

Teoria de Camada Limite

Atila Pantaleão Silva Freire

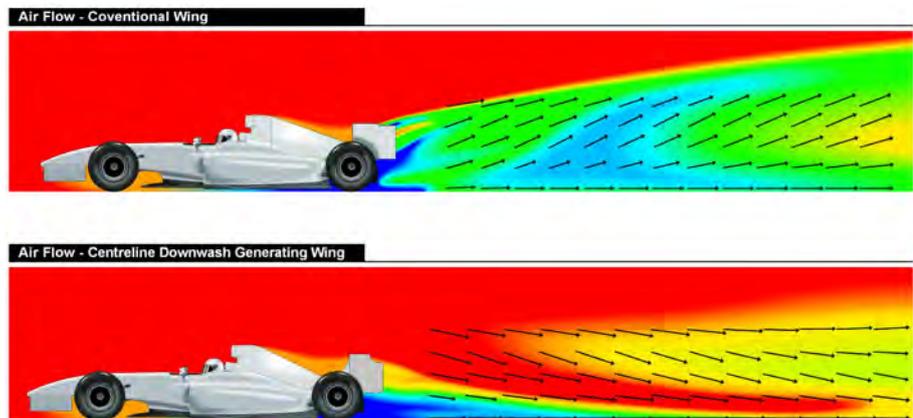
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro

O texto a seguir surgiu no ano de 1990 para uso como referência básica em uma disciplina de graduação do Curso de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da UFRJ. Desde então ele não foi revisado ou modificado. Apesar disso, sua leitura continua popular entre os alunos da Coppe e da EE. Na compilação das notas, não existiu uma preocupação com a citação da bibliografia original pertinente. Registre-se, portanto, que a base para o texto apresentado são os tratados de H. Schlichting (*Boundary-layer Theory, McGraw-Hill, 1979*), S. Goldstein (*Modern Developments in Fluid Dynamics, Vols I e II, Dover, 1964*), J. Lighthill (*An Informal Introduction to Theoretical Fluid Mechanics, Oxford, 1986*) e A. J. Scibor-Rylski (*Road Vehicle Aerodynamics, Pentech Press, 1984*).

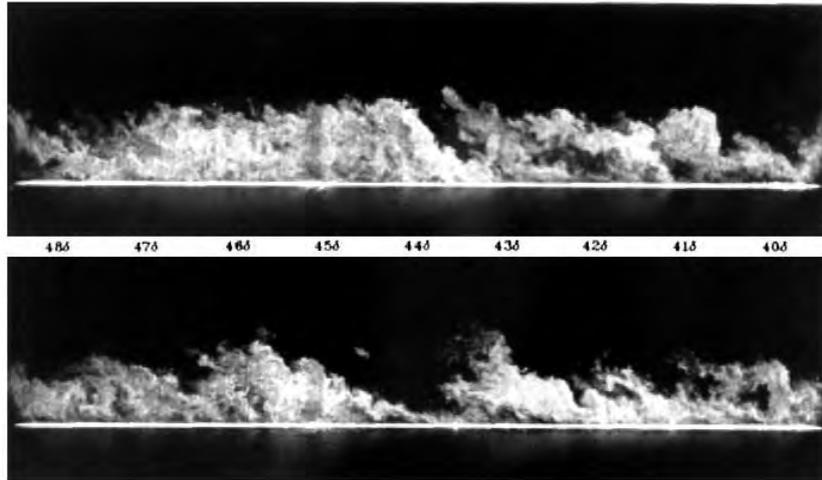
APSF



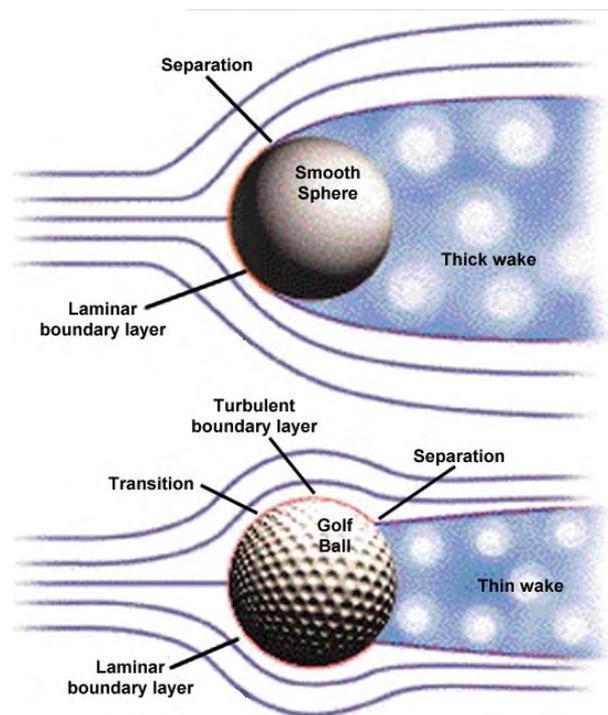
Escoamento vortical na esteira de um jato



Padrão de escoamento na esteira de um Fórmula 1



Camada limite turbulenta



Escoamento ao redor de esferas lisas e rugosas

Conteúdo

1	Introdução ao escoamento de um fluido viscoso	1
1.1	Introdução	1
1.2	Fluidos reais e fluidos ideais	2
1.3	A viscosidade	3
1.4	O princípio da similaridade; o número de Reynolds	3
1.5	Alguns resultados da teoria de um fluido ideal e sua comparação com experimentos	4
2	Introdução à teoria de camada limite	9
2.1	O conceito de camada limite	9
2.2	A difusão de vorticidade	12
2.3	A separação de camada limite	12
2.4	Turbulência	13
3	Dedução das equações de camada limite	15
3.1	As equações fundamentais do movimento de um fluido	15
3.2	A teoria matemática da camada limite	17
3.3	A forma adimensional das equações de camada limite	20
3.4	A camada limite sujeita a um gradiente externo adverso de pressão	20
3.5	As equações de camada limite na forma integral	21
4	A camada limite ao longo de uma placa plana	24
4.1	A equação de Blasius	24
4.2	Uma solução por diferenças finitas	26
4.3	Resultados numéricos	28
5	Soluções similares das equações de camada limite	34
5.1	A condição de similaridade	34
5.2	Aplicações	37
6	A Camada Limite Térmica	39
6.1	A equação da energia	39
6.2	A similaridade em problemas de transferência de calor	40
6.3	As equações de camada limite	42
6.4	Propriedades gerais da camada limite térmica	44
6.5	A camada limite térmica em escoamentos forçados	47

6.6	Outras soluções das equações de camada limite térmica	51
6.7	A camada limite térmica natural	51
7	Conceitos Fundamentais em Turbulência	54
7.1	Introdução	54
7.2	Escalas características do movimento turbulento	54
7.3	As equações de Reynolds	57
8	A Estrutura da Camada Limite Turbulenta	60
8.1	As equações de camada limite	60
8.2	Alguns resultados experimentais sobre as flutuações turbulentas	61
8.3	A estrutura da camada limite turbulenta	62
8.4	A lei da parede	65
8.5	A lei da esteira	66
8.6	Uma equação para o coeficiente de atrito local	68
9	O Comprimento de Mistura de Prandtl	69
9.1	Introdução	69
9.2	O conceito de viscosidade turbulenta de Boussinesq	69
9.3	O comprimento de mistura de Prandtl	70
9.4	Outras hipóteses sobre a tensão turbulenta	72
9.5	A lei da parede de acordo com o comprimento de mistura	73
10	A Modelagem Turbulenta através de Equações de Transporte	75
10.1	Modelos de 1 equação	75
10.2	Modelos de 2 equações	76
10.3	Formulações diretas das tensões de Reynolds	77
10.4	Condições de contorno	78
11	A Camada Limite Turbulenta Térmica	79
11.1	Introdução	79
11.2	A lei da parede térmica	81
11.3	A lei da esteira térmica	83
11.4	A lei da troca de calor superficial	85
12	Aerodinâmica de Veículos Terrestres	91
12.1	Introdução	91
12.2	A forma geral do escoamento ao redor de um automóvel	92
12.3	A origem da força aerodinâmica	93
12.4	A separação	95
12.5	A esteira	95
12.6	O efeito das rodas no escoamento	97
12.7	O escoamento entre o fundo de um veículo e o solo	104
12.8	A formação de vórtices ao redor de um carro	105
12.9	Sustentação aerodinâmica	105
12.10	Reduzindo a sustentação pelo estilo	110

12.11 “Spoilers” e asas negativas	110
12.12 Aerodinâmica e estilo	116

Capítulo 1

Introdução ao escoamento de um fluido viscoso

1.1 Introdução

A Mecânica dos Fluidos por sua riqueza e complexidade, sempre exerceu um forte fascínio sobre grandes físicos e matemáticos. Como resultado disto, no século passado, surgiu a teoria da hidrodinâmica baseada nas equações de Euler para um fluido ideal. Infelizmente, os resultados desta teoria muitas vezes apresentavam grandes contradições com os resultados experimentais – principalmente com aqueles que diziam respeito à previsão do arrasto – o que prontificou os engenheiros a criarem a ciência de hidráulica. Esta ciência se baseia fortemente num grande número de dados experimentais, diferenciando-se grandemente em seus métodos e objetivos da hidrodinâmica teórica clássica.

No início deste século, importantes desenvolvimentos na mecânica dos fluidos forneceram explicação para os fenômenos físicos que a teoria da hidrodinâmica falhava em descrever corretamente. Anteriormente a estes desenvolvimentos, já se sabia que as discrepâncias entre os resultados teóricos e os experimentos se devia a desconsideração pelas teorias das forças viscosas. Entretanto, dado o grau de complexidade das equações que regem o movimento de um fluido, as equações de Navier-Stokes, a única maneira de se descrever um escoamento era mesmo desconsiderar a influência dos termos viscosos. Como os dois fluidos de maior importância tecnológica, o ar e a água, possuem viscosidade extremamente baixa, era de se esperar que esta hipótese fornecesse bons resultados.

Apenas em 1904, Prandtl mostrou como seria possível analisar escoamentos de importância prática levando-se em conta os efeitos viscosos. Através de algumas considerações teóricas e de vários experimentos simples, ele mostrou que o escoamento ao redor de um corpo pode ser dividido em duas regiões: uma camada fina ao redor do corpo chamada de camada limite, onde as forças viscosas são importantes, e uma região externa ao corpo onde as forças viscosas podem ser desprezadas. Com este artifício, Prandtl pode deduzir um conjunto de equações mais simples que as equações de Navier-Stokes, as equações de camada limite, as quais, entretanto, eram capazes de descrever perfeitamente bem os efeitos viscosos. Estas equações tornaram-se a base para o desenvolvimento da mecânica dos fluidos teórica moderna juntamente com a teoria do aerofólio e a ciência da dinâmica dos gases.

A teoria da camada limite aplica-se particularmente ao cálculo do arrasto que age sobre um corpo quando este move em um meio fluido. Também o problema da separação de um fluido de uma superfície, de grande importância para a previsão do escoamento ao redor de corpos aerodinâmicos ou no interior de canais ou turbomáquinas, é tratado por esta teoria. Problemas de transferência de calor entre um corpo e um fluido que escoar ao seu redor são, do mesmo modo, tratados pela teoria de camada limite.

Inicialmente a teoria de camada limite foi desenvolvida para escoamentos laminares e incompressíveis. Os avanços atingidos nos 60 anos subsequentes para esta classe de escoamento foi de tal monta que, de fato, considera-se os principais pontos da teoria já resolvidos. Extensões da teoria para o caso turbulento, de maior importância prática, foram também tentadas. Desde 1880 o conceito de tensões turbulentas de Reynolds já se encontrava disponível. Apenas ele, entretanto, não era suficiente para que a análise de escoamentos turbulentos se tornasse possível. Algum progresso foi obtido com a introdução do conceito de comprimento de mistura, o qual permitiu alguns resultados analíticos serem deduzidos. Entretanto, uma teoria abrangente para a descrição de escoamentos turbulentos ainda não existe, e, dada a complexidade destes escoamentos, provavelmente assim ainda o será por algum tempo. Do mesmo modo, a descrição do fenômeno de transição de um escoamento no regime laminar para o regime turbulento, o qual é fundamental para a ciência da mecânica dos fluidos, continua eludindo os pesquisadores.

Nesta publicação, toda a teoria clássica de camada limite será revista, abrangendo desde o caso laminar incompressível até o caso turbulento compressível. O material para o caso laminar será basicamente aquele encontrado nos textos tradicionais. No tratamento de escoamento transicional e de escoamento turbulento, entretanto, muitos desenvolvimentos recentes, não obtíveis em livros textos, serão incluídos.

1.2 Fluidos reais e fluidos ideais

Muitas investigações teóricas em mecânica dos fluidos se baseiam no conceito de um fluido ideal, isto é, num fluido sem viscosidade e incompressível. No escoamento de tais fluidos, duas camadas adjacentes não sofrem forças cisalhantes, interagindo apenas através de esforços normais. Isto é equivalente a dizer que um fluido ideal não oferece qualquer resistência interna a mudanças em sua forma. Para algumas situações especiais, os fluidos ideais fornecem uma descrição satisfatória de escoamentos “reais”. Este é o caso, por exemplo, de ondas de superfície ou de jatos de água imersos em ar; por outro lado, fluidos ideais falham completamente na previsão do arrasto sofrido por um corpo. Este resultado inaceitável da teoria de um fluido ideal, remonta ao fato de que as camadas internas de um fluido real transmitem tensões tangenciais e normais. As tensões tangenciais em um fluido real estão ligadas a uma propriedade chamada a viscosidade do fluido.

Devido a ausência de forças tangenciais, na fronteira entre um fluido ideal e uma superfície existe uma diferença de velocidades tangenciais, isto é, existe deslizamento. Em um fluido real, entretanto, a existência de atrações intermoleculares força o fluido a aderir à superfície, dando origem a forças tangenciais.

A existência de tensão tangencial e a “condição de não deslizamento” em paredes constituem a principal diferença entre um fluido real e um fluido ideal.

1.3 A viscosidade

Considere o movimento de um fluido que se move entre duas placas planas paralelas, com a superior a uma velocidade constante U e a inferior em repouso. Seja h a distância entre as placas, a pressão sendo constante em todo o fluido. A experiência mostra que o fluido adere a ambas as placas, assumindo uma distribuição de velocidade igual a

$$u(y) = \frac{y}{h}U. \quad (1.1)$$

Para que o movimento seja conservado é necessário que se aplique uma força tangencial à placa superior que esteja em equilíbrio com as forças viscosas no fluido. Esta força é vista, através de experimentos, ser proporcional a U e inversamente proporcional a h . A força de atrito por unidade de área, aqui denotada τ , é portanto proporcional a u/h , o qual em geral pode ser substituído por du/dy . O fator de proporcionalidade entre τ e du/dy depende apenas da natureza do fluido e é normalmente representado por μ . Podemos então escrever

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.2)$$

A quantidade μ é chamada a “viscosidade” do fluido. Todo fluido que obedeça a relação acima é dito um fluido newtoniano. O exemplo das duas placas descrito acima se constitui num caso simples de escoamento, sua generalização se constitui na lei de atrito de Stokes, para um fluido.

O ar e a água são fluidos newtonianos.

1.4 O princípio da similaridade; o número de Reynolds

Sob certas condições, diferentes fluidos que escoam ao redor de corpos geometricamente similares e com as mesmas direções iniciais, são observados apresentarem linhas de corrente similares. Para isto, é evidente que a seguinte condição seja satisfeita: em todos os pontos geometricamente similares, as forças agindo sobre uma partícula fluida devem manter uma razão constante para todo instante de tempo.

Consideremos agora o caso onde apenas forças de atrito e forças de inércia estejam presentes. Das equações de Navier-Stokes, segue-se que a força de inércia por unidade de volume é igual a $\rho u \partial u / \partial x$. Do mesmo modo as forças viscosas por unidade de volume são dadas por $\partial \tau / \partial y$, ou seja, $\mu \partial^2 u / \partial y^2$.

A condição de similaridade pode então ser escrita como

$$\frac{\text{Efeitos de inercia}}{\text{Efeitos viscosos}} = \frac{\rho u \partial u / \partial x}{\mu \partial^2 u / \partial y^2} = \text{constante}. \quad (1.3)$$

Considerando que o fluido escoam com velocidade V sobre um corpo de dimensões características d , podemos aproximar a igualdade acima por

$$\frac{\text{Efeitos de inercia}}{\text{Efeitos viscosos}} = \frac{\rho V^2/d}{\mu V/d^2} = \frac{\rho V d}{\mu} = \text{constante.} \quad (1.4)$$

A condição de similaridade é satisfeita se a quantidade $\rho V d/\mu$ possui o mesmo valor para escoamentos diferentes. Esta quantidade é chamada o número de Reynolds, R .

1.5 Alguns resultados da teoria de um fluido ideal e sua comparação com experimentos

Nos casos de escoamentos de água e ar, a viscosidade do fluido é bastante baixa. Seria então de se esperar uma boa concordância entre os experimentos e uma teoria onde a influência da viscosidade fosse completamente desprezada, isto é, a teoria dos fluidos ideais. Vejamos aqui se isto de fato acontece.

Para a análise de ondas, excelentes resultados foram obtidos pela teoria de um fluido ideal. Para a análise do movimento de um corpo no interior de um fluido, entretanto, pouco progresso foi obtido pois, não importa quão pequena seja a viscosidade, o fluido é incapaz de deslizar sobre o corpo, e todas as soluções dadas pela teoria de um fluido ideal sempre envolvem deslizamento. A maior discrepância entre a teoria de um fluido ideal e os experimentos, diz respeito a previsão do arrasto. A teoria de um fluido ideal conduz a conclusão de que, quando um corpo se move no interior de um fluido, a força agindo na direção do movimento, isto é, o arrasto, é zero. Este resultado é obviamente desprovido de qualquer sentido físico.

Para ilustrar alguns conceitos, consideramos o escoamento ao redor de um cilindro. A disposição das linhas de corrente para um fluido ideal são mostradas na figura abaixo. Segue-se da simetria que a força resultante na direção do escoamento é nula. A distribuição de pressão medida para vários números de Reynolds é mostrada na figura seguinte. No bordo de ataque, as medições apresentam boa concordância com os resultados da teoria de um fluido ideal. Após 30° , entretanto, as diferenças começam a se tornar significativas. Note que a curva para o menor número de Reynolds é a que mais se distancia dos resultados teóricos.

Comparação entre os resultados teóricos e experimentais para o escoamento de um fluido ao redor de um corpo aerodinâmico é vista a seguir. Uma boa concordância é obtida, exceto para uma pequena região no bordo de fuga.

Embora a teoria de um fluido ideal não leve a resultados satisfatórios no que tange a previsão do arrasto, a sustentação pode ser calculada através dela com bastante sucesso. A próxima figura mostra uma comparação para um perfil do tipo Zhukovskil. A concordância é excelente.

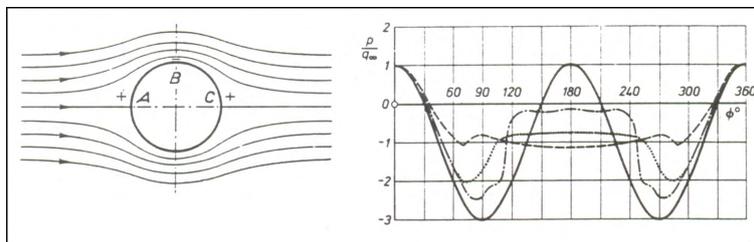


Figura 1.1: Distribuição de pressão ao redor de um cilindro (figura retirada de Schlichting).

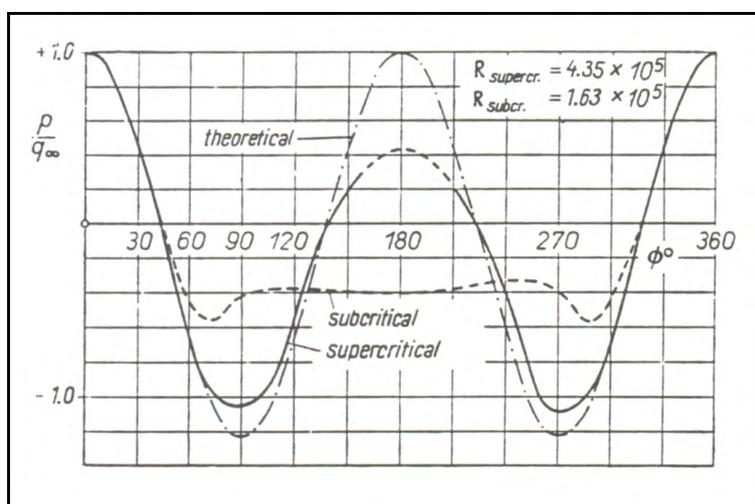


Figura 1.2: Distribuição de pressão ao redor de um cilindro (ampliada) (figura retirada de Schlichting).

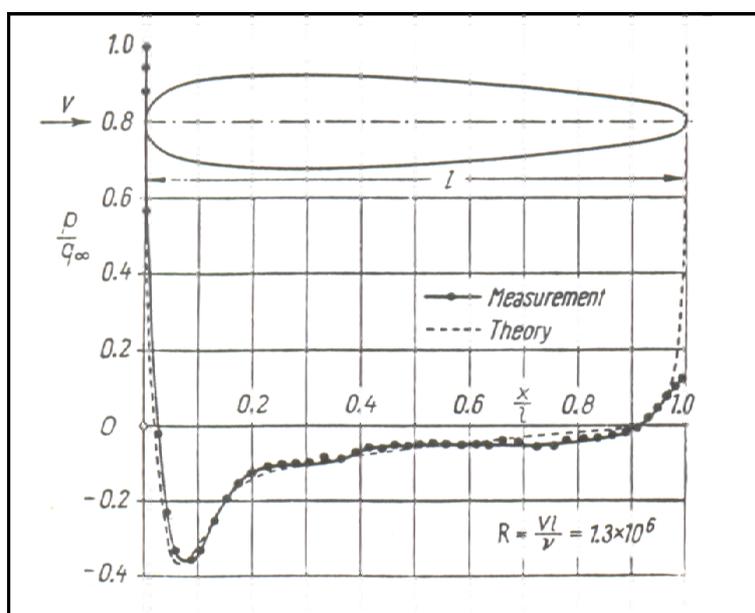


Figura 1.3: Distribuição de pressão ao redor de um aerofólio simétrico (figura retirada de Schlichting).

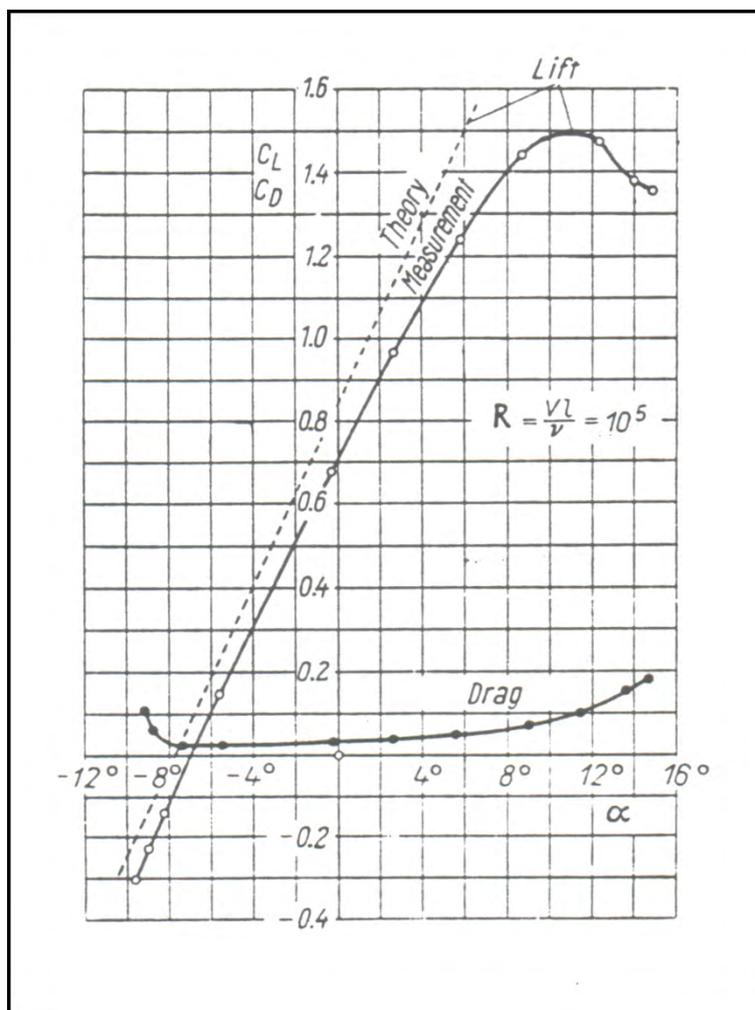


Figura 1.4: Coeficientes de sustentação e arrasto ao redor de um aerofólio para vários ângulos de ataque (figura retirada de Schlichting).

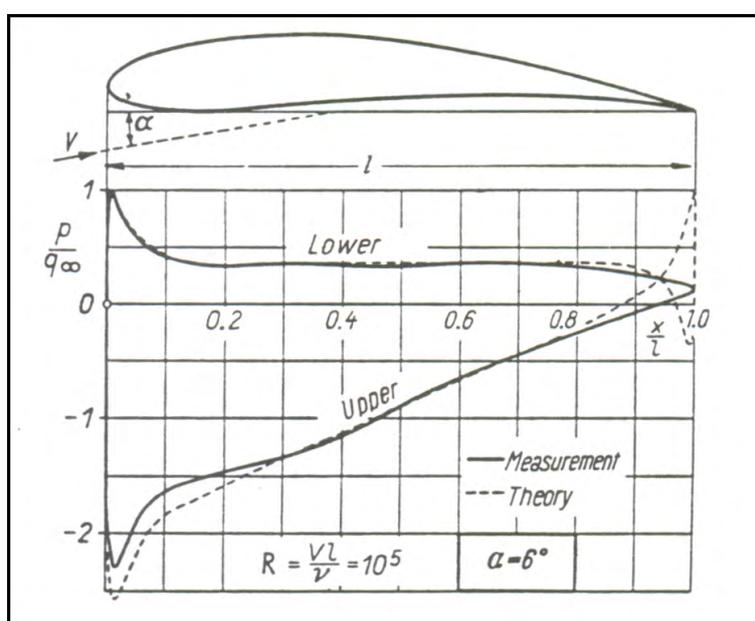


Figura 1.5: Distribuição de pressão ao redor de um aerofólio cambado (figura retirada de Schlichting).

Capítulo 2

Introdução à teoria de camada limite

2.1 O conceito de camada limite

Quando um fluido escoar sobre uma superfície sólida, o fluido imediatamente em contato com a parede adere à mesma. Observa-se também, que se a viscosidade for pequena, o aumento da velocidade, de zero para o valor do escoamento externo, ocorrerá numa região estreita. É nesta camada estreita que as forças de atrito se fazem importantes, retardando o fluido de sua velocidade externa para um completo repouso na parede. Esta região estreita é chamada de *camada limite*.

A figura seguinte representa a distribuição de velocidade na camada limite para várias posições. Antes de atingir a placa o perfil de velocidade é uniforme. Com o aumento da distância do bordo de ataque, a espessura, δ , de fluido retardado aumenta. Para viscosidades menores observa-se que a espessura da camada limite diminui. Mesmo para pequenas viscosidades, as tensões cisalhantes na camada limite ($\tau = \mu \partial u / \partial y$) são consideráveis pois os gradientes de velocidade são grandes. Isto sugere que o escoamento de um fluido com viscosidade pequena sobre um corpo pode ser dividido em duas regiões: uma camada fina adjacente à parede onde os efeitos viscosos são importantes, e uma outra camada externa à camada limite onde estes efeitos podem ser desprezados e, portanto, a teoria de um fluido ideal pode ser utilizada. Tal divisão da região fluida promove uma simplificação considerável na análise matemática de um fluido real com viscosidade pequena.

Passemos agora a uma análise de conceitos básicos de camada limite com o auxílio apenas de conceitos físicos.

A espessura de uma camada limite que permanece colada ao corpo pode ser estimada do seguinte modo. Como explicado na seção anterior, na camada limite os efeitos viscosos e os efeitos devido à inércia possuem a mesma ordem de grandeza. Podemos então escrever

$$\text{forças de inércia} = \text{ordem (forças viscosas)},$$

ou seja,

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (2.1)$$

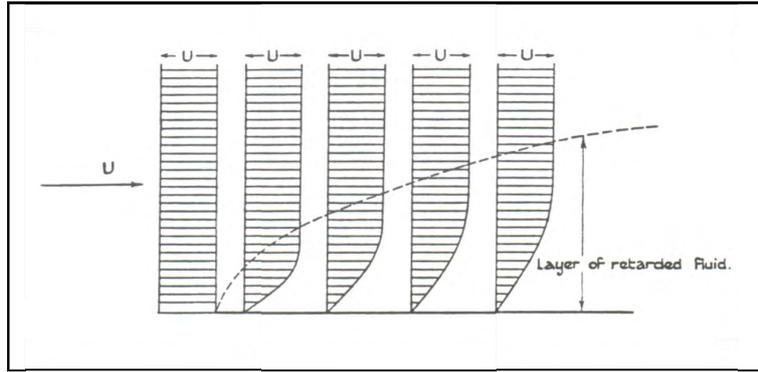


Figura 2.1: Distribuição de velocidade na camada limite.

Considerando que U e L representam a velocidade e o comprimento característico do escoamento externo e que δ representa a espessura da camada limite podemos aproximar (2.1) por

$$\rho U \frac{U}{L} = 0 \left(\mu \frac{U}{\delta^2} \right),$$

o que nos fornece

$$\delta = 0 \left(\sqrt{\frac{\mu L}{\rho U}} \right) = 0 \left(\sqrt{\frac{\nu L}{U}} \right) = 0 \left(\frac{L}{\sqrt{R}} \right) \quad \dots \quad (2.2)$$

O fator de proporcionalidade pode ser obtido através dos experimentos. Segue-se ser ele aproximadamente igual a 5 de modo que podemos escrever

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{\sqrt{R}}.$$

Observe de (2.2) que δ é proporcional a $\sqrt{\nu}$ e a \sqrt{L} . Isto implica que ao afastarmos-nos do bordo de ataque, δ aumenta proporcionalmente a \sqrt{x} , x = distância do bordo de ataque.

Para estimarmos a tensão na parede utilizamos a lei do atrito de Newton, ou seja,

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0.$$

Substituindo-se $(\partial u / \partial y)_0$ por U / δ , vem

$$\tau_0 = 0 \left(\mu \frac{U}{\delta} \right) = 0 \left(\mu U \sqrt{\frac{\rho U}{\mu L}} \right) = 0 \left(\sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{L}} \right).$$

Concluimos ser a tensão na parede proporcional a $U^{3/2}$. O arrasto total em uma placa de comprimento L e largura b é

$$D \sim b\sqrt{\rho\mu U^3 L},$$

onde o símbolo \sim denota “ordem de”.

Como o perfil de velocidade tangencial muda para cada posição de x na placa, argumentos de continuidade requerem que exista uma velocidade v perpendicular à parede diferente de zero, mas pequena. De fato, se os lados AB e CD do retângulo abaixo representam seções de um escoamento dentro da camada limite, o fluxo de quantidade de movimento através da seção AB deve ser maior que o fluxo através da seção CD (Por que?).

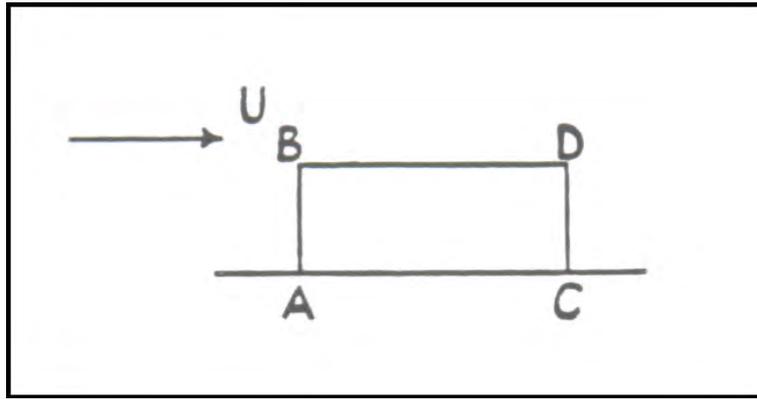


Figura 2.2: Volume de controle.

Se a parede é sólida, conservação de massa implica então que deve haver um fluxo através da seção BD . Como AB e CD são da ordem de δ , a diferença em volume de fluido por unidade de tempo entre estas seções é da ordem de $Ub\delta$ (b = largura da camada limite). Se AC e BD possuem comprimento l , o volume de fluido por unidade de tempo que deixa o volume de controle é vbl . Logo,

$$Ub\delta = 0(vbl)$$

$$v = 0\left(\frac{U\delta}{l}\right) = 0(\delta).$$

O mesmo tipo de argumentação pode também ser utilizado para se calcular o arrasto provocado pelo fluido. Desde que a massa de fluido que passa pela seção AB por unidade de tempo é da ordem de $\rho Ub\delta$, a quantidade de movimento por unidade de tempo é da ordem de $\rho U^2 b\delta$. A massa que escoia através da seção BD é da ordem de ρvbl , e sua quantidade de movimento $\rho vUbl$. Pelo resultado anterior com relação a ordem de v , segue-se que

$$\rho vUbl = 0(\rho U^2 b\delta).$$

Logo, a taxa na qual a quantidade de movimento passa através da superfície $ABCD$ é da ordem de $\rho U^2 b\delta$, e isto representa a variação de quantidade de movimento do fluido

por unidade de tempo. Mas é a força de atrito na parede que provoca esta variação em quantidade de movimento. Esta força de atrito deve portanto ser da ordem de $\rho U^2 b \delta$. Desde que a área sobre a qual ela atua é bl , a tensão na parede deve ser da ordem de $\rho U^2 \delta / l$.

2.2 A difusão de vorticidade

A vorticidade é uma grandeza vetorial com a mesma natureza da velocidade angular. Para tornar claro seu significado sigamos a explicação de Stokes. Imagine que uma esfera infinitesimal em um ponto qualquer de um fluido em movimento é instantaneamente solidificada. Se o sólido resultante possui rotação, então o fluido original possuía vorticidade, a qual é, por definição, igual a duas vezes a velocidade angular inicial da esfera.

Escoamentos nos quais a vorticidade é zero em qualquer ponto são chamados escoamentos irrotacionais. A ausência de vorticidade introduz uma enorme simplificação na matemática do problema e esta é a razão porque a teoria de escoamentos irrotacionais se desenvolveu largamente no século passado.

Fluidos ideais não podem gerar ou destruir vorticidade. Em um fluido real a vorticidade é sempre gerada em superfícies por força da condição de não deslramento. Ainda pelo argumento de Stokes, se duas camadas paralelas de fluido distando dz possuem velocidade relativa du , então a vorticidade é dada por $w = du/dz$.

Expliquemos agora a existência da camada limite através do fenômeno de convecção e difusão de vorticidade. Vorticidade quando gerada na parede é convectada pelo escoamento principal e difundida pela ação da viscosidade. Considerando que o escoamento externo possui velocidade U , verificamos que o tempo necessário para que a vorticidade viaje uma distância x ao longo da placa é da ordem de x/U . Como a distância em que a vorticidade se difunde é da ordem de $(\nu t)^{1/2}$, ela se tornará apreciável apenas dentro de uma distância $d = (\nu x/U)^{1/2}$ da placa. Esta distância é exatamente da ordem de grandeza da espessura da camada limite.

2.3 A separação de camada limite

Em todos os casos considerados até agora, a camada limite se desenvolvia sobre uma placa plana onde o gradiente de pressão longitudinal era nulo.

Consideremos agora o caso de um fluido que se move contra um gradiente de pressão paralelo à parede. Desde que, como veremos adiante, a pressão é constante em planos normais à parede, o gradiente de pressão adverso atua através de toda a camada limite até a parede. Mas, o movimento do fluido numa região próxima à parede é determinado por 3 fatores: i) ele é retardado pelo atrito na parede, ii) ele é “empurrado” para a frente pelo escoamento externo através da ação da viscosidade, iii) ele é retardado pelo gradiente adverso de pressão.

Se o gradiente de pressão fosse favorável, o fluido continuaria se movendo para a frente. Entretanto, como vimos anteriormente, a velocidade de partículas próximas à parede é pequena pelo efeito da viscosidade. Logo, a energia e a quantidade de movimento destas partículas podem não ser o suficiente para fazê-las resistirem por muito tempo contra um

gradiente de pressão adverso. Elas são, então, após algum tempo, levadas ao repouso e a seguir a um escoamento reverso na direção do gradiente de pressão. Nestas condições, o escoamento que permanecia ainda no sentido original é forçado a deixar a parede. A figura abaixo ilustra esta situação. Observe as linhas que delimitam a região da camada limite e a região de escoamento reverso.

Devido ao aparecimento de escoamento reverso, um considerável aumento da espessura da camada limite acontece. Associado a isto, elementos de fluido da camada limite penetram no escoamento principal. O ponto de separação é determinado pela condição de que o gradiente de velocidade normal a parede seja nulo, isto é,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{parede} = 0.$$

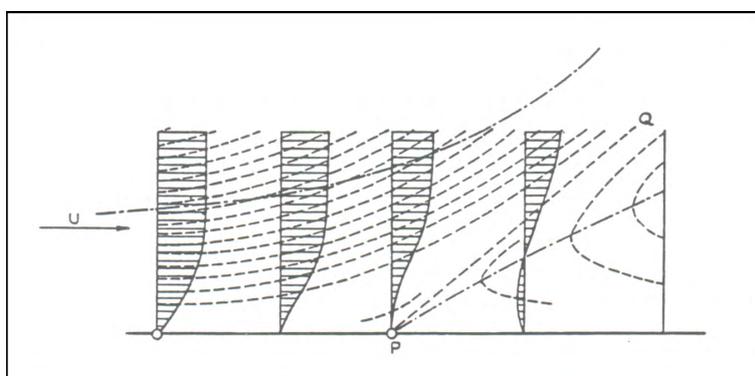


Figura 2.3: Camada limite separada.

2.4 Turbulência

Quando um fluido escoar em um tubo a moderados números de Reynolds ($l = Ud/\nu$, $d =$ diâmetro do tubo), cada partícula se move em uma linha reta paralela ao eixo do tubo. A uma certa distância da entrada o gradiente de pressão é proporcional a velocidade e o perfil de velocidade é parabólico. Este padrão de comportamento pode ser facilmente identificado por um traçador colocado na corrente de fluido. Aumentando-se a velocidade, um certo estágio é obtido onde a linha formada pelo traçador deixa de ser bem definida tornando-se irregular. O traçador começa a se misturar com o fluido, até que, em algum ponto corrente abaixo, todo o tubo parece estar preenchido por fluido colorido. Quando o fluido atinge este grau de “mistura”, o escoamento é dito turbulento.

Os primeiros experimentos com traçadores em tubos foram executados por O. Reynolds que observou a transição do regime laminar para o regime turbulento ocorrer para um certo valor do número de Reynolds, o número de Reynolds crítico. De fato, o valor do número de Reynolds crítico depende dos detalhes do aparato experimental, em particular, das condições de entrada do fluido no tubo. Com aparatos experimentais onde os níveis de perturbação são mantidos a um mínimo, números de Reynolds críticos superiores a

40.000 foram obtidos. Observa-se, entretanto, que para um Reynolds inferior a 2300 o escoamento sempre se encontra no regime laminar. Aqui,

$$R_{critico} = \bar{U}d/\nu,$$

\bar{U} = velocidade média do escoamento para uma dada seção do tubo.

Este valor (2300) deve ser interpretado como o limite inferior para o número de Reynolds crítico, abaixo do qual nem mesmo as mais fortes perturbações podem tornar o fluido turbulento.

Na região turbulenta as perdas de carga se tornam proporcionais a, aproximadamente, o quadrado da velocidade. Isto implica que, para se passar uma certa quantidade de fluido em um tubo no regime turbulento, necessita-se um gradiente de pressão muito maior que aquele, caso o fluido escoasse no regime laminar. Isto é resultado da grande quantidade de energia dissipada no escoamento turbulento, a qual causa a resistência ao avanço aumentar consideravelmente. A maioria dos escoamentos encontrados na natureza ocorrem no regime turbulento.

A camada limite também se torna turbulenta se a velocidade do escoamento externo for alta o suficiente. Neste caso, entretanto, o fenômeno é muito mais complexo que aquele descrito acima. Para uma placa plana com ponta afiada, a transição parece ocorrer quando o Reynolds crítico ($= U\delta/\nu$) é igual a 3.000 (δ = espessura da camada limite). Isto corresponde a um valor de $R_{critico} = Ux/\nu = 3 \times 10^5$, onde x é a distância do bordo de ataque. De fato, como no exemplo anterior do tubo, na camada limite o $R_{critico}$ também depende do nível de perturbações externas. Deste modo, valores de $R_{critico} = (U\delta/\nu)$ variando de 1.650 a 5.790 já foram observadas.

Na transição do regime laminar para o turbulento, a espessura da camada limite aumenta abruptamente. Enquanto no escoamento laminar a tensão na parede é proporcional a $U^{3/2}$, no escoamento turbulento ela é proporcional a U^n onde $n \in [3/2, 2]$. O perfil de velocidade na camada limite também é bastante diferente do escoamento turbulento para o laminar. O aumento de espessura na camada limite turbulenta é provocado pelo vigoroso movimento transversal de fluido, que promove uma maior troca de quantidade de movimento entre as partículas de fluido na camada limite. De fato, o aumento da troca de quantidade de movimento na direção transversal ao escoamento faz com que a ação retardadora da parede se espalhe mais e a espessura da camada limite aumente. A transição para a turbulência pode acontecer sobre um corpo antes que o escoamento separe.

Capítulo 3

Dedução das equações de camada limite

3.1 As equações fundamentais do movimento de um fluido

Os fluidos de interesse no escopo deste trabalho são os fluidos newtonianos. Nestes fluidos, a taxa de deformação local se relaciona com as tensões através de relações lineares. A maioria dos fluidos de interesse prático, em particular o ar e a água, pertencem a esta categoria.

As equações do movimento são deduzidas a partir da 2ª lei de Newton, a qual afirma ser o produto da massa pela aceleração igual a resultante das forças externas agindo sobre um corpo. No movimento de um fluido consideramos duas classes de forças: forças que atuam através da massa do corpo e forças que atuam através de sua superfície. Logo, podemos escrever

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{F} + \vec{P},$$

onde D/Dt denota a derivada substantiva, \vec{F} as forças de corpo e \vec{P} as forças de superfície.

As forças de corpo são forças externas conhecidas; entretanto, as forças de superfície, para sua determinação, dependem de hipóteses constitutivas que relacionem a taxa de deformação local com a tensão resultante. Os fluidos newtonianos obedecem a lei do atrito de Stokes.

Não faremos aqui maiores comentários sobre as hipóteses de Stokes por não ser este o objetivo do curso. Para nós é suficiente saber que o movimento de um fluido é regido pelas relações abaixo

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \text{div } \vec{u} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv}{Dt} = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{u} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dw}{Dt} = Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{u} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

As equações acima formam a base de toda a mecânica dos fluidos. Hoje não existe qualquer dúvida de que elas são capazes de descrever corretamente qualquer tipo de escoamento não importando quão complexo ele seja. Estas equações são conhecidas como as equações de Navier-Stokes. Elas são complementadas pela equação de continuidade de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \quad (3.4)$$

e por outras relações termodinâmicas que combinem pressão, densidade e temperatura. Duas destas relações são a equação de um gás perfeito e a equação da energia (primeira lei da termodinâmica).

As equações de Navier-Stokes podem ser bastante simplificadas para o caso de um escoamento incompressível ($\rho = \text{constante}$). Neste caso, temos $\operatorname{div} \vec{u} = 0$. Para pequenas variações de temperatura, as equações da termodinâmica se tornam supérfluas de modo que o campo de velocidade pode ser considerado independente delas. Com as simplificações adequadas as equações de Navier-Stokes se tornam então

$$\rho \frac{Du}{Dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (3.5)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (3.6)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.8)$$

Em notação vetorial as equações acima assumem a forma

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{F} - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (3.9)$$

As condições de contorno a serem satisfeitas pelas equações acima em superfícies sólidas são a condição de não deslizamento e a condição de não penetrabilidade que podem ser escritas como

$$\vec{u} = 0. \quad (3.10)$$

3.2 A teoria matemática da camada limite

As equações da seção anterior fornecem uma representação correta dos escoamentos de um fluido newtoniano. Todavia, exceto para um número limitado de problemas especiais, elas são extremamente difíceis de serem resolvidas.

Uma das principais dificuldades reside no fato das equações de Navier-Stokes serem não lineares. Quando por algum motivo os termos quadráticos são identicamente nulos ou desprezíveis, soluções exatas podem ser obtidas, as quais, entretanto, possuem um domínio restrito de validade. Por outro lado, quando os termos viscosos são desprezados, as equações resultantes fornecem soluções cujos prejuízos já foram apontados na lição 1. Na realidade, vimos anteriormente que, mesmo para fluidos com pequena viscosidade, existem regiões do escoamento onde os termos de inércia e os termos viscosos devem possuir a mesma ordem de grandeza de tal modo que a condição de não deslizamento seja satisfeita.

Na teoria que se segue mostraremos como as equações de Navier-Stokes podem ser simplificadas para escoamentos a altos números de Reynolds para fornecer soluções aproximadas para este caso. Por simplicidade, consideraremos o caso de escoamentos bidimensionais, incompressíveis ao redor de um corpo esbelto.

Para deduzir as equações de camada limite, assumimos que a mudança de velocidade do fluido, de seu valor zero na parede, para o valor do escoamento externo, se dá numa região fina. Deste modo consideraremos duas regiões:

1. Uma região na vizinhança do corpo na qual o gradiente de velocidade $\partial u/\partial y$ é grande. Nesta região a viscosidade do fluido exerce profunda influência no escoamento pois a tensão cizalhante $\tau = \mu(\partial u/\partial y)$ assume grandes valores.
2. Na região restante, tais gradientes de velocidade não ocorrem, tornando-se os efeitos viscosos sem importância. Nesta região o escoamento é potencial.

Vimos anteriormente que a espessura da camada limite aumenta com a viscosidade, ou mais geralmente, que ela decresce com o número de Reynolds. De fato, vimos que

$$\delta \sim \sqrt{\nu}$$

Dada a relação acima, é razoável assumirmos que a espessura δ é bastante pequena quando comparada com uma dimensão linear, L , do corpo sob consideração, isto é, assumirmos que

$$\delta \ll L. \quad (H.1)$$

Toda a teoria de camada limite é baseada na hipótese (H.1) acima. A partir dela uma estimativa da ordem de grandeza de cada termo na equação de N-S será feita, de onde as simplificações seguirão.

Para realizar a análise, primeiramente, adimensionalizamos as equações (3.5) – (3.7) com relação a velocidade do escoamento externo, U , e a um comprimento característico do corpo L . Deste modo as derivadas $\partial u/\partial x$ podem ser aproximadas por $\Delta u/\Delta x$, o que nos dá

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = 0\left(\frac{1-0}{1-0}\right) = 0(1).$$

Do mesmo modo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0\left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right) = 0\left(\frac{1-0}{\delta-0}\right) = 0\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

onde, lembramos, δ foi adimensionalizado por L . Da equação da continuidade obtemos

$$0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0(1).$$

Desde que $y = 0(\delta)$, segue-se que $v = 0(\delta)$. Para a equação da conservação da quantidade de movimento na direção x , obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\partial p/\partial x + 1/R[\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2] \quad (3.11)$$

$\begin{matrix} 1 & 1 & \delta(1/\delta) & & 1/R(1+1/\delta^2) \end{matrix}$

onde a ordem de grandeza de cada termo já se encontra indicada acima.

O termo $\partial u/\partial t$ foi considerado de ordem 1 o que exclui acelerações súbitas de nossa formulação. Como na camada limite os efeitos viscosos devem ter a mesma ordem de grandeza que os efeitos do termo de inércia, vem

$$\left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0(1),$$

ou seja

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\delta^2} = 0(1),$$

$$\delta = 0(R^{-1/2}).$$

Para a conservação da quantidade de movimento na direção y obtemos

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\partial p/\partial y + 1/R[\partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2] \quad (3.12)$$

$\begin{matrix} \delta & \delta & \delta(\delta/\delta) & & \delta^2(\delta+1/\delta) \end{matrix}$

A equação da continuidade permanece inalterada na camada limite. A ordem de grandeza dos vários termos na equação (3.11), entretanto, sugere que o termo $\partial^2 u/\partial x^2$

pode ser desprezado quando comparado ao termo $\partial^2 u / \partial y^2$. Da equação (3.12) concluímos ser o termo $\partial p / \partial y$ de ordem δ . Logo, a variação de pressão na camada limite na direção transversal ao escoamento é de ordem δ^2 , isto é, muito pequena. Concluímos ser a pressão na direção normal praticamente constante; ela portanto pode ser considerada igual aos valores na borda da camada limite sendo determinada pelo escoamento externo. A pressão externa é, em outras palavras, impressa pela camada limite sobre a parede.

Na borda da camada limite, a velocidade u torna-se igual àquela do escoamento externo U . Lembrando que no escoamento externo não existem grandes gradientes de velocidade, obtemos

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

No caso de escoamento estacionário, a equação acima se reduz a

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.13)$$

Podemos agora, finalmente, chegar as equações de camada limite.

Das 3 incógnitas iniciais, u, v, p , nosso problema agora se reduziu a 2 incógnitas, u e v . De fato, a equação (3.12) se reduziu a

$$p = p(x),$$

a qual pode ser obtida diretamente da equação (3.13). As 3 equações originais dão lugar ao sistema

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.15)$$

onde $U = U(x)$ é conhecido do escoamento externo.

As equações (3.14) e (3.15) devem satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$y = 0 \quad : \quad u = v = 0,$$

$$y \rightarrow \infty \quad : \quad u = U$$

As simplificações matemáticas que resultaram nas equações (3.14) e (3.15) são enormes. Elas reduzem o grau das equações de Navier-Stokes passando de um sistema de equações elípticas para um sistema de equações parabólico. A pressão deixou de ser uma incógnita passando agora a ser obtida do escoamento potencial externo.

3.3 A forma adimensional das equações de camada limite

As hipóteses feitas na dedução das equações de camada limite, equações (3.14) e (3.15), implicam serem estas tão melhores uma aproximação às equações de N-S quanto maior for o número de Reynolds. De fato, as equações de camada limite podem ser vistas como sendo resultante de uma análise assintótica das equações de Navier-Stokes possuindo um maior grau de precisão à medida que o número de Reynolds aumenta.

As equações de camada limite em sua forma adimensional são escritas como

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.17)$$

onde $R = UL/\nu$.

Fazendo a transformação

$$v' = v\sqrt{R},$$

$$y' = y\sqrt{R},$$

elas se reduzem a

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v' \frac{\partial u}{\partial y'} = U \frac{dU}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0. \quad (3.19)$$

Este nosso conjunto de equações não depende mais do número de Reynolds. A importância prática disto é que, dada a forma geométrica de um corpo, e desde que a camada limite seja laminar, a solução das equações (3.18) e (3.19) será válida para qualquer número de Reynolds. Em particular, segue-se que a posição do ponto de separação é independente do número de Reynolds. As equações de camada limite portanto exibem similaridade com respeito ao número de Reynolds.

3.4 A camada limite sujeita a um gradiente externo adverso de pressão

Tentemos agora esclarecer melhor sob que circunstâncias fluido deixa a camada limite penetrando no escoamento externo, no fenômeno que é chamado “separação”. Como dito no capítulo 2, quando uma região de gradiente de pressão adverso existe, as partículas de fluido próximas à parede, e portanto mais lentas, não conseguem avançar muito contra a pressão devido à sua pouca energia cinética, defletindo-se lateralmente e penetrando no

escoamento externo. Em geral, após o ponto de separação as partículas de fluido seguem o gradiente de pressão se movendo em uma direção oposta à direção do escoamento principal.

O ponto de separação é definido como sendo o limite entre as regiões de escoamento que progride e de escoamento reverso, ou seja,

ponto de separação:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.$$

Para calcular o ponto de separação de um fluido precisaríamos a princípio resolver as equações de camada limite. Estas equações, porém, não permanecem válidas numa região bem próxima do ponto de separação pois, o aumento abrupto da espessura da camada limite, faz com que as hipóteses através das quais elas foram deduzidas não sejam mais satisfeitas. Na realidade, junto ao ponto de separação, surge uma estrutura de escoamento bastante complexa regida por equações muito diferentes das equações (3.14) e (3.15), mas ainda mais simples que as equações de Navier-Stokes. Um estudo profundo desta região se encontra claramente fora do escopo deste trabalho, constituindo-se em tema avançado de pesquisa. Façamos então aqui uma análise simplificada do fenômeno de separação pela comparação do gradiente de pressão com a distribuição de velocidade.

A equação (3.15) junto com as condições de contorno $u = v = 0$, implica que em $y = 0$ temos

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{dp}{dx}. \quad (3.20)$$

Uma subsequente diferenciação com relação a y nos dá

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{y=0} = 0.$$

A equação (3.20) mostra que a curvatura do perfil de velocidade na parede troca de sinal de acordo com o gradiente de pressão. Para uma região com gradiente de pressão favorável ($dp/dx < 0$), temos que $(\partial^2 u / \partial y^2)_{parede} < 0$, e então $\partial^2 u / \partial y^2 < 0$ através de toda camada limite. Numa região com gradiente de pressão adverso ($dp/dx > 0$), $(\partial^2 u / \partial y^2)_{parede} > 0$. Como longe da parede deveremos ter de qualquer modo $\partial^2 u / \partial y^2 < 0$, segue-se que existe um ponto onde $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$. Este ponto é um ponto de inflexão do perfil de velocidade na camada limite. Concluimos que, numa região de escoamento potencial externo retardado, o perfil de velocidade na camada limite sempre apresentará um ponto de inflexão.

3.5 As equações de camada limite na forma integral

O cálculo completo do escoamento na camada limite através das equações diferenciais (3.14) e (3.15) pode ser algumas vezes bastante difícil dependendo da geometria do corpo.

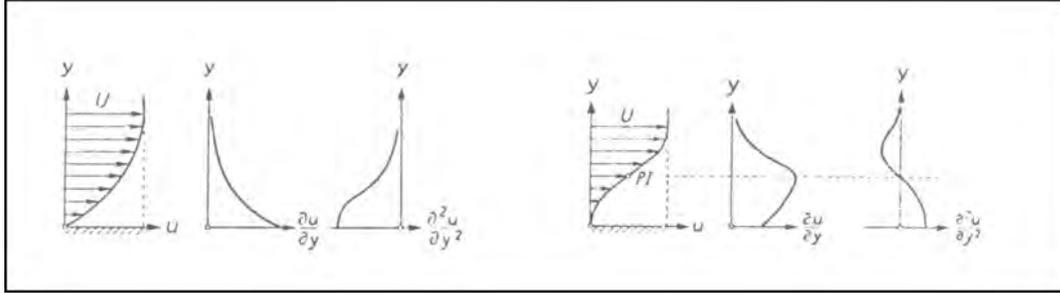


Figura 3.1: Distribuição de velocidade em uma camada limite separada.

Torna-se portanto muitas vezes necessário recorrer a métodos aproximados que forneçam soluções “baratas” mas de suficiente grau de precisão. Tais métodos podem ser obtidos se, por exemplo, não exigirmos que as equações diferenciais sejam satisfeitas em cada ponto do campo do escoamento. Ao contrário, podemos exigir que apenas uma média das propriedades do escoamento tomada sobre toda a espessura da camada limite satisfaça as equações e as condições de contorno. Esta média é tomada através de um processo de integração da equação de conservação da quantidade de movimento na direção x .

Consideremos aqui apenas o caso de escoamentos estacionários, bi-dimensionais e incompressíveis. Integração da equação (3.15) com respeito a y de $y = 0$ a $y = \delta$, nos fornece

$$\int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U \frac{du}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_0}{\rho} \quad (3.21)$$

A tensão na parede τ_0 , substitui o termo $\mu(\partial u/\partial y)_0$, de modo que a equação (3.21) vale tanto para escoamentos laminares quanto para escoamentos turbulentos, desde que para o último caso u e v representem grandezas médias.

Na equação acima, a velocidade normal, v , pode ser substituída por

$$v = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

para obtermos

$$\int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy - U \frac{dU}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_0}{\rho}. \quad (3.22)$$

Integrando por partes o segundo termo

$$\int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = U \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

a equação (3.22) se reduz a

$$\int_0^\delta \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{dU}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_0}{\rho},$$

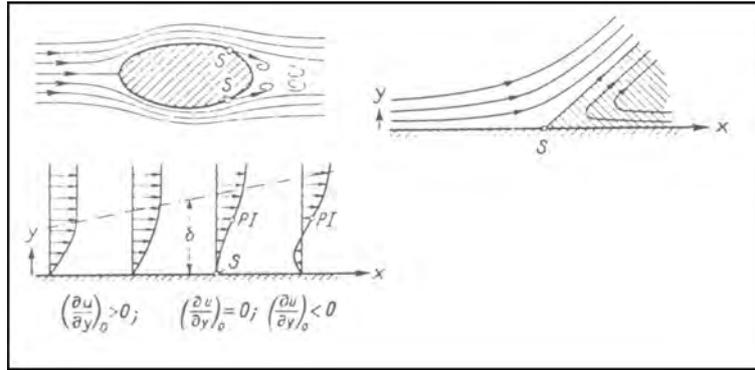


Figura 3.2: Caracterização do escoamento próximo a um ponto de separação.

a qual pode ser escrita como

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} [u(U - u)] dy + \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta} (U - u) dy = \frac{\tau_0}{\rho}.$$

Introduzindo a espessura de deslocamento e a espessura de quantidade de movimento como

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy,$$

e

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy,$$

obtemos finalmente

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} (U^2 \delta_2) + \delta_1 U \frac{dU}{dx}. \quad (3.23)$$

Esta equação é a equação integral da camada limite. Como dito no início desta seção, ela é extensamente utilizada no desenvolvimento de métodos aproximados para o cálculo das propriedades de camada limite. Todavia, ela também possui importante aplicação na área experimental por nos fornecer uma maneira indireta de calcular τ_0 através da medida de δ_1 e de δ_2 . De fato, dada a forte variação de $\partial u / \partial y$ numa região muito próxima à parede, é fortemente desaconselhável se calcular τ_0 pela expressão

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

com $(\partial u / \partial y)_{y=0}$ sendo avaliado por medidas experimentais.

A espessura de deslocamento, δ_1 , indica a distância da parede pela qual as linhas de corrente são deslocadas devido a formação da camada limite. Já δ_2 indica a espessura da perda de quantidade de movimento do escoamento principal pela presença da parede.

Capítulo 4

A camada limite ao longo de uma placa plana

4.1 A equação de Blasius

Consideremos o caso de uma placa plana sobre a qual escoia fluido com uma velocidade constante paralela ao eixo x . O escoamento externo uniforme não é afetado pela presença da placa exceto na camada limite. A região fluida é infinita e a origem do sistema de coordenadas é colocado na ponta da placa, com x sendo medido ao longo da corrente, e y normal a ela. Na ausência de gradientes de pressão, as equações de camada limite se tornam

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.2)$$

com as seguintes condições de contorno

$$y = 0, \quad x > 0, \quad u = v = 0;$$

$$y \longrightarrow \infty, \quad u = U;$$

$$x = 0, \quad u = U.$$

A solução de Blasius para a equação (4.2) é apresentada como

$$\Psi = \sqrt{\nu U x} f(\eta), \quad (4.3)$$

onde

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}, \quad (4.4)$$

e lembramos que $u = \partial\Psi/\partial y$, $v = -\partial\Psi/\partial x$.

Nas novas variáveis, as componentes da velocidade são

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} = U f'(\eta), \quad (4.5)$$

$$v = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} (\eta f' - f), \quad (4.6)$$

onde o apóstrofe denota diferenciação com respeito a η .

Obtendo os termos restantes de (4.2), sua substituição nos dá a seguinte equação diferencial ordinária,

$$f f'' + 2f''' = 0 \quad (4.7)$$

cujas condições de contorno obtidas de (4.5) e (4.6) são

$$\eta = 0, \quad f = f' = 0; \quad \eta \longrightarrow \infty, \quad f' = 1. \quad (4.8)$$

A equação (4.7) é chamada a equação de Blasius.

Para o caso simples da placa plana, as equações diferenciais parciais (4.1) e (4.2) foram transformadas em uma equação diferencial ordinária pela transformação de similaridade (4.4). A equação diferencial resultante é não linear e de terceira ordem. As 3 condições de contorno, (4.8), são portanto suficientes para determinar a solução completamente.

Em seu trabalho original Blasius obteve soluções analíticas aproximadas e soluções numéricas para a equação (4.7). As soluções aproximadas foram obtidas considerando-se formas apropriadas de f para valores grandes e pequenos de η .

Para valores pequenos de η , f toma a forma

$$f(\eta) = \sum_0^{\infty} (-1)^n C_n \eta^{3n+2} \quad (4.9)$$

onde

$$(3n+2)(3n+1)(3n)C_n = \sum_0^{n-1} (3i+2)(3i+1)C_i C_{n-1-i},$$

e $C_0 = 1/2f''(0)$. Os primeiros coeficientes da série (4.9) são

$$C_1 = (1/5!)(2C_0)^2, \quad C_2 = (11/8!)(2C_0)^3, \quad C_3 = (375/11!)(2C_0)^4,$$

$$C_4 = (27897/14!)(2C_0)^5, \quad C_5 = (3817137/17!)(2C_0)^6.$$

O valor de $f''(0)$ é 0.469600.

Uma solução assintótica para altos valores de η pode ser obtida considerando-se que $f(\eta) = \eta - \beta + \phi(\eta)$, onde $\phi(\eta)$ é pequeno. Desprezando-se o produto $\phi\phi''$, obtém-se uma equação aproximada linear para ϕ ,

$$\phi''' + (\eta - \beta)\phi'' = 0.$$

Fazendo-se $\xi = \eta - \beta$, segue que

$$\phi'' \sim A \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right),$$

$$e, \quad \phi \sim A\xi^{-2} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right).$$

Como $\beta = 1.21678$, a solução para η grande torna-se

$$f(\eta) \sim (\eta - \beta) + A(\eta - \beta)^{-2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\eta - \beta)^2\right). \quad (4.10)$$

O valor de A deve ser determinado de modo que (4.9) e (4.10) e suas derivadas sejam contínuas num dado ponto de encontro η_f do domínio. Uma comparação entre a solução analítica aproximada e a solução numérica de Blasius é apresentada na figura 1 e na Tabela 1. Como visto, o resultado é surpreendentemente bom.

4.2 Uma solução por diferenças finitas

A equação (4.7) foi resolvida numericamente por Blasius utilizando-se o fato muito particular de que $f(0) = 0$ e que, se $F(\eta)$ é uma solução, logo também o é $f = aF(a\eta)$, onde a é uma constante arbitrária.

Logo,

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = a^2 \lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(a\eta) = a^2 \lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(\eta),$$

e como $f'(\infty) = 1$, a constante a pode ser determinada por

$$a = \{\lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(\eta)\}^{1/2}.$$

Como $f''(0) = a^3 f''(0)$, podemos fazer por conveniência $F''(0) = 1$ e obter

$$f''(0) = \{F'(\infty)\}^{-3/2}. \quad (4.11)$$

O cálculo numérico realizado por Blasius foi então realizado em dois estágios:

1. $F(\eta)$ foi calculado com os valores iniciais $F(0) = F'(0) = 0, F''(0) = 1$. Com isto $f''(0)$ pode ser obtido através de (4.11).
2. a solução f foi obtida através do valor de $f''(0)$ obtido.

O método descrito acima é estável, não apresentando qualquer acúmulo significativo de erros.

Outros métodos de solução da equação de Blasius são a discretização direta da equação de terceira ordem e os métodos de “shooting”, que separam esta equação em 3 equações ordinárias de 1ª ordem.

A seguir descreveremos um procedimento mais simples que, usando o método de diferenças finitas, soluciona a equação (4.7). Ao introduzir uma nova variável dependente, a equação original ordinária não linear é separada em duas equações lineares com um acoplamento não linear. A primeira equação é de segunda ordem e apresenta condições de contorno do primeiro tipo em ambas as extremidades; a segunda é de primeira ordem e pode ser resolvida por um procedimento de quadratura. Iterações não lineares são necessárias no tratamento do acoplamento não linear.

Introduzamos agora uma nova variável dependente:

$$f' = g. \quad (4.12)$$

A equação de Blasius fica então da seguinte forma:

$$2g'' + fg' = 0, \quad (4.13)$$

com as seguintes condições de contorno para a variável g :

$$g(0) = 0 \quad \text{e} \quad g(\infty) = 1, \quad (4.14a, 4.14b)$$

onde assumimos $g(\infty) = g(\eta = H)$, onde H é a altura do domínio de integração.

Sendo $N - 1$ o número de espaçamentos, temos a seguinte relação :

$$\Delta\eta = \frac{H}{n - 1}. \quad (4.15)$$

Logo, após j passos, estaremos na posição :

$$\eta_j = (j - 1)\Delta\eta. \quad (4.16)$$

Adotamos como simbologia $g_j = g(\eta_j)$ e $f_j = f(\eta_j)$. Discretizando a Eq.(4.13) com diferenças finitas centrais, de segunda ordem de precisão, temos:

$$2\frac{g_{j-1} - 2g_j + g_{j+1}}{\Delta\eta^2} + f_j\frac{g_{i+1} - g_{j-1}}{2\Delta\eta} = 0, \quad (4.17)$$

com as seguintes condições de contorno para a variável g :

$$g_1 = 0 \quad \text{e} \quad g_N = 1. \quad (4.18a, 4.18b)$$

Aplicando-se a Eq.(4.17) no intervalo $2 \leq j \leq n - 1$, obtém-se um sistema de equações lineares para as incógnitas g_j , na forma de uma matriz tridiagonal. A solução deste sistema pode então ser obtida pelo método de Thomas.

A Eq.(4.12) pode então ser resolvida pela regra do trapézio:

$$f_j = f_{j-1} + \frac{g_j + g_{j-1}}{2}\Delta\eta. \quad (16)$$

Atribuindo-se valores iniciais a f e a g , pode-se então dar início à iteração não linear, com aplicação das Eq.(4.17) e (4.19). Esta iteração deve ser repetida até que o critério de convergência adotado seja satisfeito. Nos cálculos de camada-limite, os maiores erros

surtem no cálculo da tensão na parede. Por esta razão, usamos esta tensão como critério de convergência. A iteração deve parar quando

$$|f''_{j+1} - f''_j| < \varepsilon, \quad (4.20)$$

onde ε é um número pequeno.

4.3 Resultados numéricos

Ao apresentar resultados numéricos, é importante mostrar que estes são confiáveis. Isto foi feito testando-se a malha utilizada e comparando nossos resultados com os clássicos. Na Tabela 4.2, comparamos as soluções para várias malhas diferentes e comprovamos a consistência dos resultados. Na Tabela 4.3, comparamos os resultados com os de Howarth. Podemos então mostrar nossos resultados através das Fig. 4.2 e 4.3.

Pela similaridade dos perfis de velocidade, temos que $u/U_\infty = \phi(y/\delta) = \phi(\eta)$, onde a função ϕ deve ser a mesma a qualquer distância x do bordo de ataque. Pela transformação utilizada na dedução da equação de Blasius, $\phi(\eta) = f'(\eta)$. O comportamento desta função, ou seja, a variação da componente longitudinal da velocidade pode ser observada na Fig. 4.2 e na Tabela 4.2.

Muitas vezes, ao se aplicar uma fórmula, ou um conjunto de fórmulas, a um determinado intervalo h , percebe-se que é necessário diminuí-lo, por problemas de instabilidade ou de precisão. Quando isto acontece, pode-se fazer os cálculos novamente para $h/2$, $h/4$, $h/8$, ... , ou usar um método de extrapolação.

Nas Tabelas 4.2 e 4.3, são mostrados os valores de f e f' para $\Delta\eta = 0$. Para o cálculo destes valores, foi utilizada a extrapolação de Richardson, um método que pode ser aplicado às fórmulas de quadratura trapezoidal ou a qualquer método computacional de malha constante h e erro descrito em termos de h . Sabendo-se os valores das funções para $\Delta\eta = 0.2$ e $\Delta\eta = 0.1$, usamos a seguinte relação para calcular o valor no limite, quando $\Delta\eta \rightarrow 0$:

$$f'(\Delta\eta = 0) = f'(\Delta\eta/2) + \frac{[f'(\Delta\eta/2) - f'(\Delta\eta)]}{3}. \quad (4.21)$$

Na Fig. 4.3, é representada a variação da componente transversal da velocidade. Podemos observar que esta componente se afasta de zero à medida em que η tende a infinito. Isto significa que, com o crescimento da espessura da camada limite, o fluido é afastado da placa ao escoar ao longo da mesma. Na Tabela 4.3, encontramos o valor desta componente da velocidade no infinito para diferentes espaçamentos.

Além do comportamento das funções f e g , existem algumas variáveis que merecem ser estudadas, como as espessuras de deslocamento e de quantidade de movimento da camada-limite. Com a diminuição da velocidade na camada limite, o volume de fluxo que passa por uma mesma região também diminui. A espessura de deslocamento representa uma relação entre o volume reduzido e o volume que escoaria se não houvesse a placa. Ela pode ser entendida também como a distância através da qual as linhas de corrente, próximas à camada limite, são afastadas da placa pelo retardamento do fluido na camada limite. A espessura de quantidade de movimento, representa uma relação entre a perda

de quantidade de movimento e a quantidade de movimento que haveria se não houvesse a placa. Estas duas espessuras são dadas pelas fórmulas abaixo:

$$\delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \int_{\eta=0}^{\infty} [1 - f'(\eta)] d\eta, \quad (4.22)$$

$$\delta_2 = \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \int_{\eta=0}^{\infty} f'(1 - f') d\eta. \quad (4.23)$$

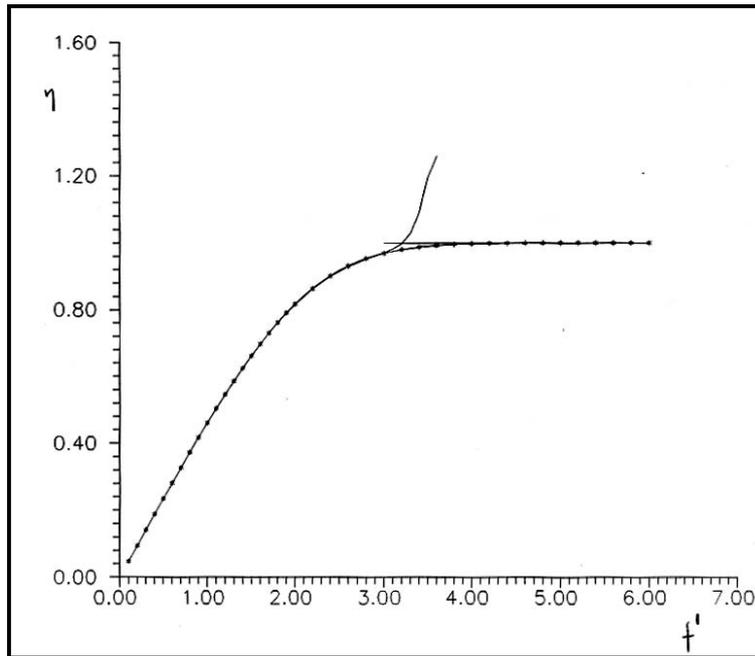


Figura 4.1: Solução analítica para a equação de Blasius.

n	F' numérico	F' analítico
0.1	0.04695908	0.046959
0.2	0.09390530	0.093905
0.3	0.14080562	0.140806
0.4	0.18760514	0.187905
0.5	0.23422748	0.234227
0.6	0.28057547	0.280575
0.7	0.32653231	0.326532
0.8	0.37196325	0.371963
0.9	0.41671780	0.416718
1.0	0.46063259	0.460632
1.1	0.50353487	0.503535
1.2	0.54524653	0.545246
1.3	0.58558864	0.585588
1.4	0.62438634	0.624386
1.5	0.66147385	0.661473
1.6	0.69669953	0.696699
1.7	0.72993060	0.729930
1.8	0.76105735	0.761057
1.9	0.78999668	0.789996
2.0	0.81669464	0.816694
2.1	0.84112794	
2.2	0.86330429	0.863303
2.3	0.88326164	
2.4	0.90106649	0.901065
2.5	0.91681183	
2.6	0.93061641	0.930601
2.7	0.94262996	
2.8	0.95305765	0.952875
2.9	0.96224075	
3.0	0.97089205	0.969054
3.1	0.98074203	
3.2	0.99623571	0.980365
3.3	1.02883005	
3.4	1.10753011	0.987970

Figura 4.2: Tabela 2: Análise de consistência de malha.

Convergência da Velocidade					
η	$f'_{\Delta\eta=0.2}$	$f'_{\Delta\eta=0.1}$	$f'_{\Delta\eta=0.05}$	$f'_{\Delta\eta=0.02}$	Extrapolação
0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.20	0.06643	0.06642	0.06641	0.06641	0.06641
0.40	0.13282	0.13278	0.13277	0.13277	0.13277
0.60	0.19903	0.19897	0.19895	0.19894	0.19894
0.80	0.26485	0.26475	0.26472	0.26472	0.26472
1.00	0.32998	0.32983	0.32980	0.32979	0.32979
1.20	0.39403	0.39385	0.39380	0.39379	0.39378
1.40	0.45658	0.45635	0.45629	0.45627	0.45627
1.60	0.51713	0.51686	0.51679	0.51677	0.51677
1.80	0.57520	0.57488	0.57480	0.57477	0.57477
2.00	0.63027	0.62990	0.62981	0.62978	0.62978
2.20	0.68187	0.68146	0.68136	0.68133	0.68132
2.40	0.72958	0.72914	0.72903	0.72900	0.72899
2.60	0.77309	0.77262	0.77251	0.77247	0.77247
2.80	0.81217	0.81168	0.81156	0.81153	0.81152
3.00	0.84672	0.84622	0.84610	0.84606	0.84605
3.20	0.87675	0.87626	0.87613	0.87610	0.87609
3.40	0.90242	0.90193	0.90181	0.90178	0.90177
3.60	0.92396	0.92349	0.92338	0.92334	0.92334
3.80	0.94170	0.94127	0.94116	0.94113	0.94112
4.00	0.95605	0.95566	0.95556	0.95553	0.95552
4.20	0.96743	0.96708	0.96699	0.96697	0.96696
4.40	0.97629	0.97598	0.97590	0.97588	0.97587
4.60	0.98304	0.98277	0.98271	0.98269	0.98269
4.80	0.98809	0.98787	0.98781	0.98779	0.98779
5.00	0.99178	0.99160	0.99156	0.99155	0.99154
5.20	0.99444	0.99429	0.99426	0.99425	0.99425
5.40	0.99631	0.99619	0.99617	0.99616	0.99616
5.60	0.99759	0.99751	0.99749	0.99748	0.99748
5.80	0.99846	0.99840	0.99838	0.99838	0.99838
6.00	0.99904	0.99899	0.99898	0.99897	0.99897
6.20	0.99941	0.99937	0.99937	0.99936	0.99936
6.40	0.99964	0.99962	0.99961	0.99961	0.99961
6.60	0.99979	0.99977	0.99977	0.99977	0.99977
6.80	0.99988	0.99987	0.99986	0.99986	0.99986
7.00	0.99993	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
7.20	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996
7.40	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998
7.60	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
7.80	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
8.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Figura 4.3: Tabela 3: Comparação dos resultados presentes com os de Howarth.

Comparação com Solução de Howarth						
η	f	f_{Howarth}	f'	f'_{Howarth}	f''	f''_{Howarth}
0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.33205	0.33206
0.20	0.00664	0.00664	0.06641	0.06641	0.33193	0.33199
0.40	0.02656	0.02656	0.13277	0.13277	0.33133	0.33147
0.60	0.05973	0.05974	0.19894	0.19894	0.32988	0.33008
0.80	0.10609	0.10611	0.26472	0.26471	0.32712	0.32739
1.00	0.16555	0.16557	0.32979	0.32979	0.32265	0.32301
1.20	0.23792	0.23795	0.39378	0.39378	0.31620	0.31659
1.40	0.32294	0.32298	0.45627	0.45627	0.30748	0.30787
1.60	0.42027	0.42032	0.51677	0.51676	0.29625	0.29667
1.80	0.52945	0.52952	0.57477	0.57477	0.28253	0.28293
2.00	0.64994	0.65003	0.62978	0.62977	0.26637	0.26675
2.20	0.78109	0.78120	0.68132	0.68132	0.24802	0.24835
2.40	0.92216	0.92230	0.72899	0.72899	0.22788	0.22809
2.60	1.07236	1.07252	0.77247	0.77246	0.20633	0.20646
2.80	1.23081	1.23099	0.81152	0.81152	0.18395	0.18401
3.00	1.39661	1.39682	0.84605	0.84605	0.16142	0.16136
3.20	1.56887	1.56911	0.87609	0.87609	0.13930	0.13913
3.40	1.74670	1.74696	0.90177	0.90177	0.11813	0.11788
3.60	1.92924	1.92954	0.92334	0.92333	0.09838	0.09809
3.80	2.11572	2.11605	0.94112	0.94112	0.08045	0.08013
4.00	2.30541	2.30567	0.95552	0.95552	0.06460	0.06424
4.20	2.49767	2.49806	0.96696	0.96696	0.05087	0.05052
4.40	2.69197	2.69238	0.97587	0.97587	0.03933	0.03897
4.60	2.88784	2.88826	0.98269	0.98269	0.02980	0.02948
4.80	3.08489	3.08534	0.98779	0.98779	0.02213	0.02187
5.00	3.28283	3.28329	0.99154	0.99155	0.01615	0.01591
5.20	3.48141	3.48189	0.99425	0.99425	0.01155	0.01134
5.40	3.68045	3.68094	0.99616	0.99616	0.00808	0.00793
5.60	3.87981	3.88031	0.99748	0.99748	0.00555	0.00543
5.80	4.07939	4.07990	0.99838	0.99838	0.00372	0.00365
6.00	4.27913	4.27964	0.99897	0.99898	0.00245	0.00240
6.20	4.47896	4.47948	0.99936	0.99937	0.00160	0.00155
6.40	4.67886	4.67938	0.99961	0.99961	0.00103	0.00098
6.60	4.87879	4.87931	0.99977	0.99977	0.00063	0.00061
6.80	5.07876	5.07928	0.99986	0.99987	0.00037	0.00037
7.00	5.27873	5.27926	0.99992	0.99992	0.00025	0.00022
7.20	5.47872	5.47925	0.99996	0.99996	0.00015	0.00013
7.40	5.67871	5.67924	0.99998	0.99998	0.00008	0.00007
7.60	5.87871	5.87924	0.99999	0.99999	0.00003	0.00004
7.80	6.07871	6.07923	0.99999	1.00000	0.00002	0.00002
8.00	6.27871	6.27923	1.00000	1.00000	0.00002	0.00001

Figura 4.4: Tabela 4: Comparação dos resultados presentes com os de Howarth.

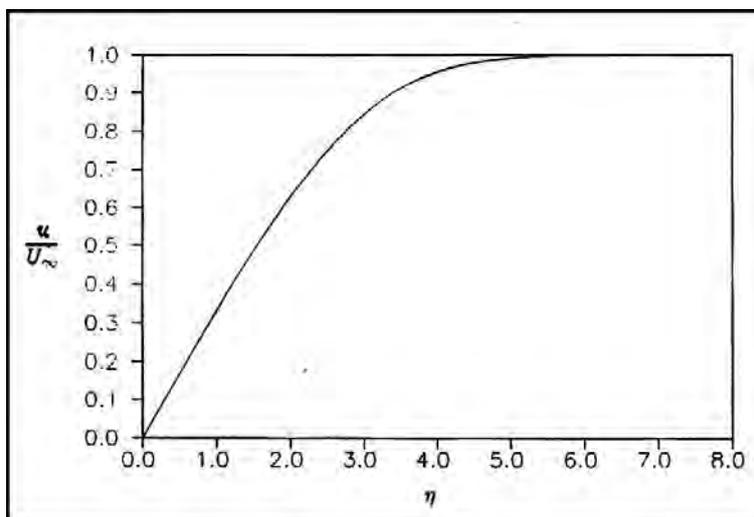


Figura 4.5: Perfil de velocidade longitudinal para a solução de Blasius.

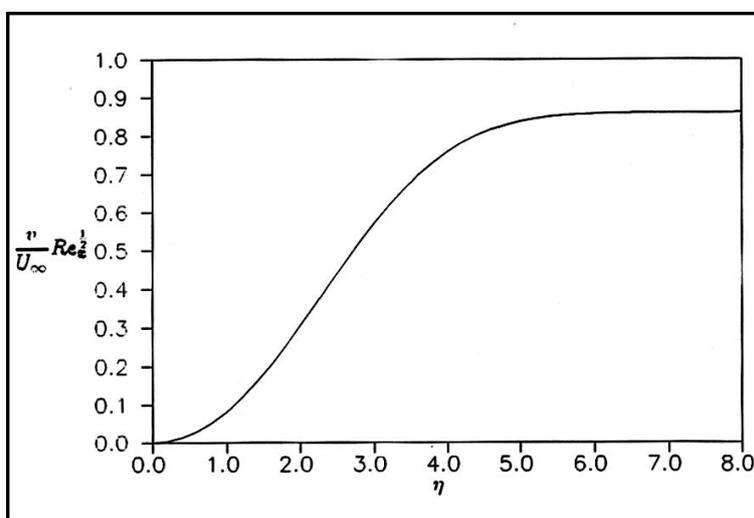


Figura 4.6: Perfil de velocidade transversal para a solução de Blasius.

Capítulo 5

Soluções similares das equações de camada limite

5.1 A condição de similaridade

Uma questão importante na resolução de problemas de camada limite é a investigação das condições sob as quais transformações de similaridade ocorrem. Soluções de similaridade são aquelas em que os perfis de velocidade em qualquer estação x diferem por apenas um fator de escala em u e em y . Logo, no caso de soluções similares, os perfis de velocidade podem sempre ser feitos congruentes, caso eles sejam plotados em coordenadas tornadas adimensionais com referência aos fatores de escala de u e de y . Para duas estações x_1 e x_2 , devemos então ter

$$\frac{u(x, y(g(x_1)))}{U(x_1)} = \frac{u(x_2, y(g(x_2)))}{U(x_2)}$$

O caso da placa plana visto na lição anterior possuía a propriedade acima. O fator de escala para u era a velocidade do escoamento externo U enquanto o fator de escala para y era $\delta(g = \sqrt{\nu x/U})$. Todos os perfis de velocidade colapsavam em um único perfil quando um gráfico de u/U versus $y/g = y/\sqrt{\nu x/U} = \eta$ era construído.

A procura de soluções similares é particularmente importante com relação ao caráter matemático da solução. Quando soluções similares existem, é sempre possível se transformar um sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias, o que sempre acarretará em uma considerável simplificação do problema.

Investiguemos agora que tipo de escoamento externo nos fornecerá soluções similares. Para tanto, consideremos as equações de camada limite reescritas em termos da função corrente Ψ , isto é,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \quad (5.1)$$

com as condições de contorno

$$y = 0, \quad \partial\Psi/\partial x = \partial\Psi/\partial y = 0;$$

$$y \longrightarrow \infty, \quad \partial\Psi/\partial y = U.$$

As variáveis adimensionais são introduzidas considerando-se um comprimento característico, L , e uma velocidade característica, U_∞ . Deste modo definimos

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y\sqrt{R}}{Lg(x)}; \quad (5.2)$$

onde $R = U_\infty L/\nu$.

A função de corrente adimensional é definida por

$$f(\xi, \eta) = \frac{\Psi(x, y)\sqrt{R}}{LU(x)g(x)}. \quad (5.3)$$

Logo, as componentes da velocidade se tornam

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial y} = U \frac{\partial f}{\partial \eta} = U f', \quad (5.4)$$

$$-\sqrt{R}v = \sqrt{R} \frac{\partial\Psi}{\partial x} = Lf \frac{d}{dx}(Ug) + Ug \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} - L \frac{g'}{g} \eta f' \right), \quad (5.5)$$

onde os apóstrofes em f e em g significam respectivamente diferenciação com relação a η e a x .

A substituição de (5.3) em (5.1) nos fornece a seguinte equação diferencial para f :

$$f''' + \alpha f f'' + \beta(1 - f'^2) = \frac{U}{U_\infty} g^2 \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \quad (5.6)$$

onde α e β são dados por

$$\alpha = \frac{Lg}{U_\infty} \frac{d}{dx}(Ug); \quad \beta = \frac{L}{U_\infty} g^2 U', \quad (5.7)$$

onde $U' = dU/dx$.

As condições de contorno para a equação (5.6) são

$$\eta = 0 \quad , \quad f = f' = 0;$$

$$\eta = \infty \quad , \quad f' = 1.$$

No caso de similaridade, a equação diferencial parcial (5.6) deve se reduzir a uma equação diferencial ordinária. Isto significa que a função de corrente f deverá ser dependente de apenas um parâmetro, η , ou seja, f e f' não devem depender de ξ .

Estes argumentos mostram que, se existe similaridade, então o lado direito de (5.6) deve se anular. Do mesmo modo, α e β devem independer de x , isto é, devem ser

constantes. Estas duas condições fornecem duas equações, (5.7), que podem ser resolvidas para se obter $U(x)$ e $g(x)$.

Da equação (5.7) obtemos

$$2\alpha - \beta = \frac{L}{U_\infty} \frac{d}{dx} (g^2 U),$$

cujas integrações nos fornece

$$\frac{U}{U_\infty} g^2 = (2\alpha - \beta) \frac{x}{L}. \quad (5.8)$$

Ainda de (5.7) obtemos

$$\alpha - \beta = \frac{L}{U_\infty} g' g U,$$

ou seja,

$$(\alpha - \beta) \frac{U'}{U} = \frac{L}{U_\infty} g^2 U' \frac{g'}{g} = \beta \frac{g'}{g},$$

sistema que integrado nos dá

$$\left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{(\alpha - \beta)} = K g^\beta \quad (5.9)$$

onde K é uma constante.

Eliminando-se g em (5.8) e (5.9), obtemos a seguinte distribuição de velocidade para o escoamento externo

$$\frac{U}{U_\infty} = K^{\frac{2}{2\alpha - \beta}} \left[(2\alpha - \beta) \frac{x}{L} \right]^{\frac{\beta}{2\alpha - \beta}} \quad (5.10)$$

Para g obtemos

$$g = \left((2\alpha - \beta) \frac{x}{L} \frac{U_\infty}{U} \right)^{1/2}. \quad (5.11)$$

Frisamos aqui que para a obtenção de (5.8) assumimos ser $(2\alpha - \beta) \neq 0$.

Como g é apenas um fator de escala, qualquer constante de proporcionalidade entre α e β pode ser absorvida por ele. Por esta razão, podemos fazer sem qualquer perda de generalidade, $\alpha = 1$. Definindo

$$m = \frac{\beta}{2 - \beta}$$

as expressões (5.10) e (5.11) se tornam

$$\frac{U}{U_\infty} = K^{(1+m)} \left(\frac{2}{1+m} \cdot \frac{x}{L} \right)^m, \quad (5.12)$$

$$g = \left(\frac{2}{m+1} \frac{x U_\infty}{L U} \right)^{1/2} \quad (5.13)$$

A coordenada de similaridade é portanto

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{U}{\nu x}}. \quad (5.14)$$

Concluimos que similaridade pode apenas ocorrer quando a distribuição de velocidade do escoamento potencial possui a forma

$$U(x) = Cx^m.$$

5.2 Aplicações

a) Escoamento ao redor de uma cunha.

Nas vizinhanças do ponto de estagnação de uma cunha de ângulo $\pi\beta$, a teoria potencial nos fornece

$$U(x) = Cx^m,$$

onde $m = \beta/(2 - \beta)$, exatamente como definido anteriormente.

b) Escoamento em um canal convergente

Em um canal convergente, a teoria potencial nos dá

$$U(x) = -U_1 x^{-1},$$

resultando em uma transformação de similaridade da forma

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{-x\nu}} = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{U_1}{\nu}},$$

$$\Psi = -\sqrt{\nu u_1} f(\eta).$$

Outros problemas, mais complexos que os anteriores, podem ser resolvidos por similaridade se procedimentos mais gerais forem utilizados. Por exemplo, se aproximações por séries forem usadas, os seguintes escoamentos se tornam passíveis de análise por similaridade:

c) escoamento ao redor de um cilindro

d) escoamento sobre uma placa plana sujeito a um gradiente de pressão da forma $U = U_\infty - ax^n$,

e) escoamento cisalhante ($U = U_\infty - ay$) sobre uma placa plana.

Em adição, a aplicação da transformada de similaridade, não se restringe a regiões próximas à superfície. Como veremos adiante, ela pode ser utilizada para a análise de esteiras e de jatos.

Capítulo 6

A Camada Limite Térmica

6.1 A equação da energia

A troca de calor entre um corpo sólido e um fluido é um fenômeno físico que se relaciona intimamente à ciência da mecânica dos fluidos. Sobre o campo do escoamento ocorre um fluxo de calor, fazendo com que a completa descrição do fenômeno requera as equações do movimento de um fluido e da energia. É fato comum que uma analogia existe entre os processos de troca de quantidade de movimento e de calor, de modo que a distribuição geométrica dos campos de velocidade e de temperatura apresenta semelhanças. Por exemplo, se um corpo sólido é exposto a um escoamento de um fluido a uma temperatura distinta da sua, a variação do campo de temperatura se dará numa estreita região junto à parede, exatamente como ocorre com o campo de velocidade. Esta região, por analogia ao processo dinâmico, é normalmente chamada de camada limite térmica.

Para que possamos analisar os processos de troca térmica, consideremos inicialmente a equação da energia. Para um fluido incompressível, o balanço de energia é determinado pela energia interna, pela condução de calor, pela convecção de calor com o escoamento e pela geração de calor provocada pelo atrito. Em um fluido compressível, aparece um termo adicional devido ao trabalho provocado pela expansão (ou compressão) quando o volume varia. Em todos os casos a radiação também pode estar presente. Sua contribuição é, entretanto, invariavelmente desprezível, motivo pela qual não a consideraremos mais neste trabalho.

O balanço de energia é feito tomando como base a primeira lei da termodinâmica. A quantidade de calor dQ adicionada a um elemento fluido durante um instante de tempo Δt serve para aumentar a energia por uma quantidade dE_t e para realizar um trabalho dW . Logo,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE_t}{dt} + \frac{dW}{dt}. \quad (6.1)$$

Considerando válidas a lei de transferência de calor de Fourier e as hipóteses constitutivas de Stokes, e após algum algebrismo, o balanço de energia resulta em

$$\rho \frac{De}{Dt} + p \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \Phi, \quad (6.2)$$

$$\Phi = 2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \quad (6.3)$$

onde

e = energia interna por unidade de massa,

k = coeficiente de condutividade térmica do fluido,

e

Φ = função de dissipação.

No caso de um fluido incompressível, $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ e $de = cdT$, de modo que (6.2) se reduz a

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi. \quad (6.4)$$

6.2 A similaridade em problemas de transferência de calor

Em problemas onde os gradientes de temperatura provoquem grandes variações de densidade, forças induzidas pelo campo gravitacional, da forma

$$x = \rho g_x, \quad Y = \rho g_y, \quad Z = \rho g_z;$$

onde g_x, g_y e g_z representam os componentes da aceleração gravitacional g , devem ser necessariamente levadas em consideração. Estas forças são chamadas de forças de boiância.

De um modo geral ρ é função da pressão e da temperatura, de modo que numa primeira aproximação podemos escrever

$$\rho = \rho_\infty + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, T_\infty} (T - T_\infty) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, p_\infty} (p - p_\infty), \quad (6.5)$$

ou ainda,

$$\rho = \rho_\infty - \rho_\infty \beta (T - T_\infty) + \frac{\gamma}{c_\infty^2} (p - p_\infty), \quad (6.6)$$

onde β representa o coeficiente de expansão térmica à temperatura T_∞ , γ é a razão entre os dois calores específicos e c_∞ é a velocidade do som do fluido.

Consideremos agora que a dependência da densidade na variação de pressão possa ser desprezada, e que variações de densidade possam ser ignoradas no termo de inércia (hipótese de Boussinesq). Então, subtraindo-se $\rho_\infty \vec{g}$ do campo de pressão estática, obtemos

$$\operatorname{div} \rho \vec{u} = 0. \quad (6.7)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -grad p' + \rho\beta\theta\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{u}, \quad (6.8)$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + \vec{u}grad p + \mu\Phi. \quad (6.9)$$

Como a variável ρ foi eliminada das equações acima através da hipótese de Boussinesq, elas constituem um sistema de quatro equações a quatro incógnitas ($u, v, p, \theta (= T - T_\infty)$). Enfatizamos que na equação (6.8), $grad p' = grad p - \rho_\infty\vec{g}$.

Para que escoamentos compressíveis possam ser tratados, uma nova equação para ρ que relacione esta grandeza com p e com T deve ser considerada. Para gases perfeitos, normalmente usa-se a relação

$$p = \rho RT.$$

Antes de discorrermos sobre qualquer solução do sistema de equações (6.7) – (6.9), cabe perguntarmos-no em que condições, e de que forma, o princípio de similaridade pode ser utilizado. Para tanto, devemos inicialmente identificar os vários grupos adimensionais nos quais as soluções dependerão. Para adimensionalizar as equações, consideraremos as seguintes quantidades de referência, $l, U_\infty, \rho_\infty, \rho_\infty U_\infty^2$, onde os símbolos possuem seu significado clássico. A temperatura será adimensionalizada de acordo com $\theta = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$. Segue-se que as equações do movimento se tornam

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -grad p + \frac{g\beta(T_w - T_\infty)l}{U_\infty^2}\theta + \frac{\mu}{\rho_\infty U_\infty l}\nabla^2\vec{u}, \quad (6.10)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{k}{\rho_\infty c_p U_\infty l}\nabla^2\theta + \frac{u_\infty^2}{c_p(T_w - T_\infty)}\vec{u}grad p + \frac{\mu U_\infty}{\rho_\infty c_p l(T_w - T_\infty)}\Phi. \quad (6.11)$$

A solução das equações acima depende dos seguintes grupos adimensionais

$$\frac{\rho_\infty U_\infty l}{\mu}; \quad \frac{g\beta(T_w - T_\infty)l}{U_\infty^2}; \quad \frac{k}{\rho_\infty c_p U_\infty l}; \quad \frac{U_\infty^2}{c_p(T_w - T_\infty)}; \quad \frac{\mu U_\infty}{\rho_\infty c_p l(T_w - T_\infty)}.$$

O primeiro grupo adimensional é o número de Reynolds, já familiar ao leitor. Os quarto e quinto grupos diferem apenas pelo fator R . Logo, o problema térmico introduz três novos grupos.

O segundo grupo, relacionado com o termo de empuxo, pode ser reescrito como

$$\frac{g\beta l(\Delta T)}{U_\infty^2} = \frac{g\beta l^3(\Delta T)}{\nu^2} \cdot \frac{\nu^2}{U_\infty^2 l^2} = \frac{G}{R^2}.$$

Isto define o número de Grashof

$$G = \frac{g\beta l^3(\Delta T)}{\nu^2}.$$

O terceiro grupo, relacionado com a condução de calor, pode ser reescrito como

$$\frac{k}{\rho_\infty c_p U_\infty l} = \frac{a}{U_\infty l} = \frac{a}{\nu} \cdot \frac{\nu}{U_\infty l} = \frac{1}{PR},$$

o que define o número de Prandtl,

$$P = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{k}$$

onde a = difusividade térmica.

Finalmente, o quarto grupo adimensional, relacionado com o trabalho por expansão (ou compressão) e com a dissipação viscosa, é definido por

$$E = \frac{U_\infty^2}{C_p(\Delta T)},$$

o número de Eckert.

Vários problemas de geometria simples podem ser agora resolvidos, com sua solução dependendo dos quatro grupos adimensionais anteriores. Exemplos clássicos são os de escoamento de Couette e de Poiseuille e de um disco em rotação. Para maiores detalhes sobre a solução destes problemas consulte o Schlichting.

6.3 As equações de camada limite

Quando um fluido escoar ao redor de um corpo que se encontra a uma temperatura distinta da sua, um campo de temperatura se desenvolve o qual se assemelha em muitos aspectos ao campo de velocidade. Isto significa que as variações de temperatura ocorrem numa estreita região vizinha ao corpo, dando origem a uma camada limite térmica. Nesta camada, a condutividade térmica exerce o mesmo papel que a viscosidade exercia para a camada limite cinemática, promovendo a difusão de calor no meio fluido. É na camada limite térmica que o fluido varia bruscamente sua temperatura, do valor prescrito na parede, para o valor do escoamento externo. Desde que nesta região os efeitos convectivos e os efeitos condutivos possuem a mesma ordem de grandeza podemos escrever

$$\text{ordem(efeitos convectivos)} = \text{ordem(efeitos condutivos)}$$

ou seja,

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \left(k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (6.12)$$

o que resulta em

$$\rho c \frac{UT}{L} = 0 \left(k \frac{T}{\delta_T^2} \right),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \delta_T^2 = 0 \left(\frac{kL}{c\rho U} \right) &= 0 \left(\frac{k}{c\mu} \frac{\mu}{\rho UL} L^2 \right) = 0 \left(\frac{1}{PR} L^2 \right), \\ \left(\frac{\delta_T}{L} \right)^2 &= 0 \left(\frac{1}{PR} \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Mas como $\delta_c/L = 0(R^{-1/2})$, obtemos

$$\frac{\delta_T}{\delta_c} = \frac{1}{\sqrt{P}},$$

o que mostra serem as espessuras das camadas limites relacionadas através de uma propriedade do fluido, P , independentemente do tipo de escoamento.

Para a dedução das equações de camada limite térmica, escrevemos a equação da conservação da quantidade de movimento na direção x e a equação da energia como

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{G}{R^2} \theta + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (6.14)$$

1 $\delta_c(1/\delta_c)$ 1 δ_c^2 1 $1/\delta_c^2$ e

$$\rho \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{1}{PR} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + E \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{E}{R} \Phi, \quad (6.15)$$

1 $\delta_c(1/\delta_T)$ δ_T^2 1 $1/\delta_T^2$ 1 $\delta_c \delta_c$ $\delta_c^2(1/\delta_c^2)$

onde a ordem de grandeza dos vários termos já se encontra indicada.

A equação (6.14) mostra que os efeitos de boiância serão importantes quando

$$G = 0(R^2),$$

o que ocorre apenas com velocidades de escoamento muito pequenas e grandes diferenças de temperatura.

Da equação (6.15) é evidente que os termos $\partial^2 \theta / \partial x^2$ e $v \partial p / \partial y$ podem ser desprezados quando comparados respectivamente com os termos $\partial^2 \theta / \partial y^2$ e $u \partial p / \partial x$. O termo dominante na função de dissipação, Φ , é $(\partial u / \partial y)^2$. Concluímos que as equações de camada limite térmica assumem a forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v = 0, \quad (6.16)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{dp}{dx} + \rho g \beta (T - T_\infty). \quad (6.17)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6.18)$$

$$p = \rho R T, \quad \mu = \mu(T). \quad (6.19)$$

Como na teoria de camada limite a pressão é conhecida, o sistema de cinco equações acima pode ser utilizado para determinar as cinco incógnitas, u, v, ρ, T, μ . O acoplamento

das equações (6.17) e (6.18) acima se dá através de ρ , de μ e do termo de boiância. Nos casos em que ρ e μ puderem ser considerados independentes da temperatura e que $G \ll R^2$, a equação (6.17) poderá ser resolvida independentemente de (6.18). Neste caso, u e v passarão a ser grandezas conhecidas em (6.18), a qual pode ser resolvida facilmente para T . Note que enquanto (6.17) é não linear, a equação (6.18) para T é linear.

6.4 Propriedades gerais da camada limite térmica

Os escoamentos onde as velocidades são baixas, e as diferenças de temperatura grandes o suficiente para que as forças de boiância não possam ser desprezadas, são chamados escoamentos naturais. Escoamentos onde ocorre o contrário, isto é, altas velocidades e baixas temperaturas, tal que a boiância pode agora ser desprezada e as propriedades do fluido consideradas independentes da temperatura, são chamados escoamentos forçados. À velocidades moderadas, quando o calor gerado por atrito e o trabalho realizado por compressão podem ser desprezados, a dependência do campo de temperatura no campo de velocidade depende apenas do número de Prandtl.

As condições de contorno para o campo de temperatura podem ser especificadas de vários modos. A temperatura sobre um corpo pode ser constante ou variável; ou ainda, pode-se prescrever o fluxo de calor na parede. Isto significa dizer que o gradiente de temperatura na parede pode aparecer como uma condição de contorno. Paredes que não exibem fluxo de calor para o fluido são chamadas paredes adiabáticas. Nestas,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{n=0} = 0.$$

Para o escoamento em camadas limite, uma analogia pode ser traçada entre o coeficiente de troca térmica e o coeficiente de atrito. Como visto anteriormente, as soluções para as equações de camada limite possuem a forma

$$\frac{u}{U_\infty} = f_1\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}\sqrt{R}\right). \quad (6.20)$$

$$\frac{v}{U_\infty}\sqrt{R} = f_2\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}\sqrt{R}\right), \quad R = \frac{U_\infty l}{\nu}. \quad (6.21)$$

Se os efeitos da dissipação viscosa e do trabalho provocado por compressão puderem ser desprezados, as soluções da camada limite térmica podem ser expressas como

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = f_3\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}\sqrt{R}, P\right). \quad (6.22)$$

Logo, o fluxo de calor pode ser escrito como

$$q = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{k}{l}(T_w - T_\infty)\sqrt{R}f_3\left(\frac{x}{l}, P\right);$$

o que nos define

$$N = \frac{ql}{k(T_w - T_\infty)} = \sqrt{R}f_3\left(\frac{x}{l}, P\right), \quad (6.23)$$

o número de Nusselt.

Esta relação nos mostra que para toda camada limite laminar – quando dissipação e trabalho por compressão puderem ser desprezados – o número de Nusselt é proporcional à raiz quadrada do número de Reynolds.

A tensão na parede, de acordo com (6.20) é dada por

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu U_\infty}{l} \sqrt{R} f_1\left(\frac{x}{l}\right).$$

Da definição

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{1}{\sqrt{R}} f_1\left(\frac{x}{l}\right),$$

e da expressão (6.23) segue-se que

$$N = c_f R f\left(\frac{x}{l}, P\right). \quad (6.24)$$

O número de Prandtl é portanto decisivo para a obtenção das propriedades da camada limite térmica e em particular, para o cálculo da taxa de transferência de calor tanto em escoamentos naturais quanto em escoamentos forçados. Fisicamente, o número de Prandtl caracteriza a razão entre o transporte de quantidade de movimento e o transporte de calor. É portanto esperado que o número de Prandtl sirva como uma medida direta da razão entre as espessuras das camadas limites cinética e térmica. Os dois casos limites quando $P \rightarrow 0$ e $P \rightarrow \infty$ são mostrados esquematicamente na figura abaixo.

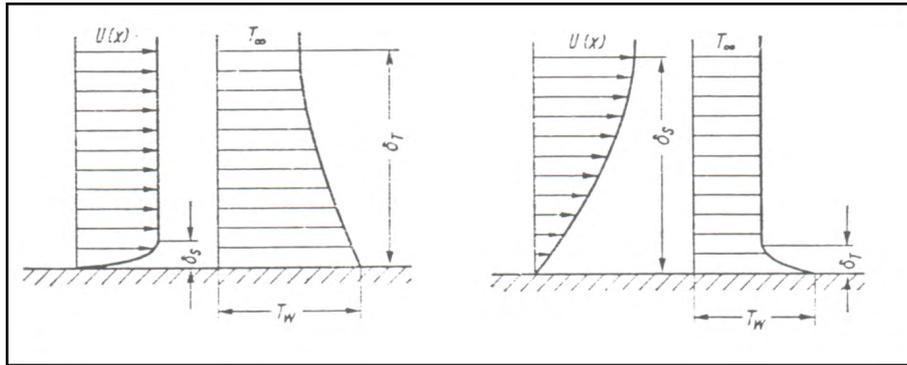


Figura 6.1: Distribuição de temperatura na camada limite, casos limites.

É aparente desta figura, que no caso de $P \rightarrow 0$, é possível se desprezar a ocorrência da camada limite cinética quando do cálculo da camada limite térmica. Neste caso, os componentes da velocidade podem ser substituídos por $U(x)$ e $V(x, y) = -(dU/dx)y$, res-

pectivamente, na equação da energia. Segue-se que o campo de temperatura é determinado por

$$U \frac{dT}{dx} - y \frac{dU}{dx} \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (P \rightarrow 0), \quad (6.25)$$

A equação acima pode ser reduzida a uma EDO através da transformação de similaridade

$$\eta = y \frac{U(x)}{2\sqrt{a \int_0^x U dx}}.$$

Isto nos conduz a seguinte expressão para o número de Nusselt:

$$N_x = \frac{ax}{l} = \frac{xU(x)}{\sqrt{\pi\nu \int_0^x U(x)dx}} P^{1/2}.$$

Para o caso especial $U(x) = U_\infty$, a solução de (6.25) é

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta,$$

$$\eta = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U_\infty}{ax}}.$$

Para o caso $P \rightarrow \infty$, a hipótese simplificadora consiste em assumir que o campo de temperatura se desenvolva inteiramente numa região onde o perfil de velocidade seja linear; isto é, assume-se que

$$u = (\tau_w/\mu)y. \quad (6.26)$$

A substituição

$$\eta = \frac{y \sqrt{\frac{\tau_w}{\mu}}}{\left\{ 9a \int_{x_0}^x \frac{\tau_w}{\mu} dx \right\}^{1/3}},$$

transforma a equação da energia na seguinte EDO,

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + 3\eta^2 \frac{dT}{d\eta} = 0,$$

cuja solução pode ser expressa em termos de funções gama incompletas.

Adiantamos que para o caso da placa plana

$$N_x = 0.339 \sqrt[3]{P} \sqrt{R_x}, \quad (P \rightarrow \infty).$$

6.5 A camada limite térmica em escoamentos forçados

As equações de camada limite térmica para um escoamento incompressível de um fluido de propriedades constantes são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.27)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (6.28)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (6.29)$$

As condições de contorno podem ser escritas como

$$y = 0, \quad u = v = 0; \quad T = T_w \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$y = \infty, \quad u = U_\infty; \quad T = T_\infty.$$

Sendo o campo de velocidade independente do campo de temperatura, as duas equações (6.27) e (6.28) podem ser resolvidos, o resultado sendo utilizado para a obtenção da solução de (6.29). Caso $\mu(\partial u/\partial y)^2$ possa ser desprezado em (6.29), esta equação se torna idêntica à equação (6.28) para $P = 1$. Nestas circunstâncias, segue-se que

$$\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{u}{U_\infty},$$

é a solução do problema térmico.

No caso dos efeitos de atrito não poderem ser desprezados, utilizamos a transformação de similaridade de Blassius

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \quad \Psi = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta),$$

para obter

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + \frac{P}{2} f \frac{\partial T}{\partial \eta} = -2P \frac{U_\infty^2}{2c_p} f''^2. \quad (6.30)$$

onde $T = T(\eta)$.

A solução da equação acima pode ser escrita como

$$T(\eta) - T_\infty = C\theta_1(\eta) + \frac{U_\infty^2}{2c_p}\theta_2(\eta), \quad (6.31)$$

onde θ_1 denota a solução homogênea e θ_2 a solução particular.

A solução θ_1 é feita satisfazer a temperatura na parede, fornecendo a seguinte equação

$$\theta_1'' + \frac{1}{2}P f \theta_1' = 0, \quad (6.32)$$

com,

$$\eta = 0 \quad , \quad \theta_1 = 1$$

$$\eta = \infty \quad , \quad \theta_1 = 0.$$

A solução particular, deve satisfazer a

$$\theta_2'' + \frac{1}{2}P f' \theta_2' = -2P f''^2, \quad (6.33)$$

$$\eta = 0 \quad , \quad \theta_2' = 1$$

$$\eta = \infty \quad , \quad \theta_2 = 0.$$

A constante C em (6.31) é dada por

$$C = T_w - T_\infty - \frac{U_\infty^2}{2C_p} \theta_2(0).$$

A solução do problema (6.32) foi apresentada por E. Pohlhausen na forma

$$\theta_1(\eta, P) = \int_\eta^\infty (f''(\xi))^P d\xi / \int_0^\infty (f''(\xi))^P d\xi. \quad (6.34)$$

Para o caso particular de $P = 1$,

$$\theta_1(\eta) = 1 - f'(\eta) = 1 - \frac{u}{U_\infty}.$$

O fluxo de calor na parede é dado por

$$-\left(\frac{d\theta_1}{d\eta}\right)_{\eta=0} = a_1(P) = (0.332)^P / \int_0^\infty (f''(\xi))^P d\xi.$$

Os resultados apresentados pela solução (6.34) são mostrados na figura (6.2) abaixo. Para o caso $0.6 < P < 10$,

$$a_1(P) = 0.332 \sqrt[3]{P}, \quad (0.6 < P < 10).$$

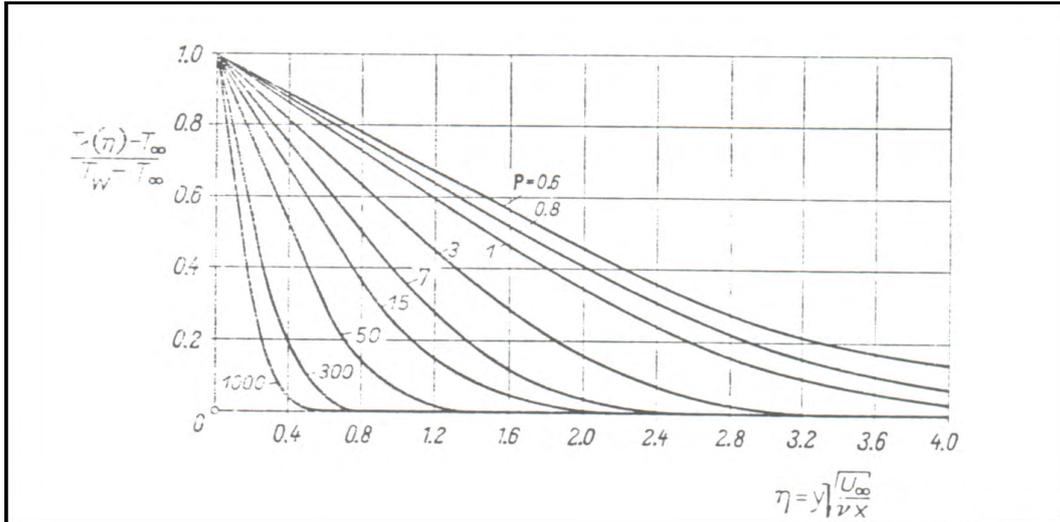


Figura 6.2: Distribuição de temperatura em uma placa aquecida.

A solução de (6.33) é fornecida por

$$\theta_2(\eta, P) = 2P \int_{\xi=\eta}^{\infty} (f''(\xi))^p \left(\int_0^{\xi} [f''(t)]^{2-p} dt \right) d\xi. \quad (6.35)$$

Para $P = 1$, a equação acima se reduz a

$$\theta_2(\eta) = 1 - f'^2(\eta).$$

A temperatura assumida pela parede devido ao atrito é dada por (6.31) e (6.35), resultando em

$$T_a - T_{\infty} = T_{2w} - T_{\infty} = \frac{U_{\infty}^2}{2c_p} b(p)$$

onde

$$b(P) = \theta_2(0, P).$$

Para números de Prandtl moderados, $b = \sqrt{P}$. Para altos números de Prandtl, $b(P) = 1.9P^{1/3}$.

A distribuição de temperatura numa placa adiabática representada por

$$\frac{T_2(\eta) - T_{\infty}}{T_{2w} - T_{\infty}} = \frac{\theta_2(\eta, P)}{b(P)}, \quad (6.36)$$

é vista na figura (6.3)

A solução geral do problema térmico dada por

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} = [1 - (1/2)Eb(P)]\theta_1(\eta P) + \frac{1}{2}E\theta_2(\eta, P), \quad (6.37)$$

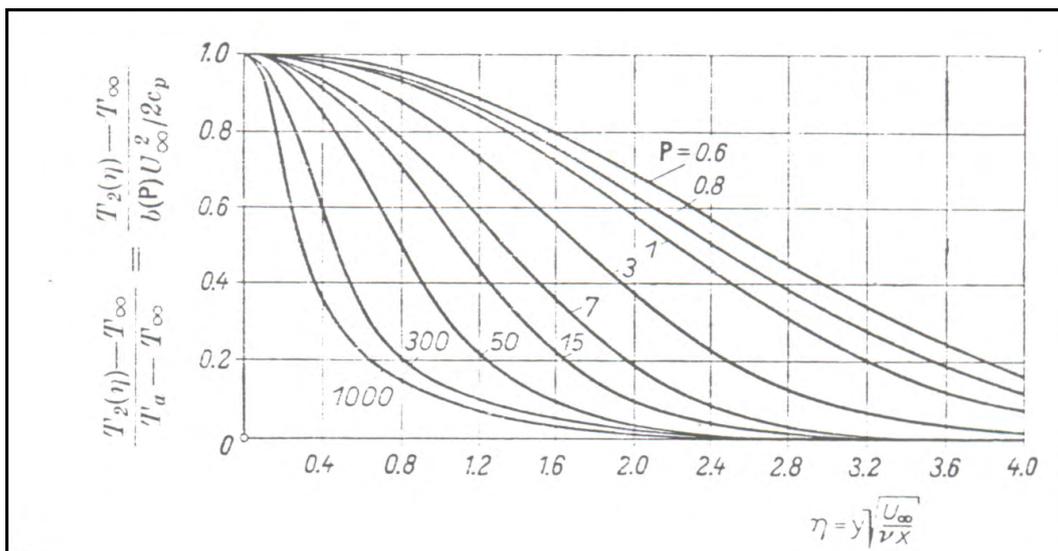


Figura 6.3: Distribuição de temperatura na camada limite térmica com condições de parede adiabáticas.

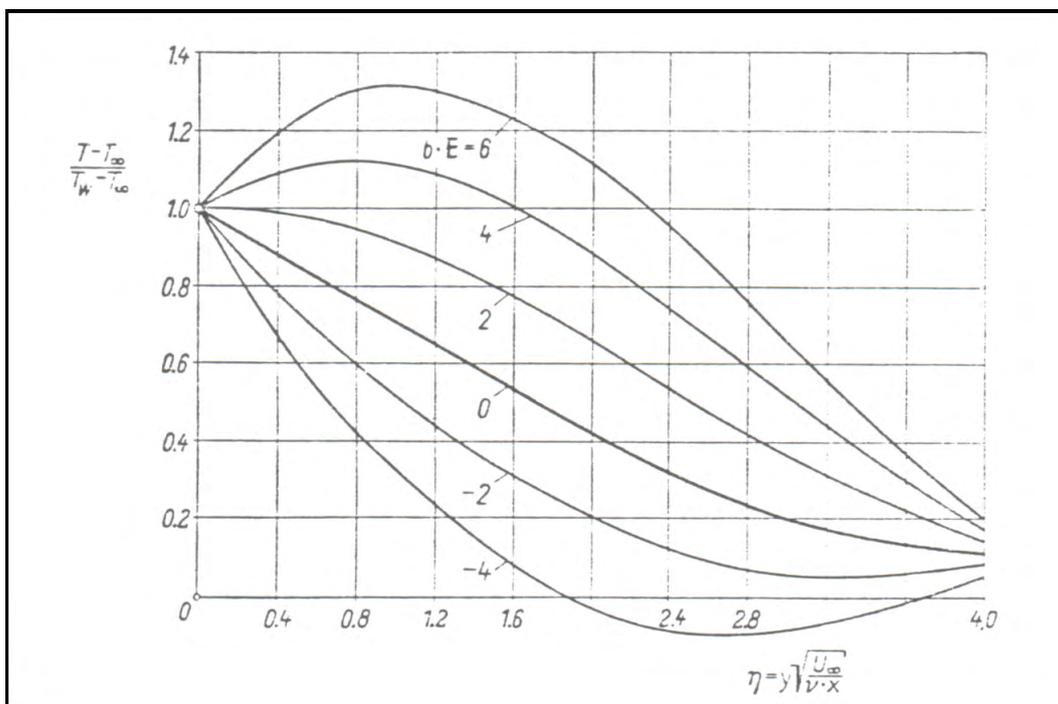


Figura 6.4: Distribuição de temperatura em condições de aquecimento e de resfriamento de parede.

onde E = número de Eckert, é apresentada na figura (6.4).

A troca da calor na parede é dada por

$$q(x) = -k\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \left(\frac{dT}{d\eta} \right)_{\eta=0}.$$

Para os casos onde os efeitos do atrito podem ser desprezados

$$q(x) = 0.332k\sqrt[3]{P}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}(T_w - T_\infty)$$

o que nos fornece

$$N_x = 0.332\sqrt[3]{P}\sqrt{R_x}, \quad (0.6 < P < 10).$$

Quando o atrito tiver que ser levado em conta teremos

$$q(x) = 0.332k\sqrt[3]{P}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}(T_w - T_a),$$

$$T_a = T_{2w}.$$

6.6 Outras soluções das equações de camada limite térmica

Vimos anteriormente que soluções por similaridade da camada limite cinética eram sempre possíveis se

$$U(x) = U_1x^m.$$

Para a camada limite térmica, mostra-se que fato semelhante acontece. De fato, soluções por similaridade sempre poderão ser obtidas para o campo de temperatura, para isto sendo necessário que

$$T_w(x) - T_\infty = T_1x^n.$$

É importante enfatizarmos que a grande maioria dos procedimentos desenvolvidos para a camada limite cinética podem ser estendidos para o caso térmico. Isto é o caso, por exemplo, dos métodos integrais e dos procedimentos de obtenção de soluções aproximadas por expansão em séries.

6.7 A camada limite térmica natural

No caso de uma placa vertical aquecida a pressão em cada plano horizontal é igual a pressão gravitacional, sendo, portanto, constante. A única causa do escoamento é a diferença de peso na região do fluido provocada pela variação de densidade. As equações do movimento com $dp/dx = 0$ e $\beta = 1/T_\infty$ são

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.38)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \frac{T_w - T_\infty}{T_\infty} \theta, \quad (6.39)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (6.40)$$

onde

$$a = \frac{k}{(\rho c_p)}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}.$$

As equações acima podem ser reduzidas a uma EDO pela transformação

$$\eta = c \frac{y}{\sqrt[4]{x}}, \quad \Psi = 4\nu c x^{3/4} \xi(\eta) \quad (6.41a - b)$$

onde

$$c = \sqrt[4]{\frac{g(T_w - T_\infty)}{4\nu^2 T_\infty}}.$$

Neste caso as velocidades se tornam

$$u = 4\nu x^{1/2} c^2 \xi', \quad v = \nu c x^{-1/4} (\eta \xi' - 3\xi).$$

As equações resultantes são,

$$\xi''' + 3\xi\xi'' - 2\xi'^2 + \theta = 0, \quad (6.42)$$

e

$$\theta'' + 3P\xi\theta' = 0, \quad (6.43)$$

sujeitas às seguintes condições de contorno

$$\eta = 0, \quad \xi = \xi' = 0, \quad \theta = 1;$$

$$\eta = \infty, \quad \xi' = 0, \quad \theta = 0.$$

Os valores teóricos obtidos através da solução de (6.42) são mostrados nas figuras (6.5) e (6.6). Uma comparação com os dados experimentais é mostrada nas figuras (6.7) e (6.8).

Note que a espessura das camadas limite térmica e cinética, para o caso de convecção natural, são proporcionais a $x^{1/4}$.

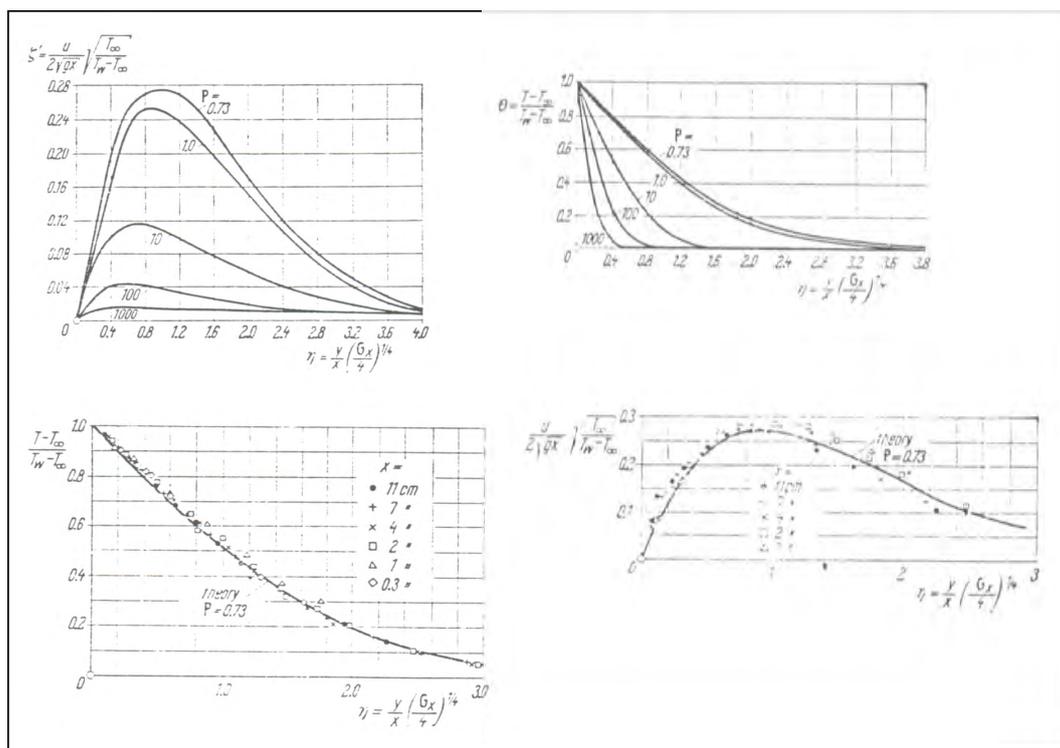


Figura 6.5: Distribuição de velocidade e de temperatura na camada limite para condições de convecção natural.

Capítulo 7

Conceitos Fundamentais em Turbulência

7.1 Introdução

A maioria dos escoamentos de importância prática são turbulentos. Escoamentos ao redor de corpos, no interior de dutos e turbomáquinas, na camada limite atmosférica, em processos industriais, todos são invariavelmente turbulentos. Escoamentos turbulentos são transientes, possuindo flutuações no espaço e no tempo. Uma característica importante destes escoamentos é a riqueza de escalas. Em escoamentos completamente desenvolvidos todas as escalas parecem estar presentes; desde as maiores que parecem possuir dimensão comparável à própria região fluida, até as menores onde os processos dissipativos acontecem.

As flutuações turbulentas superimpostas ao escoamento principal possuem natureza aleatória, sendo tão complexas em detalhes que sua descrição do ponto de vista matemático parece ser impossível. Estas flutuações provocam um forte movimento de mistura que afeta completamente o equilíbrio de forças do escoamento. Os efeitos se manifestam basicamente como se a viscosidade aumentasse por fatores que variam de algumas dezenas a até dez mil ou mais. Como consequência, escoamentos turbulentos em tubos oferecem grande resistência ao avanço, provocando do mesmo modo grandes perdas em turbomáquinas.

O movimento de mistura é também, por outro lado, o grande responsável pelo aumento do coeficiente de troca térmica em processos que envolvam troca de calor por convecção.

A seguir, concentraremos esforços na descrição de escoamentos turbulentos completamente desenvolvidos. Neste sentido, nossa atenção estará voltada à consideração de quantidades “médias” (num sentido ainda a ser definido) do escoamento.

7.2 Escalas características do movimento turbulento

Antes de deduzirmos as equações que regem o movimento médio de um escoamento turbulento, façamos uma pausa para avaliar as escalas típicas de comprimento e velocidade que podem ocorrer.

Uma estimativa das maiores escalas que ocorrem em um escoamento é dada pelas próprias dimensões do corpo ou aparelho que provoca o escoamento. Com uma velocidade característica U para o escoamento, obtemos uma escala de tempo

$$t_a = L/U,$$

que representa o tempo necessário a uma partícula de fluido para passar ao longo de um corpo de comprimento L . Uma segunda escala de tempo pode ser obtida pela estimativa do tempo de difusão viscosa através da distância L ,

$$t_v = L^2/\nu.$$

O número de Reynolds pode ser interpretado como sendo a razão entre estas duas escalas,

$$R = t_v/t_a.$$

Para escoamentos de interesse geofísico ou de engenharias, este número é muito grande. Por exemplo, para um avião com corda de asa de $5m$, voando a $100m/s$ o número de Reynolds é 3.3×10^7 ; para um rio com $1km$ de largura e correnteza de $1m/s$, $R = 0.9 \times 10^7$.

Escoamentos a altos números de Reynolds permitem portanto que perturbações desenvolvam altos gradientes de velocidade antes que os efeitos difusivos tenham tempo de amortecê-los. Turbulência é então um fenômeno que ocorre a altos números de Reynolds.

Outro parâmetro importante na geração de turbulência por efeitos térmicos é o número de Rayleigh. Considere o movimento de um fluido entre duas placas horizontais, a inferior aquecida a uma temperatura ΔT superior à outra placa. O aquecimento provocará uma diminuição da densidade do fluido em camadas inferiores, o que por ação do campo gravitacional gerará o movimento. A expansão térmica do fluido pode ser calculada por

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \alpha\Delta T.$$

A força por unidade de massa atuando em cada partícula de fluido é portanto $g\Delta\rho/\rho$. Considerando que a distância entre as placas seja d , estimamos que a velocidade característica do movimento seja

$$v_c = \sqrt{\text{aceleracao} \times \text{distancia}}$$

$$v_c = \sqrt{g\alpha\Delta T d}.$$

A escala característica de tempo do processo convectivo é então

$$t_c = \frac{d}{v_c} = \sqrt{\frac{d}{g\alpha\Delta T d}}.$$

A escala da difusão é

$$t_h = \frac{d^2}{k_h}, \quad k_h = \frac{k}{\rho c_p}.$$

A razão t_h/t_c multiplicada pelo número de Reynolds forma o número de Rayleigh

$$R_a = \frac{t_v t_h}{t_c^2} = \frac{g\alpha\Delta T d^3}{R_h \nu}.$$

Se R_a é alto, a difusividade não será suficiente para evitar que as forças de boiância desestabilizam o escoamento levando-o ao regime turbulento.

Determinemos agora as menores escalas que podem ocorrer em um escoamento turbulento. A análise dimensional pode ser usada para mostrar que a dissipação de energia mecânica em calor ocorre apenas nas menores escalas. Considerando l e u , as menores escalas de comprimento e velocidade do escoamento, temos que a taxa de dissipação viscosa é

$$\epsilon = \nu \left(\frac{u}{l} \right)^2,$$

desde que as tensões viscosas são proporcionais aos gradientes de velocidade. A dissipação de energia mecânica ocorrerá em partículas cujo número de Reynolds seja próximo da unidade de modo que os efeitos viscosos sejam relevantes; logo,

$$R \cong \frac{ul}{\nu} \cong 1$$

A combinação das duas expressões acima nos fornece o comprimento de escala de Kolmogorov

$$l_k = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4},$$

e as escalas de velocidade e tempo correspondentes

$$v_k = (\nu\epsilon)^{1/4},$$

e

$$t_k = (\nu\epsilon)^{1/2}.$$

Como exemplo considere 1 litro de água em um liquidificador com 10W de potência. Nas condições de equilíbrio,

$$\epsilon = 10W/kg.$$

Como $\nu = 10^{-6}m^2/s$, a escala de Kolmogorov é

$$l_k = 2 \times 10^{-2}mm.$$

Em muitas aplicações de engenharia, um considerável grau de mistura é desejável, e a expressão para l_k nos informa que para uma redução da escala de mistura pela metade, um aumento de consumo da energia de 16 vezes terá que ser feito.

7.3 As equações de Reynolds

As equações do movimento de um fluido expressam a conservação de massa, quantidade de movimento e de energia. Em uma escala molecular, um fluido possui propriedades que variam aleatoriamente; a hipótese do contínuo representa uma aproximação em termos de médias sobre pequenos domínios no espaço e no tempo. Em turbulência, lidamos com escoamentos que além de possuírem uma certa organização nas maiores escalas, também possuem flutuações randômicas. Para tais escoamentos podemos construir modelos baseados em médias. Nesta seção o campo de velocidade será expresso em termos de um campo de flutuações superposto a um campo determinístico. Com isto obteremos as equações de Reynolds(1894) para a descrição do campo médio de velocidades de um escoamento turbulento.

Denotando a velocidade média de um escoamento por \bar{u} e suas flutuações por u' podemos escrever

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad p = \bar{p} + p'. \quad (7.1)$$

Quando o escoamento é compressível, é também necessário incluir as flutuações de densidade e de temperatura,

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad t = \bar{t} + t'.$$

As médias são tomadas em pontos fixos do espaço sendo definidas como

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt.$$

Deste modo assume-se que os valores médios sejam tomados sobre um intervalo de tempo suficientemente longo para que eles sejam independentes do tempo. Logo, por definição

$$\bar{u}' = 0, \quad \bar{v}' = 0, \quad \bar{p}' = 0, \quad \bar{\rho}' = 0, \quad \bar{t}' = 0.$$

O fundamental na formulação acima é que flutuações influenciem o escoamento médio de tal forma que ele exiba um aumento na resistência a deformações. As flutuações se manifestam portanto provocando um aumento aparente da viscosidade do escoamento médio. Este aumento aparente da viscosidade forma o conceito fundamental de todas as considerações teóricas em turbulência.

Observemos agora várias regras de operação sobre quantidades médias. f e g denotam duas variáveis dependentes quaisquer cujas médias devem ser formadas, s denota seus argumentos. Segue-se que

$$\bar{f} = \overline{f}, \quad \overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g},$$

$$\overline{fg} = \bar{f}\bar{g},$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial s} = \overline{\frac{\partial f}{\partial s}}, \quad \overline{\int f d\Delta} = \int \bar{f} ds.$$

As equações que regem o movimento de fluidos foram vistas na lição 3; elas são as equações de Navier-Stokes. Desde que as hipóteses sob as quais elas foram deduzidas foram construídas a nível molecular, e elas não são quebradas pela existência de perturbações randômicas no escoamento, podemos sem nenhum temor adotá-las para descrever escoamentos turbulentos.

A substituição das equações (7.1) na equação da continuidade nos fornece

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \quad (7.2)$$

Tomando a média das equações (7.2) obtemos

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0. \quad (7.3)$$

A equação da conservação da quantidade de movimento deve ser vista com cuidado devido à não-linearidade dos termos de inércia. Estes termos podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + u')^2 + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u} + u')(\bar{v} + v'), \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v} + \bar{u}v' + \bar{v}u' + u'v'). \end{aligned}$$

Tomando a média desta equação obtemos

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y}. \quad (7.4)$$

Os outros termos na equação nos fornecem

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \quad (7.5)$$

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = \frac{d\bar{p}}{dx}, \quad (7.6)$$

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}. \quad (7.7)$$

Substituindo as expressões (7.3) a (7.7) na equação da conservação da quantidade de movimento obtemos

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left[\frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} \right] \quad (7.8)$$

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \rho \left[\frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} \right] \quad (7.9)$$

Estas equações são chamadas as equações de Reynolds.

As equações de Reynolds são bastante parecidas com as equações para escoamentos laminares, exceto que agora novos termos aparecem do lado direito. Estes termos são, de fato, os termos decorrentes das flutuações podendo ser interpretados como sendo termos de tensões provocadas pela interação das flutuações com o escoamento médio. Traçando uma analogia com as equações do capítulo 3 podemos escrever,

$$\begin{pmatrix} \overline{\tau'_{xx}} & \overline{\tau'_{xy}} \\ \overline{\tau'_{yx}} & \overline{\tau'_{yy}} \end{pmatrix} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} \end{pmatrix}$$

Este tensor é normalmente chamado na literatura de Tensor de Reynolds.

As equações (7.3), (7.8) e (7.9) constituem um ponto de partida para o tratamento de escoamentos turbulentos por permitirem o cálculo das grandezas médias de tais escoamentos. Elas entretanto não podem ser resolvidas enquanto alguma hipótese relacionando os componentes do tensor de Reynolds com as grandezas médias não foi feita. Estas hipóteses são normalmente baseadas em dados empíricos e formam o objetivo principal da teoria de turbulência. O problema matemático só estará portanto bem definido quando todos os termos decorrentes de grandezas instantâneas tiverem sido relacionadas com as grandezas médias do escoamento através de um modelo que represente bem a física do problema sob interesse. Normalmente a especificação de tais modelos é extremamente difícil, por requerer entre outras coisas, simplicidade, universalmente de aplicação e baixo custo computacional. O problema de se obter uma expressão extra que relacione as flutuações com as grandezas médias, é chamado de “o problema de fechamento” na teoria de turbulência.

Capítulo 8

A Estrutura da Camada Limite Turbulenta

8.1 As equações de camada limite

Para o caso turbulento, as equações de camada limite podem ser deduzidas utilizando-se os mesmos conceitos e hipóteses do caso laminar. Nominalmente, que existe um comprimento característico na direção transversal, a espessura da camada limite, o qual é muito menor que o comprimento característico na direção longitudinal. Isto é equivalente a se dizer que, na equação de Navier-Stokes, os gradientes dos termos difusivos na direção x podem ser desprezados perante os gradientes na direção y .

No caso de um escoamento incompressível, bi-dimensional, isto leva às seguintes equações:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (8.1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right\}. \quad (8.2)$$

Comparando-se as equações (8.1) e (8.2) com as equações para escoamentos laminares, observamos que:

1. os componentes de velocidade u , v e p foram substituídos por \bar{u} , \bar{v} e \bar{p} ,
2. os termos de inércia e de pressão permanecem inalterados, enquanto o termo viscoso é trocado por

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right).$$

Isto é equivalente a dizer que as forças viscosas laminares por unidade de volume

($= \partial\tau_l/\partial y$) são trocadas por

$$\frac{\partial}{\partial y} (\tau_l + \tau_t),$$

onde $\tau_l = \mu \partial \bar{u} / \partial y$ e $\tau_t = -\rho \overline{u'v'}$ é a tensão turbulenta resultante da hipótese de Reynolds.

As condições de contorno a serem satisfeitas por um escoamento turbulento são idênticas àsquelas impostas aos escoamentos laminares. São elas a condição de não deslizamento ($y = 0, \bar{u} = 0$) e a condição de não penetrabilidade ($y = 0, \bar{v} = 0$). Longe da parede, a velocidade deve tender assintoticamente aos valores do escoamento externo. Desde que a condição de não deslizamento deve ser satisfeita, é claro que na parede as flutuações são nulas e portanto os componentes do tensor tensão de Reynolds também o são. A consequência é que bastante próximo a parede as tensões turbulentas devem ser menos importantes que as tensões viscosas laminares, desde que estas são, genericamente falando, diferentes de zero. Segue-se que para todo escoamento turbulento existe próximo à parede uma região bastante fina onde o comportamento do escoamento é laminar. Esta camada é conhecida como a sub-camada laminar. Nela, as forças viscosas dominam também os termos de inércia. Imediatamente acima da sub-camada laminar encontra-se uma outra região onde os efeitos das flutuações, através do termo de tensões de Reynolds, se tornam comparáveis aos efeitos viscosos. A seguir, uma outra região é atingida onde as tensões turbulentas dominam completamente as tensões laminares. Embora a espessura da região de escoamento laminar seja muito pequena, seu estudo é importante por ser ali que o fenômeno da aderência do fluido à parede que dá origem ao arrasto, acontece.

8.2 Alguns resultados experimentais sobre as flutuações turbulentas

Experimentos sobre escoamentos turbulentos devem, preferencialmente, prover medidas não apenas das quantidades médias mas também dos componentes das flutuações. De fato, medidas das quantidades médias nos fornecem a maioria das informações necessárias para o tratamento de problemas simples de engenharia. Porém, só com o conhecimento das flutuações turbulentas poderemos ganhar um completo conhecimento da mecânica da turbulência. Nosso propósito agora é, portanto, apresentar medidas de algumas quantidades do campo de turbulência de modo a enriquecer nossa visão do fenômeno e oferecer alguma justificativa para os procedimentos matemáticos a serem adotados no futuro.

A figura 8.1 apresenta dados experimentais para o perfil de velocidade médio e para os valores médios quadráticos dos dois componentes $\sqrt{\overline{u'^2}}$ e $\sqrt{\overline{v'^2}}$ das flutuações. Observe o alto valor atingido por $\sqrt{\overline{u'^2}}$ próximo à parede ($= 0.13U$). O produto $-\overline{u'v'}$ é mostrado na figura 8.2. Na maior parte do escoamento as tensões se devem exclusivamente aos termos turbulentos. Apenas junto à parede onde as flutuações devem ir a zero as tensões laminares dominam. Um outro conjunto de medidas é mostrado na figura 8.3.

É claro que, devido à própria natureza do escoamento, a turbulência nas regiões mais externas da camada limite é intermitente. Oscilogramas dos componentes da velocidade demonstram que a posição da orla da camada limite que divide as regiões de escoamento

turbulento do escoamento externo, varia fortemente com o tempo. A variação do fator de intermitência γ sobre a espessura da camada limite é mostrada na figura 8.4. O valor $\gamma = 1$ significa que o escoamento é turbulento todo o tempo. $\gamma = 0$ corresponde ao caso contrário.

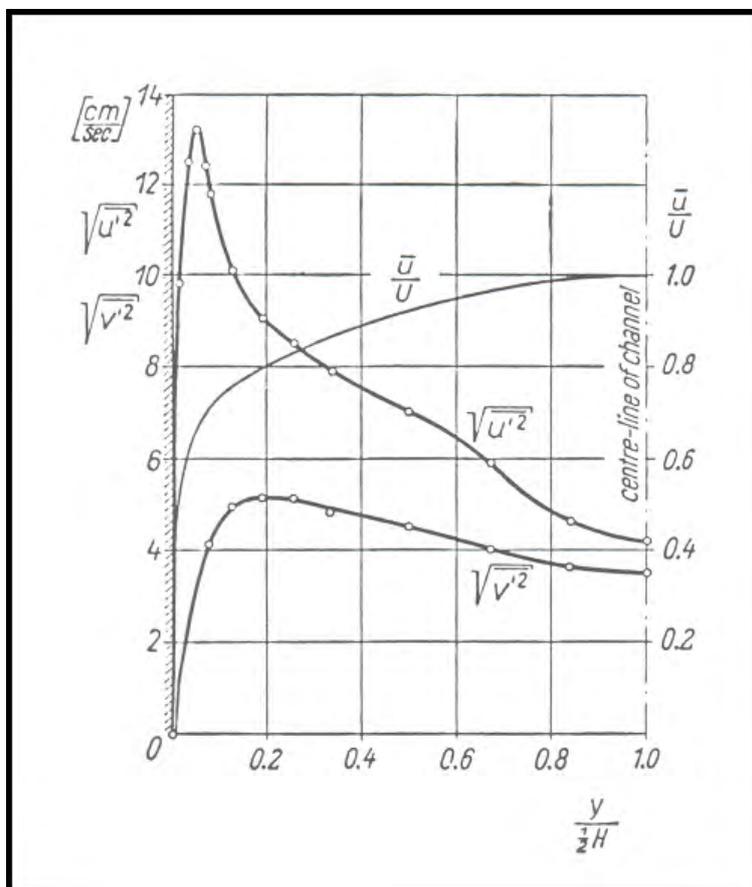


Figura 8.1: Medidas de flutuações turbulentas em um túnel de vento.

8.3 A estrutura da camada limite turbulenta

Para deduzirmos a estrutura da camada limite turbulenta nos mesmos moldes do feito anteriormente para a camada limite laminar, precisamos, antes de qualquer coisa, estimar a ordem de grandeza do termo turbulento. Isto deve ser feito através de uma análise metódica dos dados experimentais. A tensão turbulenta $-\overline{u'v'}/U_\infty^2$ medida próxima à parede concorda em ordem de grandeza com a tensão local na parede $\tau_w/\rho U_\infty^2 \simeq 0.0015$. Isto nos sugere ser razoável assumirmos que

$$0(u') = 0(v') = 0(u_\tau), \quad (8.3)$$

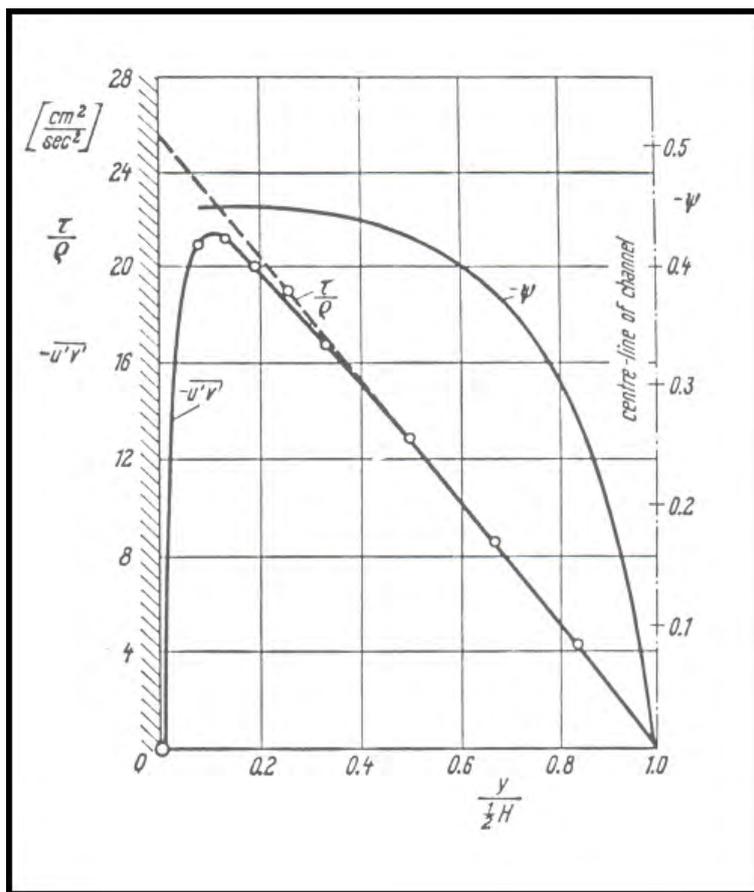


Figura 8.2: Medidas de flutuações turbulentas em um canal d'água.

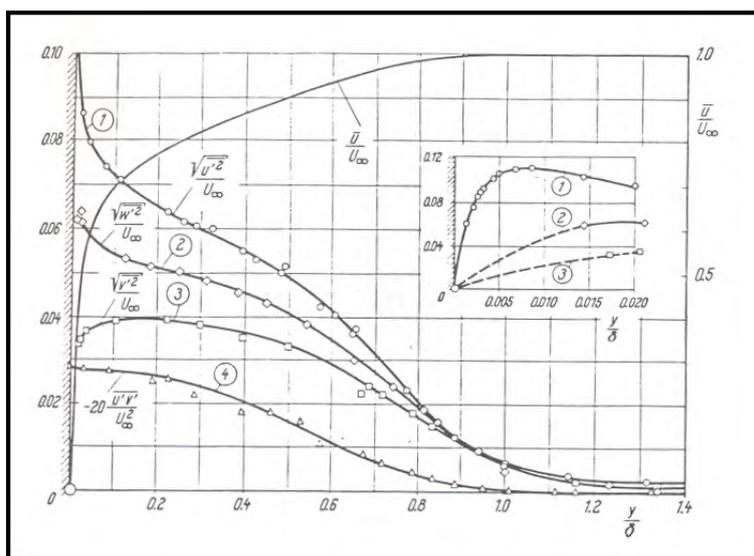


Figura 8.3: Flutuações turbulentas em uma camada limite.

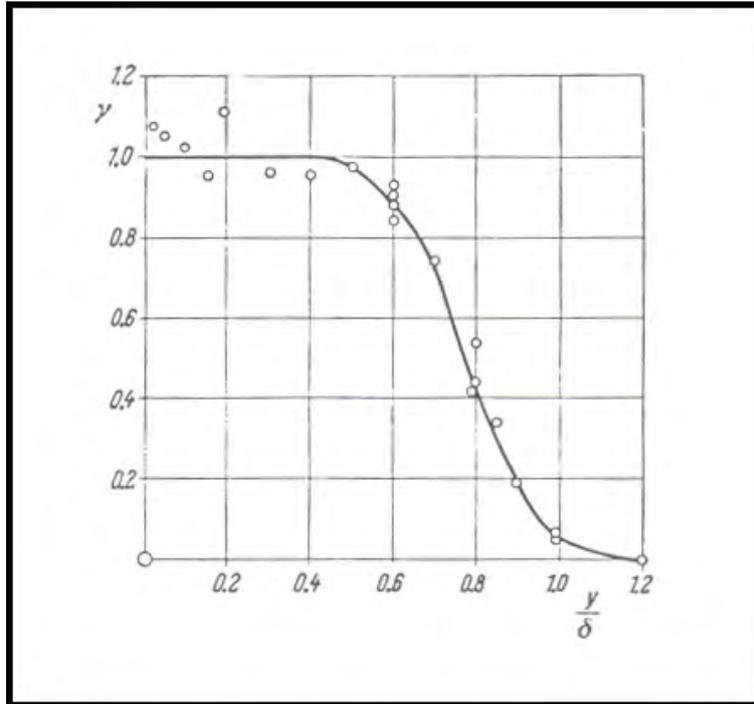


Figura 8.4: Distribuição do fator de intermitência.

$$u_{\tau} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}.$$

A velocidade característica u_{τ} é chamada de a velocidade de atrito. Podemos então agora proceder a uma análise sobre a ordem relativa dos termos na equação (8.2). Próximo à parede deve existir uma região onde os efeitos das tensões laminares e turbulentas possuam a mesma importância. Logo

$$0\left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = 0(\overline{u'v'}) \quad (8.4)$$

Como na camada limite turbulenta a mistura na direção transversal é muito intensa, a variação do perfil da velocidade com y não pode ser de ordem unitária, como acontece com a camada limite laminar; ela deve ser, de fato, bem menor. Observa-se que próximo à parede

$$0\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = 0\left(\frac{u_{\tau}}{y}\right). \quad (8.5)$$

Seja agora $\hat{\delta}$ a espessura da camada onde a relação (8.4) é satisfeita, logo

$$\frac{\nu u_{\tau}}{\hat{\delta}} = 0(u_{\tau}^2),$$

ou seja

$$\hat{\delta} = 0(\nu/u_\tau). \quad (8.6)$$

A região onde os termos de inércia são equilibrados pelas tensões turbulentas é determinada considerando-se

$$0\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right) = 0\left(\frac{\partial}{\partial y} - \overline{(u'v')}\right).$$

Chamando a espessura desta camada de $\tilde{\delta}$, obtemos

$$\frac{U_\infty^2}{L} = 0\left(\frac{u_\tau^2}{\tilde{\delta}}\right),$$

isto é,

$$\tilde{\delta} = 0\left(\frac{u_\tau^2}{U_\infty^2}L\right). \quad (8.7)$$

Se δ denota a espessura da camada limite, sua estrutura pode ser vista esquematicamente na figura (8.5)

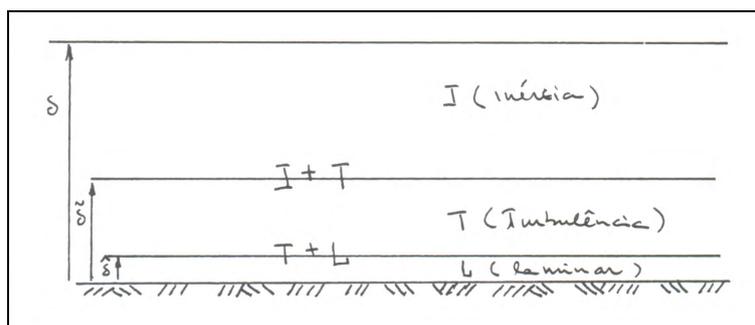


Figura 8.5: A estrutura da camada limite turbulenta.

A camada limite turbulenta possui então estrutura bastante distinta da camada limite laminar. Ela possui junto à parede uma camada bastante fina, de espessura $\hat{\delta}$, onde os termos viscosos prevalecem. Acima desta camada e até a espessura $\tilde{\delta}$, a predominância é dos termos turbulentos. Finalmente, na região mais externa, de espessura δ , o domínio é dos termos de inércia. Nesta região, os termos de tensão aparente de Reynolds possuem uma contribuição de ordem superior.

8.4 A lei da parede

Uma comparação entre o perfil de velocidade médio da camada limite turbulenta (já visto na figura 8.1) e o perfil de velocidade da camada limite laminar é mostrada na figura 8.6. É aparente desta figura que o perfil turbulento varia muito pouco na região externa, caindo

rapidamente para zero numa região próxima à parede. De fato, os ensinamentos obtidos na seção anterior nos dizem que esta queda deve ocorrer na camada definida por $\hat{\delta}$. É, portanto, razoável assumir que as dimensões de similaridade para uma correta descrição do escoamento junto à parede devem ser u_τ e $\hat{\delta}$. Um gráfico do perfil de velocidade nas coordenadas \bar{u}/u_τ e yu_τ/ν é mostrado a seguir. Como esperado, os vários dados experimentais colapsam sobre uma única curva nas regiões mais internas do escoamento. Note que o gráfico é monologarítmico. Para $yu_\tau/\nu < 11$, a solução encontrada é

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{yu_\tau}{\nu}. \quad (8.8)$$

De fato, como nesta região existe um domínio dos efeitos viscosos, a equação governante se reduz a

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = 0.$$

Uma integração sucessiva desta expressão nos fornece imediatamente a solução (8.8). Na região completamente turbulenta a solução é vista ser logarítmica, e dada por

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln \frac{yu_\tau}{\nu} + A, \quad (8.9)$$

onde k e A são constantes universais.

Esta expressão é referida na literatura como a “Lei da Parede”. Ela constitui uma das duas relações fundamentais da teoria de camada limite turbulenta. Sua importância reside no fato dela poder ser deduzida através de simples argumentos dimensionais e, principalmente, por ela ter sido confirmada por centenas de experimentos realizados sob diferentes condições por diferentes pesquisadores. Extensões desta lei para que ela possa levar em conta os mais diversos efeitos tais como rugosidade, gradiente de pressão, injeção de fluido, compressibilidade, troca de calor, etc, tem sido realizada na literatura por diversos autores, sendo apresentadas aqui oportunamente.

8.5 A lei da esteira

A figura 8.7 mostra claramente que nas regiões mais externas da camada limite turbulenta os perfis de velocidade não colapsam. Isto realmente era esperado pois sabemos que nestas regiões o comprimento característico é δ . Para descrever o escoamento nesta porção da camada limite, Coles, após a análise de 600 experimentos, sugeriu uma função universal da forma

$$W(y/\delta) = \frac{P}{k} \left(1 - \cos \pi(y/\delta) \right). \quad (8.10)$$

Desta forma, a expressão (8.9) pode ser estendida para toda a camada limite se for reescrita como

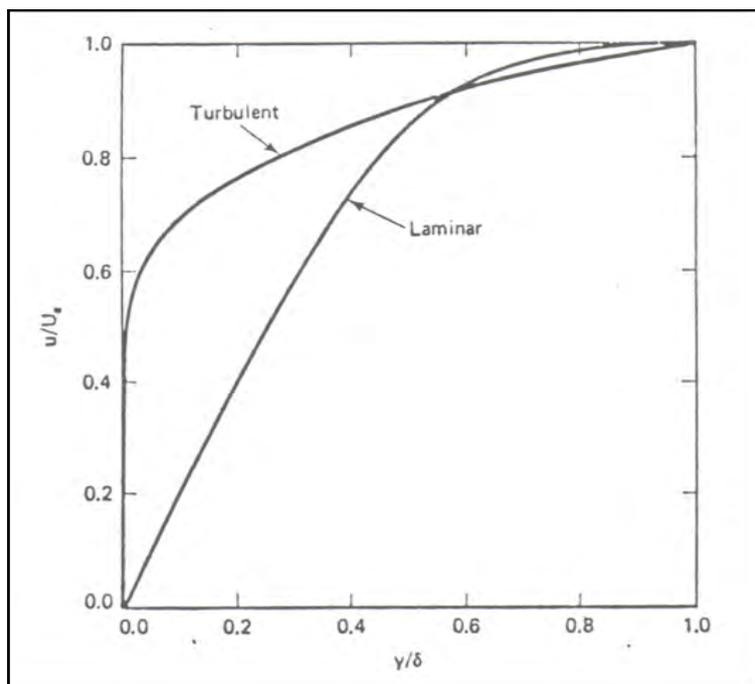


Figura 8.6: Comparação entre as formas dos perfis de velocidade laminar e velocidade turbulento.

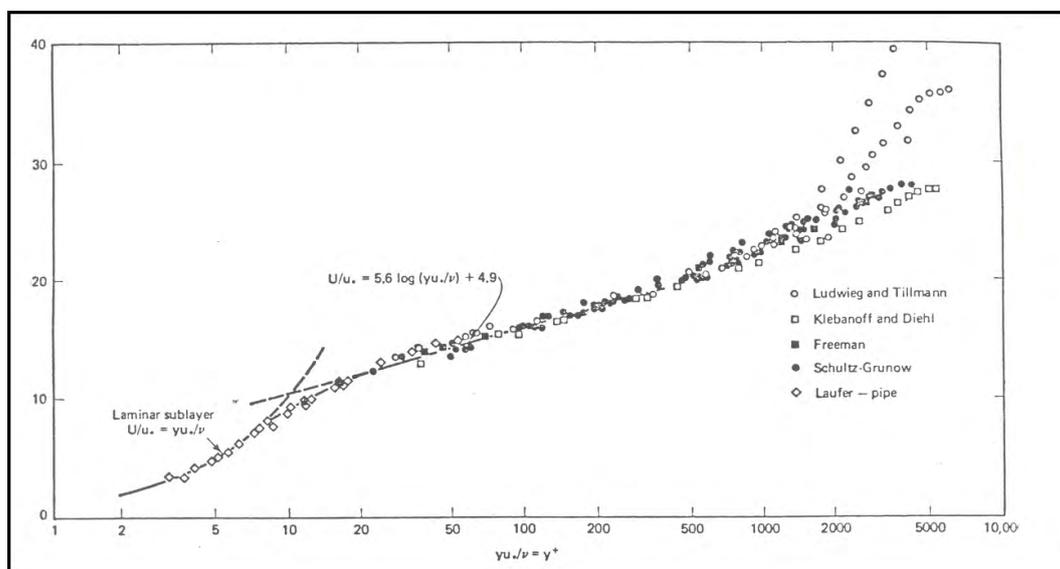


Figura 8.7: Lei da parede em coordenadas internas.

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln \frac{yu_\tau}{\nu} + A + \frac{P}{k} \left(1 - \cos \left(\pi \frac{y}{\delta} \right) \right). \quad (8.11)$$

Esta é a segunda relação fundamental da teoria de camada limite turbulenta, a “Lei da Esteira”. O parâmetro P , chamado de o perfil da esteira, é uma função do gradiente de pressão.

8.6 Uma equação para o coeficiente de atrito local

A tensão local na parede pode ser obtida da expressão (8.11) se $(y, \bar{u}) = (\delta, U_\infty)$ são substituídas, e as constantes k , A e P são conhecidas. Para uma placa plana,

$$k = 0.40, \quad A = 5.0 \quad e \quad P = 0.55. \quad (8.12)$$

Com isto a equação para o atrito local fica

$$\frac{U_\infty}{u_\tau} = 2.5 \ln \frac{\delta u_\tau}{\nu} + 7.75. \quad (8.13)$$

Esta equação transcendental pode ser resolvida para u_τ se U_∞ e δ são conhecidos. δ , a espessura da camada limite, é um parâmetro à priori desconhecido. Observe entretanto que podemos definir um sistema de duas equações a duas incógnitas, u_τ e δ , se utilizarmos (8.13) e a equação da conservação da quantidade de movimento na forma integral.

Capítulo 9

O Comprimento de Mistura de Prandtl

9.1 Introdução

Na lição anterior obtivemos alguns resultados importantes sem termos tido a necessidade de fazer qualquer hipótese a respeito de como o movimento turbulento se relaciona com o escoamento médio. Utilizando apenas algumas hipóteses a respeito da ordem de grandeza das flutuações, deduzimos a estrutura da camada limite turbulenta e as leis da parede e da esteira. Para a maioria das situações de interesse prático, entretanto, métodos mais sofisticados são necessários, os quais exigem um conhecimento mais apurado de processo turbulento e de sua interação com o movimento médio. Infelizmente, os mecanismos da turbulência são de natureza extremamente complexa, o que torna impossível a obtenção de resultados simples, universais e precisos. As tentativas na literatura tem sido então de construir teorias matemáticas simples com o auxílio de hipóteses semi-empíricas de validade mais restrita. O objetivo desta lição é estudar uma destas teorias matemáticas, de concepção bastante simples e surpreendentes bons resultados, a teoria do comprimento de mistura de Prandtl.

9.2 O conceito de viscosidade turbulenta de Boussinesq

J. Boussinesq foi o primeiro pesquisador a propor uma relação matemática que expressasse as tensões de Reynolds como função das grandezas médias do escoamento. Realizando uma analogia com o coeficiente de viscosidade na hipótese de Stokes, ele introduziu o coeficiente de mistura, A_τ , através da relação

$$\tau_t = -\overline{\rho u'v'} = A_\tau \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (9.1)$$

A desvantagem na expressão (9.1) é que, ao contrário de μ para o escoamento laminar, A_τ não é uma propriedade do fluido, dependendo sim das propriedades do escoamento. Isto é imediatamente compreendido se notarmos que em escoamentos turbulentos as forças

viscosas são aproximadamente proporcionais ao quadrado da velocidade média. Consequentemente, de acordo com a equação (9.1), A_τ deve ser aproximadamente proporcional à primeira potência da velocidade média.

As equações de camada limite turbulenta podem então ser escritas como

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (9.2)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \epsilon_\tau) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (9.3)$$

onde $\epsilon_\tau = A_\tau/\rho$.

9.3 O comprimento de mistura de Prandtl

As equações (10.2) e (10.3) não podem ser utilizadas para o cálculo de problemas de engenharia se nada for sabido a respeito da dependência de A_τ na velocidade. Nas teorias mais simples, considera-se que as “partículas” ou “moléculas” de fluido transferem propriedades de uma região para outra, exatamente como a agitação das moléculas transfere propriedades tais como quantidade de movimento e calor em escoamentos não turbulentos. Nestas teorias um comprimento característico, l , faz o papel do caminho livre médio no fenômeno de difusão molecular. A transferência de propriedades é considerada ser afetada pelo movimento de partículas de fluido que deixam uma região onde suas propriedades são aquelas do escoamento médio em sua vizinhança, e se movem numa direção transversal ao escoamento através da distância l . Neste ponto, elas supostamente se misturam com o fluido em suas vizinhanças, tornando suas propriedades idênticas àsquelas do escoamento médio naquela região.

Para fixar idéia, consideremos inicialmente o caso de escoamentos paralelos. Nestes escoamentos, o perfil de velocidade é dado por

$$\bar{u} = \bar{u}(y); \quad \bar{v} = 0; \quad \bar{w} = 0.$$

Tais escoamentos ocorrem, por exemplo, em um canal retangular ou em tubos.

Considere agora que uma partícula parta de uma camada $y = y_1$ e que carregue consigo o valor de $\bar{u}(y_1)$. Depois de se mover para $y = y_2$, \bar{u} difere do escoamento médio por $\bar{u}(y_1) - \bar{u}(y_2)$. A taxa média de transferência de \bar{u} através de uma unidade de área perpendicular a y é

$$Q = \bar{v}[\bar{u}(y_1) - \bar{u}(y_2)]$$

Expandindo-se $\bar{u}(y_1) - \bar{u}(y_2)$ em série de Taylor obtemos

$$Q = \bar{v} \left[-(y_2 - y_1) \frac{d\bar{u}}{dy} + \frac{1}{2} (y_2 - y_1)^2 \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} + \dots \right].$$

Se a variação de \bar{u} ao longo de $y_2 - y_1$ for pequena, podemos desprezar os termos de ordem superior e obter

$$Q = -\bar{v}(y_2 - y_1) \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (9.3)$$

Por analogia à teoria cinética dos gases, podemos imaginar que existe uma distância média, l , e uma velocidade característica, u_c , tal que

$$\bar{v}(y_2 - y_1) = l u_c$$

O comprimento l é chamado o comprimento de mistura. As tensões de Reynolds podem então ser escritas como

$$\tau_t = -\overline{\rho u'v'} = \rho l u_c \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (9.4)$$

Observando que o valor médio do quadrado das flutuações dos componentes da velocidade tendem a ser igual, Prandtl assumiu que

$$u'_c = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (9.5)$$

Deste modo, as tensões de Reynolds se reduzem a

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2. \quad (9.6)$$

Comparando-se a expressão acima com a hipótese de Boussinesq, obtemos

$$A_\tau = \rho l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

O mesmo raciocínio anterior poderia ser constituído para se deduzir que

$$\overline{|u'|} = 0 \quad (\overline{|v'|}) = l \frac{d\bar{u}}{dy},$$

o que nos daria ainda

$$\overline{u'v'} = -c \overline{|u'|} \overline{|v'|}$$

$$\overline{u'v'} = -\text{constante} l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Em muitos casos é possível se estabelecer uma relação simples entre o comprimento de mistura, l , e um comprimento característico do escoamento. Por exemplo, próximo a uma parede $l = ky$, onde k é uma constante. Em um jato ou esteira, l é proporcional a largura da seção sob consideração.

9.4 Outras hipóteses sobre a tensão turbulenta

A equação (9.6) é ainda insatisfatória por implicar que a viscosidade cinemática turbulenta, ϵ_τ , se anule nos pontos em que $d\bar{u}/dy$ for zero, isto é, nos pontos de máximo e de mínimo de \bar{u} . Isto certamente não é o caso pois a mistura por turbulência não se anula, por exemplo, no centro de um canal.

Para contornar esta dificuldade, Prandtl estabeleceu a seguinte equação para a viscosidade cinemática aparente

$$\epsilon_\tau = k_1 b (\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min}), \quad (9.7)$$

onde k_1 = número adimensional a ser determinado experimentalmente, b = espessura da região de mistura. Com esta hipótese, ϵ_τ permanece constante ao longo de toda região, enquanto com a expressão anterior, (9.6), ϵ_τ variava mesmo quando o comprimento de mistura era mantido constante.

Segue de (9.7) que

$$\tau_t = \rho k_1 b (\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (9.8)$$

Hoje, sabe-se que uma combinação das expressões (9.6) e (9.7) oferece os melhores procedimentos de cálculo.

Para as partes mais internas da camada limite, $0 \leq y \leq y_k$, l é descrito por

$$l = ky \left[1 - \exp \left(-\frac{u_\tau}{A\nu} \right) \right]$$

onde $k = 0.4$, $A = 26$.

Com isto a viscosidade turbulenta para as regiões internas fica ($y^+ = yu_\tau/\nu$).

$$\epsilon_i = \left\{ ky \left[1 - \exp \left(-\frac{y^+}{A} \right) \right] \right\}^2 \frac{d\bar{u}}{\partial y}. \quad (9.9)$$

Para as porções mais externas de camada limite, a expressão (9.7) pode ser escrita como

$$\epsilon_e = k_2 \gamma \delta_1 U, \quad (9.10)$$

onde γ = fator de intermitência, δ_1 = espessura de deslocamento, $k_2 = 0.016$. O fator de intermitência pode ser aproximado pela relação

$$\gamma = [1 + 5.5(y/\delta)^6]^{-1}. \quad (9.11)$$

O valor de y_k que determina a região de validade de ϵ_i e de ϵ_e é obtido requerendo-se que

$$\epsilon_i = \epsilon_e \quad em \quad y = y_k.$$

Resultados numéricos obtidos com as expressões (9.9) e (9.10) são mostrados na figura (9.1).

9.5 A lei da parede de acordo com o comprimento de mistura

De acordo com a teoria do comprimento de mistura, e com a hipótese de que perto da parede $l = ky$, podemos escrever

$$\tau_t = \rho k^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Como próximo à parede existe uma região onde os efeitos turbulentos dominam ($\nu/u_\tau \leq y \leq (u_\tau/U_\infty)^2 L$), vem

$$\frac{\partial}{\partial y} \tau_t = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho k^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) = 0, \quad (9.12)$$

nesta região.

Uma primeira integração desta equação nos fornece

$$\rho k^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \tau_w,$$

ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau}{ky}. \quad (9.13)$$

Outra integração resulta em

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln y + A,$$

a nossa bem conhecida lei da parede.

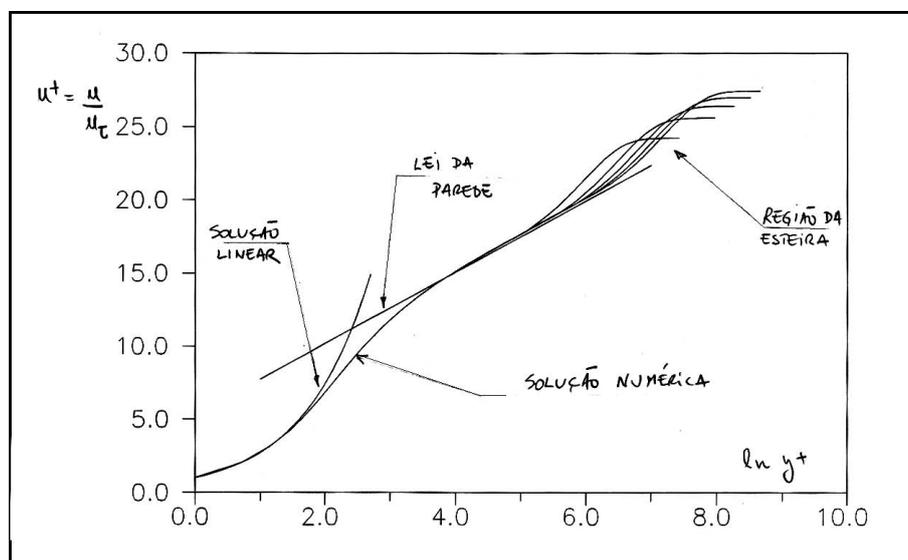


Figura 9.1: Perfis de Velocidade Calculados de acordo com as expressões (9.9) e (9.10).

Capítulo 10

A Modelagem Turbulenta através de Equações de Transporte

10.1 Modelos de 1 equação

Vimos na lição anterior que a modelagem turbulenta através de modelos algébricos simples pode ser muitas vezes inadequada, bastando para isto que $\partial u/\partial y$ seja zero. De fato, para várias situações de interesse prático, os modelos de comprimento de mistura e de viscosidade turbulenta se mostram francamente inapropriados. Por esta razão, é inevitável que novas formulações, que envolvam diretamente o caráter das flutuações, sejam buscadas. Em princípio estas novas formulações deveriam ser feitas a um nível mais fundamental, presumivelmente produzindo modelos de uso mais universal. Uma grandeza normalmente utilizada para representar as características da turbulência é a energia cinética turbulenta, definida por

$$K = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}). \quad (10.1)$$

Para calcular K usamos uma equação de transporte deduzida diretamente das equações de N-S. Esta equação é obtida multiplicando-se cada componente das equações de N-S pela velocidade de flutuação correspondente, tirando-se a média, somando todas as equações e fazendo as simplificações decorrentes das aproximações de camada limite. A equação resultante é

$$\rho u \frac{\partial K}{\partial x} + \rho v \frac{\partial K}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho v' K'}) + \overline{v' p'} - \overline{\rho u' v'} \frac{\partial u}{\partial y} - \mu \sum \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)^2}. \quad (10.2)$$

convecção

difusão

produção

dissipação

Este tipo de formulação é normalmente chamado de formulação de uma equação.

Para que a equação acima possa ser resolvida, os termos que envolvem flutuações devem ser modelados. A modelagem do último termo é a que causa menos controvérsia

na literatura. Como a dissipação de energia por efeitos viscosos ocorre nas menores escalas do movimento, onde o escoamento é aproximadamente isotrópico, segue-se que

$$\mu \sum \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)^2} = C_D \rho \frac{K^{3/2}}{l}, \quad (10.3)$$

onde C_D é uma constante ($= 0.08$) e l é um comprimento característico.

A modelagem do termo $\overline{u'v'}$ pode ser então feita como na lição 10 através do conceito de viscosidade turbulenta, mas com a velocidade característica, \sqrt{K} . Resulta que

$$\nu_t = \sqrt{K}l \quad (10.4)$$

Alternativamente, Bradshaw sugere que se tome

$$\tau_t = 0.3\rho K. \quad (10.5)$$

O termo de difusão é de modelagem difícil graças a completa ausência de dados que envolvam as flutuações de pressão. A praxe é considerar uma analogia com o transporte de quantidade de movimento em escoamentos laminares e escrever

$$(\overline{\rho v'K'} + \overline{v'p'}) = \rho \frac{\sqrt{K}l}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial y}, \quad (10.6)$$

$$(\overline{\rho v'K'} + \overline{v'p'}) = \tau_t \sqrt{\frac{\tau_{max}}{\rho}} G(y/\delta), \quad (10.7)$$

$G(y'/\delta) =$ função universal.

A modelagem de l e de G , normalmente através de uma equação algébrica, permite então que a equação (10.2) seja resolvida. Na realidade, cálculos realizados com os modelos desta, e da lição anterior, mostram que, para a região interna, os métodos são praticamente equivalentes. As maiores diferenças aparecem no tratamento da região externa. A equação para K é particularmente útil na análise de camadas limite sujeitas a altos níveis de turbulência externa.

10.2 Modelos de 2 equações

Os modelos de 1 equação possuem ainda a séria deficiência de requererem uma modelagem algébrica do comprimento característico l . Existem situações onde uma simples relação entre l e alguma dimensão característica do fenômeno pode ser facilmente identificada. Infelizmente, este não é o caso geral, o que provoca severas limitações nos modelos de 1 equação. Para sobrepujar esta dificuldade, avançaremos um passo descrevendo l através de uma equação de transporte. De fato, a idéia é buscar a descrição de uma grandeza Z que seja uma combinação de K e de l ($Z = K^m l^n$). Uma equação para Z pode ser obtida diretamente das equações de N-S por meio de alguma manipulação algébrica. O resultado é

$$\rho u \partial Z / \partial x + \rho v \partial Z / \partial y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_z} \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + Z \left[c_1 \frac{\mu_\tau}{K} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_2 \frac{\rho^2 K}{\mu_\tau} \right] + S_z, \quad (10.8)$$

onde σ_z = número de Prandtl para a difusão de Z , S_z = termo de fonte, c_1, c_2 = constantes.

A maioria dos trabalhos na literatura se concentra na análise dos modelos onde $m = 3/2$, $n = -1$. Estes modelos são chamados de $K - \epsilon$ por ser $Z = K^{3/2}/l$ proporcional à taxa de dissipação turbulenta. A equação (10.8) apresenta alguns problemas conceituais. Por exemplo, a modelagem de algum de seus termos (quais ?) implicará no aparecimento da dissipação da dissipação. Apesar disto, o uso de 2 equações tem levado a excelentes resultados para um grande número de problemas de engenharia. Para o escoamento em camadas cisalhantes, Ng and Spalding recomendam

$$c_1 \simeq 1.5, \quad c_2 = 0.18, \quad \sigma_z \simeq 1.0.$$

Estas pretensas constantes variam bastante para outras configurações de escoamento. No caso de aplicação específicas é portanto imperativo que estes valores sejam revistos.

10.3 Formulações diretas das tensões de Reynolds

Os modelos de 1 de 2 equações ainda padecem do conceito de viscosidade turbulenta que estabelece uma relação muito direta entre a flutuação e o escoamento médio do gradiente local de velocidade. Para eliminar esta limitação, uma alternativa é estabelecer uma equação de transporte para o próprio termo $\overline{u'v'}$. Segue-se das equações de N-S que

$$u \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + v \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} = -\overline{v'^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{u'v'^2} + \frac{\overline{p'u'}}{\rho} \right) + \frac{\overline{p'}}{\rho} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) - 2\nu \sum \left(\frac{\partial u'}{\partial x_j} \frac{\partial v'}{\partial x_j} \right). \quad (10.9)$$

convecção produção difusão redistribuição dissipação viscosa

Observe que a equação (10.9) envolve termos turbulentos de ordem superior ($\overline{u'v'^2}$). Note também que alguma manipulação matemática poderia produzir uma nova equação para esta correlação de 3ª ordem que, entretanto, envolveria necessariamente termos de 4ª ordem. Este procedimento leva, portanto, sempre a um sistema indeterminado de equações que envolvem correlações de ordem superior. Logo, é preciso “fechar” o procedimento em algum nível, modelando os termos de ordem superior. No modelo de Hanjalic e Launder(1972), o termos de difusão é modelado como

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v'u'v'} + \frac{\overline{p'u'}}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{K}l \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right). \quad (10.10)$$

Para escoamentos longe de paredes o termo de dissipação pode ser desprezado. O termo de redistribuição é modelado através dos processos de interações turbulentas ($= (K^{1/2}l)\overline{u'v'}$) e de gradiente do escoamento médio ($= K\partial u/\partial y$). A forma final da equação para as tensões de Reynolds é

$$u\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial x} + v\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_t}\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}\right) - c_\tau\left(K\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{K^{1/2}}{l}\overline{u'v'}\right), \quad (10.11)$$

onde $\sigma_t = 0.9$ e $c_\tau = 2.8$.

Como a equação acima contém K e l , estas grandezas devem ser modeladas através de outras duas equações de transporte, como feito na seção anterior.

10.4 Condições de contorno

Com as novas equações para K , l e $\overline{u'v'}$, condições de contorno devem ser especificadas para sua resolução. Como na maioria dos estudos em turbulência, nenhum dado deste parâmetros é fornecido, torna-se necessário providenciar estimativas para eles. Geralmente, os perfis de u são analisados para gerar perfis de K , ϵ ou $\overline{u'v'}$. Se o nível de turbulência externo é conhecido, ele deve ser usado. De qualquer modo, a estimativa de K e de ϵ não é fácil, consistindo numa grande dificuldade do método.

Capítulo 11

A Camada Limite Turbulenta Térmica

11.1 Introdução

A camada limite é a região do escoamento onde os efeitos viscosos ganham importância diante dos efeitos de inércia. Nas lições anteriores vimos que esta região apresenta sub-regiões com aspectos bem definidos entre si, as quais podem ser caracterizadas por seus fenômenos dominantes. De fato a divisão da camada limite turbulenta em regiões onde certos fenômenos são dominantes é um procedimento já bem estabelecido o qual sugere simplificações nas equações que regem o fenômeno permitindo o tratamento analítico dos problemas.

Do fenômeno de camada limite sabemos que, muito próximo da parede, onde a velocidade é quase nula devido às condições de impermeabilidade e de não deslização, e onde os gradientes de velocidade e de temperatura são muito elevados, os efeitos de inércia e de convecção perdem importância diante dos efeitos viscosos, de condução e turbulentos. Na ausência de velocidades elevadas e de gradientes de pressão no escoamento livre, as equações de conservação nas proximidades da parede podem ser escritas segundo uma nomenclatura clássica em sua forma dimensional, onde τ reúne as tensões tanto laminares quanto turbulentas e Q'' , representa o calor transmitido por condução e condução turbulenta, como:

a) conservação da quantidade de movimento na direção x

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad (11.1)$$

com

$$\tau(0) = \tau_w = \rho u_\tau^2, \quad \text{por definição,} \quad (11.2)$$

e

b) conservação da energia

$$\frac{\partial Q''}{\partial y} = 0, \quad (11.1)$$

com

$$Q''(0) = Q''_w = u_\tau t_\tau c_p \rho, \quad \text{por definicao,} \quad (11.4)$$

Uma primeira integração das equações (11.1) e (11.2) nos dá:

$$\tau = \tau_w \quad (11.5)$$

$$Q'' = Q''_w \quad (11.6)$$

Dividindo as Eqs. (11.5) e (11.6) por ρU_∞^2 e $\rho c_p U_\infty (T_w - T_\infty)$ respectivamente, obtém-se as formas adimensionais

$$\tau = \sqrt{Cf/2}, \quad (11.7)$$

$$q'' = St. \quad (11.8)$$

Estas equações não informam nada acerca dos perfis de velocidade e temperatura, mas deixam claro que o calor e tensões, independentemente de sua origem – se turbulenta ou não – mantém constantes ao longo desta região suas quantidades globais. No entanto, a medida que nos aproximamos ainda mais da parede, as flutuações vão se reduzindo, passando as tensões laminares e a condução de calor a dominar sobre os fenômenos turbulentos. Aplicando-se então as Eqs. (11.5) e (11.6) o modelo de Newton para tensões laminares e de Fourier para condução de calor e ainda condições de contorno para U e T obtém-se:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (11.9)$$

com

$$U(0) = 0, \quad (11.10)$$

$$Q''_w = -k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (11.11)$$

com

$$T(0) = T_w, \quad (11.12)$$

cujas soluções são

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{y u_\tau}{\nu} \longrightarrow u^+ = y^+ \quad (11.13)$$

$$\frac{T - T_w}{t_\tau} = \frac{y u_\tau}{\nu} Pr \longrightarrow t^+ = y^+ Pr \quad (11.14)$$

através dos quais são apresentadas as variáveis de similaridade do problema, considerando suas condições de contorno para τ e Q .

11.2 A lei da parede térmica

As figs. 11.1 e 11.2 sugerem que as variáveis de similaridade assim propostas estendem sua validade para além da subcamada laminar, abrangendo uma região intermediária da camada limite que possui perfil logarítmico. Isto pode ser confirmado com base no fato de que, a medida que o observador se afasta da parede, as flutuações de velocidade e de temperatura vão aumentando com relação às médias fazendo com que os efeitos de turbulência ganhem importância e passem a dominar sobre as tensões laminares e sobre a condução de calor antes que os efeitos de inércia e convecção o façam. Estes fatos levam a supor a existência de uma região da camada limite onde a turbulência seja o fenômeno dominante. Aplicando o modelo de comprimento de mistura (neste caso utilizam-se variáveis adimensionais que são comumente empregadas nas equações para a região completamente turbulenta),

a) conservação da quantidade de movimento na direção x

$$\tau = k_m^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (11.15)$$

b) conservação da energia

$$q'' = k_m k_y^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial t}{\partial y} \quad (11.16)$$

às Eqs. (11.7) e (11.8) obtém-se as seguintes soluções:

$$u^+ = \frac{1}{k_m} \ln y + A', \quad (11.17)$$

ou por conveniência,

$$u^+ = \frac{1}{k_m} \ln y^+ + A, \quad (11.18)$$

e, analogamente

$$t^+ = \frac{1}{k_t} \ln y^+ Pr + B, \quad (11.19)$$

a partir da substituição de u - Eq. (11.18) - na Eq. (11.16). As Eqs. (11.18) e (11.19) configuram previsões experimentais de um perfil logarítmico e por conseguinte sustentam a hipótese da existência de uma região completamente turbulenta.

A completa definição das Eqs. (11.18) e (11.19) necessita ainda da determinação dos valores de k_m , A , k_t e B , a qual é feita mediante a análise dos dados experimentais. Para o perfil de velocidade vimos que $k_m = 0,40$ e $A = 5,0$ são valores bem estabelecidos. Para a temperatura, vários estudos foram feitos acerca do número de Prandtl turbulento ($= Pr_t$) o qual é definido como

$$Pr_t = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_t} = \frac{\text{viscosidade turbulenta cinética}}{\text{viscosidade turbulenta térmica}}$$

que, aplicando o modelo de comprimento de mistura, assume a forma

$$Pr_t = \frac{k_m}{k_t}.$$

Estes estudos atribuem a Pr_t uma fraca ou nula dependência em relação ao Pr , sendo 0,9 um valor comumente adotado, o que é confirmado neste trabalho pelo valor de $k_t = 0,46$ encontrado. De modo contrário, para B verifica-se uma forte dependência com Pr , sendo que para o valor de 4,5 é típico. Neste trabalho o valor de 4,9 é empregado para B pois concorda melhor com os dados experimentais utilizados.

Estes resultados estão publicados na literatura e o acima exposto consiste apenas em uma revisão sumária de conceitos. Todavia, uma abordagem alternativa pode ser empregada, com vantagens ao problema térmico se adotarmos outras variáveis de similaridade, quais sejam:

$$t' = \frac{T - T_w}{(T_\infty - T_w)\sqrt{St}} \quad \text{ou} \quad t^* = \frac{t}{\sqrt{St}}, \quad (11.22)$$

$$y^* = \frac{yU_\infty\sqrt{St}}{\nu}, \quad (11.23)$$

que também as justificam a partir da subcamada laminar. De fato, estas decorrem diretamente da equação adimensional de energia aplicada a esta região – Eq. (11.8) – cuja solução é

$$t^* = y^* Pr \quad (11.24)$$

A Fig. 11.3 mostra que também neste caso estas variáveis são válidas na região logarítmica para a qual se pode escrever

$$t^* = \frac{1}{k'_t} \ln y^* Pr + B'. \quad (11.25)$$

As variáveis de similaridade assim propostas são o alicerce sobre o qual se construirá uma solução que desvincula o problema térmico do problema dinâmico, como ficará claro nas sessões seguintes. A fim de confirmar a Eq. (11.25) lançada com base em resultados experimentais, serão apresentadas também as justificativas teóricas que a sustentam.

A Eq. (11.25) é na verdade solução da Eq. (11.8) onde foi adotado o seguinte modelo para a turbulência

$$\dot{q}'' = k_t'^2 y^2 \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 \quad (11.26)$$

Este modelo por sua vez decorre de uma hipótese de proporcionalidade entre as flutuações de velocidade e de temperatura donde vem a substituição de $\partial u / \partial y$ por $\partial t / \partial y$ e de $k_t k_m$ por $K_t'^2$ na Eq. (11.16). Verifica-se que esta hipótese é válida a partir das soluções logarítmicas encontradas – Eqs. (11.18) e (11.19) – e desde que Cf seja proporcional a St , o que é razoável, e, para o ar, fica patente das medidas experimentais de vários autores.

A propósito da solução alternativa, cabe ressaltar que existem fortes razões para se suspeitar que tais hipóteses também se apliquem a fluidos diferentes do ar. No entanto, a verificação deste fato, bem como o consequente estudo da dependência de k_t' e B' com

relação ao Pr não serão feitas aqui. Para o ar, a partir dos dados experimentais obteve-se $k'_t = 0,43$ e $B' = 5,5$. A solução para o perfil de velocidade e as soluções clássica e alternativa do problema térmico podem ter sua validade avaliada através das Figs. 11.1, 11.2 e 11.3, onde a linha reta representa o perfil logarítmico.

11.3 A lei da esteira térmica

A região externa da camada limite é aquela em que os efeitos de inércia passam a ser relevantes, todavia até que se alcance o escoamento livre, estes não poderão ser considerados como dominantes. De fato, a região externa da camada limite é tal que ambos os efeitos – inércia e convecção, e efeitos de turbulência – são relevantes e simplificações como as propostas para a região interna são ilícitas. Além disto a adoção de um modelo de turbulência para esta região não se faz trivialmente lançando mão de uma ferramenta simples como a teoria do comportamento de mistura. Por conseguinte, o estudo da região externa da camada limite turbulenta tem sido feito através de uma abordagem experimental que, entretanto, se mostra bem sucedida. Desta forma para o perfil de velocidade são propostas expressões como

$$\frac{U - U_\infty}{u_\tau} = g_m \left(\frac{y}{\delta_m} \right), \quad (11.27)$$

que deixam claro as variáveis de similaridade selecionadas, enquanto que para o perfil de temperatura a abordagem clássica apresenta

$$\frac{T - T_\infty}{t_\tau} = g_t \left(\frac{y}{\delta_t} \right). \quad (11.28)$$

onde destaca-se a independência com relação ao número de Prandtl.

Por analogia, para a solução alternativa se propões a seguinte solução

$$\frac{t}{\sqrt{St}} = g'_t \left(\frac{y}{\delta_t} \right). \quad (11.29)$$

As Figs. 11.4, 11.5 e 11.6 demonstram a validade destas expressões e chama-se a atenção para o fato de que nenhuma distinção de qualidade se pode fazer entre as duas propostas, a clássica e a alternativa, para o problema térmico, tanto para a região externa quanto para a interna. Ambas apresentam o mesmo grau de concordância com os dados experimentais.

A rigor, as variáveis de similaridade propostas para a região externa são válidas, num ponto em que a camada limite já passa ser considerada bem desenvolvida. O mesmo se pode dizer a respeito da região interna, a partir de um ponto muito mais a montante do escoamento. Os dados experimentais utilizados neste trabalho apresentam um perfil bem desenvolvido para a região interna. Para a região externa, porém, em alguns casos, isto pode ser questionado em face do surgimento de algumas discordâncias. Apesar disto, para efeito de apresentação da teoria, estas discordâncias não se mostram relevantes.

As expressões logarítmicas – Eqs. (11.18) e (11.19) – que descrevem a região completamente turbulenta são conhecidas como as Lei da Parede cinética e térmica; e, da mesma

forma, a solução alternativa – Eq. (11.25) – pode também ser considerada como tal. Por outro lado, as Eqs. 11.27) e (11.28) são chamadas Lei da Esteira cinética e térmica. A Eq. (11.29) é a Lei da Esteira térmica alternativa.

A descrição do perfil de velocidade baseada nestas leis pode ser resumida na fórmula

$$\frac{U}{u_\tau} = f_m\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right) + h_m\left(\frac{y}{\delta_m}\right), \quad (11.30)$$

onde h_m é uma função arbitrária que se torna desprezível na vizinhança da parede, ou seja, no domínio de validade da Lei da Parede. A variação logarítmica de f_m é a chave para que satisfaça também a Lei da Esteira e, em vista disto, a Eq. (11.27) verifica-se imediatamente. A função h_m está bem determinada a partir do trabalho de Coles e assume a forma

$$h_m = \frac{\Pi_m}{k_m} w\left(\frac{\nu}{\delta_m}\right), \quad (11.31)$$

onde w é uma função universal dada por pontos variando entre 0 e 2, e Π_m , um fator de escala.

O perfil de temperatura pode ser descrito por

$$\frac{T - T_\infty}{t_\tau} = f_t\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right) + h_t\left(\frac{y}{\delta_t}\right). \quad (11.32)$$

onde, h_t possui a forma

$$h_t = \frac{\Pi_t}{h_t} w\left(\frac{\nu}{\delta_t}\right), \quad (11.33)$$

emq ue w é a mesma função que para o perfil de velocidade, a qual se mostrou adequada a partir de uma escolha conveniente de Π_t .

Desta forma, é possível escrever os perfis de velocidade e temperatura para a camada limite turbulenta de forma semelhante, os quais, desconsiderando a região laminar, tomam a forma

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{k_m} \ln \frac{yu_\tau}{\nu} + A \frac{\Pi_m}{k_m} w\left(\frac{y}{\delta_m}\right), \quad (11.34)$$

$$\frac{T - T_w}{t_\tau} = \frac{1}{k_m} \ln \frac{yu_\tau}{\nu} + Pr + B + \frac{\Pi_t}{k_t} w\left(\frac{y}{\delta_t}\right), \quad (11.35)$$

o que se mostrará conveniente a seguir.

Pelos mesmos passos pode-se deduzir a expressão

$$\frac{T - T_w}{(T - \infty - T_w)\sqrt{St}} = \frac{1}{k'_t} \ln \frac{yU_\infty\sqrt{St}}{\nu} Pr + B' \frac{\Pi'_t}{k'_t} w\left(\frac{y}{\delta_t}\right), \quad (11.36)$$

baseada nas Eqs. (11.5) e (11.29).

A análise de perfis de velocidade tem mostrado que Π_m apresenta valores crescentes com Re_θ (θ = espessura de quantidade de movimento), atingindo assintoticamente o

valor 0,55. Os valores de Π_t e Π'_t obtidos a partir dos dados experimentais apresentam tendência semelhante em relação ao Re_Δ ($\Delta =$ espessura de entalpia), mas não são em número suficiente para uma determinação fidedigna dos valores das assíntotas, e além disto, aparentemente seria necessário uma análise numa faixa de Re_Δ mais elevados, o que não foi possível com os dados disponíveis.

As Figs. 11.7, 11.8 e 11.9 mostram uma comparação entre os resultados teóricos e os experimentais. Os valores de Π_m , Π_t e Π'_t adotados para as curvas teóricas foram respectivamente 0,55, 0,44 e 0,48, que para o caso térmico, mesmo sendo valores médios servem para validar as expressões propostas.

11.4 A lei da troca de calor superficial

Aplicando-se as expressões para u e t à extremidade externa da camada limite, isto é, para $y = \delta_m, \delta_t; U = U_\infty, T = T_\infty$, obter-se-á

$$\frac{U_\infty}{u_t a u} = \frac{1}{k_m} \ln \frac{\delta_m u_\tau}{\nu} + A + \frac{2\Pi_m}{k_m}, \quad (11.37)$$

$$\frac{T_\infty - T_w}{t_t a u} = \frac{1}{k_t} \ln \frac{\delta_t u_\tau}{\nu} + Pr + B + \frac{2\Pi_t}{k_t}, \quad (11.38)$$

$$\frac{1}{\sqrt{St}} = \frac{1}{k'_t} \ln \frac{\delta_t U_\infty \sqrt{St}}{\nu} + Pr + B' + \frac{2\Pi'_t}{k'_t}, \quad (11.39)$$

que em cada caso são equações para Cf ou St em função dos demais parâmetros do escoamento.

A Eq. (11.37) é conhecida como a equação do atrito superficial. Por analogia chama-se a Eq. (11.38) de equação do calor superficial e a Eq. (11.39) de equação do número de Stanton. A aplicação destas equações em conjunto com as de conservação da quantidade de movimento e de energia na forma integral – na solução das quais pode-se utilizar os perfis de velocidade e temperatura propostos – é uma maneira precisa de se obter os valores locais de Cf e St . A contraposição das soluções clássica e alternativa do problema térmico apresenta duas vantagens para esta última:

1. evita a propagação de erro decorrente do cálculo de Cf para o cálculo de St ,
2. sendo essas soluções de natureza numérica, a necessidade da obtenção do Cf exigirá, da primeira, um dispêndio de recursos computacionais algo como duas vezes maior.

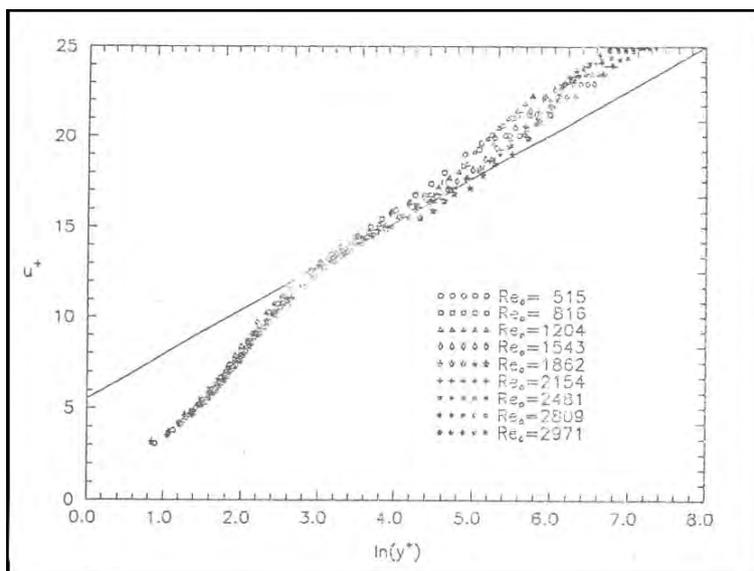


Figura 11.1: A lei da parede. Dados de Blackwell [5].

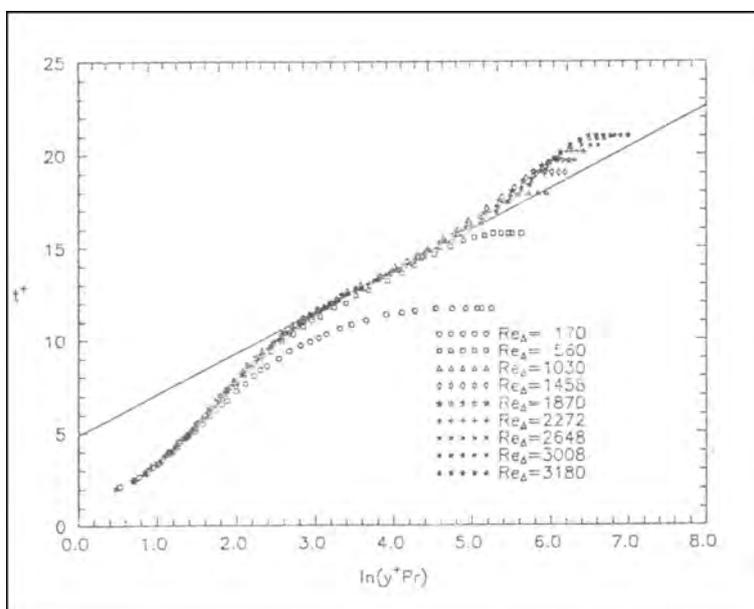


Figura 11.2: A lei térmica clássica da parede. Dados de Blackwell [5].

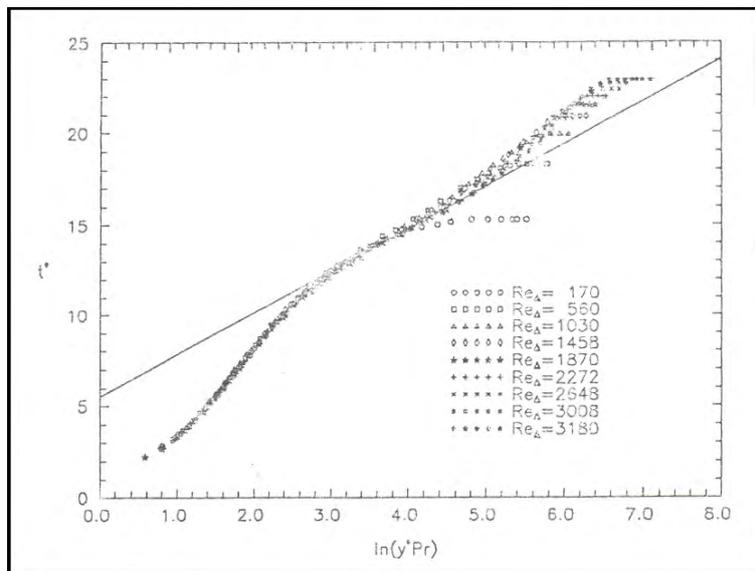


Figura 11.3: A lei térmica alternativa da parede. Dados de Blackwell [5].

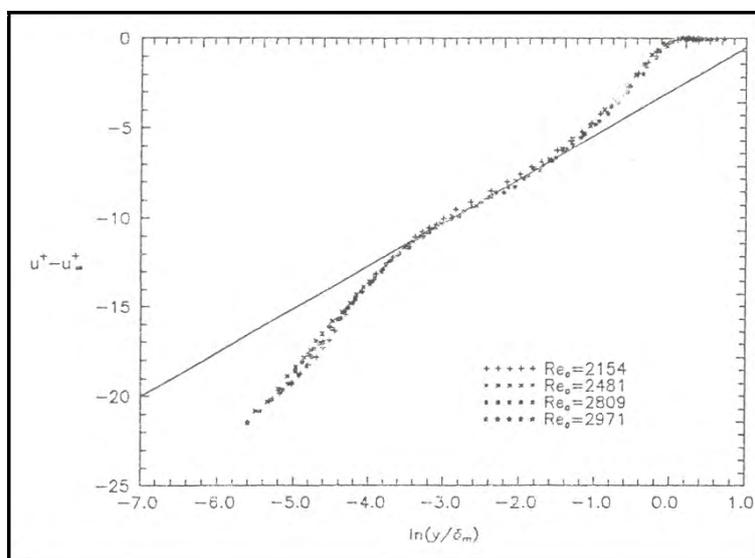


Figura 11.4: A lei da esteira. Dados de Blackwell [5].

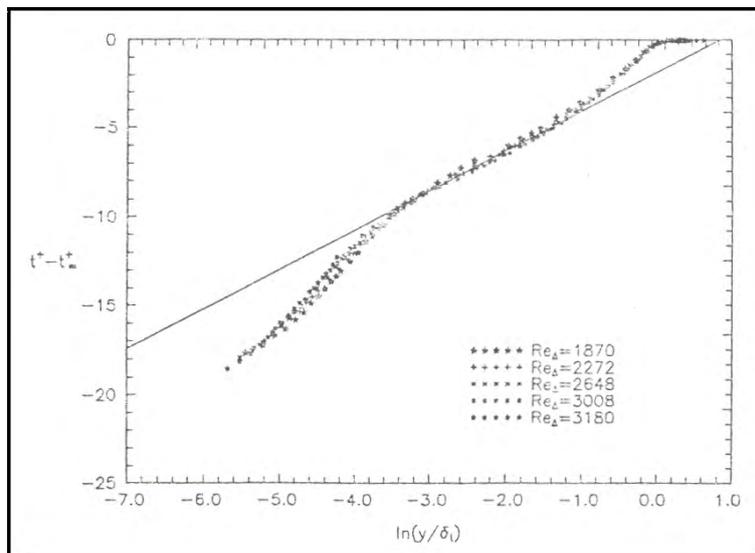


Figura 11.5: A lei da esteira térmica clássica. Dados de Blackwell [5].

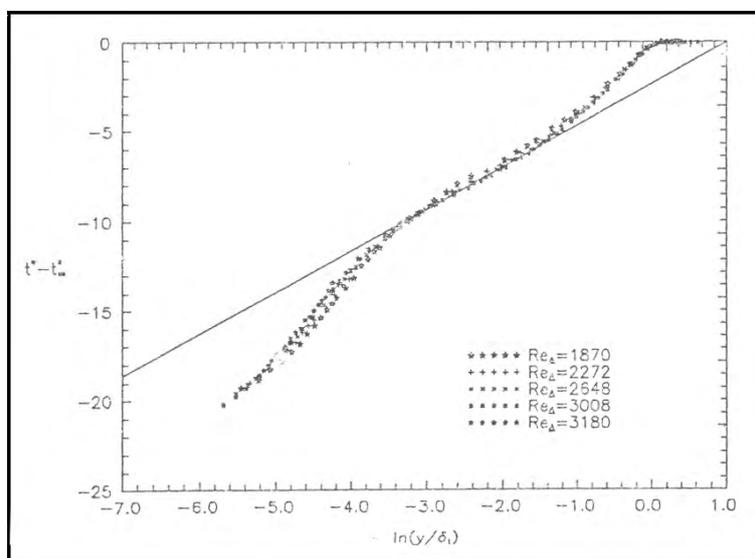


Figura 11.6: A lei da esteira térmica alternativa. Dados de Blackwell [5].

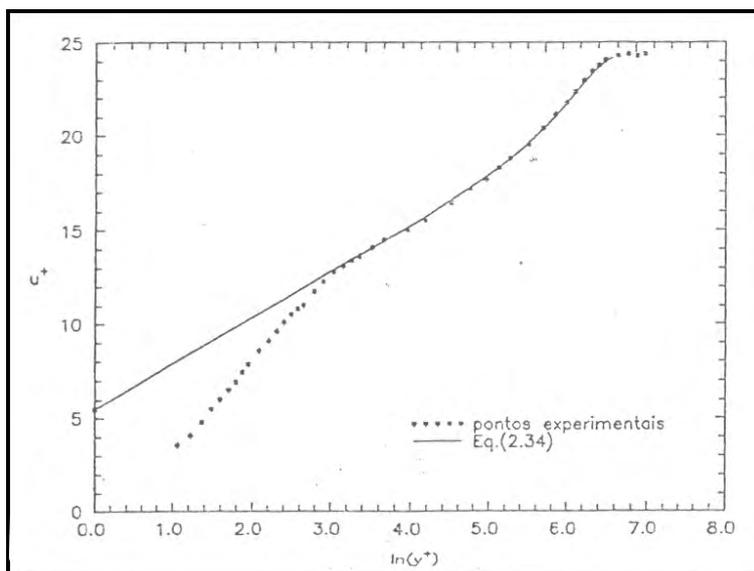


Figura 11.7: Comparação entre os dados experimentais e a Eq.(4.34), Re_θ 2809. Dados de Blackwell [5].

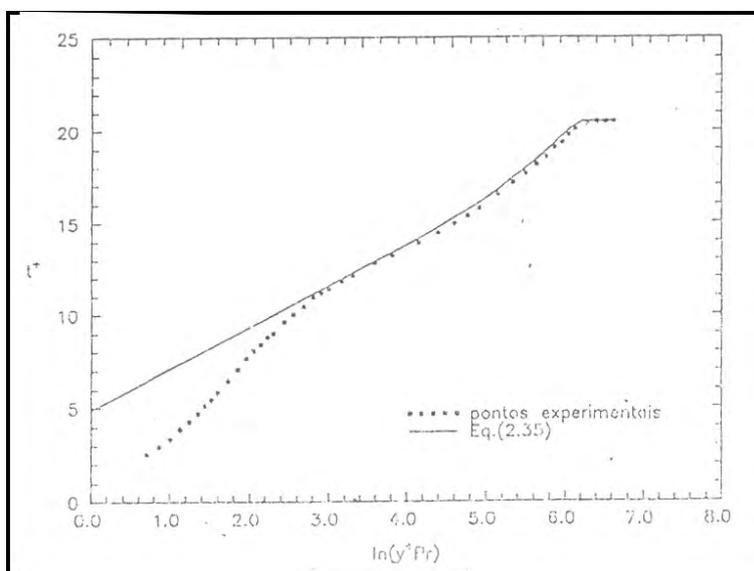


Figura 11.8: Comparação entre os dados experimentais e a Eq.(4.35), Re_θ 3008. Dados de Blackwell [5].

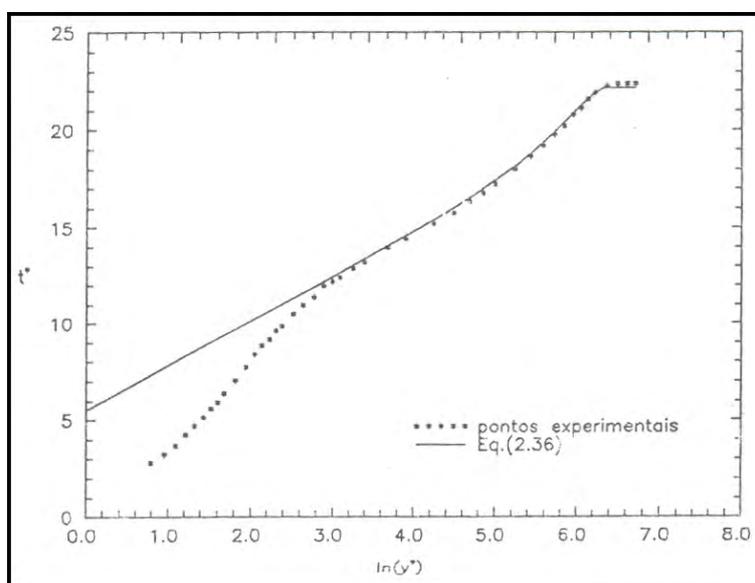


Figura 11.9: Comparação entre os dados experimentais e a Eq.(4.36), $Re_\theta = 3008$. Dados de Blackwell [5].

Capítulo 12

Aerodinâmica de Veículos Terrestres

12.1 Introdução

A aerodinâmica é o ramo da ciência que estuda a interação entre um corpo que se move e o fluido que o circunda. A componente horizontal da força resultante desta interação que se opõe ao avanço do veículo, é chamada de arrasto aerodinâmico. Esta força afeta grandemente a performance de veículos, tanto no que tange às velocidades atingidas, quanto ao consumo, por exigir do motor que a suplante. A componente vertical da força aerodinâmica é chamada de sustentação aerodinâmica. No caso de veículos automotores, ela reduz as forças de atrito entre os pneus e o chão, mudando radicalmente a manobrabilidade e a direção do veículo. O objetivo destas notas é mostrar como estas forças afetam o desempenho e a estabilidade de automóveis.

Nos primórdios, o desenvolvimento e projeto dos veículos seguia a forma das carruagens. Desde que as necessidades básicas diziam respeito à solução de problemas mecânicos, e a velocidade dos primeiros veículos era baixa, os problemas ligados à aerodinâmica não existiam. Com o gradual aumento das velocidades, e o avanço nos projetos, os passageiros passaram a ficar expostos a correntes de vento apreciáveis. Isto naturalmente levou ao aparecimento de partes estruturais que protegessem os ocupantes.

Em 1904 quando as rodas eram ainda separadas da estrutura principal do carro, os vidros eram verticais e planos, e os assentos eram expostos à corrente de ar, o arrasto era considerável. A adição de paralamas, e outros melhoramentos como a colocação das lâmpadas de sinalização no corpo principal do veículo já tinham resultado em 1950 em uma redução de 45% no arrasto. A partir deste ano, mudanças nas partes frontais dos veículos, de formas triangulares para formas retangulares, reverteram esta tendência.

As modernas malhas rodoviárias e o gradual aumento das velocidades de cruzeiro também tiveram grande influência nas características de projetos recentes. As novas e largas estradas normalmente expõe os automóveis a fortes rajadas de vento, o que aumenta a importância dos efeitos aerodinâmicos.

Como as forças aerodinâmicas atuam sobre um automóvel em combinação com outras forças mecânicas, é necessário considerá-las em conjunto. De fato, a aerodinâmica no projeto de veículos é de tal importância que a solução de seus problemas inerentes deveria sempre que possível ser obtida antes mesmo que o protótipo fosse construído. Os projetistas deveriam estar familiarizados com os princípios básicos de aerodinâmica quando

nos estágios iniciais de projeto. É nesta hora que a forma do automóvel é estabelecida e uma avaliação prematura dos esforços aos quais o automóvel será submetido permitirá uma estimativa de seu futuro desempenho.

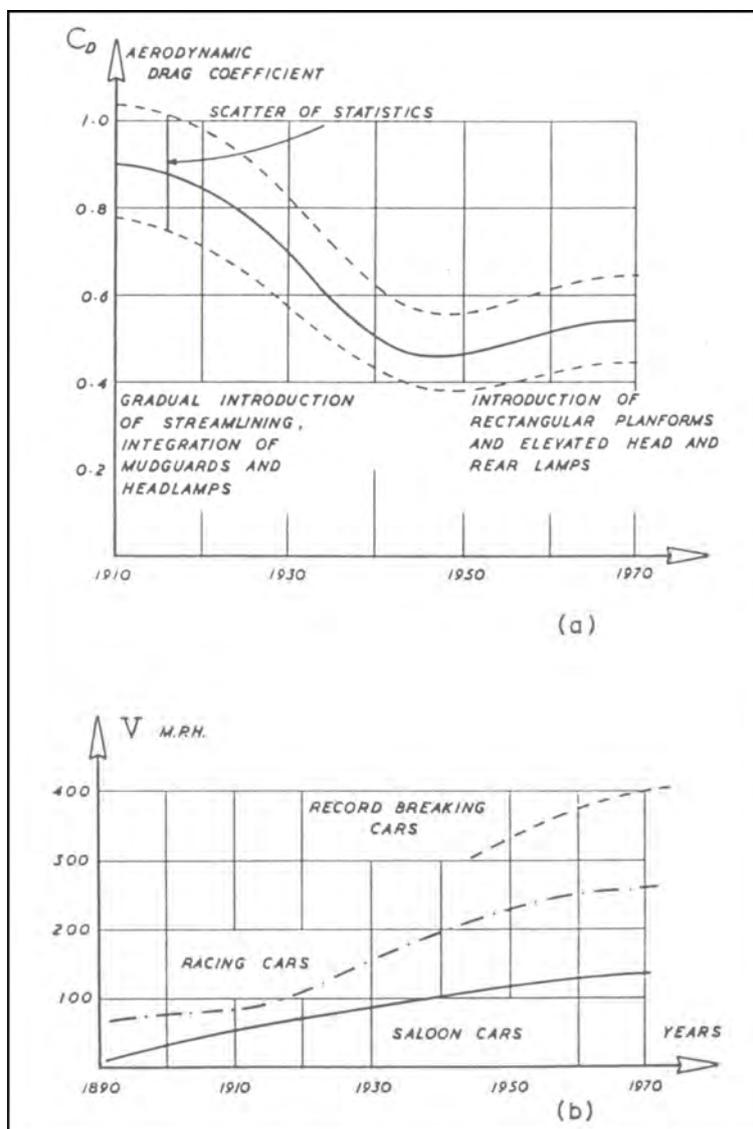


Figura 12.1: Variação do arrasto aerodinâmico com a aumento da velocidade dos veículos.

12.2 A forma geral do escoamento ao redor de um automóvel

Quando um automóvel se desloca em uma estrada, ele possui uma velocidade relativa ao chão e outra relativa ao ar. Apenas no caso do ar se encontrar em repouso estas velocidades serão iguais. Para simplificar nossas considerações futuras, assumiremos que

este é o caso aqui.

O escoamento de um fluido ao redor de um carro pode ser visualizado através de vários métodos utilizando-se modelos em escala natural ou reduzida em tuneis de vento. Um estudo do movimento do fluido mostra como as velocidades relativas das partículas muda bastante, sendo em alguns pontos maiores que a velocidade do carro e em outros pontos menores.

12.3 A origem da força aerodinâmica

A força aerodinâmica resulta primordialmente de variações no campo de pressão ao redor do veículo, provocadas pela viscosidade do fluido. Esta força é proporcional ao quadrado da velocidade do ar, à área frontal exposta ao escoamento e a um fator que depende da forma geométrica do veículo. Ela pode ser expressa como

$$F = qSC_F, \quad \left(q = \frac{1}{2}\rho V^2 \right); \quad (12.1)$$

onde S = área frontal, C_F = coeficiente não dimensional.

A força F é normalmente decomposta em 3 componentes ortogonais:

1. a força de arrasto, D_A , que é horizontal e se opõe ao movimento do carro.

$$D_A = \frac{\rho V^2}{2} SC_D. \quad (12.2)$$

2. a força de sustentação, L_A , que é vertical.

$$L_A = \frac{\rho V^2}{2} SC_L. \quad (12.3)$$

3. a força lateral, Y_A , perpendicular as outras duas.

$$Y_A = \frac{\rho V^2}{2} SC_Y. \quad (12.4)$$

O ponto onde a força aerodinâmica atua é chamado de centro de pressão (CP). Esta força pode ser transferida para qualquer outro ponto do carro desde que os momentos criados por este deslocamento sejam corretamente considerados. Isto é de grande importância prática porque teremos que considerar simultaneamente as forças de inércia agindo sobre a massa do carro, as forças de atrito resultantes do contato dos pneus com o chão e os componentes da força aerodinâmica. Teremos portanto, que transmitir todas estas forças para o centro de gravidade do carro.

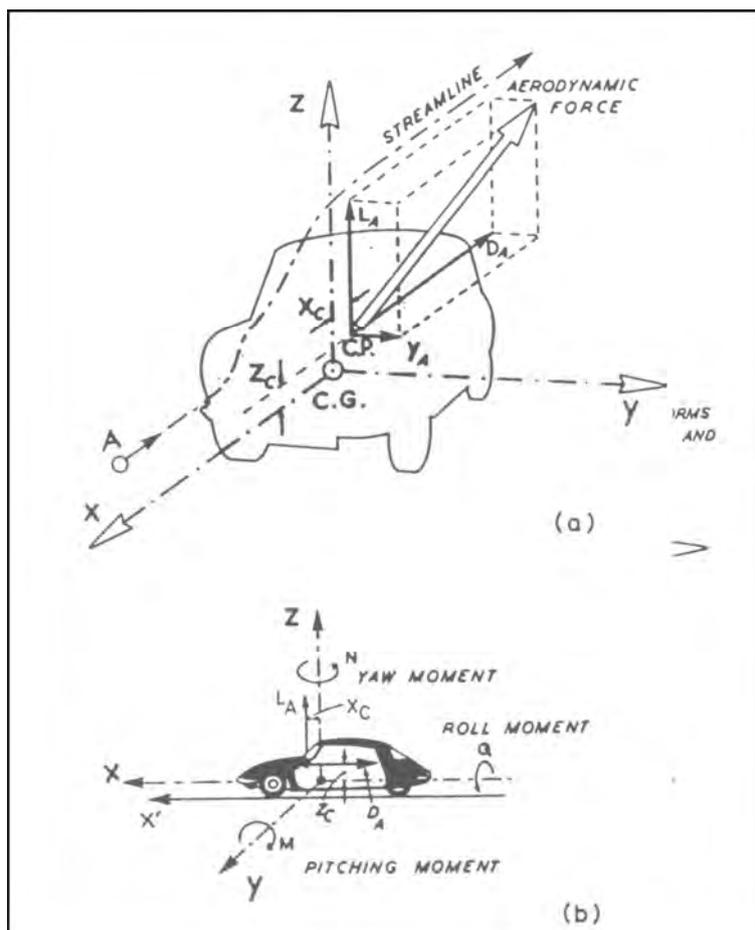


Figura 12.2: Forças aerodinâmicas sobre veículos.

12.4 A separação

Sabemos que sempre que um corpo se move em um meio fluido, ele experimenta uma força resultante diferente de zero. Esta força resultante é decorrente da viscosidade do fluido. A figura (12.3) mostra o escoamento de um fluido ao redor de um automóvel. Apenas numa pequena porção da dianteira do automóvel o escoamento é laminar. De fato, na prática, é comum se considerar que toda a superfície do automóvel está coberta por uma camada limite turbulenta. A presença da camada limite influencia a força aerodinâmica de modo decisivo provocando uma assimetria no escoamento.

O crescimento da camada limite sobre a superfície do automóvel depende de vários fatores incluindo a forma e a inclinação da superfície local. Quando uma superfície é positivamente inclinada com relação ao escoamento, as partículas de ar são forçadas a desacelerar, provocando um aumento local da pressão e a separação. Isto é o que acontece na região de encontro do vidro dianteiro e do “capô”. Na parte anterior a esta região, o escoamento se encontra normalmente sujeito a um gradiente favorável de pressão, de modo que a separação ocorrerá apenas por meios artificiais, tais como, acidentes provocados pelos sinalizadores ou cantos vivos. Como o automóvel possui comprimento finito, em algum ponto na parte traseira, a separação ocorrerá provocando o aparecimento de uma esteira turbulenta. A separação pode ser vista através do depósito de sujeira na superfície do carro. Nos locais onde a turbulência predomina os depósitos de sujeira são consideráveis; nas partes sujeitas a escoamento laminar as partículas de sujeira são como que “empurradas” pelo ar deixando trajetórias bem definidas. A figura a seguir mostra como o escoamento se separa sobre o capô e recola no vidro como uma função de γ . A distribuição de pressão sobre o capô de um veículo de competição é mostrada na figura (12.4).

12.5 A esteira

A separação de escoamento mais importante ocorre no final do automóvel onde a linha de separação se torna a fronteira da esteira turbulenta que se forma. O movimento do carro transfere quantidade de movimento ao ar dando origem à esteira. A pressão local na esteira é praticamente uniforme e inferior a pressão atmosférica; se nós pudéssemos, de algum modo, cortar a parte traseira do automóvel que fica imersa na esteira, a força aerodinâmica resultante não mudaria. A esta área cortada nós chamamos de área base. A pressão negativa atuando nesta área provoca uma força contrária ao movimento do veículo. Para reduzir esta força é necessário, portanto, atrasar o máximo possível a separação diminuindo a área de base.

A separação é frequentemente afetada por detalhes de projeto incluindo os quebra-ventos, as janelas traseiras, maçanetas, sinalizadores ou simples enfeites. O arrasto provocado pelo atrito superficial é normalmente bastante inferior ao atrito provocado pela aparição da esteira. Um problema de bastante relevância prática é o do depósito de sujeiras no vidro traseiro provocadas pela esteira. Isto pode ser evitado por uma mudança na forma do automóvel que organize o escoamento na traseira diminuindo a turbulência.

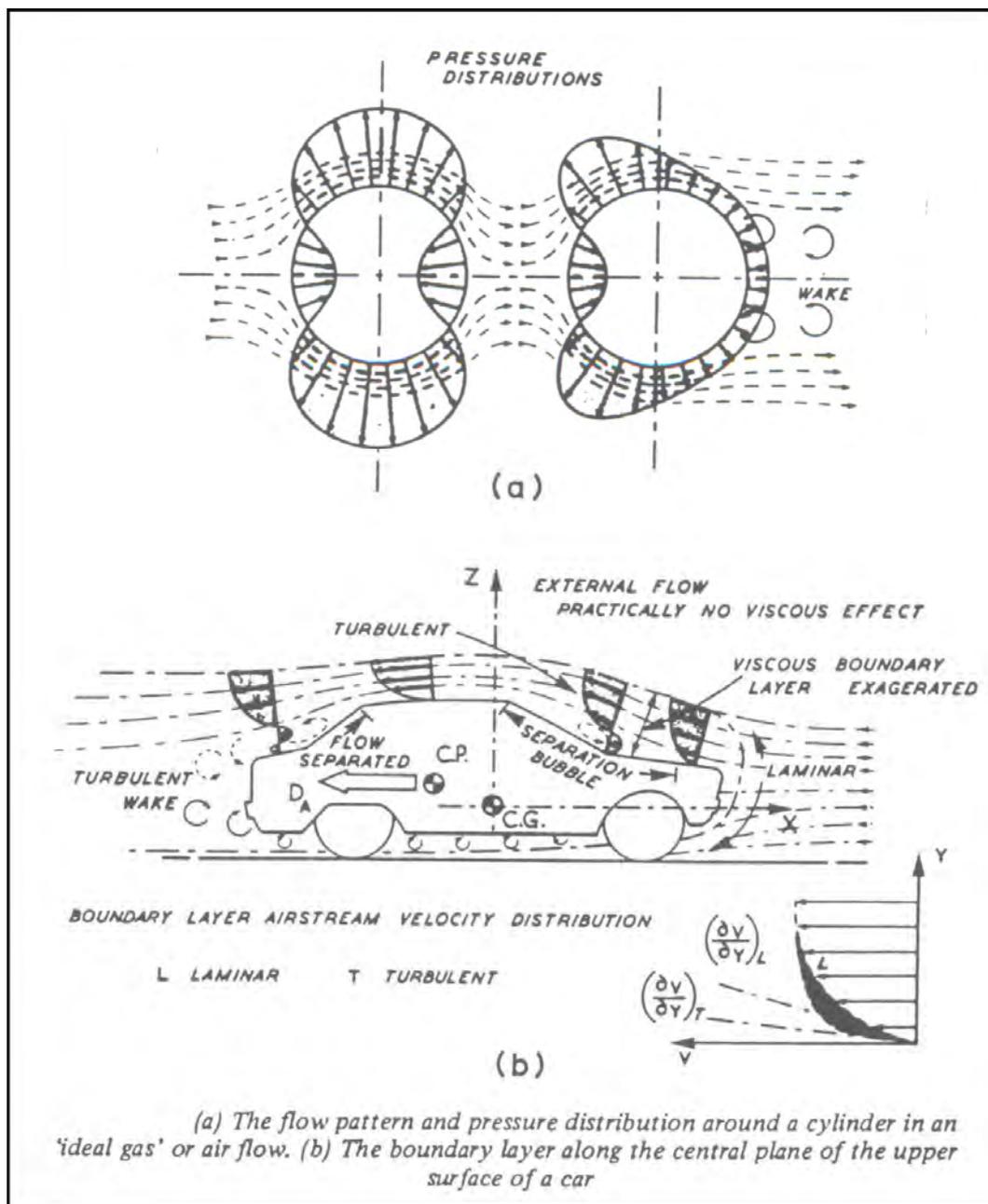


Figura 12.3: Padrão geral do escoamento sobre um veículo e um cilindro.

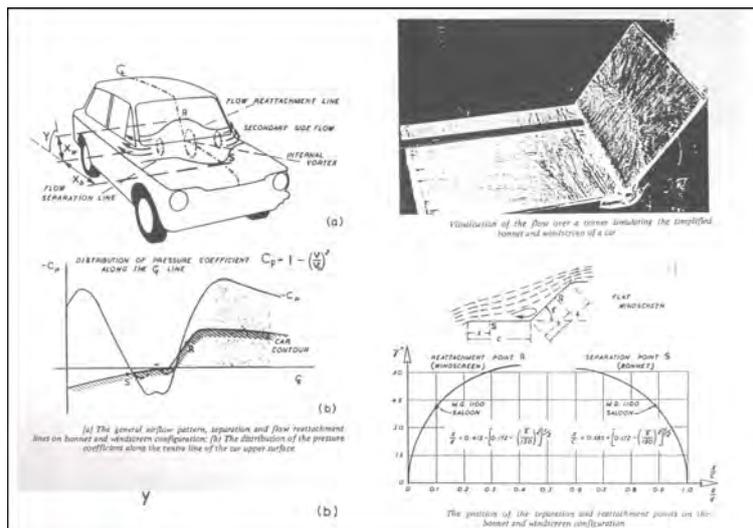


Figura 12.4: Posição dos pontos de separação e recolamento em um pára-brisa.

12.6 O efeito das rodas no escoamento

A descrição do escoamento ao redor de um carro é grandemente complicada pela presença das rodas e pela proximidade do solo. Na maioria dos carros as rodas giram dentro de cavidades, protegidas dos efeitos da corrente de ar. Neste caso, apenas a parte inferior da roda é afetada pelo escoamento; isto obviamente reduz a importância das rodas na aerodinâmica do carro. Em alguns carros de competição, entretanto, as rodas se encontram completamente expostas ao escoamento sendo sua correta análise portanto fundamental para a correta descrição do fenômeno.

A figura 12.7 mostra de modo ilustrativo como um escoamento se desenvolve ao redor de uma roda que gira. Neste caso, uma força resultante para abaixo aparece provocada pela superposição do escoamento principal com os vórtices gerados pela roda (efeito Magnus). No caso da roda se encontrar em contato com o solo, entretanto, a força resultante atua para cima (figura 12.8). Nos carros de fórmula 1, portanto, a força de sustentação gerada pelas rodas é considerável.

O fenômeno de separação do escoamento que ocorre sobre as rodas é também muito afetado pela rotação destas. Quando a roda gira, as partículas de fluido imediatamente na sua vizinhança também possuem a mesma velocidade, no caso, $2V$ no ponto superior da roda. Estas partículas encontram ar viajando do sentido contrário que interage diretamente com elas. Esta interação provoca a separação do escoamento num ponto situado na parte anterior da roda (figura 12.9). A posição deste ponto depende claramente da velocidade do carro. Geralmente a exposição das rodas ao escoamento externo contribui com até 45% do arrasto total. Como as rodas trabalham alinhadas, a roda de trás sempre atua na esteira da roda dianteira. A configuração do escoamento provocado pela interferência das rodas é mostrada também na figura 12.9. Dados experimentais revelam que as rodas anteriores contribuem com 65% do arrasto total provocado pelas rodas.

Na maioria dos casos, entretanto, as rodas se encontram cobertas por pára-lamas.

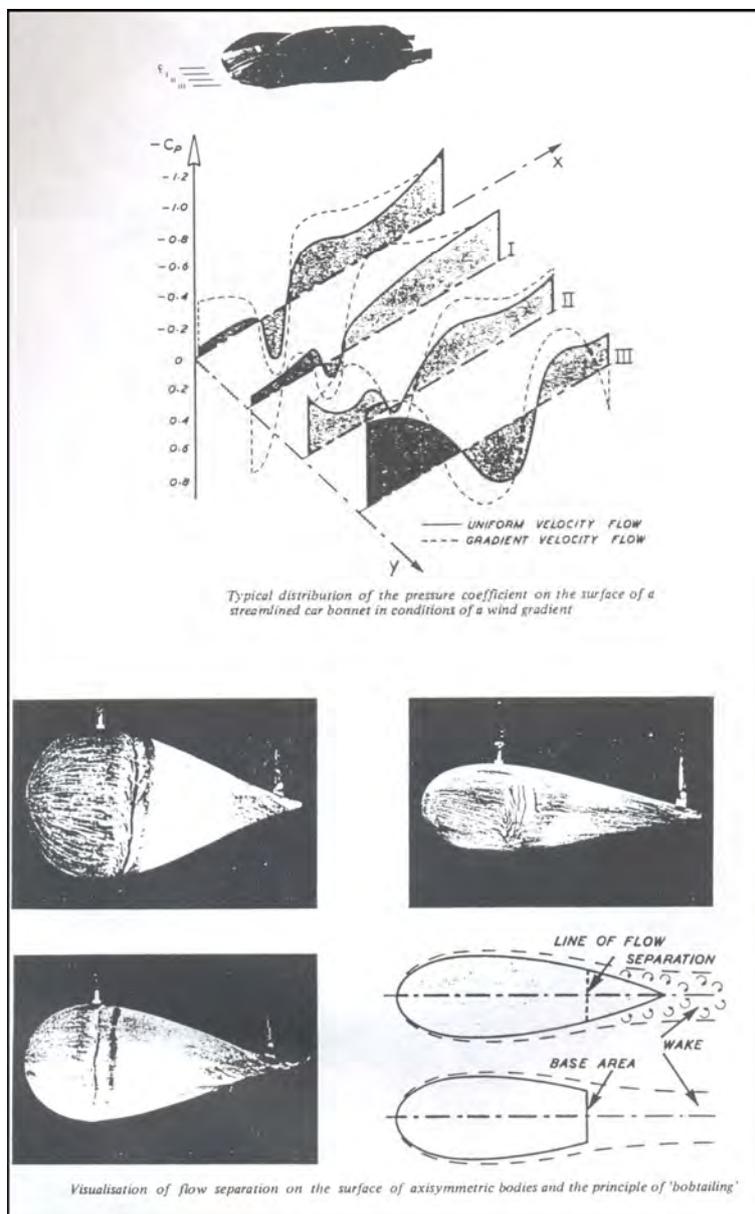


Figura 12.5: Distribuição de pressão ao redor de um carro com forma aerodinâmica e visualização da separação de escoamento ao redor de corpos axissimétricos.

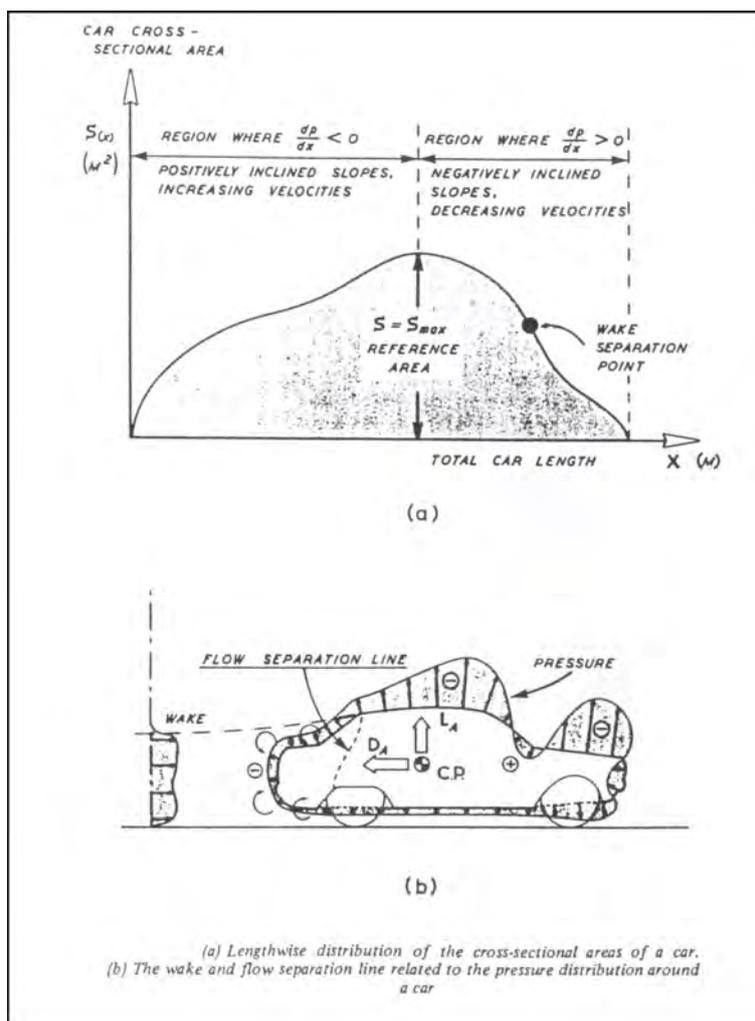


Figura 12.6: Distribuição do corte transversal de veículos.

Muito pouco é sabido a respeito do escoamento que se desenvolve na cavidade formada pelas rodas e pela lataria. O padrão geral do escoamento é mostrado na figura 12.10. Note o efeito da razão h/D no coeficiente de arrasto C_D . A proteção lateral das rodas contra o vento provoca uma diminuição no arrasto de até 5%.

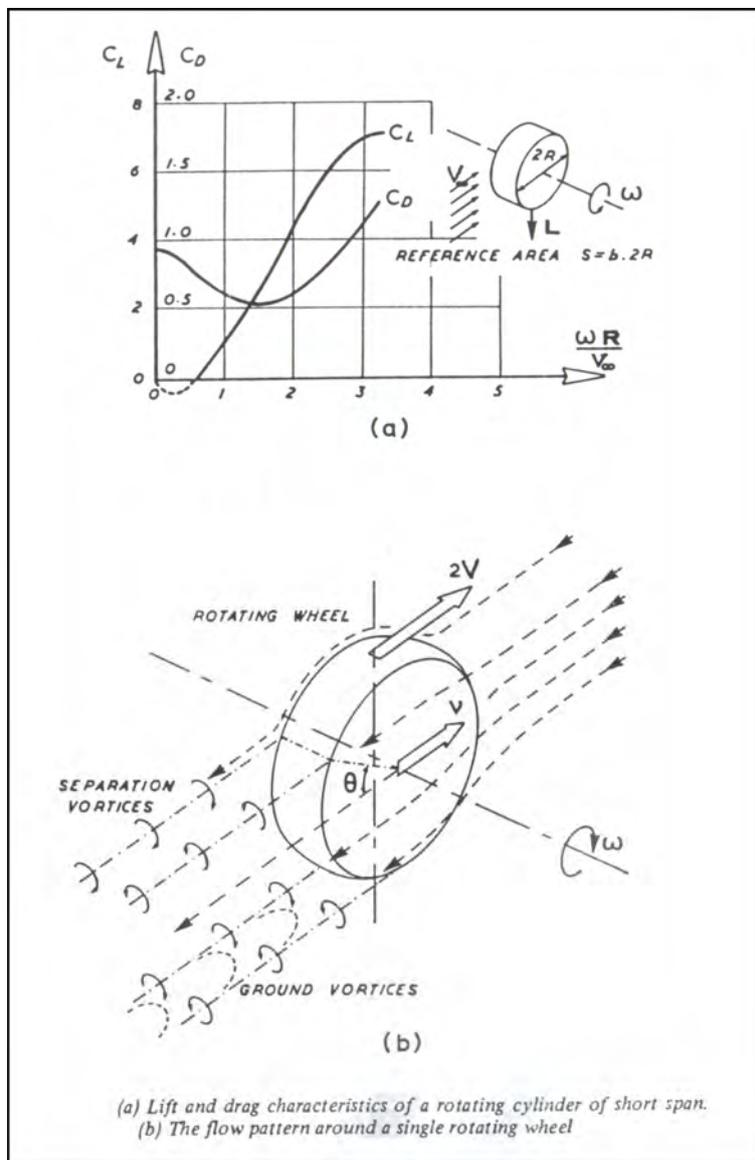


Figura 12.7: Coeficientes de sustentação e de arrasto ao longo de uma roda isolada.

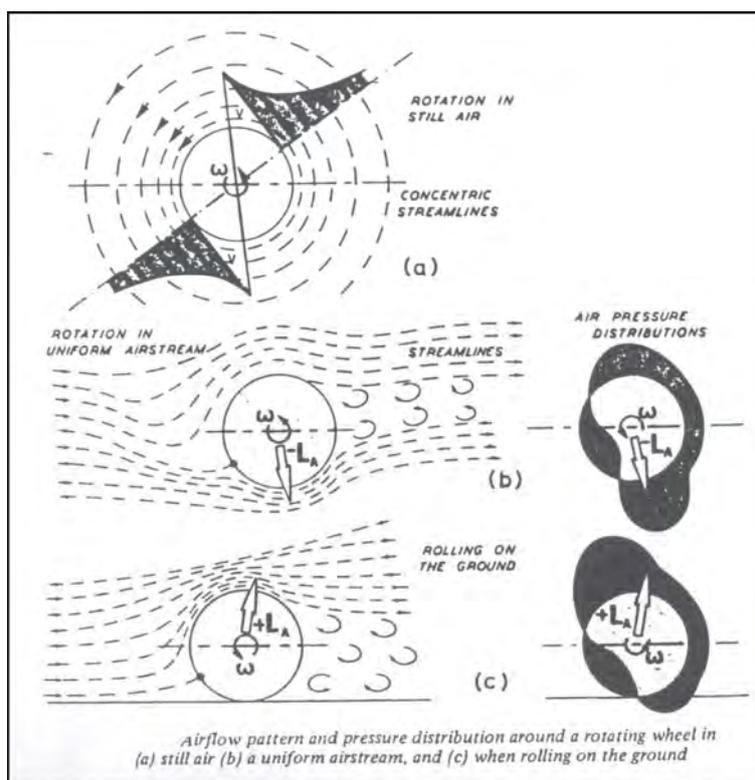


Figura 12.8: Sustentação e arrasto de um cilindro que gira. Padrão de escoamento ao redor de uma roda isolada.

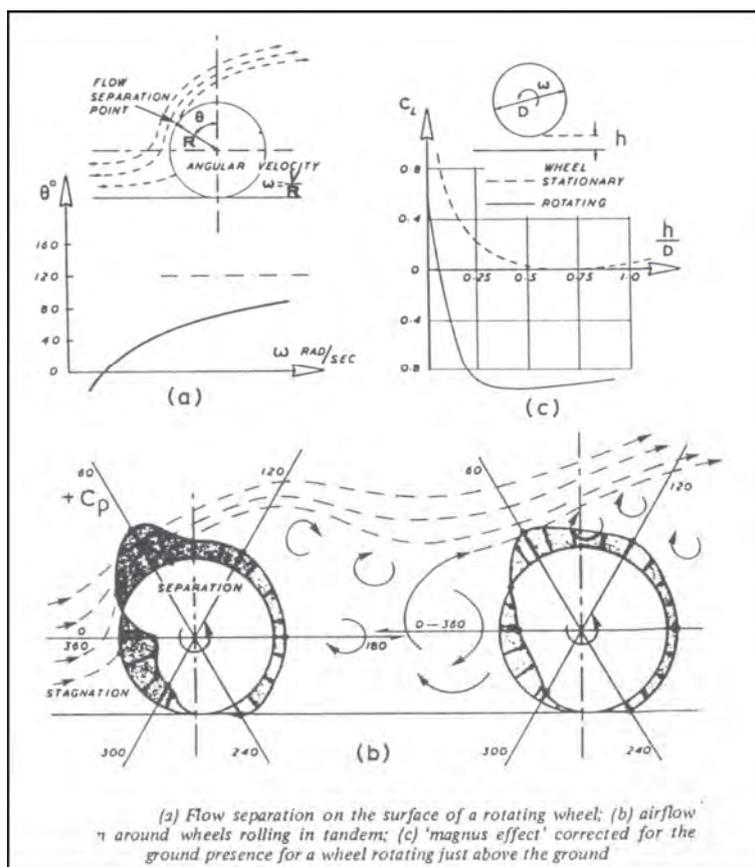


Figura 12.9: Separação do escoamento ao redor de duas rodas alinhadas.

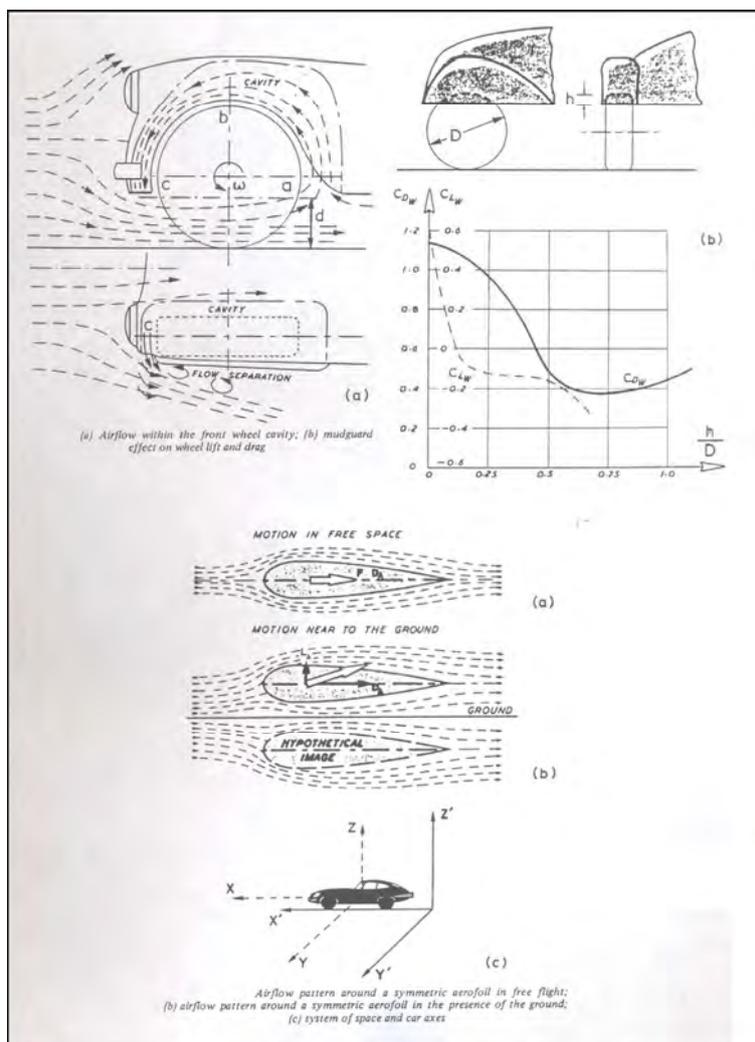


Figura 12.10: Escoamento ao redor de uma roda protegida por um pára-lama e escoamento ao redor de corpos aerodinâmicos livres e próximos a uma superfície.

12.7 O escoamento entre o fundo de um veículo e o solo

A interferência do solo no escoamento ao redor de um automóvel é um dos fatores mais importantes na determinação das características do escoamento resultante. A figura 12.11 mostra o que acontece quando um aerofólio em escoamento livre se aproxima do solo. A simetria é quebrada, resultando no aparecimento de uma força oblíqua ao corpo. Esta figura foi desenhada pensando-se na teoria para um fluido ideal. Na realidade, o que acontece é que a camada limite que se forma no chassis do automóvel interage com a camada limite que se forma no solo dando origem a um escoamento semelhante àquele visto na figura 12.11. Existe uma quantidade de ar que tende a viajar com o carro e que é determinada pelo ponto onde as duas camadas limite se encontram.

A maioria dos fundos de automóveis possui vários acidentes que promovem a turbulência. É portanto claro que o escoamento debaixo de um carro dependerá não apenas de sua distância do solo mas também na natureza de seu fundo, se “liso” ou “rugoso”. A figura 12.12 e 12.13 mostra os efeitos de Z_h (distância do solo) nos valores de C_D e C_L . Para fundos lisos, a diminuição de Z_h geralmente aumenta C_D e diminui C_L . A diminuição em C_D decorrente da possível troca de um fundo rugoso por um liso é mostrada na figura 12.12.

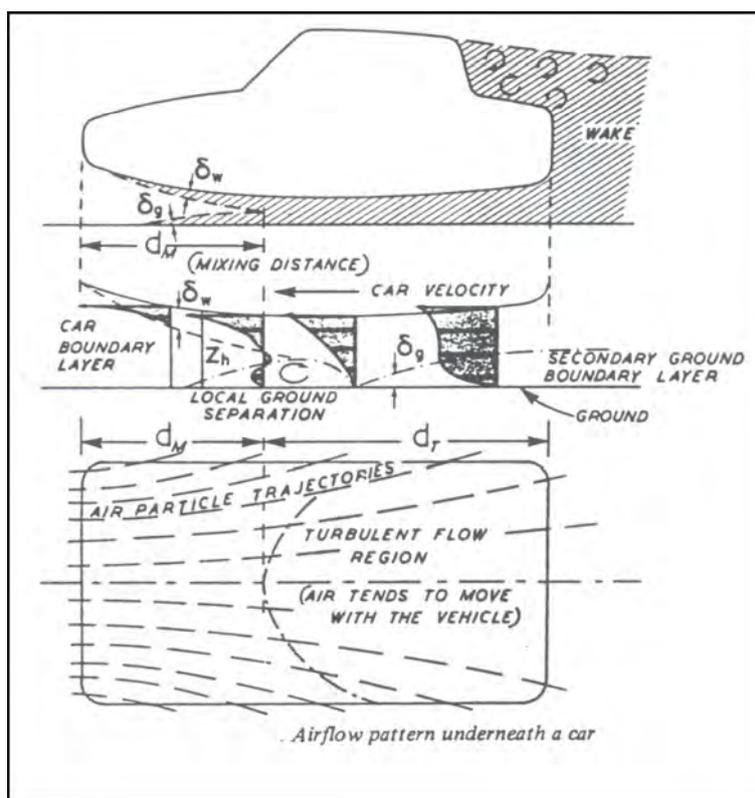


Figura 12.11: Padrão de escoamento debaixo do assoalho de um automóvel.

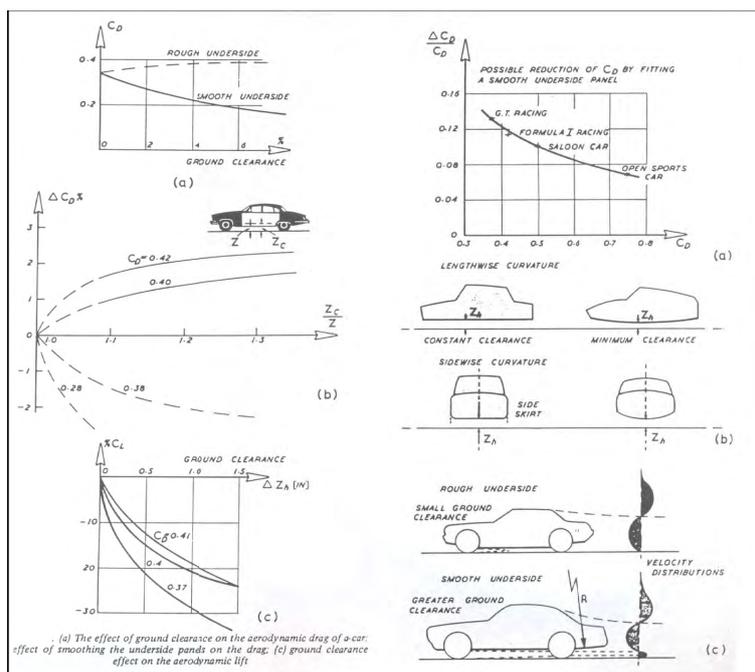


Figura 12.12: Efeitos do afastamento do solo no arrasto de um veículo.

12.8 A formação de vórtices ao redor de um carro

A geometria de um automóvel produz uma distribuição de pressão não uniforme causando um movimento do ar das regiões de alta pressão para as regiões de baixa pressão. O escoamento nas laterais do veículo é normalmente mais veloz que o escoamento nas partes baixas junto ao solo. Logo, de acordo com a equação de Bernoulli, o ar debaixo do carro tende a escoar lateralmente para se juntar ao escoamento externo formando vórtices de configuração parecida àquela que ocorre em uma asa. A intensidade dos vórtices depende da velocidade do automóvel e de sua forma. O efeito dos vórtices de “entortar” o escoamento numa direção para baixo do veículo provoca um aumento no arrasto. Para a maioria dos carros de passeio, a contribuição deste fator pode chegar a grandes valores. De fato, nos automóveis, 2 pares de vórtices se formam: um provocado pela separação do escoamento na região do encontro do capô com o vidro dianteiro; o outro, pela diferença de pressão no escoamento debaixo do carro. Estes vórtices se juntam 2 a 2 à montante compondo parte da esteira do veículo (figuras 12.14 e 12.15). Experimentos em túneis de vento tem demonstrado ser o par de vórtices superior predominante. De qualquer modo, as medidas mostram que sempre existe um sistema principal de geração de vórtices ao qual vários vórtices gerados em sistemas secundários se juntam.

12.9 Sustentação aerodinâmica

O desenvolvimento de carros cada vez mais velozes tem acentuado o problema da sustentação aerodinâmica. Em aeronáutica, formas são criadas para gerar sustentação posi-

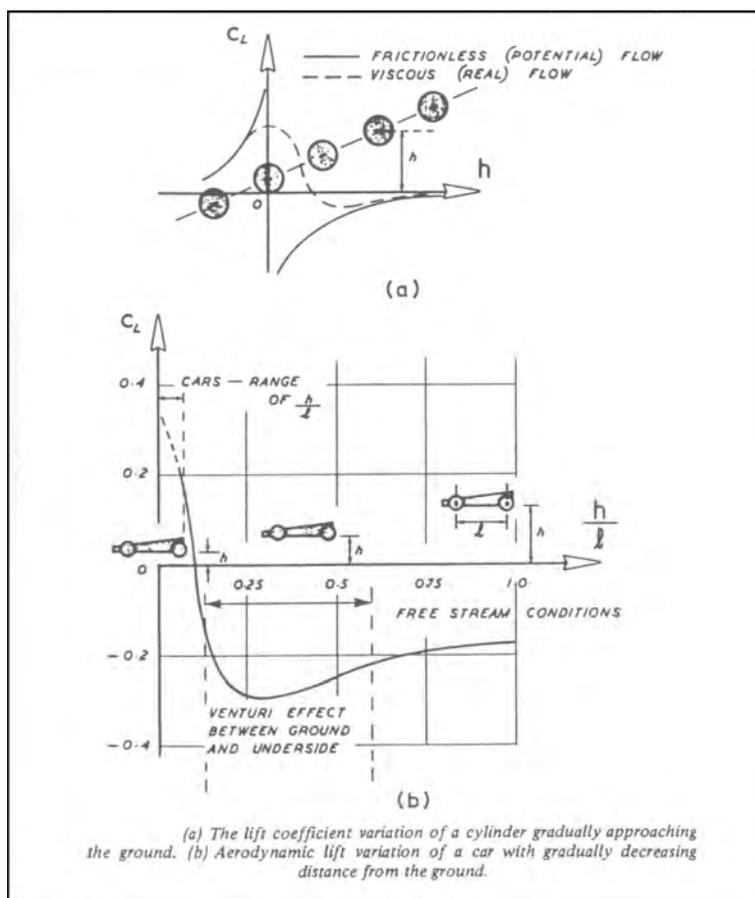


Figura 12.13: Variação da sustentação com a proximidade do solo.

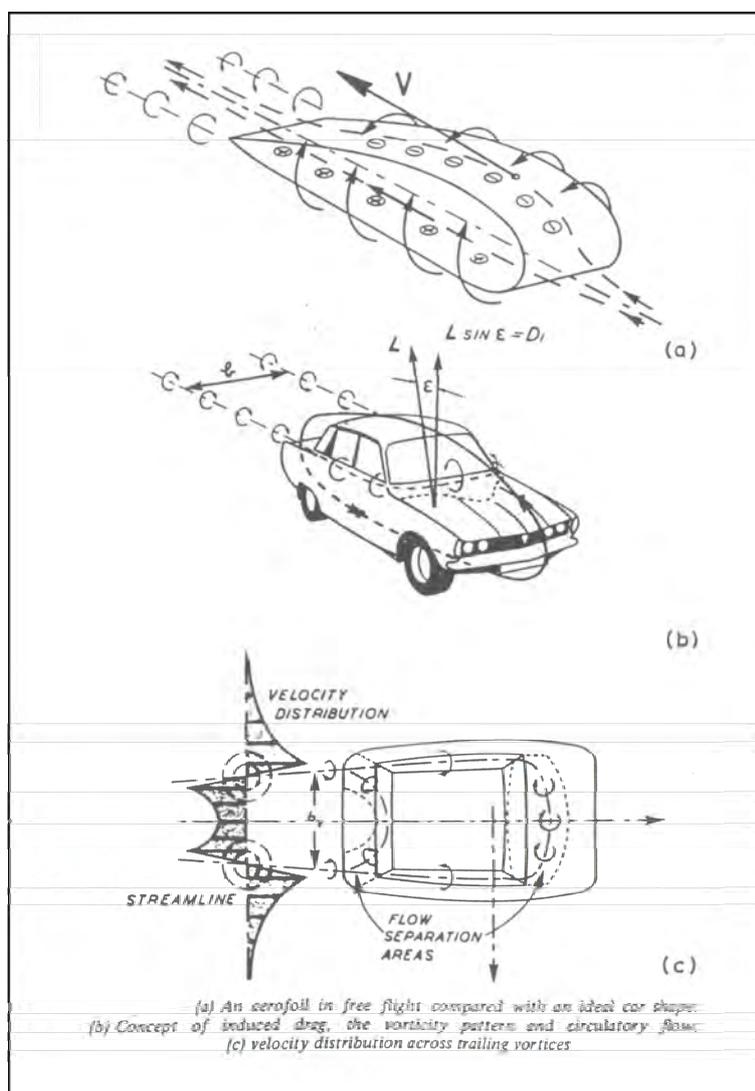


Figura 12.14: Padrão de vórtices ao redor de um aerofólio e de um veículo.

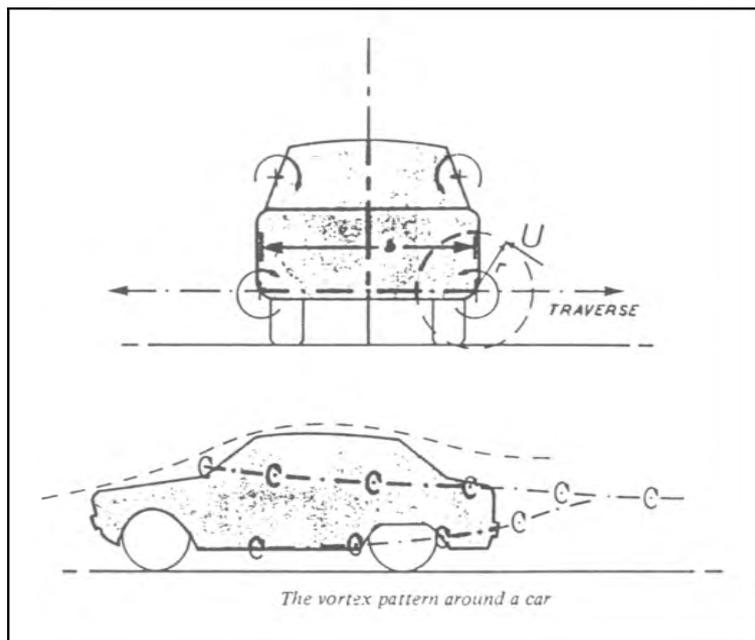


Figura 12.15: Padrão de vórtices na lateral de um veículo.

tiva. No caso de carros, entretanto, normalmente o interesse é de se reduzir ou até mesmo reverter o sentido da sustentação. Vimos anteriormente que a proximidade do solo sempre tende a gerar sustentação positiva. Um automóvel trafegando a velocidades de 160 km/h pode gerar uma sustentação positiva de 25 a 20 % do valor de seu peso no eixo dianteiro e de 15 a 10 % deste peso no eixo traseiro. Isto pode provocar reações perigosas do automóvel e problemas de direção.

A figura 12.16 mostra a forma geral de um aerofólio. Note que a superfície superior é mais curvada que a inferior, e que, portanto, o ar é forçado a descrever uma trajetória maior nesta região. Este efeito provoca o ar na parte superior a se mover mais rápido que na parte inferior, resultando num escoamento que pode ser considerado como composto da superposição de dois outros escoamentos: o escoamento uniforme incidente e um outro escoamento circulatório ao redor do aerofólio. A sustentação do aerofólio é mostrada ser proporcional à velocidade da “circulação” do escoamento.

O problema da circulação é aumentado no caso de veículos que se movem junto ao solo por ser o escoamento debaixo deles retardado pela interferência com a camada limite. A pequena largura dos automóveis, comparada ao seu comprimento, empresta ao escoamento uma forte característica de tri-dimensionalidade que resulta em configurações de escoamento muito complexas. A figura 12.17 ilustra como a curva de sustentação se torna mais inclinada quando o aerofólio se aproxima do solo. A aproximação do veículo do solo deveria realmente provocar uma diminuição em C_L até que eventualmente valores negativos fossem atingidos. A diminuição da distância entre o fundo do carro e o solo de fato provoca um aumento de velocidade, resultando numa diminuição de pressão. Esta aplicação simples da equação de Bernoulli, normalmente conhecida como o efeito Venturi, entretanto, não é válida para um fluido real. Quando um certo valor da distância do solo

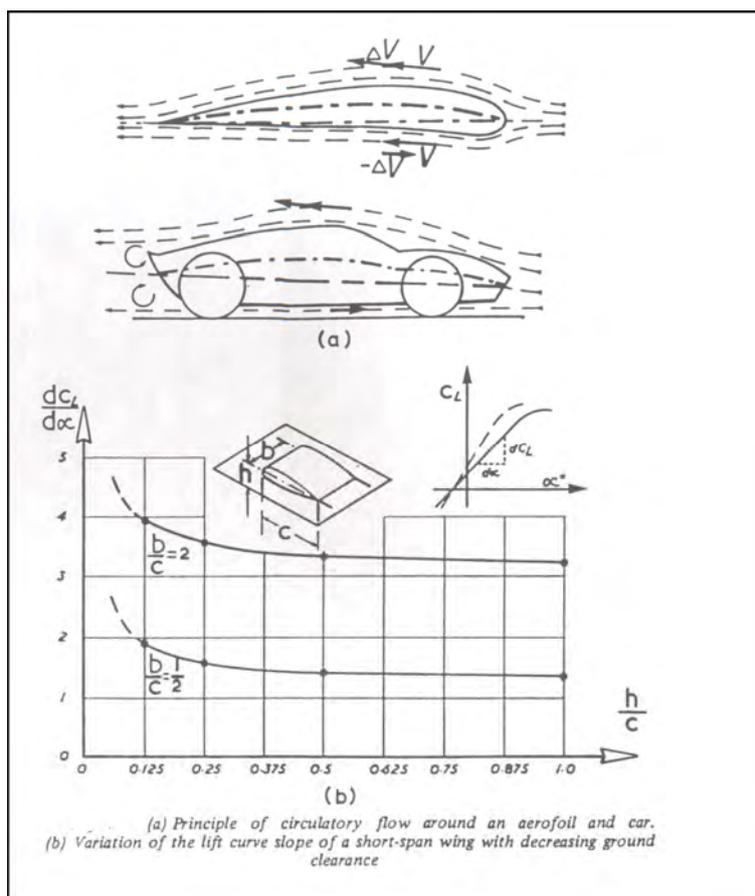


Figura 12.16: Princípio da circulação de um escoamento ao redor de um aerofólio e de um carro.

para o carro é atingido, a camada limite interfere com o chão, retardando o escoamento e provocando um aumento de pressão. Existe, portanto, uma distância crítica do solo, a partir do qual o efeito Venturi não mais ocorre e o valor de C_L passa a aumentar. Este fenômeno é ilustrado na figura 12.17.

A estatística dos valores de C_L para vários tipos de automóveis é mostrada na figura 12.18. Esta figura também mostra como a força de atrito entre o pneu de um carro e o chão variam com a força normal. A sustentação provoca um decréscimo no peso do automóvel, implicando que forças menores deverão ser aplicadas para virar a direção. Isto pode tornar o carro sensível e de difícil condução.

12.10 Reduzindo a sustentação pelo estilo

A redução da sustentação é provavelmente mais importante que a redução do arrasto, tendo em vista os aspectos de segurança do veículo. É então importante tentar se estabelecer relações entre a escolha de um tipo de estilo de automóvel e a sustentação resultante. Frequentemente, a multiplicidade de detalhes envolvidos no estilo possuem características conflitantes. Existem, entretanto, alguns princípios fundamentais que devem ser seguidos.

Os efeitos do capô, capota, mala traseira, inclinação dos vidros dianteiro e traseiro, inclinação das partes dianteira e traseira do chassis, são mostradas na figura 12.19. Observe-se que

1. um aumento no comprimento da capota diminui a sustentação,
2. uma diminuição da inclinação da parte dianteira do chassis também provoca um decréscimo da sustentação.

A posição do nariz do carro influencia grandemente C_L . Os efeitos dos 3 tipos possíveis de nariz são mostrados na figura 12.20.

12.11 “Spoilers” e asas negativas

Os métodos utilizados para a redução da sustentação podem ser divididos em duas categorias:

1. Spoilers – partes que reduzem a sustentação através da modificação do escoamento sobre a superfície superior do automóvel.
2. Asas Negativas – asas montadas sobre os veículos que produzem sustentação negativa.

Os spoilers devem também, se possível, reduzir o arrasto. O papel do spoiler é reduzir a velocidade local do escoamento sobre o carro provocando um aumento de pressão, e a consequente redução da sustentação. Ele também pode ser usado para forçar escoamento sob o veículo reduzindo a pressão e a sustentação. Existem 3 regiões a serem consideradas. Na parte dianteira do carro, o próprio vidro funciona como um spoiler provocando uma

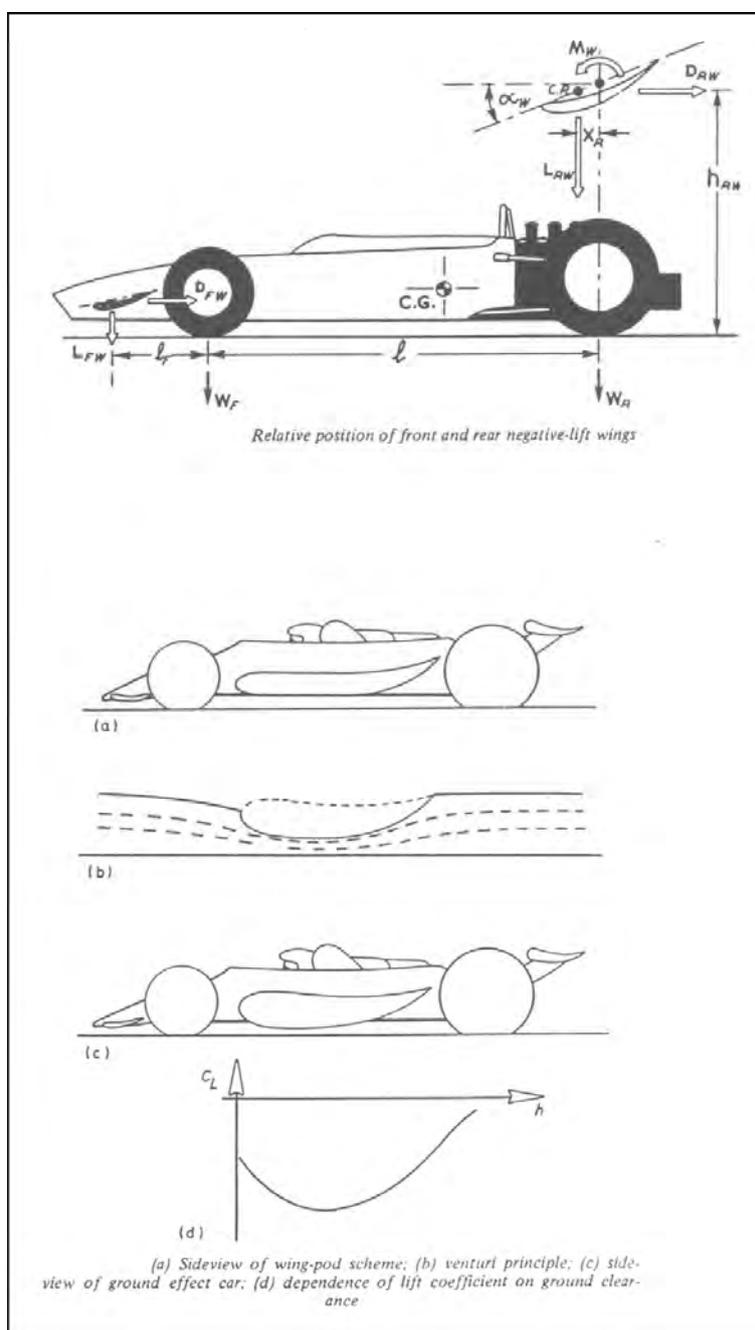


Figura 12.17: Posição relativa entre elementos de sustentação negativa. Princípio de Venturi.

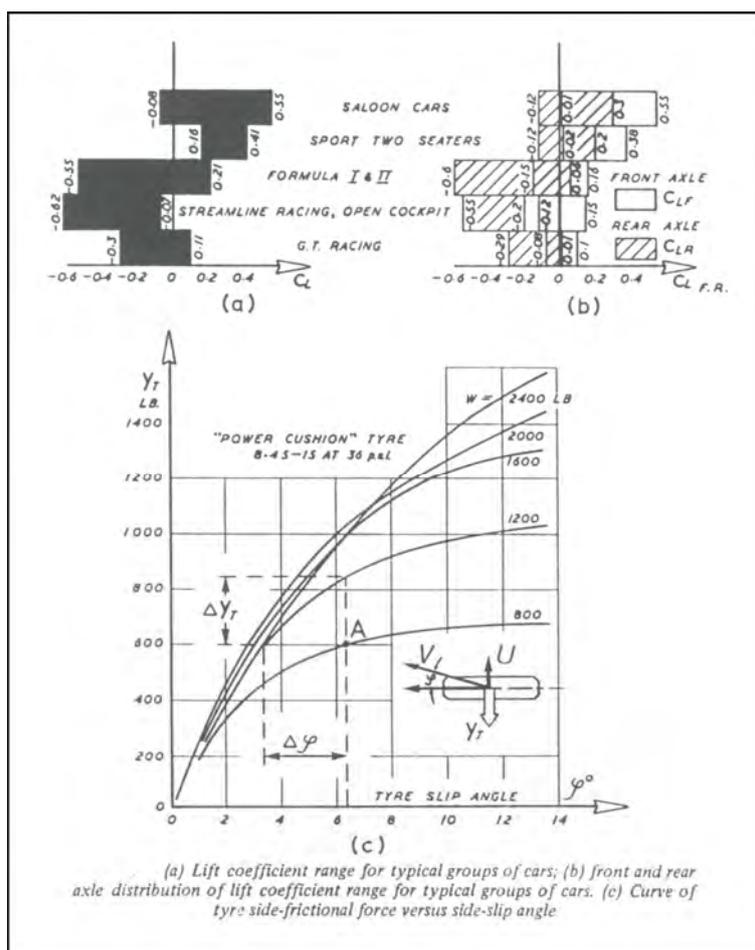


Figura 12.18: Coeficientes de sustentação típicos para veículos.

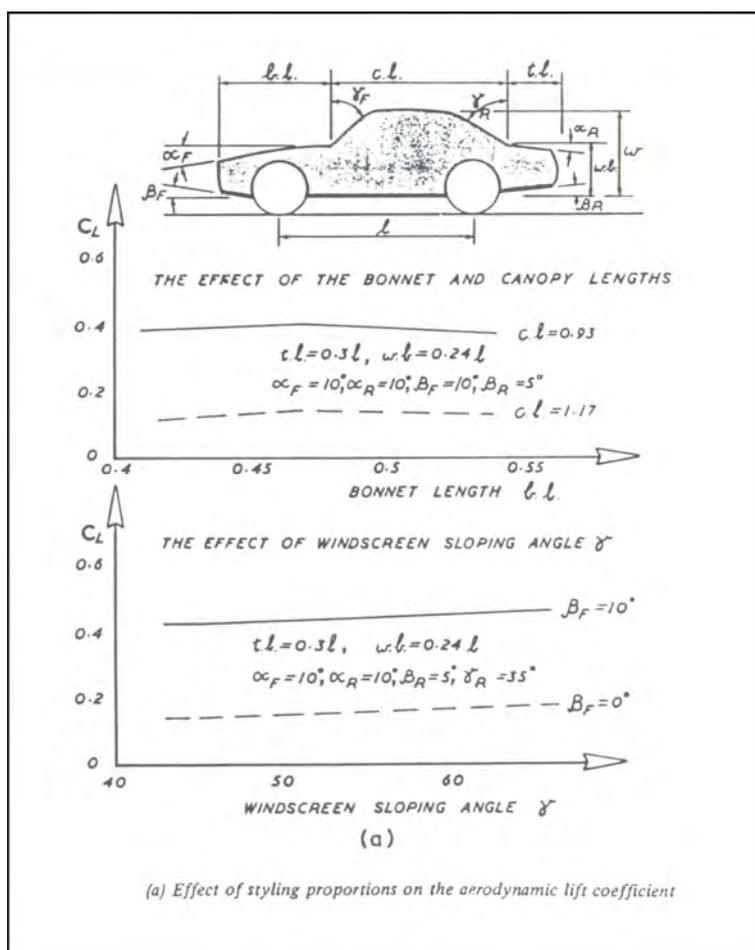


Figura 12.19: Efeitos de estilo no coeficiente de sustentação.

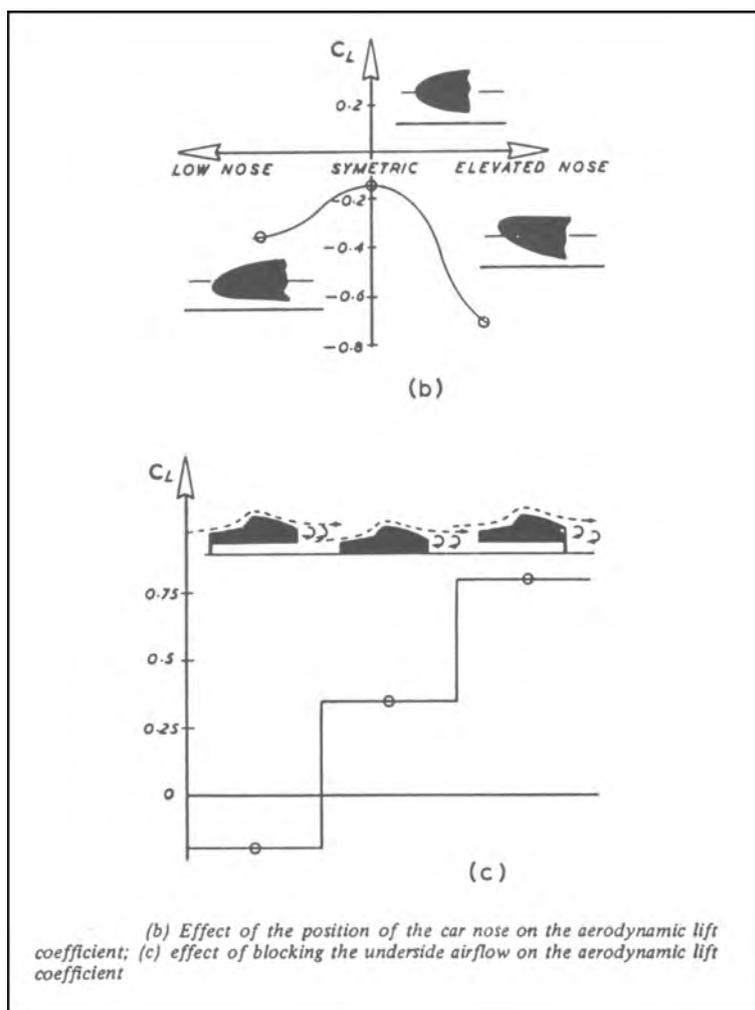


Figura 12.20: Efeitos da posição do nariz do carro na sustentação aerodinâmica.

zona de alta pressão entre ele e o capô. Na parte traseira, alguns carros possuem um apêndice que força o escoamento a uma separação prematura diminuindo a sustentação (figura 12.23). A eficiência destes artefatos está ligada a geometria do veículo. Na parte (a) da figura 12.21 a separação provoca uma modificação na esteira e na sustentação. Já na parte (b), o apêndice se encontra totalmente imerso na esteira não resultando em qualquer modificação de C_L . O efeito dos spoilers traseiros no valor de C_L (quando efetivo) é mostrado na parte (c) da figura.

Spoilers também podem ser montados na parte dianteira dos automóveis, abaixo do capô e em frente às rodas. Este tipo de spoiler provoca uma região de baixa pressão na área da suspensão dianteira que diminui a sustentação. Ele possui pouco ou nenhum efeito sobre a suspensão traseira.

Com o aumento da velocidade dos veículos, o uso apenas de spoilers se tornou insuficiente para a diminuição de sustentação desejada. Com isto, a idéia de usar asas que promovessem uma sustentação negativa em veículos foi desenvolvida pela American Chapparral. Estas asas eram fixadas ao carro com ângulos negativos de ataque, gerando assim uma força normal para baixo. Como o momento originado por esta força tende a levantar a frente do carro, uma outra asa normalmente é fixada ao nariz do carro para anular este efeito.

A asa traseira serve para diminuir a sustentação no eixo traseiro. Por este motivo ela deveria estar colocada exatamente sobre ele. Isto é teoricamente correto mas difícil de realizar na prática. Também, para que um desempenho efetivo do ponto de vista aerodinâmico seja obtido, é desejável que a asa se mova em correntes de ar livre acima do carro. A colocação alta do aerofólio, entretanto, gera grandes esforços nas barras de sustentação, o que causa consideráveis problemas mecânicos. Com a ocorrência de vários acidentes, a Federação Internacional de Automobilismo decidiu que os aerofólios nunca deveriam ser colocados numa posição acima de 80 cm da parte inferior da sustentação. Com a diminuição de h_{rw} , o escoamento ao redor do aerofólio começa a interferir com o escoamento ao redor do carro. A zona de baixa pressão criada sob a asa tende a succionar o escoamento sobre o automóvel, com um efeito praticamente anulando o outro. Estudos experimentais revelam que a asa perde sua eficiência se

$$\frac{h_{rw}}{l} \leq 0.62$$

Um grande avanço na aplicação dos conceitos de aerodinâmica no projeto de veículos foi obtido em 1977 e 1978 pela Equipe Lotus. O monocoque foi construído o mais estreito possível, com duas estruturas laterais com a forma de asas invertidas. A eficiência destas asas negativas foi ainda aumentada pela colocação de placas nas suas extremidades. Com isto, toda a parte central do automóvel funcionava efetivamente como uma asa invertida. Em 1979, a Lotus aumentou ainda mais a proximidade do solo, utilizando o efeito Venturi para obter pressões ainda menores sob o automóvel (figura 12.22). A chave do projeto foi projetar as laterais do carro do melhor modo possível para que as perdas de energia no processo de aceleração e desaceleração do escoamento sob elas fossem as menores possíveis. Isto foi obtido com uma redução rápida da área seguida por uma expansão suave. Para que o efeito Venturi fosse aproveitado com um máximo de eficiência, a distância da asa invertida para o solo precisava ser otimizada evitando que um bloqueio do escoamento

ocorresse por efeitos viscosos. Também era importante que o escoamento sob o carro fosse o mais “organizado” e “limpo” possível de modo que grande cuidado era tomado no escoamento sobre as asas dianteiras, sobre o nariz, sobre a suspensão, e principalmente sobre as rodas. Estas eram colocadas as mais afastadas o possível para que o ar incidisse diretamente sobre a carenagem do carro. Outra característica importante era a eliminação da folga entre a borda das laterais e o chão, por meio de saias, para evitar que ar “externo” preenchesse a região de baixa pressão sob o carro.

Com estas inovações o Lotus 79 a 240 km/h gerava uma força para baixo de 445 N nas asas frontais, 890 N na asa traseira e 1780 N nas laterais. Tudo isto num carro que pesava 7500 N. Cinco anos após, estas forças haviam atingido o valor de 2700 N para as asas e 10700 N para as laterais, em um carro que pesava 6600 N. O Lotus 78 quando apresentado em 1977 possuía um C_L de -1.3. Este valor evoluiu até -2.6 quando o regulamento banuiu os carros asa de competição. Com isto, o valor de C_L caiu para -1.6 levando apenas 18 meses para atingir -2.5. Hoje valores bem inferiores a -3 são obtidos. Durante o período de reinado dos carros asa o valor de C_D variou entre 0.6 e 0.8.

Baixos valores do arrasto são úteis em carros de competição por garantir que pouca potência do motor será perdida para o arrasto aerodinâmico. Um valor de arrasto mínimo, entretanto, não é necessariamente o objetivo básico de um bom projeto. Altas velocidades são o resultado de melhorar a aceleração, a freiada e a manobrabilidade em curvas, o que pode ser atingido pelo aparecimento de uma força para baixo que estabilize o veículo. Por exemplo, um carro de 750 kg, fazendo uma curva com 200 m de raio, em uma superfície com coeficiente de atrito 1.4, poderia atingir uma velocidade máxima de 190 km/h. Adicionando a este carro um sistema de asas negativas tal que o produto de C_L vezes a área de referência fosse $-1.12m^2$ (valor típico do Lotus 79), a velocidade máxima a ser atingida poderia chegar a 222 km/h. Com os valores de 81 do produto $C_L \times$ área de referência dos carros Lotus, a velocidade poderia atingir 270 km/h.

Hoje, os carros usam a parte central do chassis para produzir a força básica que fornece estabilidade, com as asas sendo utilizadas para fornecer o ajuste fino para cada circuito.

12.12 Aerodinâmica e estilo

O estilo de um automóvel é o resultado da cooperação entre projetistas, aerodinamicistas, engenheiros e fabricantes. No criativo processo de escolha do melhor estilo, muitos aspectos devem ser considerados incluindo o projeto estrutural, as condições gerais de manobrabilidade e segurança, e principalmente a facilidade de fabricação do modelo. As considerações de ordem aerodinâmica, estão diretamente ligadas ao desempenho do automóvel, sua economia e dirigibilidade, sendo portanto cruciais para um bom projeto.

A forma de um automóvel é normalmente determinada pelo Departamento de Estilo, e ocorre nos estágios iniciais de desenvolvimento do protótipo. O automóvel, então, se encontra em fase de formação, podendo se sujeitar eventualmente a grandes alterações. Neste estágio, um modelo em escala (1/4 a 1/5) é construído para testes em túneis de vento, onde um levantamento preliminar de algumas de suas características aerodinâmicas será feito. Se estas características são consideradas ruins, é dado ao aerodinamicista a tarefa de melhorá-las, fazendo as mudanças apropriadas. Isto é o que torna muito

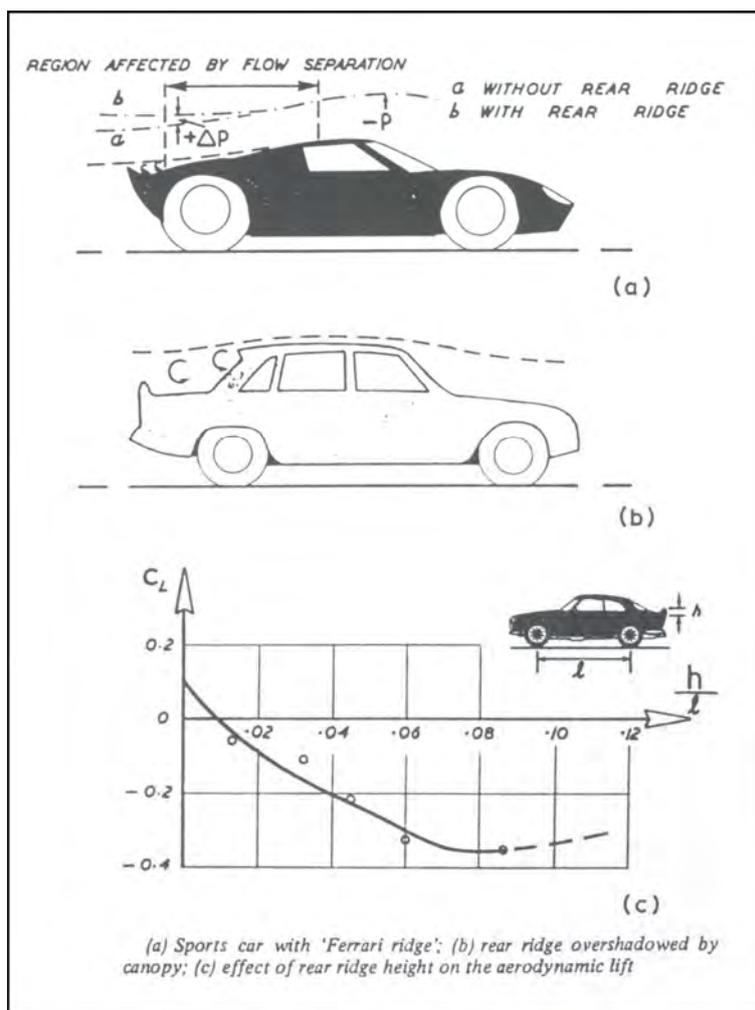


Figura 12.21: Efeitos de um “spoiler” no coeficiente de sustentação.

importante o conhecimento dos princípios básicos da aerodinâmica pela pessoa ou equipe que inicia o projeto. A escolha errada de uma forma poderá tornar difícil a mudança das características do veículo por modificações simples, requerendo algumas vezes modificações dramáticas no projeto.

Os resultados obtidos no tunel de vento são passados à equipe de projetistas para que uma avaliação preliminar do desempenho dos veículos seja feita. É aqui que respostas quanto à localização do radiador, das grelhas de ventilação, etc. são obtidas. A configuração do escoamento é obtida através de métodos de visualização.

A forma de um carro e seu tamanho são determinadas pelo número de passageiros e a disposição dos assentos. Como o carro é tri-dimensional, sem volume pode ser moldado de várias formas de modo a encontrar o melhor compromisso entre os requisitos estruturais e mecânicos. A figura (12.22) mostra os valores típicos de C_D para diversos tipos de veículos.

Estudos para se obter a forma aerodinâmica ideal foram feitos por vários autores. A forma ideal para um corpo em vôo livre, é um corpo axissimétrico com uma seção circular máxima (Fig. 12.23). Teoria e experimentos mostram que o valor mínimo de C_D ($= 0.04$) é atingido quando $l/d = 2.4$. Este valor mínimo ocorre quando a relação entre a distribuição de pressão normal e aquela devido ao arrasto superficial é ótima.

Este corpo axissimétrico não possui a forma ideal para movimentar-se próximo ao solo. A presença do chão provoca uma assimetria na configuração do escoamento, o que requer modificações na forma para minimizar a interferência do solo. O desenvolvimento de um modelo matemático para a obtenção da forma ideal é extremamente difícil, se não impossível. Deste modo, a definição da forma idela tem sido buscada através de experimentos.

A forma considerada melhor obtida até hoje consiste de duas semi-elipses ligadas pelo semi-eixo maior (figura 12.24). Os semi-eixos b_μ e b_l fazem parte de um aerofólio com cambagem (NACA 2415) e boas características aeronáuticas. O semi-eixo a , por outro lado, faz parte de um aerofólio simétrico de pequeno arrasto. Isto produz um corpo com a forma de uma baleia. O valor de C_D obtido para um corpo com esta forma foi 0.07. O carro “Blue bird” detentor do record mundial para velocidades alcançadas em terra possuía um C_D igual a 0.16. Os carros modernos de geometria suave possuem um C_D de 0.2 a 0.3. Estes devem ser considerados os valores ideais para um automóvel comercial. Desvios deste valor são provocados pelo compartimento de passageiros, pela rodas, acessórios, etc. Uma comparação entre o C_D de um carro ideal e o C_D de um carro comercial, mostra que 60% do arrasto deste último resulta destes desvios (figura 12.23). Como uma regra, mudanças bruscas na seção reta frontal de um veículo deveriam ser evitadas pois elas provocam perturbações adicionais no escoamento, que aumentam as perdas de quantidade de movimento. Na parte frontal do veículo a área aumenta $dS/dx > 0$. Na parte traseira o contrário ocorre com $dS/dx < 0$. De qualquer modo, a derivada dS/dx deve sempre ser pequena.

Para diminuir o arrasto, qualquer característica que leve a uma “canalização” do escoamento deve ser evitada. Qualquer forma que induza escoamentos laterais causará interferência deste escoamento secundário com o escoamento principal promovendo turbulência e perdas.

O arrasto na parte de trás dos veículos pode ser reduzido se a inclinação local da

capota não exceder de 3 a 5 graus. Neste caso a separação do escoamento será retardada ao máximo, reduzindo as perdas. Este princípio é seguido pelos carros do tipo “fastback” (figura 12.25). Este estilo nos fornece uma traseira otimizada onde a linha de separação coincide com a borda traseira do carro. É comum no estilo do vidro traseiro de alguns veículos que protuberâncias ocorram (figura 12.26). Estas provocam um descolamento prematuro e acentuado que aumenta o arrasto.

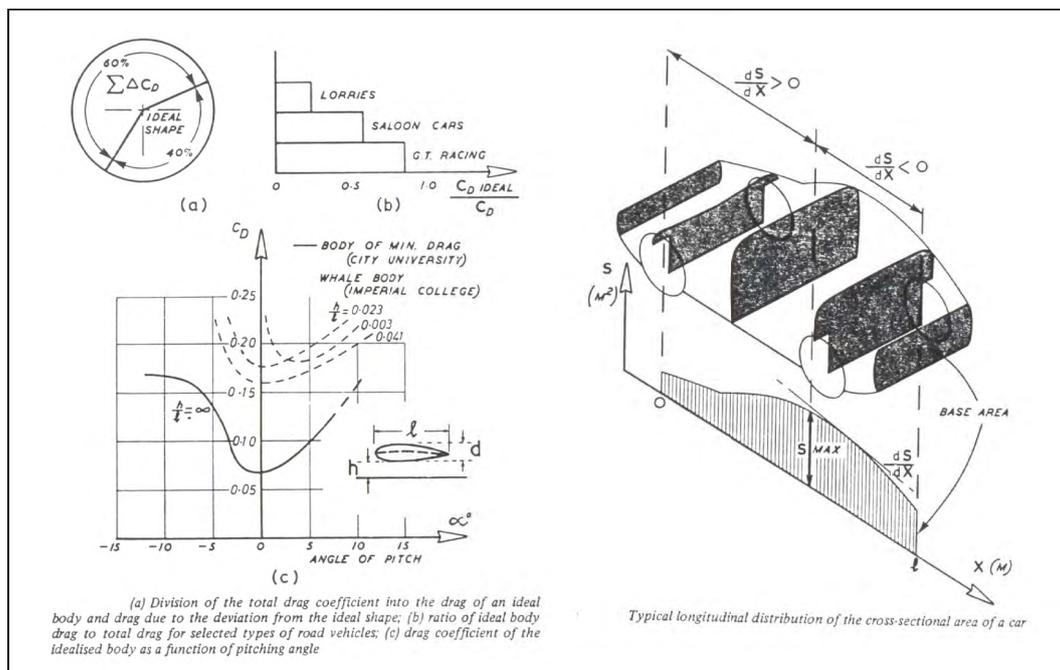


Figura 12.22: Arrasto característico para alguns tipos de veículos comparado com o arrasto ideal.

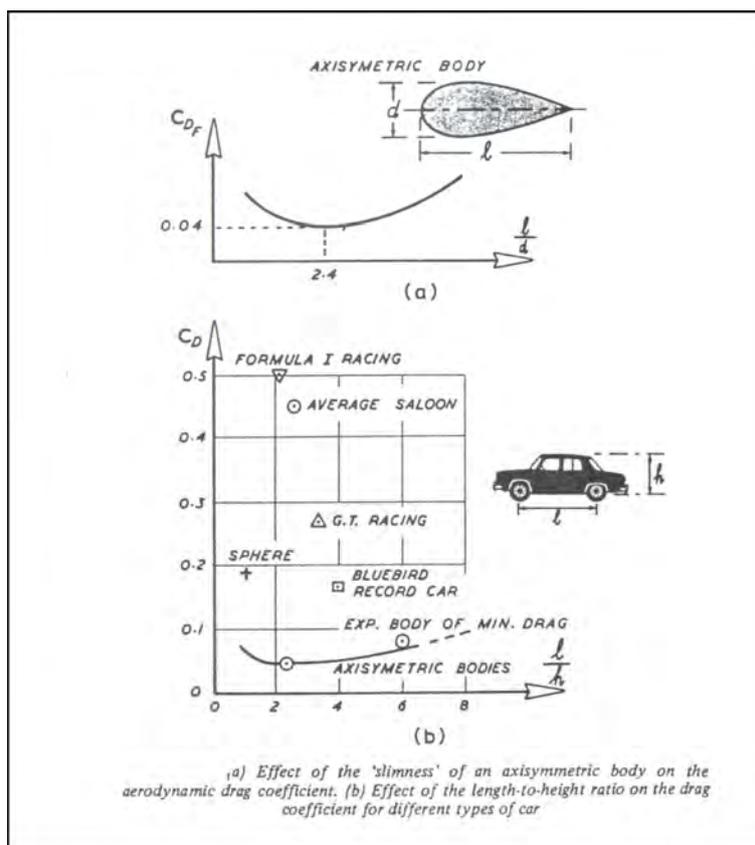


Figura 12.23: Efeitos da esbelteza de um corpo axissimetrico no arrasto aerodinâmico e da relação comprimento/altura.

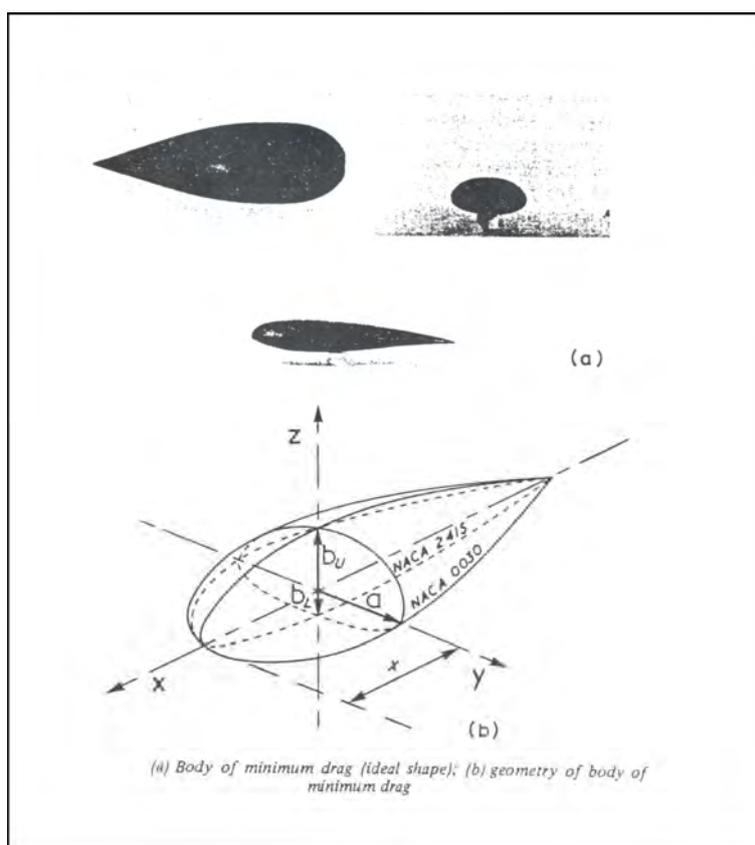


Figura 12.24: Geometria do corpo de arrasto mínimo.

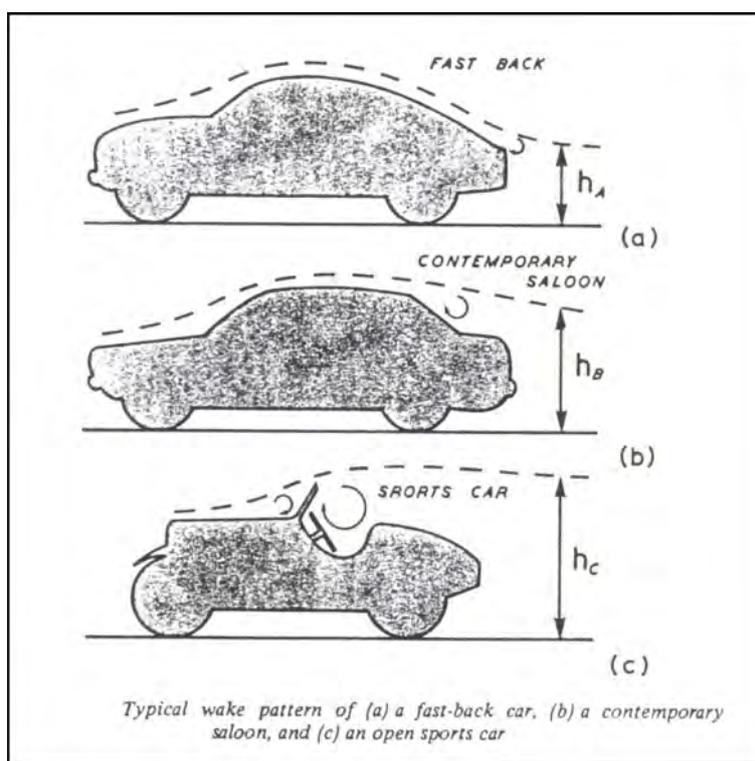


Figura 12.25: Esteiras típicas ao redor de veículos.

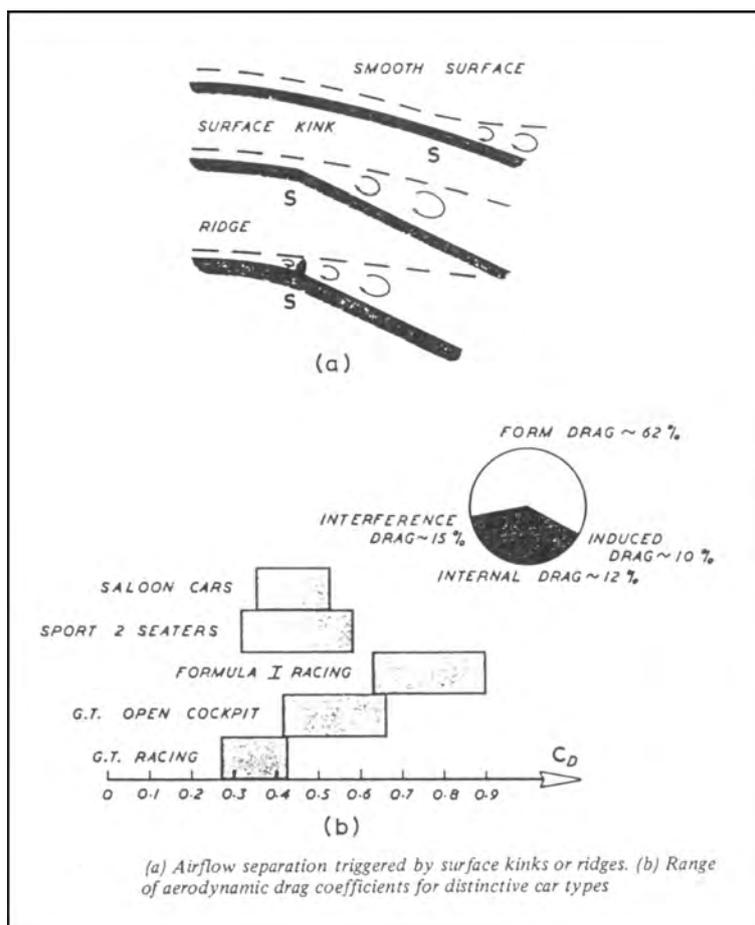


Figura 12.26: Separação de escoamento induzido por ressaltos.