (1985).

APÊNDICE

Deduziremos agora de uma forma diferente da apresentada nos capítulos anteriores a estrutura assintótica dos escoamentos turbulentos na região de separação. Para isso devemos analisar como se comportam as regiões média e interna na região de separação. Devido ao fato de na região interna as velocidades do escoamento médio serem menores, esta região deve ser "mais afetada" pelo gradiente de pressão, apresentando primeiramente escoamentos reversos. Sendo assim, fazendo-se variar o parâmetro Δ encontramos que para $O(\Delta) = O(\tilde{\epsilon}/\epsilon)$ os termos difusivos na direção de x tornam-se relevantes, caracterizando segundo dados experimentais [Thompson e Whitelaw (1995)], o início da região de separação.

Vermos agora como se comporta do ponto de vista assintótico a região média próximo ao ponto de descolamento. Para que possamos analisar esse comportamento devemos considerar qual a influencia dos termos de difusão turbulenta na direção de x sobre a relação (II-2.8a) que representa o balanço de forças na região média. Deste modo escrevemos a seguinte equação.

$$O(\eta) = O(\epsilon^2) \text{ e } O(\Delta) = O(\tilde{\epsilon}/\epsilon)$$

$$\hat{u}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x_\Delta} + \hat{v}_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial y_\eta} = -\frac{\partial \hat{P}_\theta}{\partial x_\Delta} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_\eta} + \frac{\epsilon^3}{\tilde{\epsilon}} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x_\Delta} \quad (AP - 1)$$

Observando-se a equação (AP-1) nota-se que a influencia do termo $\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x_\Delta}$ pode ser obtida analisando-se os três possíveis comportamentos do parâmetro $\epsilon^3/\tilde{\epsilon}$ os quais são dados por $\epsilon^3/\tilde{\epsilon} > 1$, $\epsilon^3/\tilde{\epsilon} = 1$ e $\epsilon^3/\tilde{\epsilon} < 1$. No primeiro caso temos que a seguinte equação seria válida :

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x_\Delta} = 0. \quad (AP - 2)$$

Ou seja para $\epsilon^3/\tilde{\epsilon} < 1$ na verdade não existiria a região média próximo ao ponto de descolamento. Além disso, a equação (AP-2) não tende para a equação (II-2.8a) no limite quando $\Delta \rightarrow 1$ não sendo portanto uma equação principal segundo a definição de Kaplun, deste modo temos que apenas os dois casos restantes são de interesse. Para analisarmos estes dois casos utilizaremos seguinte procedimento, pela definição de região média a ordem de grandeza do fluxo turbulento de quantidade de movimento na direção de y é igual a ordem de grandeza dos termos dos termos de inércia. Este resultado pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$O(\eta) = O(\epsilon^2) \text{ e } O(\Delta) = O(\tilde{\epsilon}/\epsilon)$$

$$\epsilon^{2i+1} \tilde{\epsilon}^{2j-1} = 1, \quad (AP - 3a)$$

ou ainda

$$\epsilon^i \tilde{\epsilon}^j = \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (AP - 3b)$$

Fazendo-se $\Delta = \tilde{\epsilon}/\epsilon$ na inequação (II-2.6) obtem-se o seguinte resultado :

$$\epsilon^{3i-3} \tilde{\epsilon}^{3j} \leq 1. \quad (AP - 4)$$

Substituindo (AP-3b) em (AP-4) teremos :

$$\left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon}\right)^{\frac{3}{2}} \epsilon^{-3} \leq 1,$$

ou

$$\frac{\epsilon^3}{\tilde{\epsilon}} \geq 1. \quad (AP - 5)$$

Pela inequação (AP-5) temos que o parâmetro $\epsilon^3/\tilde{\epsilon}$ não pode ser menor que 1, contudo pela análise feita da inequação (AP-2) vimos que este parâmetro também não pode ser maior que 1 logo:

$$\frac{\epsilon^3}{\tilde{\epsilon}} = 1. \quad (AP - 6)$$

Este resultado implica que $\tilde{\epsilon}/\epsilon = \epsilon^2$ ou seja, as duas escalas próximas a parede presentes no escoamento longe do ponto de descolamento unem-se na região de separação como já havia sido demonstrado. Além disso temos que pela equação (II-2.32a),

$$O(1) = O\left(\frac{\epsilon^3}{\tilde{\epsilon}} \frac{dPw}{dx}\right).$$

Utilizando a equação (AP-6) obtém-se que :

$$O(1) = O\left(\frac{dPw}{dx}\right),$$

como já havia sido mencionado.