

Uma Introdução à Teoria de Estabilidade Hidrodinâmica

Atila Pantaleão Silva Freire

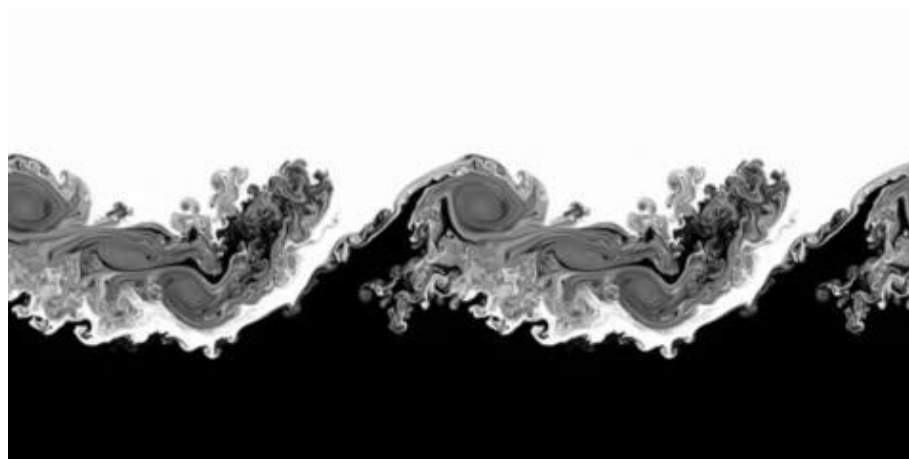
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro

O objetivo deste trabalho é apresentar ao leitor as técnicas básicas encontradas na literatura para a investigação dos fenômenos de estabilidade e transição hidrodinâmicas. Escrito em 1990, o texto foi preparado em um curtíssimo espaço de tempo como material de apoio para um curso introdutório na matéria, com 12h de duração. Na introdução, uma discussão qualitativa dos vários fatores físicos envolvidos no processo de transição é feita. A seguir, mostra-se como, através da abordagem modal e da hipótese de escoamento principal paralelo, o complexo sistema de equações diferenciais parciais de Navier-Stokes pode ser reduzido a uma equação diferencial ordinária linear, a equação de Orr-Sommerfeld. A contraparte desta equação para um escoamento onde os efeitos viscosos possam ser desprezados, a equação de Rayleigh, é descrita no capítulo seguinte onde dois teoremas, que relacionam a instabilidade de um escoamento à existência de um ponto de inflexão no escoamento principal, são apresentados. O teorema do círculo de Howard, e o teorema sobre instabilidades tri-dimensionais de Squire também são apresentados neste capítulo. A instabilidade de camadas cisalhantes e de escoamentos em rotação é discutida nos próximos dois capítulos. Uma análise assintótica da equação de Orr-Sommerfeld é conduzida a seguir para que a estrutura da solução próxima a um ponto crítico possa ser bem entendida. Efeitos não lineares sobre a instabilidade são estudados pela abordagem de Landau no capítulo 7. Finalmente, a estabilidade da camada limite é estudada no capítulo 8. Neste capítulo, o conceito de instabilidade temporal e de instabilidade espacial é introduzido. Além disto, o modo como sistemas fluidos respondem a estímulos externos é investigado, dando origem ao conceito de receptividade. As bibliografias utilizadas são citadas ao fim do texto. Registre-se, entretanto, que a maior parte do conteúdo do trabalho foi desenvolvido tomando-se como base o livro de Philippe Drazin (Drazin, P. G. and Reid, W. H.; *Hydrodynamic stability*, C.U.P., 1981).

APSF



Trânsição em um filete de fumaça



Instabilidade em camadas cisalhantes

Conteúdo

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Estabilidade Linear pela Abordagem Modal | 4 |
| 3 | A Equação de Rayleigh | 7 |
| 4 | Instabilidade de Kelvin-Helmholtz | 13 |
| 5 | Instabilidade Centrífuga | 17 |
| 6 | Soluções Assintóticas de Orr-Sommerfeld | 24 |
| 7 | Introdução à Estabilidade Não-linear | 27 |
| 8 | Estabilidade e Transição em Camadas Limite | 30 |

Capítulo 1

Introdução

A estabilidade hidrodinâmica é estudada com o objetivo de se prever mudanças que ocorram no regime de escoamento laminar de um fluido levando-o ao regime turbulento. A este processo de mudanças que acomete o escoamento laminar, denominaremos genericamente transição. Uma adequada previsão destas mudanças é de grande importância para as indústrias aeronáutica, mecânica e química onde pequenas variações do ponto de transição podem provocar grandes alterações de rendimento em equipamentos e artefatos. De fato, um entendimento completo do fenômeno de transição, com conseqüente habilidade de controlá-lo, abriria grandes perspectivas para o engenheiro projetista. O simples controle da transição faria com que taxas de variação da quantidade de movimento e da troca de calor fossem drasticamente alteradas em processos industriais, levando a novas situações desejadas pelo projetista.

Infelizmente, a dificuldade matemática presente na análise de problemas envolvendo transição de escoamento é tal, que não se espera que o processo seja algum dia completamente entendido. A princípio, esperaríamos que a todo problema de mecânica dos fluidos com condições de contorno estacionárias correspondesse uma solução estacionária. Entretanto, nem todas as soluções obtidas a partir das equações de Navier-Stokes, mesmo se exatas, podem ocorrer na natureza. Os escoamentos que ocorrem na natureza devem não apenas obedecer as equações de Navier-Stokes, mas também ser estáveis. Para que um escoamento seja estável é necessário que qualquer perturbação à qual o mesmo seja sujeito, por menor que seja, decresça com o tempo ou com sua posição conforme o caso.

Em termos gerais, podemos dizer que um fluido é estável quando existir um certo equilíbrio entre as forças externas, de inércia e viscosas que agem sobre ele. Quando pequenas perturbações quebram este equilíbrio, elas podem eventualmente se amplificar dando origem a instabilidades. As forças externas de principal interesse são aquelas provocadas por variação da massa específica do fluido, por tensões específicas, por forças magnetohidrodinâmicas, etc. Rapidamente, vejamos então o efeito qualitativo das várias forças que agem sobre um fluido em sua estabilidade.

Se, dentro de um recipiente, um fluido é colocado sobre outro mais leve, isto claramente possui um efeito desestabilizador, pois o fluido pesado tenderá, pela ação da gravidade, a ocupar o lugar do mais leve. Tensões superficiais, por outro lado resistem a um aumento de área superficial e portanto possuem um efeito estabilizador. Do mesmo modo, um campo elétrico pode ser utilizado para dificultar o escoamento de um fluido composto por

partículas eletricamente condutoras, e portanto, pode ter também um efeito estabilizador.

A viscosidade de um fluido possui o efeito de dissipar a energia de qualquer perturbação imposta a um escoamento, tendendo a estabilizá-lo. Por este motivo, todo escoamento é estável se a viscosidade for alta o suficiente. Entretanto, a viscosidade também possui o efeito de difundir quantidade de movimento, o que pode provocar instabilidade em alguns tipos de escoamento. Estas duas características conflitantes da viscosidade serão estudadas nas próximas seções.

O papel das superfícies delimitadoras de um escoamento é determinante no modo como pequenas perturbações evoluirão. Basicamente, quanto mais próximas estas superfícies estiverem, mais estável será o escoamento. Entretanto, a proximidade de superfícies pode também levar a fortes variações de velocidade na região transversal ao escoamento, as quais, difundidas pela viscosidade, provocam instabilidade.

É claro que nos escoamentos encontrados na natureza a maioria dos efeitos descritos acima aparecerá combinado. Mesmo em escoamento de Poiseuille, quatro efeitos combinados aparecem: o efeito duplo da viscosidade, o efeito da inércia e o efeito das paredes. No que se segue, e nas próximas seções, mostraremos como estes problemas são normalmente tratados na literatura.

A estabilidade de um escoamento tem sido tradicionalmente abordada na literatura pelo método das componentes normais. Neste método, pequenas perturbações separadas em componentes do tipo

$$\phi(y)e^{i(kx-\omega t)}$$

são impostas a um escoamento paralelo $U(y)$ na direção x . Pela equação do movimento linearizada pode-se então, relacionar os parâmetros k e ω através de uma equação característica. Se para valores de k reais corresponderem valores ω imaginários ($\omega = \omega_r + \omega_i i$) com $\omega_i > 0$ diremos que o escoamento é instável. Instabilidade linear implica então que perturbações infinitesimais crescerão exponencialmente.

Nas primeiras investigações sobre a instabilidade de escoamentos, esperava-se que logo após o aparecimento de pequenas perturbações que amplificassem com o tempo, o fenômeno da turbulência se seguisse; isto é, esperava-se que houvesse uma ligação direta entre instabilidade e transição hidrodinâmicas. A idéia de que um escoamento possa ser em algum sentido instável, de tal modo que pequenas perturbações evoluam, levando a uma nova estrutura, possivelmente turbulenta, é bastante atrativa. Realmente, a predição de uma taxa de crescimento exponencial para a instabilidade sugere que mudanças drásticas poderiam acontecer no escoamento original. Entretanto, o comportamento exponencial das perturbações é uma consequência da linearização das equações de Navier-Stokes, permanecendo válido apenas enquanto estas perturbações forem pequenas. Quando as perturbações atingirem um certo valor, efeitos não-lineares tornar-se-ão importantes e, sendo estes efeitos normalmente estabilizadores, novos estados podem ser obtidos.

Como então fazer para prever transição a partir de resultados obtidos pela teoria de estabilidade linear? A atitude natural seria admitir que para altos valores de ω a instabilidade linear pode levar a grandes mudanças no escoamento e, conseqüentemente, à turbulência. Infelizmente, para a maioria dos escoamentos de interesse prático, este parâmetro é pequeno. Previsões sobre transição são então, normalmente feitas utilizando métodos empíricos que empregam teorias lineares. É claro que esta abordagem apresenta

limitações, entretanto, ela tem sido de utilidade até que métodos mais precisos sejam desenvolvidos.

A teoria de estabilidade linear possui, além disso, uma outra utilidade de grande relevância. Ela parece indicar muito bem qualitativamente a estabilidade relativa dos vários escoamentos de interesse prático. Por exemplo, de acordo com a teoria de estabilidade linear, o escoamento no interior de um tubo é estável para qualquer número de Reynolds. Na realidade, embora verifiquemos que turbulência é frequentemente observada no interior de tubos, é verdade que escoamentos em tubos são muito mais estáveis que escoamentos em canais ou em camada limite.

A teoria da estabilidade linear tem servido também como base para esquemas que atacam problemas de estabilidade fracamente não linear utilizando técnicas de perturbação.

Capítulo 2

Estabilidade Linear pela Abordagem Modal

Nosso interesse primário aqui é o seguinte: tendo um escoamento básico sido especificado, e tendo o mesmo sido perturbado, verificar se as perturbações decairão, permanecerão constantes ou serão amplificadas. Neste sentido, cabe introduzir aqui uma definição formal de estabilidade para um sistema físico.

Seguindo a teoria de estabilidade para equações diferenciais ordinárias, diremos que um escoamento é estável quando

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon > 0, \quad \text{tq} \quad |\vec{u}(\vec{x}, 0) - \vec{U}(\vec{x}, 0)| < \delta_\epsilon \Rightarrow |\vec{u}(\vec{x}, t) - \vec{U}(\vec{x}, t)| < \epsilon, \quad \forall t > 0.$$

Esta definição devida a Liapounov afirma que as perturbações permanecerão limitadas a um certo valor para todo o intervalo de tempo desde que as perturbações sejam suficientemente pequenas.

Normalmente na definição acima usa-se a norma do máximo. É claro que muitas situações existem onde a definição acima não é satisfatória. Por exemplo, se o escoamento básico apresenta grandes variações no tempo, torna-se necessário definir uma norma que represente bem o que o experimentalista interpreta por instabilidade. Pode também ocorrer que o escoamento apresente instabilidade espacial ao invés de temporal e então a definição acima deve ser revista. O importante entretanto é o leitor perceber que na maioria das aplicações o senso comum dispensa qualquer definição formal de estabilidade.

Passemos então ao exame da seguinte questão fundamental: quais são as origens da turbulência e que parâmetros externos dominam sua geração?

Muito foi desenvolvido no passado para se obter uma resposta a esta pergunta, a maioria dos trabalhos recorrendo às idéias clássicas de teoria de estabilidade. Em um primeiro passo, as equações de Navier-Stokes são linearizadas; a seguir, a evolução de pequenas perturbações aplicadas a um escoamento básico conhecido é investigada. No método das pequenas perturbações, apenas perturbações compatíveis com as equações do movimento são consideradas.

Consideremos a equação de Navier-Stokes escrita sob a forma da equação do transporte da vorticidade para um escoamento incompressível [1],

$$\nabla^2 \psi_t + \psi_y \nabla^2 \psi_x - \psi_x \nabla^2 \psi_y = R^{-1} \nabla^2 (\nabla^2 \psi), \quad (1)$$

onde ψ denota a função corrente, todos os parâmetros foram adimensionalizados utilizando-se grandezas características do escoamento externo, e R denota o número de Reynolds.

A investigação matemática da estabilidade de um dado escoamento sujeito a perturbações infinitesimais ocorrerá considerando que a função de corrente, ψ , pode ser decomposta como

$$\psi(x, y, t) = \bar{\psi}(x, y, t) + \epsilon \hat{\psi}(x, y, t), \quad (2)$$

onde $\epsilon \ll 1$ denota a ordem de grandeza das flutuações.

Na equação (2), a grandeza $\bar{\psi}(x, y, t)$ representa o escoamento base conhecido; ela, portanto, satisfaz exatamente as equações de Navier-Stokes. Logo, considerando que ψ seja uma solução exata do problema, a substituição de (2) em (1) nos fornece

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\psi}_t + \hat{\psi}_y \nabla^2 \bar{\psi}_x + \bar{\psi}_y \nabla^2 \hat{\psi}_x - \hat{\psi}_x \nabla^2 \bar{\psi}_y - \bar{\psi}_x \nabla^2 \hat{\psi}_y \\ + \epsilon (\hat{\psi}_y \nabla^2 \hat{\psi}_x - \hat{\psi}_x \nabla^2 \hat{\psi}_y) = R^{-1} \nabla^2 (\nabla^2 \hat{\psi}). \end{aligned}$$

Na literatura, normalmente utiliza-se a hipótese do escoamento principal ser paralelo para que maiores simplificações possam ser obtidas. Esta aproximação é razoável para grandes números de Reynolds.

Assim, adotando a hipótese de escoamento paralelo, chegamos a

$$\nabla^2 \hat{\psi}_t + \bar{u} \nabla^2 \hat{\psi}_x - \bar{u}'' \hat{\psi}_x + \epsilon (\hat{\psi}_y \nabla^2 \hat{\psi}_x - \hat{\psi}_x \nabla^2 \hat{\psi}_y) = R^{-1} \nabla^2 (\nabla^2 \hat{\psi}), \quad (3)$$

onde $\bar{u} = \psi_y$ e o primo denota diferenciação em relação a y .

Na teoria de estabilidade linear o termo multiplicado por ϵ é desprezado, e perturbações da forma

$$\hat{\psi}(x, y, t) = \phi(y) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (4)$$

são consideradas.

Perturbações desta forma são escolhidas pois os coeficientes em (3) variam espacialmente mas não no tempo. De fato, o método de separação das variáveis sugere que as soluções do sistema podem ser separadas em componentes que variam no espaço como e^{kx} e no tempo como $e^{\omega t}$. O sucesso desta aproximação depende de se conseguir um conjunto completo de componentes que seja capaz de representar o desenvolvimento de uma perturbação inicial arbitrária.

A substituição de (4) em (3), nos fornece

$$[\bar{u} - c][\phi'' - k^2 \phi] - \bar{u}'' \phi = \frac{1}{ikR} [\phi^{iv} - 2k^2 \phi'' + k^4 \phi], \quad (5)$$

onde $c = \omega/k$.

A equação acima é normalmente chamada de equação de Orr-Sommerfeld [3,4] pois foi deduzida independentemente por estes dois cientistas em 1907 e 1908 respectivamente. Condições de contorno são obtidas para a mesma considerando que em superfícies sólidas

as condições de não deslizamento e de não penetrabilidade sejam satisfeitas. Por exemplo, se considerarmos que superfícies sólidas estejam localizadas em $y = y_1$ e em $y = y_2$, teremos

$$\phi(y_1) = \phi'(y_1) = \phi(y_2) = \phi'(y_2) = 0. \quad (6)$$

Embora as equações (5) e (6) já tivessem sido firmemente estabelecidas no início deste século, sua solução mostrou-se de difícil obtenção. Elas definem um problema de autovalor cuja solução pode ser denotada por $f(k, c, R) = 0$ e a autofunção por $\phi(y)$. A função f pode ser vista como uma relação que determina valores do número de onda, k , para dados valores de c e R , ou alternativamente, como uma relação que fornece a frequência das perturbações, c , para valores conhecidos de k e de R . Aqui, é importante observar que, na prática, toda perturbação imposta ao escoamento é uma superposição de vários componentes normais. Então, se qualquer escoamento básico é instável, uma perturbação inicial local irá, não apenas ampliar, mas também se mover na direção do escoamento, crescendo de acordo com taxa própria e se movendo de acordo com sua velocidade de fase. Quando nenhum dos componentes possui velocidade de grupo ($\partial c / \partial k$) igual a zero, diremos que o sistema possui instabilidade convectiva pois então qualquer perturbação permanecerá localmente pequena crescendo apenas a medida que seu centro se afasta corrente abaixo ou acima. Quando, por outro lado, algum componente instável possui velocidade de grupo igual a zero, diremos que o sistema é absolutamente instável pois então perturbações crescerão em alguns pontos fixos. Estas idéias serão abordadas em mais detalhes nas seções a seguir.

Capítulo 3

A Equação de Rayleigh

A maneira mais simples de contornar as dificuldades impostas pela equação (5) é considerar o caso limite $R \rightarrow \infty$. A equação resultante é normalmente conhecida como a equação de Rayleigh. Esta equação obviamente possui ordem menor que sua equação originante e isto caracteriza um problema de perturbação singular.

A equação da estabilidade de Rayleigh pode ser escrita como

$$\phi'' - k^2\phi - \frac{\bar{u}''}{\bar{u} - c}\phi = 0, \quad (7)$$

com condições de contorno $\phi(y_1) = \phi(y_2) = 0$.

Como o principal objetivo do desenvolvimento de uma teoria não-viscosa é estabelecer critérios gerais que possam determinar se um dado escoamento é estável ou não, é desejável que esta teoria seja provida de certa simplicidade, e isto pode ser conseguido se realizarmos uma análise por componentes normais.

Passemos agora à dedução de dois resultados importantes obtidos a partir da eq. (7). O primeiro deles é o:

Teorema do ponto de inflexão de Rayleigh. *Uma condição necessária para instabilidade é que o perfil de velocidades básico tenha um ponto de inflexão.*

Para provar este teorema observemos que a equação de Rayleigh permanece imutável se trocarmos k por $-k$. Então, sem qualquer perda de generalidade podemos tomar $k \geq 0$ e o critério de instabilidade resume-se a encontrar uma solução com $c_i > 0$ para algum $k > 0$. Além disso, se $\phi(y)$ é alguma autofunção com autovalor c para k , então também o são $\phi(y)^*$ e c^* para o mesmo k . Logo, para o caso não-viscoso, a cada componente estável, c , corresponde um componente instável c^* . Podemos então adotar a convenção de tomar $c_i > 0$ como critério de instabilidade e abandonar a análise do conjugado complexo com $c_i < 0$.

Supondo então que em (7) $c_i > 0$, e multiplicando esta equação por ϕ^* , ficamos com

$$\int_{y_1}^{y_2} (|\phi'|^2 + k^2|\phi|^2) dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\bar{u}''(\bar{u} - c^*)}{|\bar{u} - c|^2} |\phi|^2 dy = 0, \quad (8)$$

cuja parte imaginária nos dá

$$c_i \int_{y_1}^{y_2} \bar{u}'' \frac{|\phi|^2}{|\bar{u} - c|^2} dy = 0. \quad (9)$$

Como a igualdade acima só pode ser satisfeita se u'' mudar de sinal pelo menos uma vez no intervalo (y_1, y_2) , segue-se o teorema.

Este resultado implica que camadas limite sem gradiente de pressão adverso, e escoamento entre placas planas, são estáveis. O fato de que observacionalmente estes escoamentos são instáveis implica então que a viscosidade de algum modo possui um efeito desestabilizador.

O teorema acima, entretanto, nada afirma sobre escoamentos nos quais $u'' = 0$ para todo y , ou mesmo distingue entre um máximo ou mínimo de vorticidade. Para obter uma versão mais forte do teorema de Rayleigh recorreremos ao seguinte resultado:

Teorema de Fjørtoft. *Uma condição necessária para a instabilidade é que $u''(u - u_s) < 0$ em algum lugar do escoamento, onde y_s seja um ponto no qual $u'' = 0$ e $u_s = u(y_s)$.*

Para provar este teorema consideremos a parte real da Eq. (8),

$$\int_{y_1}^{y_2} (|\phi'|^2 + k^2|\phi|^2) dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\bar{u}''(\bar{u} - c_r)}{|\bar{u} - c|^2} |\phi|^2 dy = 0. \quad (10)$$

Adicionando-se

$$(c_r - u_s) \int_{y_1}^{y_2} \frac{\bar{u}''}{|u - c|^2} |\phi|^2 dy = 0 \quad (11)$$

ao lado esquerdo de (10), segue-se que

$$\int_{y_1}^{y_2} (|\phi'|^2 + k^2|\phi|^2) dy = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\bar{u}''(\bar{u} - u_s)}{|\bar{u} - c|^2} |\phi|^2 dy > 0,$$

de onde o teorema resulta trivialmente.

Infelizmente, os teoremas acima fornecem apenas condições necessárias para a instabilidade de escoamentos. De fato, um simples exemplo apresentado por Tollmien (1935) [5], o escoamento $\bar{u} = \sin y$, é estável apesar de possuir pontos onde $\bar{u}'' = 0$. Tollmien também apresentou argumentos heurísticos os quais sugerem que para perfis simétricos em um canal e para perfis do tipo daqueles encontrados em camada limite, as condições acima são condições suficientes.

Um terceiro resultado importante em teorias não-viscosas é o teorema do semi-círculo.

Teorema de Howard. *Para componentes instáveis, c deve morar dentro do semi-círculo*

$$(c_r - \bar{u}_{\text{med}})^2 + c_i^2 \leq (\bar{u}_{\text{med}})^2, \quad c_i > 0 \quad \text{e} \quad \bar{u}_{\text{med}} = \frac{(\bar{u}_{\text{max}} + \bar{u}_{\text{min}})}{2}.$$

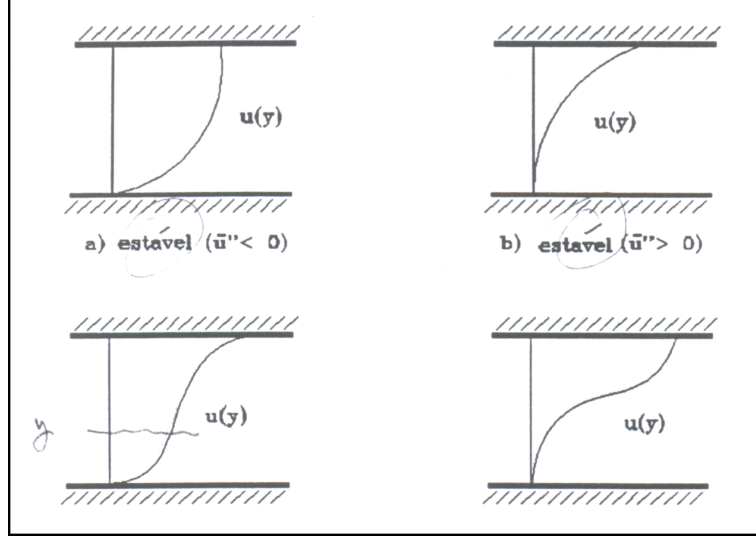


Figura 3.1: Ilustração de critérios gerais para a predição de instabilidade.

Para mostrar este resultado, fazemos a seguinte mudança de variáveis

$$\phi^+ = \frac{\phi}{(\bar{u} - c)}, \quad c \Rightarrow 0 \quad (12)$$

na Eq. (7) para obter

$$\frac{d}{dy} \left[(\bar{u} - c)^2 \frac{d\phi^+}{dy} \right] - k^2 (\bar{u} - c)^2 \phi^+ = 0. \quad (13)$$

Multiplicando a equação acima por $(\phi^+)^*$ e integrando de y_1 a y_2 , ficamos com

$$\int_{y_1}^{y_2} (\bar{u} - c)^2 Q \, dy = 0, \quad (14)$$

onde $Q = |\phi^{+'}|^2 + k^2 |\phi^+|^2 > 0$.

As partes real e imaginária desta integral são

$$\int_{y_1}^{y_2} ((\bar{u} - c_r)^2 - c_i^2) Q \, dy = 0 \quad \text{e} \quad 2c_i \int_{y_1}^{y_2} (\bar{u} - c_r) Q \, dy = 0. \quad (15)$$

A segunda integral implica que $\bar{u}_{\min} < c_r < \bar{u}_{\max}$. Além disso, observe que

$$\int_{y_1}^{y_2} (\bar{u} - \bar{u}_{\min})(\bar{u} - \bar{u}_{\max}) Q \, dy \leq 0,$$

$$\int_{y_1}^{y_2} ((c_r^2 + c_i^2) - (\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min})c_r + \bar{u}_{\max}\bar{u}_{\min}) Q \, dy \leq 0,$$

e então

$$c_r^2 + c_i^2 - (\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min})c_r + \bar{u}_{\max}\bar{u}_{\min} \leq 0. \quad (16)$$

A equação (16) afirma que todos componentes instáveis moram no semi-círculo mostrado abaixo.

Isto implica que o valor da taxa de crescimento de um componente instável ($c_i > 0$) possui um limite superior $((\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min})/2)$. Também, porque $\bar{u}_{\max} > c_r > \bar{u}_{\min}$, todos os componentes neutros ($c_i = 0$) possuem pontos críticos ($\bar{u} = c_r$). Notamos aqui que isto não implica necessariamente que tais pontos sejam singulares pois muitas vezes acontece que $\bar{u} = c_r$ em pontos onde $\bar{u}'' = 0$.

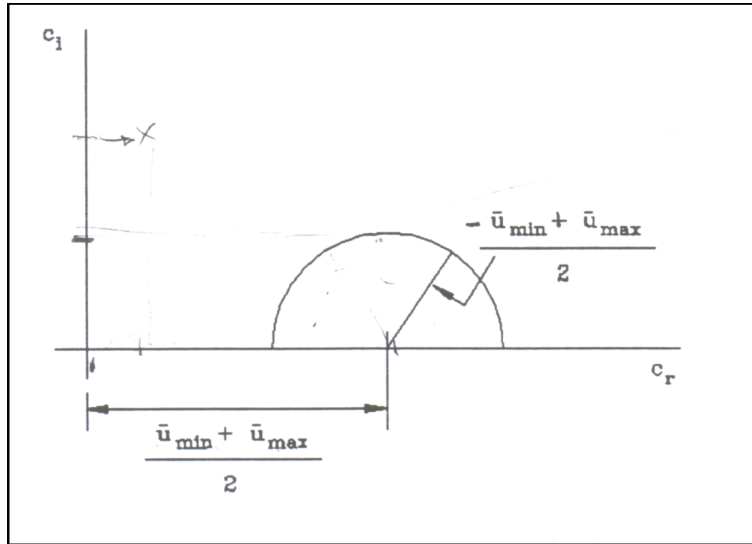


Figura 3.2: Teorema do círculo de Howard.

O problema de autovalor definido pela equação de Rayleigh é, como dito anteriormente, de difícil solução quando $\bar{u}(y)$ varia suavemente. Se $\bar{u}(y)$ é, no entanto, uma função linear por partes, as soluções da equação de Rayleigh são funções exponenciais ou hiperbólicas as quais devem ser combinadas nos pontos de descontinuidade de \bar{u} ou \bar{u}' . O uso de funções lineares por partes nos fornece então um modo fácil de representar perfis que variem suavemente. Isto permite que escoamentos com a forma abaixo sejam facilmente estudados (veja Ref. [2]).

Até agora toda a nossa análise tem sido direcionada para perturbações bi-dimensionais. Surge então naturalmente a questão se perturbações tri-dimensionais possuem um efeito desestabilizador maior. Para estudar este caso consideraremos perturbações da forma

$$u' = \hat{u}(y)e^{i(kx+lz-ckt)} \quad (17)$$

A substituição desta expressão na equação de Navier-Stokes linearizada nos dá

$$\begin{aligned} ik(u - c)\hat{u} + u'\hat{v} &= -ik\hat{p}, \\ ik(u - c)\hat{\omega} &= -i\hat{p}, \\ ik(u - c)\hat{v} &= -\frac{d\hat{p}}{dy}, \end{aligned} \quad (18)$$

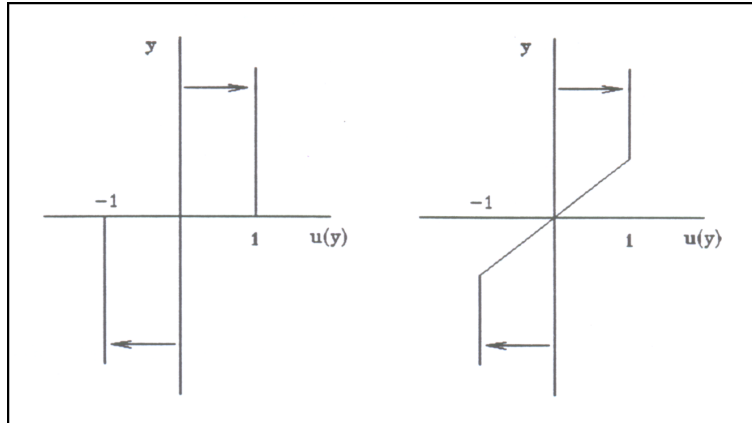


Figura 3.3: Exemplo de escoamentos cisalhantes.

$$i(k\hat{u} - l\hat{\omega}) + \frac{d\hat{v}}{dy} = 0,$$

onde, para o caso de superfícies rígidas, teremos as seguintes condições de contorno

$$\hat{v} = 0 \quad \text{em} \quad y = y_1, y = y_2. \quad (19)$$

O problema definido pelas Eqs. (18-19) pode ser reduzido a um problema equivalente bi-dimensional se utilizarmos as seguintes transformações introduzidas por Squire (1933) [6].

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= (k^2 + l^2)^{1/2}, & \tilde{k}\tilde{u} &= k\hat{u} + l\hat{\omega}, \\ \tilde{p}/\tilde{k} &= \hat{p}/k, & \tilde{v} &= \hat{v}, & \tilde{c} &= c; \end{aligned} \quad (20)$$

de modo que ficamos com as equações

$$\begin{aligned} i\tilde{k}(u - \tilde{c})\tilde{u} + u'\tilde{v} &= -i\tilde{k}\tilde{p}, \\ i\tilde{k}(u - \tilde{c})\tilde{v} &= -\frac{d\tilde{p}}{dy}, \\ i\tilde{k}\tilde{u} + \frac{d\tilde{v}}{dy} &= 0; \end{aligned} \quad (21)$$

cujas condições de contorno são

$$\tilde{v} = 0 \quad \text{em} \quad y = y_1, y = y_2.$$

As equações (21) possuem a forma exata das equações (18) quando fazemos $\hat{\omega} = l = 0$. A cada problema tri-dimensional instável corresponde então a um problema bi-dimensional mais instável pois $\tilde{k}\tilde{c} > kc$. Podemos então formular o seguinte teorema:

Teorema de Squire. *A cada perturbação tri-dimensional instável corresponde uma perturbação bi-dimensional mais instável.*

Este teorema nos afirma que, ao se buscar critérios suficientes de instabilidade, faz-se necessário apenas estudar as perturbações bi-dimensionais, podendo-se portanto introduzir o conceito de função de corrente como feito no início da seção 2.

Capítulo 4

Instabilidade de Kelvin-Helmholtz

Para ilustrar as idéias e conceitos básicos apresentados nas seções anteriores consideremos um problema clássico da teoria de estabilidade, o problema de Kelvin-Helmholtz[7, 8]. Neste problema, dois fluidos são colocados em movimento com velocidades diferentes em duas regiões semi-infinitas paralelas (Fig. 4).

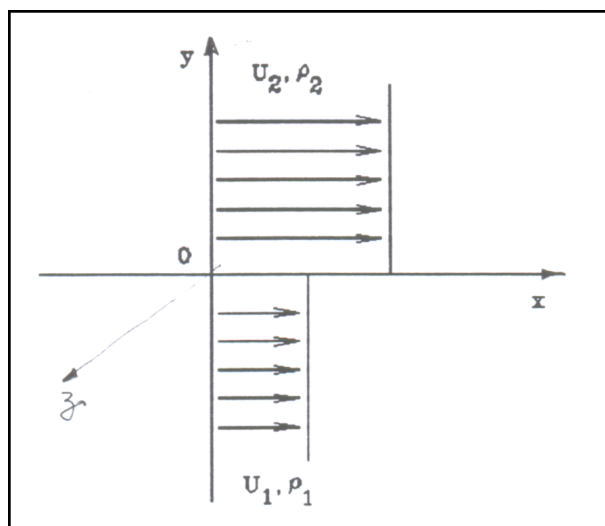


Figura 4.1: A instabilidade de Kelvin-Helmholtz.

Para esta geometria, os escoamentos básicos são fornecidos por

$$u = \begin{cases} u_2 \\ u_1 \end{cases} \quad \rho = \begin{cases} \rho_2 \\ \rho_1 \end{cases} \quad p = \begin{cases} p - g\rho_2 y, y > 0 \\ p - g\rho_1 y, y < 0 \end{cases} \quad (22)$$

onde os símbolos acima possuem seu significado clássico.

Para estudar os mecanismos de instabilidade deste escoamento, consideremos por ora que $\rho_1 = \rho_2$, e representemos a camada cisalhante por pontos discretos de vorticidade (Fig. 5).

Observemos então que quando algum destes vórtices é deslocado para cima, a velocidade induzida sobre ele pelos outros vórtices é positiva. Sobre vórtices deslocados para

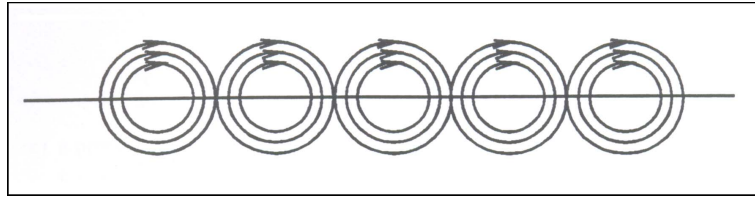


Figura 4.2: Representação por pontos discretos da camada cisalhante livre.

baixo, entretanto, a velocidade induzida é negativa. Isto tende a acumular vorticidade em pontos como o ponto A abaixo.

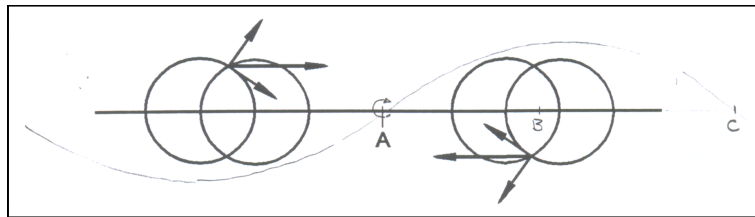


Figura 4.3: A dinâmica do processo.

Este processo de acumulação de vorticidade induz fortes velocidades de rotação, que amplificam a perturbação inicial da camada cisalhante levando a um crescimento exponencial da perturbação enquanto a aproximação linear persistir.

Para analisar matematicamente este problema seguiremos aqui o procedimento de Kelvin. Consideremos então que nas duas regiões de fluidos distintos existam potenciais de velocidade de modo que possamos escrever

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_2, & y > \zeta \\ \Phi_1, & y < \zeta \end{cases} \quad (23)$$

onde $y = \zeta(x, z, t)$ denota a elevação da interface quando o fluido é perturbado. Logo, a equação do movimento pode ser escrita como

$$\Delta\Phi_2 = 0 \quad (y > \zeta), \quad \Delta\Phi_1 = 0 \quad (y < \zeta). \quad (24)$$

As condições de contorno exigem que:

1. as perturbações morram no infinito,

$$\nabla\Phi \rightarrow u, \quad y \rightarrow \pm\infty. \quad (25)$$

2. a velocidade normal das partículas fluidas logo acima e abaixo da interface seja a mesma,

$$\frac{\Phi_i}{\partial y} = \frac{D\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial x} \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial z} \frac{\partial\zeta}{\partial y}, \quad y = \zeta, \quad i = 1, 2. \quad (26)$$

3. a pressão seja contínua através da interface, o que pelo teorema de Bernoulli nos fornece,

$$\rho_1 \left[c_1 - \frac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2 - \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} - gy \right] = \rho_2 \left[c_2 - \frac{1}{2}(\nabla\Phi_2)^2 - \frac{\partial\Phi_2}{\partial t} - gy \right], \quad y = \zeta \quad (27)$$

As constantes c_1 e c_2 em (27) podem ser prontamente relacionadas se observarmos que para o escoamento básico temos

$$\rho_1 \left[c_1 - \frac{1}{2}U_1^2 \right] = \rho_2 \left[c_2 - \frac{1}{2}U_2^2 \right]. \quad (28)$$

As equações (23) a (28) definem bem o problema de estabilidade a ser estudado. Este problema é de difícil solução pois o termo $(\nabla\Phi)^2$ na Eq. (27) a torna não linear. Para buscar soluções analíticas repetimos então o procedimento da seção 2 fazendo

$$\Phi_2 = U_2x + \Phi'_2, \quad y > \zeta; \quad \Phi_1 = U_1x + \Phi'_1, \quad y < \zeta. \quad (29)$$

Substituindo as expressões acima nas equações (23) a (28) e desprezando o produto dos incrementos de ordem superior, Φ' e ζ , ficamos com o seguinte problema de instabilidade linear.

$$\Delta\Phi'_2 = 0 \quad (y > \zeta), \quad \Delta\Phi'_1 = 0 \quad (y < \zeta); \quad (30)$$

$$\nabla\Phi' \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \pm\infty; \quad (31)$$

$$\partial\Phi'_iy = \partial\zeta t + U_i\partial\zeta x, \quad y = 0, \quad i = 1, 2; \quad (32)$$

$$\rho_1 \left[U_1 \frac{\partial\Phi'_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi'_1}{\partial t} + g\zeta \right] = \rho_2 \left[U_2 \frac{\partial\Phi'_2}{\partial x} + \frac{\partial\Phi'_2}{\partial t} + g\zeta \right], \quad y = 0. \quad (33)$$

Desde que os coeficientes das equações acima são constantes e as fronteiras horizontais, assumimos que as perturbações podem ser separadas em componentes da forma

$$(\zeta, \Phi'_1, \Phi'_2) = (\hat{\zeta}(y), \hat{\Phi}_1(y), \hat{\Phi}_2(y))e^{i(kx+lz)+\omega t}. \quad (34)$$

A equação (30) então nos fornece imediatamente que

$$\hat{\Phi}_2 = A_2e^{-\tilde{k}y} + B_2e^{\tilde{k}y}, \quad (35)$$

onde A e B são constantes arbitrárias e $\tilde{k} = (k^2 + l^2)^{1/2}$. As condições de contorno no infinito implicam que $B_2 = 0$ e portanto

$$\hat{\Phi}_2 = A_2e^{-\tilde{k}y}. \quad (36)$$

Analogamente obtemos

$$\hat{\Phi}_1 = A_1e^{\tilde{k}y}. \quad (37)$$

As três quantidades desconhecidas, $\hat{\zeta}$, A_1 e A_2 são obtidas através das equações (32–33). Da equação (32) vem

$$A_1 = \frac{(\omega + ikU_1)\hat{\zeta}}{\tilde{k}} \quad \text{e} \quad A_2 = -\frac{(\omega + ikU_2)\hat{\zeta}}{\tilde{k}}, \quad (38)$$

enquanto da equação (33) obtemos

$$\rho_1(\tilde{k}g + (\omega + ikU_1)^2) = \rho_2(\tilde{k}g - (\omega + ikU_2)^2). \quad (39)$$

A solução da equação (39) acima resulta em

$$\omega = -ik \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \left[\frac{k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} - \frac{kg(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2} \right]^{1/2}. \quad (40)$$

Logo, as perturbações permanecerão estáveis se

$$\tilde{k}g(\rho_1^2 - \rho_2^2) \geq k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2. \quad (41)$$

Se, por outro lado,

$$\tilde{k}g(\rho_1^2 - \rho_2^2) < k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2, \quad (42)$$

então pelo menos um dos componentes será instável.

Capítulo 5

Instabilidade Centrífuga

Quando as idéias básicas sobre estabilidade hidrodinâmica foram estabelecidas por Rayleigh, Orr e o grupo de Prandtl, o interesse principal naquele tempo repousava sobre escoamentos em tubos e em camadas limite. Infelizmente, a solução destes problemas se mostrou de difícil obtenção mesmo já tendo sido a equação das pequenas perturbações (Eq. 3) bem estabelecida. De fato, os primeiros sucessos na teoria da instabilidade foram obtidos por Taylor[9] numa configuração de escoamento bastante diferente a qual havia sido previamente estudada por Couette[10] e por Mallock[11]. Estes autores estudaram a estabilidade de escoamentos que se desenvolvem entre cilindros que giram a velocidades distintas. Couette observou que, se o cilindro interno era mantido fixo e o externo rodava com velocidade Ω_2 , então podiam ser obtidos valores de Ω_2 os quais provocavam mudanças drásticas no estado do escoamento com o conseqüente aparecimento de turbulência. Em investigação subsequente, Mallock fixou o cilindro externo e observou que qualquer que fosse a velocidade do cilindro interno, Ω_1 , instabilidades sempre ocorriam. Em 1921 Taylor, utilizou um aparato experimental onde os cilindros podiam girar independentemente. Ele mostrou que as instabilidades iniciais são axissimétricas, como assumido por Rayleigh, mas que o critério de instabilidade de Rayleigh não funciona quando os cilindros giram em direções opostas.

Antes de descrever em detalhes a estabilidade de fluidos “reais” em escoamentos em rotação, consideraremos inicialmente o caso de um fluido sem viscosidade.

As equações da conservação da quantidade de movimento podem ser escritas em coordenadas cilíndricas como

$$\frac{Du_r}{Dt} - \frac{U_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (43)$$

$$\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (44)$$

$$\frac{Du_z}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (45)$$

onde

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

A equação da continuidade é dada por

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (46)$$

Estas equações admitem uma solução básica dada por

$$u_r = u_z = 0, \quad u_\theta = U(r) \quad \text{e} \quad p = P(r). \quad (47)$$

onde $U(r) = r\Omega(r)$ é uma função arbitrária de r e a pressão obtida de (43) é

$$P(r) = \rho \int \frac{U^2}{r} dr.$$

Para estudarmos a estabilidade de escoamentos em rotação, utilizaremos aqui as mesmas idéias apresentadas na seção anterior.

Consideremos então que o escoamento básico dado por (47) esteja sujeito a perturbações da forma

$$(u'_r, U + u'_\theta, u'_z) \quad \text{e} \quad P + p'. \quad (48)$$

A substituição de (48) em (43)–(45), seguida pela coleta dos termos de ordem superior nos fornece a equação linear das pequenas perturbações,

$$\frac{\partial u'_r}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - 2\Omega u'_\theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r}, \quad (49)$$

$$\frac{\partial u'_\theta}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} - \left[\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right] u'_r = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'}{\partial \theta}, \quad (50)$$

$$\frac{\partial u'_z}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u'_z}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z}, \quad (51)$$

$$\frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{u'_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u'_z}{\partial z} = 0. \quad (52)$$

Estas equações descrevem a evolução de pequenas perturbações tri-dimensionais (Eq. 48) impostas ao fluido. Apesar delas serem muito mais simples que as equações originais (43–46), sua análise é bastante complexa não tendo ainda recebido um tratamento completo na literatura.

O conjunto de equações acima pode ser ainda mais simplificado se assumirmos que as perturbações são axissimétricas, isto é, que os termos em derivada de θ são nulos ($\partial/\partial\theta = 0$). Daí resulta

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u'_r + \Phi \frac{\partial^2 u'_r}{\partial z^2} = 0, \quad (53)$$

onde

$$\Phi = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^2 \Omega)^2.$$

O problema de autovalor para escoamento em rotação é então dependente da função Φ , normalmente chamada de “o discriminante de Rayleigh”.

Uma análise geral do problema de valor inicial definido por (53) não se encontra disponível na literatura. Seguimos então aqui o procedimento da seção 2, assumindo que as perturbações podem ser decompostas na forma

$$u'_r = u(r)e^{(kzi+\omega t)}, \quad (54)$$

donde obtemos

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \left[\frac{1}{r^2} + k^2 + \frac{k^2}{\omega^2} \Phi \right] u = 0. \quad (55)$$

A equação acima com condições de contorno $u = 0$ em $r = R_1, R_2$, constitui-se num problema clássico do tipo de Sturm-Liouville. De bem conhecidos teoremas obtemos que

“os autovalores k^2/ω^2 são todos negativos ou todos positivos se a função Φ é respectivamente positiva definida ou negativa definida no intervalo $[R_1, R_2]$. Se Φ troca de sinal em $[R_1, R_2]$ então teremos autovalores positivos e autovalores negativos”.

Então, se para algum escoamento básico Φ for negativo em algum lugar podemos imediatamente concluir que o escoamento é instável. Se por outro lado Φ for sempre positivo a única coisa que podemos concluir é que o escoamento é estável a perturbações axissimétricas, nada podendo dizer a respeito de perturbações mais gerais.

Para escoamento entre cilindros que giram a velocidades Ω_1 e Ω_2 o perfil de velocidade é dado por

$$\Omega = A + B \frac{1}{r^2}, \quad (56)$$

onde

$$A = \Omega_1 \frac{\mu - \eta^2}{1 - \eta^2},$$

$$B = \Omega_1 R_1^2 \frac{1 - \mu}{1 - \eta^2},$$

$\mu = \Omega_2/\Omega_1$, $\eta = R_1/R_2$, e os índices 1 e 2 denotam os cilindros interno e externo respectivamente.

Quando os cilindros giram na mesma direção, é fácil verificar que

$$\Phi > 0 \quad \text{se} \quad \mu > \eta^2, \quad (57a)$$

e

$$\Phi < 0 \quad \text{se} \quad 0 < \mu < \eta^2. \quad (57b)$$

A estabilidade de escoamento de Couette é então determinada pela linha $\mu - \eta^2$, isto é, $\Omega_1 R_1^2 = \Omega_2 R_2^2$.

Se em compensação os cilindros giram em sentidos opostos,

$$\Phi > 0 \quad \text{se} \quad \eta_0 < r/R_2 \leq 1, \quad (58a)$$

e

$$\Phi < 0 \quad \text{se} \quad \eta < r/R_2 < \eta_0. \quad (58b)$$

onde a superfície $r = R_2\eta_0$ sobre a qual Φ se anula é dada por

$$\eta_0 = \eta \left[\frac{1 + |u|}{\mu^2 + |u|} \right]^{1/2}.$$

O escoamento no interior de cilindros que giram em sentidos opostos ($\mu = 0$) é então sempre instável. Esta instabilidade entretanto é restrita à faixa de escoamento definida por (58b) de modo que este escoamento é dito localmente instável.

Consideremos agora o efeito que perturbações mais gerais exercem sobre o escoamento. Para tal, tomemos perturbação bi-dimensionais que dependem apenas de r , θ e t . Uma análise por componentes normais nos conduz a uma equação bastante diferente da Eq. 53 e de estrutura parecida com a equação de Rayleigh deduzida no capítulo 3 (Eq. 7). Esta equação para um escoamento entre dois cilindros nos fornece o seguinte resultado (Rayleigh (1880)):

“A condição necessária para a instabilidade com respeito a perturbação bi-dimensional é que o gradiente da vorticidade,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + 2\Omega \right] = r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad (59)$$

mude de sinal pelo menos uma vez no intervalo $R_1 < r < R_2$ ”.

Este resultado é análogo ao teorema do ponto de inflexão de Rayleigh apresentado no capítulo 3.

Os resultados até agora deduzidos neste capítulo nos dão critérios gerais para a determinação da estabilidade de escoamentos entre cilindros. Para se obter soluções analíticas das equações das pequenas perturbações, normalmente se recorre na literatura a algum tipo de aproximação. Uma aproximação bastante utilizada é a aproximação dos pequenos afastamentos. Nesta aproximação considera-se que

$$d = R_2 - R_1 \ll \frac{(R_1 + R_2)}{2} \quad (60)$$

ou equivalentemente, que

$$1 - \eta \ll 1.$$

Com isso, grandes simplificações são obtidas nas expressões para os escoamentos básicos e nas equações para as perturbações, podendo-se então obter soluções fechadas [2].

Passemos agora à consideração dos efeitos da viscosidade sobre a instabilidade de escoamentos em rotação. Assumindo novamente que o escoamento básico esteja sujeito a perturbações da forma das expressões (48), podemos linearizar as equações de Navier-Stokes e obter

$$\frac{\partial u'_r}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - 2\Omega u'_\theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + \nu \left[\Delta u'_r - \frac{u'_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \right], \quad (61)$$

$$\frac{\partial u'_\theta}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \left[\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right] u'_r = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \nu \left[\Delta u'_\theta - \frac{u'_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \right], \quad (62)$$

$$\frac{\partial u'_z}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u'_z}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta u'_z, \quad (63)$$

$$\frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{u'_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u'_z}{\partial z} = 0, \quad (64)$$

Estas equações, como as equações (49–52), ainda não receberam uma análise geral. Elas podem, entretanto, ser estudadas se fizermos algumas hipóteses simplificadoras.

Em experimentos realizados no primeiro quarto deste século, Taylor[9] observou que instabilidades no escoamento levavam à formação de escoamentos secundários regularmente espaçados ao longo do eixo dos cilindros. Isto claramente sugere que nos estágios iniciais da transição o fenômeno é dominado por perturbações axissimétricas. Neste caso, as equações (61–64) se reduzem a

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta^* \right] \Delta^* u'_r = 2\Omega \frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial z^2}, \quad (65)$$

e

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta^* \right] u'_\theta = -(D^* U) u'_r, \quad (66)$$

onde

$$\Delta^* = \Delta + \frac{1}{r^2} \quad \text{e} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (67)$$

As equações acima podem ser ainda mais simplificadas se assumirmos que as perturbações podem ser decompostas como

$$(u'_r, u'_\theta) = (u, v) e^{(\omega t + ikz)}. \quad (68)$$

As equações (65–66) então se tornam

$$(\nu(DD^* - k^2) - \omega)(DD^* - k^2)u = 2k^2\Omega v, \quad (69)$$

e

$$(\nu(DD^* - k^2) - \omega)v = (D^* U)u, \quad (70)$$

onde $D = d/dr$ e $D^* = d/dr + 1/r$.

As equações (69–70) podem ser escritas em uma forma adimensional mais conveniente. Para tanto façamos

$$x = \frac{(r - R_0)}{d}, \quad R_0 = \frac{(R_1 + R_2)}{2}, \quad d = R_2 - R_1. \quad (71)$$

Logo, a velocidade angular Ω (Eq. 56) passa a ser escrita como

$$\Omega(r) = \Omega_1 g(x),$$

onde

$$g(x) = A_1 + \frac{B_1}{\varepsilon^2}, \quad A_1 = \frac{\mu - \eta^2}{1 - \eta^2}, \quad B_1 = \eta^2 \frac{1 - \mu}{1 - \eta^2} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{r}{R_2} = \eta + (1 - \eta)(x + 1/2).$$

Fazendo ainda

$$a = kd, \quad \sigma = \frac{\omega d^2}{\nu},$$

temos

$$(DD^* - a^2 - \sigma)(DD^* - a^2)u = a^2 \frac{2\Omega_1 d^2}{\nu} g(x)v, \quad (72)$$

e

$$(DD^* - a^2 - \sigma)v = \frac{2Ad^2}{\nu}u,$$

onde agora $D = d/dx$ e $D^* = d/dx + (1 - \eta)/\varepsilon$.

Trocando-se $(2Ad^2/\nu)u$ por U nas equações acima finalmente ficamos com

$$(DD^* - a^2 - \sigma)(DD^* - a^2)u = -a^2 T g(x)v, \quad (74)$$

e

$$(DD^* - a^2 - \sigma)v = u, \quad (75)$$

onde

$$T = -\frac{4A\Omega_1 d^4}{\nu^2} = \frac{4\Omega_1^2 R_1^4}{\nu^2} \frac{\eta^2 - \mu}{1 - \eta^2} \left[\frac{1 - \eta}{\eta} \right]^4. \quad (76)$$

Os efeitos viscosos em um escoamento em rotação são então caracterizados pelo número adimensional, T , chamado o número de Taylor.

Vários métodos podem agora ser utilizados para resolver as equações (74–76). A utilização da aproximação dos pequenos afastamentos ($R_2 - R_1 \ll (R_2 + R_1)/2$) nos fornece

$$\frac{(1 + \mu)T}{2} = \frac{(\Pi^2 + a^2)^3}{a^2 \left[1 - \frac{16\Pi^2 a \cosh^2(a/2)}{(\Pi^2 + a^2)^2 (\sinh a + a)} \right]}, \quad (77)$$

donde obtemos,

$$T_c = \frac{1715}{(1 + \mu)/2} \quad \text{e} \quad a_c = 3, 12. \quad (78)$$

Comparação da equação (78) com resultados mais recentes mostra que o erro cometido por esta aproximação é inferior a um por cento.

Quando os cilindros giram em direções opostas o lado direito da equação (74) troca de sinal sobre a superfície nodal $x_0 = (1 - \mu)^{-1} - 0.5$. Logo, como para o caso não viscoso, o comprimento característico deixa de ser o distanciamento entre os cilindros interno e a superfície nodal. Para $\mu < 0$ problema é então normalmente renormalizado e estudado utilizando-se métodos de expansão em série de Fourier[2].

Para avaliar a dependência de T_0 no parâmetro η , Taylor deduziu a seguinte fórmula

$$T_0 = 1708 \left[1 + 0.652 \frac{1 - \mu}{1 + \mu} (1 - \eta) \right] \quad (79)$$

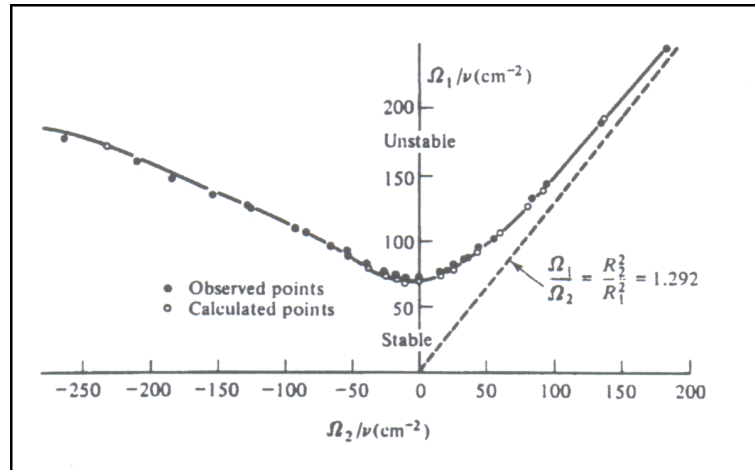


Figura 5.1: Curva de estabilidade para um escoamento entre cilindros concêntricos $R_1 = 3.55$ cm, $R_2 = 4.035$ cm.

e $a = 3.12$, $0 \leq \mu \leq 1$, $1 - \eta \ll 1$.

Embora Taylor tenha considerado em sua análise teórica que as perturbações fossem axissimétricas, ele observou em seu experimento que perturbações mais gerais também acometiam o escoamento. Ele notou que, sendo determinadas velocidades do escoamento atingidas, os vórtices axissimétricos se tornavam ondulados quebrando a seguir. Este fenômeno foi posteriormente estudado por vários experimentalistas recebendo em 1961 um tratamento matemático formal por Di Prima[13]. Basicamente conclui-se que para μ entre 0.0 e 0.5 as perturbações tri-dimensionais são apenas um pouco menos instáveis que as axissimétricas. Quando μ atinge o valor -0.78 as perturbações mais instáveis deixam de ser axissimétricas.

Terminamos este capítulo apresentando a figura 7 onde a curva de estabilidade neutra predita por Taylor é comparada com seus dados experimentais para vários μ 's e $\eta = 0.8$. Como visto, a concordância é impressionantemente boa.

Capítulo 6

Soluções Assintóticas de Orr-Sommerfeld

Tentaremos nesta seção mostrar como certas técnicas matemáticas podem ser utilizadas para se obter soluções analíticas aproximadas para as equações de Orr-Sommerfeld. Estas técnicas são de grande valia pois propiciam uma maneira simples de se obter resultados numéricos, além de trazerem um maior entendimento da estrutura do problema.

Em essência, a teoria busca obter aproximações locais para as várias regiões do escoamento, combinando-as depois apropriadamente para obter uma solução global. Na região externa do escoamento, o natural seria então fazermos $\delta \rightarrow 0$, $\delta = O(ikRu'_0)^{-1}$, obtendo então

$$(\bar{u} - c)(\phi'' - k^2\phi) - u''\phi = 0, \quad (80)$$

a equação de Rayleigh.

Esta equação é singular no ponto crítico y_c enquanto a equação original é retangular neste mesmo ponto. Este caráter singular da equação 80 constitui uma grande fonte de dificuldades na construção de aproximações assintóticas para soluções da equação de Orr-Sommerfeld.

Nosso objetivo é procurar soluções de (80) com a forma

$$\phi = \sum_n \delta^n \phi_n. \quad (81)$$

Estas soluções devem descrever o escoamento tanto nas vizinhanças do ponto crítico, como também em regiões adjacentes a superfícies sólidas. Concluimos que existem regiões do escoamento onde os termos viscosos devem ser significativos mesmo a altos números de Reynolds.

Para investigarmos a camada crítica, introduzimos as seguintes variáveis “internas”,

$$\eta = \frac{(y - y_c)}{\delta^{1/3}} \quad \text{e} \quad \chi(\eta) = \phi(y). \quad (82)$$

A substituição destas variáveis na equação de Orr-Sommerfeld nos fornece

$$\chi^{iv} - i\bar{u}'_c \eta \chi'' = i\delta^{1/3} u''_c \left(\frac{\eta^2 \chi''}{2} - \chi \right) + \text{ord}(\delta^{2/3}). \quad (83)$$

A equação acima foi obtida expandindo-se \bar{u}'' e $\bar{u} - c$ em série de Taylor ao redor do ponto y_c e obrigando-se o termo viscoso de derivada mais alta a ter a ordem de grandeza do termo de inércia de derivada mais alta, isto é, fazendo-se

$$\bar{u}'_c(y - y_c)\phi'' = ord \left[\frac{1}{(ikR)}\phi^{iv} \right] \quad (84a)$$

$$\delta^{1/3} \frac{\chi''}{\delta^{2/3}} = ord \left[\delta \frac{\chi^{iv}}{\delta^{4/3}} \right] \quad (84b)$$

Por outro lado, sabemos que perto da parede existe uma região de espessura $ord(\delta^{1/2})$, a camada limite, onde os termos viscosos devem ser dominantes para que a condição de não deslizamento seja satisfeita.

Na linguagem de estabilidade hidrodinâmica, estas duas regiões onde os efeitos viscosos são importantes, a região do ponto crítico e a região da parede, são chamadas respectivamente de regiões interna e externa. Precisamos agora saber em que condições geométricas estas duas regiões se encontram, de modo que tenhamos uma das duas situações mostradas abaixo.

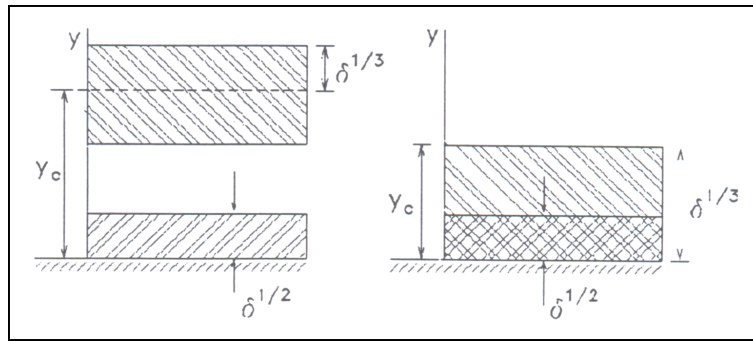


Figura 6.1: Estrutura do escoamento nas vizinhanças de um ponto crítico.

Mostra-se na Ref. [2] que ao longo do ramo superior da curva de estabilidade marginal as duas regiões permanecem bem separadas, mas que no ramo inferior elas se juntam dando origem a uma única região viscosa.

No que se segue, consideremos que a situação 1, regiões separadas, é a ocorrente. Podemos então junto à parede assumir que $u = 0$ e a equação de Orr-Sommerfeld se reduz a

$$(ikR)^{-1}\phi^{iv} = -c\phi'', \quad (85)$$

cujas solução é

$$\phi_\alpha(u) = Ae^{-(y-y_1)(kRc)^{1/2}e^{-\pi/4}}. \quad (86)$$

Substituição desta expressão na relação de autovalores (Ref. [2]) nos fornece uma assíntota para o ramo superior da curva de estabilidade.

Uma solução aproximada para a região do ponto y_c pode ser obtida fazendo-se

$$\chi = \sum_n \delta^{1/3} \chi_n. \quad (87)$$

Grupando os termos de mesma ordem, verificamos que χ_0 satisfaz a Eq. (83) com seu lado direito igual a zero. Esta equação é exatamente a equação de Airy cuja solução pode ser encontrada em qualquer livro de cálculo.

Tendo obtido soluções aproximadas para as duas regiões viscosas, precisamos agora combiná-las adequadamente com as soluções potenciais para obter uma solução que valha sobre todo o domínio. Isto é feito na literatura inicialmente aplicando-se o método de Frobenius à equação de Rayleigh e obtendo soluções analíticas que contém termos polinomiais e termos logarítmicos. Utilizando o “princípio de combinação”, todas as soluções são a seguir combinadas, providenciando uma solução válida para todo o domínio.

Capítulo 7

Introdução à Estabilidade Não-linear

Embora, desde as primeiras experiências em estabilidade hidrodinâmica por Reynolds, os efeitos não-lineares fossem reconhecidos como importantes no processo de transição, sua inclusão em teorias formais se mostrou muito difícil. Os primeiros sucessos na formulação de teorias não-lineares foram obtidas por Landau em 1944. Sua teoria desde então tem sido aperfeiçoada, mas as idéias básicas permanecem as mesmas.

Como visto na seção 2, estabilidade linear implica que uma vez as perturbações tenham começado a crescer, nada existe que possa amortecê-las. De fato, se o crescimento exponencial da amplitude é representado por $A = e^{st}$, $s = \sigma + i\omega$, então todas as perturbações são estáveis se $\sigma < 0$. Por outro lado, quando $R = R_c$, sabemos que existe um componente s_1 tal que $s_1 = \omega_1 i$ ($\sigma_1 = 0$). Quando $R > R_c$, $\sigma_1 > 0$ mas $\sigma < 0$ para todos os outros componentes. Como o componente mais instável é normalmente dado por

$$\sigma_1 = K(R - R_c) + O((R - R_c)^2), \quad R \rightarrow R_c, \quad (88)$$

onde K é uma constante positiva, então se $0 < (R - R_c) \ll 1$ o componente mais instável crescerá indefinidamente enquanto todos os outros componentes decairão para zero.

Para modificar este quadro, Landau propôs a seguinte expressão para descrever o modo de crescimento do componente mais instável,

$$\frac{d}{dt}|A|^2 = 2\sigma|A|^2 - l|A|^4, \quad (89)$$

onde l é uma constante, chamada a constante de Landau. A equação (89) claramente se reduz à equação dada pela teoria linear quando $l \rightarrow 0$.

Re-escrevendo a equação acima como

$$\frac{d}{dt}|A|^{-2} + 2\sigma|A|^{-2} = l, \quad (90)$$

obtemos a seguinte solução

$$|A|^{-2} = \frac{l}{2\sigma} + \left[A_0^{-2} - \frac{l}{2\sigma} \right] e^{-2\sigma t}, \quad (91)$$

se $\sigma \neq 0$, e onde A_0 denota o valor inicial de $|A|$. Logo,

$$|A|^2 = \frac{A_0^2}{\left[\frac{l}{2\sigma} A_0^2 + \left[1 - \frac{l}{2\sigma} A_0^2 \right] e^{-2\sigma t} \right]}. \quad (92)$$

Analisemos agora o caso em que $l > 0$ e $R > R_c$. Nesta situação, a equação (92) nos fornece $|A| \sim A_0 e^{\sigma t}$ se $t \rightarrow -\infty$; entretanto, quando $t \rightarrow \infty$ temos

$$|A| \rightarrow A_e = \left(\frac{2\sigma}{l} \right)^{1/2}, \quad (93)$$

para qualquer que seja o valor de A_0 .

Este tipo de estabilidade é chamada estabilidade supercrítica. O escoamento é linearmente instável para $R > R_c$, mas, de acordo com a Eq. (89), ele é amortecido evoluindo eventualmente para um novo estado laminar. Este novo estado é independente das condições iniciais exceto pela fase da amplitude complexa A do componente dominante. Das Eq. (93) e (88) temos ainda

$$A_e \sim \left(2K \frac{(R - R_c)}{l} \right)^{1/2}, \quad R \rightarrow R_c. \quad (94)$$

Uma evolução típica de $|A|$ com o tempo é mostrada na Fig. 9 abaixo. Ainda nesta figura é mostrada a dependência da amplitude de equilíbrio (Eqs. 93,94) com o número de Reynolds.

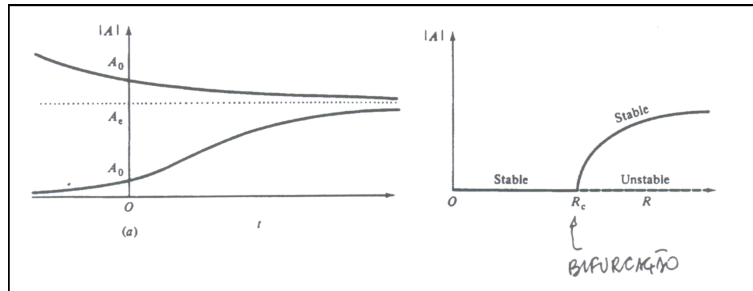


Figura 7.1: Estabilidade supercrítica.

O desvio da curva de soluções em $R = R_c$ nas figuras anteriores é chamado de bifurcação das soluções. A equação (89) implica que a solução $|A| = 0$ é estável para $R < R_c$ e instável para $R > R_c$. A solução $|A| = A_e$ é a solução estável para $R > R_c$.

No caso $l > 0$, $R < R_c$ a equação (89) concorda com a teoria linear fornecendo $|A| \sim A_0 e^{\sigma t}$, $t \rightarrow 0$ e $A_0 \rightarrow 0$. Neste caso, o termo $-l|A|^4$ permanece sempre pequeno por todo o tempo se ele é inicialmente pequeno.

O caso $l < 0$ também deve ser considerado pois é característico de escoamentos em canais. Se além disso tomarmos, $R > R_c$, ambos os termos no lado direito da equação (89) são positivos e então $|A|$ cresce super-exponencialmente. Realmente, a equação (92) afirma que após um tempo finito $t = (2\sigma)^{-1} \ln(1 + 2\sigma/(-lA_0^2))$, a amplitude $|A|$ torna-se infinita. Desde que este comportamento não ocorre na prática, constatamos a necessidade de se adicionar mais termos ao lado direito da Eq. (89).

Agora, se $l < 0$ e $R < R_c$, então $\sigma < 0$, e os dois termos no lado direito da Eq. (89) possuem sinais contrários, a ordem de grandeza entre eles dependendo da ordem de grandeza

entre $|A|$ e A_e . De fato, se $A_0 < A_e$ então

$$|A| \sim \frac{A_e e^{\sigma t}}{(A_e^2 - A_0^2)^{1/2}} \quad t \rightarrow \infty$$

e se $A_0 > A_e$ então

$$|A| \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad t \rightarrow (-2\sigma)^{-1} \ln \left(\frac{A_0^2}{A_0^2 - A_e^2} \right)$$

com a solução explodindo em um tempo finito. Este comportamento não realístico pode também ser evitado se novos termos forem adicionados ao lado direito de (89). Este tipo de instabilidade é chamado de instabilidade subcrítica. Evoluções características de $|A|$ com o tempo e com o número de Reynolds são mostradas abaixo.

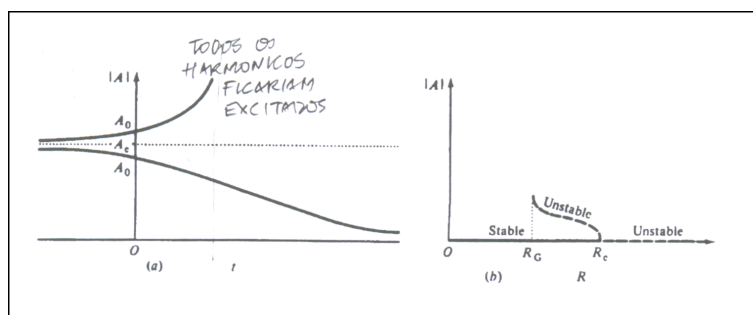


Figura 7.2: Instabilidade subcrítica.

O ponto R_G foi incluído na figura acima pois Landau sugeriu que deveria existir um valor menor que o número de Reynolds, abaixo do qual soluções bifurcadas não existiriam.

As idéias acima introduzidas por Landau não tiveram um impacto imediato; além disso, ele não mostrou como as equações da amplitude poderiam ter sido deduzidas diretamente das equações de Navier-Stokes. Os primeiros a fazê-lo foram Stuart e Watson em 1960. Desde então vários pesquisadores têm deduzido formas apropriadas da equação de Landau para vários tipos de escoamentos de interesse.

Capítulo 8

Estabilidade e Transição em Camadas Limite

Os primeiros esforços devotados no século anterior ao entendimento do fenômeno da transição hidrodinâmica foram direcionados, devido à sua importância tecnológica, ao estudo do escoamento em canais e em camadas limite. Infelizmente, como vimos nas seções anteriores, aconteceu das soluções destes problemas se mostrarem de difícil obtenção, sendo a primeira previsão quantitativa do processo de transição obtida para a configuração bastante diferente de dois cilindros concêntricos (seção 5). Em sua análise deste problema, Taylor utilizou a teoria das pequenas perturbações para relacionar o número de onda das perturbações e um grupo adimensional, o número de Taylor, a um parâmetro de estabilidade (seção 5). A excelente concordância da análise teórica de Taylor com seus dados experimentais, consagrou definitivamente a teoria das pequenas perturbações. Em sua interpretação clássica, os resultados desta teoria dizem que se o número de Taylor atingir um certo valor grande o suficiente e, se um tempo suficientemente longo decorrer, pequenas amplificações que se originarem no escoamento se amplificarão levando o escoamento a um novo estado possivelmente turbulento.

Idéias semelhantes aplicadas à camada limite conduziram a um complexo sistema de equações que foi apenas resolvido em 1933 por Schlichting. Os resultados desta análise foram interpretados do mesmo modo que os resultados obtidos por Taylor. Abaixo de um certo valor do número de Reynolds todas as perturbações seriam amortecidas, enquanto acima deste valor algumas perturbações amplificariam sendo portanto instáveis.

Naquela época, nenhum experimento com o grau de requinte e de precisão necessários se encontrava disponível para que certas ondas previstas pela teoria pudessem ser detectadas. A existência destas ondas, hoje chamadas de ondas de Tollmien-Schlichting, foi aparentemente confirmada apenas em 1947 em um importante experimento realizado por Schubauer and Skamstad. Neste experimento, ondas foram artificialmente excitadas na camada limite, crescendo em amplitude se o número de Reynolds local baseado na espessura da camada limite fosse grande o suficiente. Comparação da evolução espacial da amplitude observada nos experimentos com a evolução temporal predita pela teoria foi feita utilizando-se a relação

$$\frac{d}{dt}|A| = \frac{d}{dx}|A|\dot{x} \quad (\text{velocidade de onda});$$

infelizmente, esta expressão não tem qualquer fundamento como veremos adiante.

Ondas artificialmente geradas na camada limite podem melhor ser caracterizadas tratando-as como ondas espaciais da forma

$$\psi(x, y, t) = \phi(y)e^{i(kx - \omega t)},$$

ω real, $k = k_r + ik_i$ complexo.

O desenvolvimento da onda, corrente abaixo, será então dado por (Gaster, 1974)

$$\phi(y)e^{i\left[\int_{x_0}^x k_i dx - \omega t\right]}$$

onde ϕ e k_i variam suavemente com x .

Os modos espacial e temporal podem ser relacionados através da relação (Gaster, 1962)

$$k_i = -\omega_i \left[\frac{\partial k}{\partial \omega} \right]_r,$$

onde $\partial k / \partial \omega$ é a velocidade de grupo. Logo, a relação utilizada por Schubauer and Skamstad para comparar seus dados experimentais com a teoria de Schlichting estava incorreta pois na camada limite a velocidade de fase e a velocidade de grupo diferem por mais de 10%. Além disso, existem também algumas diferenças nos dois modos de descrever o sistema de ondas.

Quando medidas são realizadas em camadas limite sobre placas planas, observa-se que nas vizinhanças do ponto teórico onde o número de Reynolds é crítico nada espetacular acontece. Apenas a grandes distâncias corrente abaixo as ondas de Tollmien-Schlichting aparecem. Isto ocorre porque as ondas observadas em tais experimentos foram criadas por algum tipo de perturbação externa. Então, embora estas ondas se amplifiquem com a distância na direção do escoamento, isto não constitui uma instabilidade em seu sentido verdadeiro. A camada limite é um sistema aberto que responde a estímulos externos mas não é instável. Um sistema fechado do tipo da célula de Taylor, entretanto, exhibe instabilidade temporal “verdadeira”. Enquanto em um sistema fechado qualquer pequena perturbação conduz à instabilidade depois que um determinado parâmetro atinge um certo valor, num sistema aberto as taxas de crescimento dependem do nível de excitação externa. A “receptividade” de um escoamento define sua sensibilidade a estímulos externos.

A questão da conveniência de se tratar um problema como sendo de estabilidade espacial ou temporal é de difícil solução. Para obtermos alguma indicação da provável resposta desta questão examinaremos como diferentes sistemas respondem a estímulos externos. Por exemplo, para uma camada de mistura simples, as perturbações evoluirão como mostrado na Fig. 11. Em qualquer ponto do espaço o sinal eventualmente decairá para zero após um tempo suficiente tenha decorrido. Para a camada de mistura mostrada na Fig. 12, entretanto, uma vez que um ponto no espaço tenha sido perturbado, este assim o permanecerá por todo o tempo.

A primeira situação é bastante parecida com aquela na camada limite. Uma vez que a perturbação externa termine, esta será convectada corrente abaixo resultando num estado de quietude (baixos ruídos). No segundo exemplo, observamos uma instabilidade genuína. Se o nível de excitação externa atingir um certo valor, esta eventualmente permeará todo

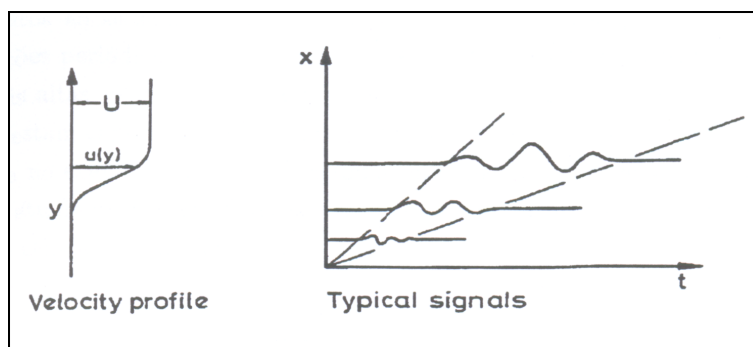


Figura 8.1: A evolução de uma perturbação em uma camada de mistura simples.

o escoamento originando um regime não-linear em todo o espaço. Este sistema é parecido com o sistema fechado de Taylor, dando origem ao que é chamada uma instabilidade absoluta.

A camada limite sobre uma placa é convectivamente instável, necessitando de um nível constante de excitação para que ondas apareçam. Condições para que o sistema evolua para um regime turbulento dependem portanto do nível de estímulo externo presente.

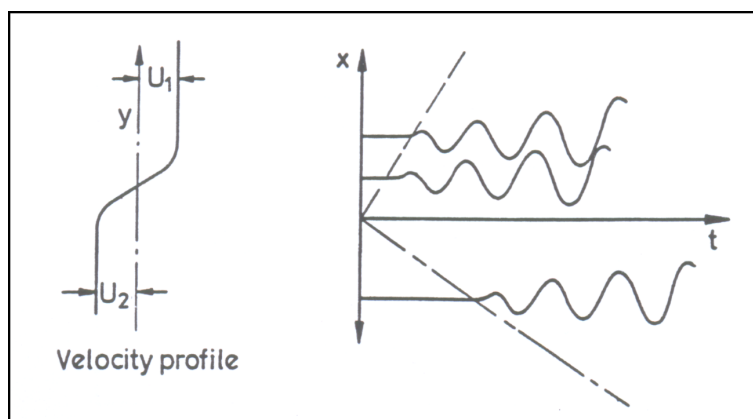


Figura 8.2: A evolução de uma perturbação numa camada de mistura.

É interessante observar aqui que sistemas abertos respondem de modo diferente a excitações diferentes. Nas duas figuras seguintes dois tipos diferentes de excitação são impostos ao sistema: perturbações periódicas e perturbações pulsáteis. Com as perturbações periódicas, efeitos não lineares podem apenas ser percebidos para amplitudes mais altas. Com perturbações pulsáteis, entretanto, não linearidades claramente se manifestam com níveis de amplitude correspondentes a apenas um quarto daquela necessária no exemplo anterior. Concluimos que perturbações aleatórias originadas na natureza atuarão sobre um dado escoamento distintamente de ondas periódicas artificialmente criadas em um laboratório.

A tarefa com que nos deparamos em engenharia é aquela de fazer previsões confiáveis sobre a posição do ponto de transição. Se o escoamento sustenta instabilidades “verda-

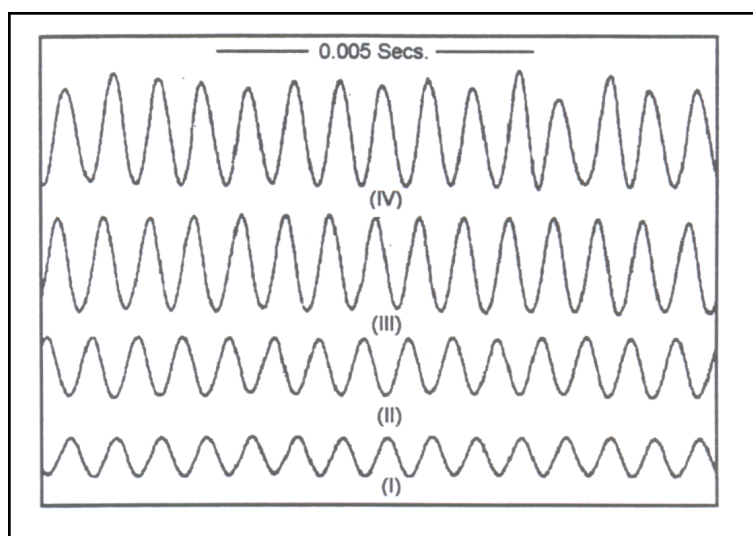


Figura 8.3: Resposta de um sistema aberto a perturbações periódicas.

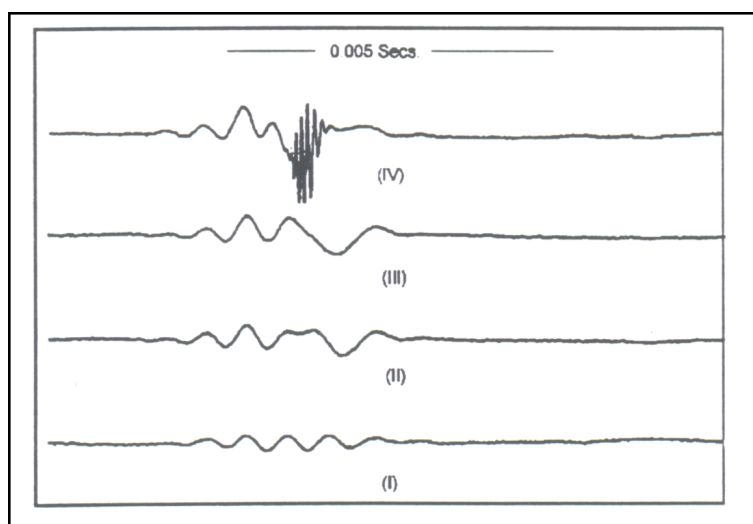


Figura 8.4: Resposta de um sistema aberto a perturbações pulsáteis.

deiras”, como as que ocorrem em sistemas fechados, podemos estar razoavelmente certos que a transição ocorrerá a baixos números de Reynolds, próximos ao ponto onde as instabilidades se iniciam. Se o escoamento sustenta instabilidades “convectivas” a situação é muito mais incerta. Aqui, embora possamos definir com certa exatidão o ponto em que as instabilidades se iniciam, é difícil calcular onde a transição realmente acontece. Predições da evolução do regime não-linear estão no momento longe de serem atingidas, dificultando a elaboração de teorias consistentes. Atualmente, os esquemas principais de previsão do ponto de transição envolvem o cálculo integral das amplificações a partir do ponto neutro. Aparentemente, após esta quantidade ser excedida, a transição seguirá. Infelizmente, estas técnicas desprezam a importante fase não-linear da evolução e o tipo de perturbação à qual o sistema está sujeito.

Bibliografia

- [1] Batchelor, G. K.; An introduction to fluid dynamics, C.U.P., 1967
- [2] Drazin, P. G. and Reid, W. H.; Hydrodynamic stability, C.U.P., 1981
- [3] Orr, W. M. F., The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous fluid, Proc. Roy. Irish Acad., A 27, 9–68, and 69–138, 1907
- [4] Sommerfeld, A.; Ein beitrage zur hydrodynamischen erklarung der turbulenten Fluesigkeitsbewegungen, Proc. 4th Int. Congress Mathematics, Rome, 116–124, 1908
- [5] Tollmien, W.; General instability criterion of laminar velocity distributions, Tech. Memor. Nat. Adv. Comm. Aero. No 792, 1936
- [6] Squire, H. B.; On the stability of three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls, Proc. London Roy. Soc., A 142, 621–8, 1933
- [7] Kelvin, Lord; Hydrokinetic solutions and observations, Phil. Mag., 42, 26–77, 1871
- [8] Helmholtz, H. von.; On the discontinuous movements of fluids, Phil. Mag., 36, 337–46, 1868
- [9] Taylor, G. I.; Stability of a viscous fluid contained between two rotating cylinders, Phil. Trans. London Roy. Soc., A 223, 289–343, 1923
- [10] Couette, M.; Etudes sur le frottement des liquides, Ann. Chim. Phys., 21, 433–510, 1890
- [11] Mallock, A.; Experiments on fluid viscosity, Phil. Trans. London Roy. Soc, A 187, 41–56, 1896
- [12] Rayleigh, Lord; On the stability, or instability, of certain fluid motion, Proc. London Math. Soc., 11, 57–70
- [13] Di Prima, R. C.; Stability of non-rotationally symmetric disturbances for viscous flow between rotating cylinders, Phys. Fluids, 4, 751–55, 1961
- [14] Landau, L. D.; On the problem of turbulence, C. R. Acad. Sci. URSS, 44, 311–314, 1944
- [15] Stuart, J. T.; On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part I: The basic behaviour in plane Couette flow, J. Fluid Mech., 9, 353–70, 1960
- [16] Watson, J.; On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part I: The development of a solution for plane Poiseuille flow and for plane Couette flow, J. Fluid Mech., 9, 371–89, 1960

- [17] Schubauer, G. B. and Skamstad, H. K.; Laminar boundary layer oscillations and transition on a flat plate, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 38, 251–92, 1947
- [18] Gaster, M.; On the effects of boundary layer growth on flow stability, *J. Fluid Mech.*, 66, 465, 1974
- [19] Gaster, M.; A note on the relation between temporally-increasing and spacially-increasing disturbances in hydrodynamic stability, *J. Fluid Mech.*, 14, 222–24, 1962