Turbulência

Atila P. Silva Freire
Programa de Engenharia Mecânica
COPPE/UFRJ

Anderson Ilha
Diretoria de Metrologia Científica e Industrial
Inmetro

Marcelo J. Colaço
Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais
Instituto Militar de Engenharia

Editores

ABCM – Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica
COPPE/UFRJ – Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia
IME – Instituto Militar de Engenharia

Coleção Cadernos de Turbulência
Turbulência, Volume 5, Tomo 1.

5^a Escola de Primavera em Transição e Turbulência
Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro
25 a 29 de setembro de 2006

Editores

Atila P. Silva Freire, *Programa de Engenharia Mecânica*, COPPE/UFRJ
Anderson Ilha, *Diretoria de Metrologia Científica e Industrial*, Inmetro
Marcelo J. Colaço, *Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais, IME*

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Processos Técnicos da
Biblioteca do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Escola de Primavera em Transição e Turbulência (5.:2006: Rio de Janeiro, RJ)
Turbulência: Anais da V Escola de Primavera em Transição e Turbulência,
Rio de Janeiro, 25 a 29 de setembro de 2006 /editores Atila P. Silva Freire,
Anderson Ilha e Marcelo J. Colaço. Rio de Janeiro: ABCM, 2006.
XVI, 466 p.; 23,5 cm – (Coleção Cadernos de Turbulência. Turbulência, V. 5, Tomo 1)
Inclui bibliografias
1. Turbulência. 2. Mecânica dos fluidos. 3. Fenômenos de transporte.
I. Freire, Atila P. Silva II. II. V EPTT (5.:2006: Rio de Janeiro, RJ).
III. Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica. IV. Título. II.
Série
629.1332
E74t
ISBN (10 dígitos): 85-85769-24-6
ISBN (13 dígitos): 978-85-85769-24-6

Documento preparado pelos Editores em LaTeX.
Impresso no Brasil pela Gráfica Graffito.

ISBN 85-85769-24-6
9 788585 769246

Conteúdo

Prefácio

O ato quase solene de escrever o Prefácio de um livro necessariamente provoca em seu escritor momentos de profunda reflexão. Afinal, o objeto de tanta dedicação intelectual se mostra por completo, desnudo, em suas virtudes e defeitos.

Em sua forma definitiva, que não pode ser modificada, o livro deveria não apenas transmitir aos seus leitores a letra fria do rigor de suas construções teóricas, mas, principalmente, o espírito de toda a sofisticação intelectual que se pretende alcançar.

O presente texto pertence a uma já extensa e exitosa família. A série de escolas dedicadas exclusivamente à investigação da turbulência de fluidos deu origem a outros textos que marcaram época. A manutenção da alta estirpe, pois, poderia causar sérios embaraços a novas contribuições.

A Turbulência é uma matéria com sabidas dificuldades conceituais, que exige de seus militantes especializações múltiplas e sofisticadas. Esse texto, sem dúvida, preencherá lacunas importantes no arcabouço de métodos e técnicas que se pretendem disponíveis para um ataque consistente às dificuldades de natureza teóricas e práticas impostas pela Turbulência àqueles que a ambicionam assaltar. Temas do mais alto grau de complexidade e importância são dissecados em dois tomos que formam uma obra com doze capítulos. Um julgamento honesto dos Editores classifica a presente contribuição como da maior relevância tanto para iniciantes como para pesquisadores experientes no assunto.

A dedicação dos autores e seu compromisso com o resultado final dessa jornada foram da maior sensibilidade. Os Editores, sinceramente, esperam que os leitores reconheçam as muitas horas de trabalho abnegado que permitiram a existência desta obra.

Finalmente, talvez devêssemos agora nos inquirir sobre o propósito de tudo isso. Por que trabalhar com tamanho afinco para a existência dessa obra? A resposta é simples e singela: para a construção de uma sociedade melhor. Um objetivo que nos tem sido caro e que nos possibilitou encontrar aliados importantes na ABCM, na FAPERJ e no CNPq. Este projeto é, sobretudo, uma iniciativa feliz da ABCM e do Pronex “Núcleo de Excelência em Turbulência” um projeto apoiado pela FAPERJ e pelo CNPq (Processo No E-26/171.198/2003).

Os Editores

Agradecimentos

Relação de Autores

Capítulo 1 **página 1**

Fernando Pereira Duda
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 2 **página 17**

Fábio Ramos
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Ricardo Rosa
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Roger Temam
Department of Mathematics
Indiana University, Bloomington
IN 47405-5701
USA

Capítulo 3 **página 37**

Luca Moriconi
Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 4 **página 99**

Juliana B. R. Loureiro
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

José Luiz da Silva Neto
Programa de Engenharia Elétrica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 5 **página 173**

Juliana B. R. Loureiro
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Fernando T. Pinho
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade do Porto
Porto 4200-465
Portugal

Capítulo 6 **página 253**

Daniel Cruz
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade Federal do Pará
Belém 66075-970 Brasil

Fernando Pinho
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade do Porto
Porto 4200-465
Portugal

Capítulo 7 **página 341**

José Luiz Fontoura
Depto. de Engenharia Mecânica
Universidade de Brasília
Brasília, D.F. 70910-900
Brasil

Capítulo 8 **página 405**

Alexandre T. P. Alho
Depto. Engenharia Naval e Oceânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Anderson Ilha
Diretoria de Metrologia Científica
Instituto Nacional de Metrologia
Duque de Caxias, 22050-050
Rio de Janeiro Brasil

Capítulo 1

Mecânica do Contínuo e Turbulência

1.1 Introdução

Podemos definir a mecânica do contínuo como a disciplina que trata da formulação de modelos matemáticos para descrição de fenômenos envolvendo o movimento de corpos materiais contínuos. A mecânica do contínuo é dividida em três partes:

i) Cinemática, onde são introduzidos os elementos necessários para descrição e estudo do movimento;

ii) Dinâmica, onde são introduzidas as Leis Básicas, em geral na forma de leis de balanço, que são válidas para qualquer material;

iii) Teoria constitutiva, onde são definidas classes específicas de materiais através de equações constitutivas, as quais devem ser consistentes com as leis básicas assim como invariantes com respeito a mudanças de observador.

A mecânica do contínuo não apenas unifica as teorias clássicas de mecânica dos sólidos e do fluidos mas também fornece os elementos necessários para generalização das mesmas. Isso se deve em grande parte aos trabalhos pioneiros de mecanicistas como Truesdell, Noll, Ericksen, Toupin, Coleman, Rivlin, entre outros, os quais transformaram a mecânica do contínuo em um formalismo para obtenção de modelos contínuos em geral.

A mecânica do contínuo pode ser de grande utilidade para o estudo da turbulência em diversas situações. Do ponto de vista cinemático, por exemplo, existe um crescente reconhecimento da importância do acompanhamento do movimento de partículas (enfoque material), incluido o Lagrangeano, para o entendimento de importantes aspectos da turbulência. No entanto, o enfoque material é raramente mencionado nos livros textos de mecânica dos fluidos, exceto pela idéia de derivada material, ao contrário do que ocorre nos livros básicos de mecânica do contínuo (ver por exemplo Truesdell e Toupin, 1960; Truesdell, 1994; Gurtin, 1981). Além disso, grande parte da literatura em turbulência adota o enfoque Euleriano, o que se deve em grande parte as dificuldades de medição inerentes ao enfoque material (Young, 2002). Vale ressaltar que essa barreira está sendo superada graças aos avanços nas técnicas experimentais e de simulação computacional, tornando acessíveis dados necessários ao enfoque material (Ooi *et al.*, 1996; Luthi *et al.*, 2005).

Ferramentas desenvolvidas no contexto da mecânica do contínuo também são bastante utilizadas para formulação de modelos para turbulência. No caso de modelos baseados na média de Reynolds ou filtros, a idéia principal consiste na exploração da analogia entre o problema de fechamento em turbulência com o problema de equações constitutivas em mecânica do contínuo (ver, por exemplo, Speziale 1991; Gatski, 2004; Kosovic, 1997; Hutter e Jhonk, 2004; Huang, 2004), conforme proposto originalmente por Rivlin (1957). O formalismo da mecânica do contínuo tem sido usado também para formulação de modelos estruturais para a turbulência, nos quais graus de liberdades adicionais são introduzidos com o intuito de representar de algum modo a estrutura da turbulência (Marshall, 1995; Eringen, 2005; Heillo, 2004; Nikolaevskiy, 2003).

Este artigo tem como objetivo uma apresentação sumária de elementos de cinemática seguindo a abordagem padrão da mecânica do contínuo. A idéia é fornecer elementos visando aprimoramento do entendimento e interpretação de importantes quantidades cinemáticas, incluindo considerações sobre os mecanismos de convecção e difusão da vorticidade e sobre o fundamental e polêmico conceito de vórtice.

O material aqui apresentado é fortemente baseado em Truesdell (1954), Truesdell e Toupin (1960) e Truesdell (1991). A notação utilizada é a padrão em mecânica do contínuo (Gurtin, 1981).

1.2 Descrição do movimento

Consideremos um corpo contínuo tridimensional $\mathcal{B}$ cujo elementos chamaremos de partículas ou pontos materiais. Uma configuração κ de $\mathcal{B}$ é um mapeamento, inversível e suave, que leva $\mathcal{B}$ na região $\mathcal{B}_\kappa$ do espaço Euclideano tridimensional $\mathcal{E}$. Deste modo, $\mathbf{X} = \kappa(X)$ é o lugar ocupado pela partícula X na configuração κ, enquanto $X = \kappa^{-1}(\mathbf{X})$ é a partícula que na configuração κ ocupa o lugar $\mathbf{X}$. Aqui κ^{-1} representa o mapeamento inverso de κ. Denotaremos por $\mathcal{B}_\kappa$ o formato assumido pelo corpo $\mathcal{B}$ na configuração κ.

Um observador $\oint$ descreve o movimento de $\mathcal{B}$ por uma uma família χ de configurações parametrizada pelo tempo. Em $\mathbf{x} = \chi(X, t)$, $\mathbf{x}$ é o lugar ocupado pela partícula X no tempo t. Já em $X = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$, X representa a partícula que no instante t ocupa o lugar $\mathbf{x}$. Denotaremos por $\mathcal{B}_t := \chi(\mathcal{B}, t)$ o formato assumido por $\mathcal{B}$ no instante t durante o movimento χ. Chamaremos de $\chi(\cdot, 0)$ de configuração inicial e $\chi(\cdot, t)$ de configuração atual quando t for o instante atual.

É conveniente descrever o movimento χ em relação a um configuração de referência κ. Neste caso, o movimento relativo, ou simplesmente deformação, é definido pela aplicação inversível

$$\chi_\kappa(\mathbf{X}, t) := \chi(\kappa^{-1}(\mathbf{X}, t)) \tag{1.1}$$

para todo $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_\kappa$ e instante de tempo t. Em $\mathbf{x} = \chi_\kappa(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{x}$ representa o lugar ocupado no instante t pela partícula que na configuração de referência κ ocupa o lugar $\mathbf{X}$. Já em $\mathbf{X} = \chi_\kappa^{-1}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{X}$ representa o lugar ocupado na configuração de referência pela partícula que no instante t ocupa o lugar $\mathbf{x}$.

Como configuração de referência podemos escolher, por exemplo, a configuração ocupada pelo corpo durante o movimento em um instante qualquer. Em particular, quando a configuração inicial ocupada pelo corpo é escolhida como de referência temos a chamada descrição Lagrangeana.

A velocidade $\mathbf{v}$ e aceleração $\mathbf{a}$ da partícula X no instante t no movimento χ são definidas como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_M(X, t) := \frac{\partial \chi}{\partial t}(X, t), \qquad \mathbf{a} = \mathbf{a}_M(X, t) := \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(X, t), \tag{1.2}$$

onde $\mathbf{v}_M$ ($\mathbf{a}_M$) é também chamada de descrição substancial ou material da velocidade (aceleração). Em relação a uma configuração de referência fixa κ, a velocidade pode ser escrita como uma função da posição $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_\kappa$ e do instante t como

$$\mathbf{v}_R(\mathbf{X}, t) := \mathbf{v}_M(\kappa^{-1}(\mathbf{X}), t) = \frac{\partial \chi_\kappa}{\partial t}(\mathbf{X}, t), \tag{1.3}$$

que é chamada de descrição referencial da velocidade. Em particular, se a configuração inicial ocupada pelo corpo durante o movimento for escolhida como configuração de referência, i.e., $\kappa = \chi(\cdot, 0)$, $\mathbf{v}_R$ é chamada de descrição Lagrangeana da velocidade. Do mesmo modo, a velocidade pode ser descrita em termos do lugar $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ e do tempo t através da função

$$\mathbf{v}_E(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_M(\chi^{-1}(\mathbf{X}, t), t), \tag{1.4}$$

chamada de descrição espacial ou Euleriana do campo de velocidades. O vetor $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}, t)$ é a velocidade da partícula que no instante t ocupar o lugar $\mathbf{x}$.

Mais geralmente, para qualquer grandeza Φ pode ser adotada qualquer uma das descrições material Φ_M, referencial Φ_R ou espacial Φ_E, onde

$$\Phi = \Phi_M(X, t) = \Phi_R(\mathbf{X}, t) = \Phi_E(\mathbf{x}, t) \tag{1.5}$$

nos pontos correspondentes. Denotaremos por $\dot{\Phi}$, Φ', $\nabla\Phi$ e $\operatorname{grad}\Phi$ as seguintes derivadas da grandeza Φ:

$$\dot{\Phi} := \frac{\partial \Phi_M}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_R}{\partial t}, \quad \Phi' := \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}, \quad \nabla\Phi := \frac{\partial \Phi_R}{\partial \mathbf{X}}, \quad \operatorname{grad}\Phi := \frac{\partial \Phi_E}{\partial \mathbf{x}}.$$

A derivada $\dot{\Phi}$ é chamada de derivada material ou substantiva da grandeza Φ. Observe que a derivada material pode ser calculada usando a descrição referencial.

Pela regra da cadeia seguem as seguintes relações

$$\dot{\Phi} = \dot{\Phi}' + (\operatorname{grad}\Phi)\cdot\mathbf{v}\,, \qquad \nabla\Phi = \mathbf{F}^{\top}\operatorname{grad}\Phi \tag{1.6}$$

para um grandeza escalar, e

$$\dot{\Phi} = \dot{\Phi}' + (\operatorname{grad}\Phi)\mathbf{v}\,, \qquad \nabla\Phi = (\operatorname{grad}\Phi)\mathbf{F} \tag{1.7}$$

para uma grandeza vetorial, onde

$$\mathbf{F} := \nabla\chi_{\kappa} \tag{1.8}$$

é o tensor gradiente de deformação. Em particular,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}' + \mathbf{L}\mathbf{v}\,, \qquad \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\mathbf{F}\,, \qquad \ddot{\mathbf{F}} = \mathbf{J}\mathbf{F}\,, \tag{1.9}$$

onde

$$\mathbf{L} := \operatorname{grad}\mathbf{v}\,, \qquad \mathbf{J} := \operatorname{grad}\dot{\mathbf{v}} \tag{1.10}$$

são, respectivamente, os gradientes de velocidade e aceleração na descrição espacial. Segue das expressões acima a seguinte relação,

$$\mathbf{J} = \dot{\mathbf{L}} + \mathbf{L}^2\,. \tag{1.11}$$

1.3 Conjuntos materiais

Um conjunto móvel no espaço $\mathcal{C}(t)$ é chamado material se o mesmo for ocupado pelo mesmo conjunto de partículas durante o movimento, ou seja, $\mathcal{C}(t) = \chi(\mathcal{C}, t)$, para algum subconjunto fixo $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}$ ou, equivalentemente, $\mathcal{C}(t) = \chi_{\kappa}(\mathcal{C}_{\kappa}, t)$, para algum subconjunto fixo $\mathcal{C}_{\kappa}$ de $\mathcal{B}_{\kappa}$, onde κ é uma configuração de referência fixa. Em outras palavras, um conjunto espacial é chamado material quando o mesmo é transportado pelo movimento. Deste modo definimos linhas, superfícies e volumes materiais.

É importante estabelecer critérios que indiquem quando um certo conjunto móvel é material ou não. Para uma superfície móvel $\mathcal{S}(t)$ definida como superfície de nível zero de uma campo escalar $f(\cdot, t)$, ou seja,

$$\mathcal{S}(t) := \{\mathbf{x} \quad \text{tal que} \quad f(\mathbf{x}, t) = 0\}\,, \tag{1.12}$$

uma condição necessária e suficiente para que a mesma seja material é dada pelo Critério de Lagrange

$$\dot{f} = 0\,. \tag{1.13}$$

Outra questão importante consiste em determinar quando linhas tangentes a um certo campo de vetores são materiais. Um critério para que linhas tangentes ao campo de vetores $\mathbf{c}$ sejam materiais é dado pelo Critério de Helmholtz-Zorawski

$$(\dot{\mathbf{c}} - \mathbf{L}\mathbf{c}) \times \mathbf{c} = \mathbf{0}\,, \tag{1.14}$$

onde de agora e diantes $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ denota o produto vetorial dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$.

1.4 Gradiente de deformação, estiramento, cisalhamento e rotação

O gradiente de deformação $\mathbf{F}$ é uma quantidade fundamental para análise de propriedades locais de deformação, conforme discutiremos a seguir. Vale enfatizar que $\det \mathbf{F} \neq 0$ uma vez que χ_κ é inversível e que de agora em diante assumiremos que $\det \mathbf{F} > 0$.

Considere $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_\kappa$ e $\mathbf{x} = \chi_\kappa(\mathbf{X}, t)$ fixos. Por $\mathbf{X}$ passamos uma curva C parametrizada pelo parâmetro s tal que $C(0) = \mathbf{X}$, cujo vetor tangente em $\mathbf{X}$ é

$$\mathbf{p}_\kappa := \left.\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}s}(s)\right|_{s=0} . \tag{1.15}$$

Esta curva é deformada na curva $c := \chi_\kappa(C, t)$ cujo vetor tangente em $\mathbf{x}$ é dado por

$$\mathbf{p} := \left.\frac{\partial c}{\partial s}(s)\right|_{s=0} . \tag{1.16}$$

Pela regra da cadeia segue que

$$\mathbf{p} = \mathbf{F}\mathbf{p}_\kappa , \tag{1.17}$$

ou, em termos de elementos de linha,

$$\mathbf{dx} = \mathbf{F}\mathbf{dX} . \tag{1.18}$$

Em palavras, um elemento de linha $\mathbf{dX}$ em $\mathbf{X}$ é deformado no elemento de linha $\mathbf{dx}$ em $\mathbf{x}$.

O estiramento na direção $\mathbf{n} := \mathbf{p}_\kappa/|\mathbf{p}_\kappa|$, $\nu(\mathbf{n})$, é definido pela razão entre o comprimento $|\mathbf{dx}|$ e o comprimento $|\mathbf{dX}|$:

$$\nu(\mathbf{n}) := \frac{|\mathbf{dx}|}{|\mathbf{dX}|} = \frac{|\mathbf{p}|}{|\mathbf{p}_\kappa|} = \sqrt{\mathbf{C}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} , \tag{1.19}$$

onde $\mathbf{C} := \mathbf{F}^\top\mathbf{F}$ é o tensor de deformação de Cauchy. Considerando uma outra curva cujo vetor tangente $\mathbf{q}_\kappa$ em $\mathbf{X}$ é deformado no vetor $\mathbf{q} = \mathbf{F}\mathbf{q}_\kappa$ em $\mathbf{x}$, definimos cisalhamento nas direções $\mathbf{n}$ e $\mathbf{m} := \mathbf{q}_\kappa/|\mathbf{q}_\kappa|$ como sendo a diferença entre o ângulo formado por $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ e o ângulo formado por $\mathbf{p}_\kappa$ e $\mathbf{q}_\kappa$. Quando $\mathbf{n}$ e $\mathbf{m}$ são ortogonais o ângulo de cisalhamento é dado por

$$\operatorname{sen} \gamma(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \frac{\mathbf{C}\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{\nu(\mathbf{n})\nu(\mathbf{m})} . \tag{1.20}$$

Já a rotação de um elemento de linha, inicialmente paralelo à $\mathbf{n}$, em relação à direção $\mathbf{m}$ pode ser definida pelo ângulo $\psi(\mathbf{n}, \mathbf{m})$, o qual é dado pela relação

$$\cos \psi(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \frac{1}{\nu(\mathbf{n})}\mathbf{m} \cdot \mathbf{F}\mathbf{n} . \tag{1.21}$$

Um maior entendimento sobre a natureza do gradiente de deformação $\mathbf{F}$ é obtido a seguir. Pelo Teorema da Decomposição Polar, $\mathbf{F}$ admite a representação

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}\,, \tag{1.22}$$

onde o tensor rotação $\mathbf{R}$ é ortogonal e o tensor estiramento $\mathbf{U}$ é simétrico e positivo definido. Segue imediatamente que $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$ e que

$$\nu(\mathbf{n}) = |\mathbf{U}\mathbf{n}|\,, \qquad \operatorname{sen}\gamma(\mathbf{n},\mathbf{m}) = \mathbf{U}\mathbf{n}\cdot\mathbf{U}\mathbf{m}\,. \tag{1.23}$$

Como $\mathbf{U}$ é simétrico e positivo definido, seus autovalores são reais e positivos, os quais são chamados de estiramentos principais e os autovetores correspondentes definem as direções ou eixos principais de estiramento. O maior dos estiramentos principais é o estiramento máximo e o autovetor correspondente a direção de estiramento máximo. Além disso o cisalhamento entre duas direções principais é nulo. Já a mudança de orientação de um elemento de linha inicialmente na direção principal de estiramento $\mathbf{e}$ em relação a uma direção $\mathbf{m}$ é então dada por

$$\cos\psi(\mathbf{e},\mathbf{m}) = \mathbf{R}\mathbf{e}\cdot\mathbf{m}\,. \tag{1.24}$$

De fato, basta observar que como $\mathbf{e}$ é uma direção principal de estiramento, $\mathbf{F}\mathbf{e} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{e} = \nu\mathbf{R}\mathbf{e}$, onde $\nu = \nu(\mathbf{e}) > 0$ é o estiramento na direção $\mathbf{e}$. Segue, portanto, o seguinte resultado:

> *A deformação em qualquer ponto pode ser considerada como sendo o resultado de uma translação, de estiramentos dos eixos principais, seguida de uma rotação rígida dos mesmos.*

Uma questão interessante diz respeito a existência de direções invariantes com respeito a deformação. Uma direção $\mathbf{m}$ é dita invariante quando existe um número real λ tal que

$$\mathbf{F}\mathbf{m} = \lambda\mathbf{m}\,. \tag{1.25}$$

Desta forma, é necessário e suficiente que λ seja uma raiz real da equação

$$\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^3 - i_1(\mathbf{F})\lambda^2 + i_2(\mathbf{F})\lambda - i_3(\mathbf{F}) = 0\,, \tag{1.26}$$

onde, de agora em diante,

$$i_1(\mathbf{A}) := \operatorname{tr}(\mathbf{A})\,, \qquad i_2(\mathbf{A}) := \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(\mathbf{A})^2 - (\operatorname{tr}(\mathbf{A}^2))\,, \qquad i_3(\mathbf{A}) = \det\mathbf{A} \tag{1.27}$$

são os invariantes principais do tensor $\mathbf{A}$. A equação anterior, por ser uma equação polinomial do terceiro grau, admite ao menos uma solução real, o que corresponde a existência uma direção invariante. Portanto, para qualquer deformação existe ao menos uma direção que não sofre rotação. Todas as possibilidades dependem do sinal do discriminante $\triangle(\mathbf{F})$, onde de agora em diante

$$\begin{aligned}\triangle(\mathbf{A}) := {} & 4\,i_2(\mathbf{A})^3 - i_2(\mathbf{A})^2 i_1(\mathbf{A})^2 + 4\,i_3(\mathbf{A})i_1(\mathbf{A})^3 \\ & - 18\,i_1(\mathbf{A})i_2(\mathbf{A})i_3(\mathbf{A}) + 27\,i_3(\mathbf{A})^2\end{aligned} \tag{1.28}$$

é o discriminante do tensor $\mathbf{A}$, da seguinte maneira:

i) Se $\triangle(\mathbf{F}) < 0$, existem apenas três direções invariantes e todos os autovalores são reais;

ii) Se $\triangle(\mathbf{F}) > 0$, existe apenas uma direção invariante e apenas um autovalor real;

iii) Se $\triangle(\mathbf{F}) = 0$, podem existir uma, duas, três, ou um número infinito de direções invariantes e pelo menos dois autovalores coincidem.

Finalmente, cumpre citar que elementos de superfície $\mathbf{dS}$ e de volume dV em $\mathbf{X}$ são deformados no elementos de superfície $\mathbf{ds}$ e de volume dv em $\mathbf{x}$, sendo estes relacionados com os primeiros pelas relações

$$\mathbf{ds} = \det \mathbf{F}\mathbf{F}^{-\top}\mathbf{dS}\,, \qquad \mathrm{dv} = \det \mathbf{F}\, \mathrm{dV}\,. \tag{1.29}$$

Segue portanto que $\det \mathbf{F} = 1$ representa uma deformação que preserva volume.

1.5 Gradiente de velocidades, taxa de deformação e giro

O gradiente espacial de velocidades $\mathbf{L}$ desempenha um papel fundamental na análise do movimento. Em particular, o tensor $\mathbf{L}$ guarda informações sobre taxas instantâneas de estiramento, cisalhamento e rotação. Para ver isso com mais clareza, vamos trabalhar com a configuração no instante t como de configuração de referência. Neste caso, a deformação relativa é dado por χ_t, cujo gradiente de deformação denotaremos por $\mathbf{F}_t$. Este, pelo teorema da decomposição polar, admite a representação

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{R}_t\mathbf{U}_t\,. \tag{1.30}$$

Pode ser mostrado que

$$\mathbf{L} = \left.\frac{\partial \mathbf{F}_t}{\partial \tau}\right|_{\tau=t}, \tag{1.31}$$

o que mostra que $\mathbf{L}$ está relacionado com taxas instantâneas de estiramento, cisalhamento e rotação. Além disso, segue a decomposição aditiva

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}\,, \tag{1.32}$$

onde

$$\mathbf{D} := \left.\frac{\partial \mathbf{U}_t}{\partial \tau}\right|_{\tau=t}, \qquad \mathbf{W} := \left.\frac{\partial \mathbf{R}_t}{\partial \tau}\right|_{\tau=t}. \tag{1.33}$$

Por definição, o tensor $\mathbf{D}$ é simétrico e representa uma taxa instantânea do tensor de estiramento, enquanto que o tensor $\mathbf{W}$ é anti-simétrico e representa uma taxa instantânea de rotação. Por outro lado, levando em conta a unicidade da decomposição aditiva de um tensor em suas partes simétrica e anti-simétrica, segue que $\mathbf{D}$ e $\mathbf{W}$ são as partes simétrica e anti-simétrica do gradiente de velocidades, *i.e.*,

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}^S\,, \qquad \mathbf{W} = \mathbf{L}^A\,, \tag{1.34}$$

onde de agora em diante

$$\mathbf{A}^S := \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top}{2}\,, \qquad \mathbf{A}^A := \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top}{2} \tag{1.35}$$

representam, respectivamente, as partes simétrica e anti-simétrica do tensor $\mathbf{A}$.

O tensor $\mathbf{D}$ é chamado de tensor taxa de deformação enquanto que $\mathbf{W}$ é o tensor vorticidade. Em particular, o vetor axial $\mathbf{w}$ de $\mathbf{W}$, definido por

$$\mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a} \tag{1.36}$$

para todo vetor $\mathbf{a}$, está relacionado com o rotational de $\mathbf{v}$, rot $\mathbf{v}$, pela relação

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\ \mathbf{v}\,. \tag{1.37}$$

Além disso,

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} := \mathrm{tr}\,\mathbf{L} = \mathrm{tr}\,\mathbf{D} \tag{1.38}$$

é o divergente espacial do campo de velocidades.

Agora vamos fornecer algumas interpretações para $\mathbf{D}$ e $\mathbf{W}$. Para isso, consideremos uma curva material no instante t cujo vetor tangente em $\mathbf{x}$ tem a direção do vetor unitário $\mathbf{m}$. Como visto anteriormente, o estiramento na direção $\mathbf{m}$ no instante τ é dado por

$$\nu(\mathbf{m}, \tau) = |\mathbf{U}_t(\tau)\mathbf{m}|\,, \tag{1.39}$$

onde a dependência em $\mathbf{x}$ foi omitida. Derivando a expressão acima concluimos que a taxa instantânea de estiramento na direção $\mathbf{m}$ é

$$\dot{\nu}(\mathbf{m}) := \left.\frac{\partial \nu(\mathbf{m}, \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=t} = 2\,\mathbf{D}\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}\,. \tag{1.40}$$

Por outro lado, o ângulo de cisalhamento entre as direções ortogonais $\mathbf{n}$ e $\mathbf{m}$ é

$$\mathrm{sen}\,\gamma(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \tau) = \mathbf{U}_t(\tau)\mathbf{n}\cdot\mathbf{U}_t(\tau)\mathbf{m}\,, \tag{1.41}$$

donde concluimos que a taxa instantânea de cisalhamento entre as direções $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$ é

$$\dot{\gamma}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \mathbf{D}\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}\,. \tag{1.42}$$

Já o ângulo entre a direção fixa $\mathbf{n}$ e o elemento de linha obtido pela deformação do elemento de linha paralelo a $\mathbf{m}$ na configuração de referência é dado por

$$\cos\phi(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \tau) = \frac{1}{\nu(\mathbf{m}, \tau)}\mathbf{F}_t(\tau)\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}\,. \tag{1.43}$$

Considerando $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$ ortogonais, segue da equação acima que

$$\dot{\phi}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = -\mathbf{L}\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}\,, \tag{1.44}$$

o que representa a taxa de afastamento do elemento de linha na direção $\mathbf{m}$ em relação a direção $\mathbf{n}$. Analogamente,

$$\dot{\phi}(\mathbf{n}, -\mathbf{m}) = \mathbf{L}\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \tag{1.45}$$

representa taxa de aproximação do elemento de linha na direção $\mathbf{n}$ em relação a direção $\mathbf{m}$. A média aritimética dessas duas taxas é dado por

$$\frac{1}{2}\left(\phi(\mathbf{m}, \mathbf{n}) + \phi(\mathbf{n}, -\mathbf{m})\right) = \mathbf{W}\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}\,, \tag{1.46}$$

fornecendo uma interpretação para o tensor vorticidade. Da relação acima segue uma interpretação imediata rot $\mathbf{v}$. Para isto, basta introduzir a base ortonormal formanda pelo vetores $\mathbf{e}_1 := \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_2 := \mathbf{m}$ e $\mathbf{e}_3 := \mathbf{n} \times \mathbf{m}$ e observer que as componentes do rotacional nesta base são

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 &= 2\,\mathbf{W}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \phi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + \phi(\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3)\,, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 &= 2\,\mathbf{W}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \phi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + \phi(\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_1)\,, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3 &= 2\,\mathbf{W}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \phi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + \phi(\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2)\,. \end{aligned} \tag{1.47}$$

As taxas instantâneas de elementos de linha, superfície e volume

$$\dot{\overline{\mathbf{dx}}} = \mathbf{L}\mathbf{dx}\,, \qquad \dot{\overline{\mathbf{ds}}} = (\operatorname{tr}\mathbf{L}\mathbf{I} + \mathbf{L}^\top)\mathbf{ds}\,, \qquad \dot{\overline{\mathrm{dv}}} = \operatorname{tr}\mathbf{L}\mathrm{dv}\,. \tag{1.48}$$

Segue portanto que um movimento preserva o volume se e somente se $\operatorname{tr}\mathbf{L} = \operatorname{tr}\mathbf{D} = \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

Uma questão interessante diz respeito a existência de direções invariantes com respeito a $\mathbf{L}$. Uma direção $\mathbf{m}$ é dita invariante quando existe um número real λ tal que

$$\mathbf{L}\mathbf{m} = \lambda\mathbf{m}\,. \tag{1.49}$$

Desta forma, é necessário e suficiente que λ seja uma raiz real da equação

$$\det(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^3 - i_1(\mathbf{L})\lambda^2 + i_2(\mathbf{L})\lambda - i_3(\mathbf{L}) = 0\,. \tag{1.50}$$

A equação acima admite ao menos uma solução real, o que corresponde a existência um direção invariante e um autovalor real correspondente. Portanto, para qualquer deformação existe ao menos uma direção que não sofre rotação. Todas as possibilidades dependem do sinal do discriminate $\triangle(\mathbf{L})$ da seguinte maneira:

i) Se $\triangle(\mathbf{L}) < 0$, existem apenas três direções invariantes e todos os autovalores são reais;

ii) Se $\triangle(\mathbf{L}) > 0$, existe apenas uma direção invariante, um autovalor real e um par de autovalores complexos conjugados;

iii) Se $\triangle(\mathbf{L}) = 0$, podem existir uma, duas, três, ou um número infinito de direções invariantes e pelo menos um par de autovalores repetidos.

Várias taxas de ordem superior para o estiramento e rotação podem ser definidas. Por exemplo, a derivada material de ordem n do quadrado do estiramento na direção $\mathbf{m}$ é dado por

$$\mathbf{A}_n \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \,, \tag{1.51}$$

onde $\mathbf{A}_n$, definido como

$$\mathbf{A}_n := \left. \frac{\partial^n \mathbf{C}_t}{\partial \tau^n} \right|_{\tau=t} \tag{1.52}$$

é o tensor de Rivlin-Ericksen de ordem n. Estes satisfazem as seguintes relações:

$$\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D} \,, \qquad \mathbf{A}_{n+1} = \dot{\mathbf{A}}_n + \mathbf{A}_n \mathbf{L} + (\mathbf{A}_n \mathbf{L})^\top \,. \tag{1.53}$$

1.6 Equações de transporte para os tensores gradiente de velocidade, taxa de deformação e vorticidade

As equações de evolução para o tensores gradiente de velocidade $\mathbf{L}$, taxa de deformação $\mathbf{D}$ e vorticidade $\mathbf{W}$ são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= -\mathbf{L}^2 + \mathbf{J} \,, \\ \dot{\mathbf{D}} &= -\mathbf{D}^2 - \mathbf{W}^2 + \mathbf{J}^S \,, \\ \dot{\mathbf{W}} &= -\mathbf{W}\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{W} + \mathbf{J}^A \,, \end{aligned} \tag{1.54}$$

onde $\mathbf{J}$ é o gradiente espacial do campo de aceleração (1.10). A equação de transporte para $\mathbf{L}$ segue diretamente de (1.11), enquanto que as equações de transporte para os tensores taxa de deformação e vorticidade correspondem, respectivamente, as parcelas simétrica e anti-simétrica de (1.54). Observe que no lado direito das equações acima existem termos dependendo apenas da presente distribuição da velocidade (termos envolvendo $\mathbf{L}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{W}$) e termos que dependem da mudança temporal do campo de velocidades através de gradiente da aceleração. Portanto, existem dois mecanismos de mudança para $\mathbf{L}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{W}$.

1.7 Convecção e difusão da vorticidade

A equação de transporte para $\mathbf{W}$ escrita em termos do vetor vorticidade $\mathbf{w}$ é dada por

$$\dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{L} - (\operatorname{div}\, \mathbf{v})\mathbf{I})\mathbf{w} + \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{D} - (\operatorname{div}\, \mathbf{v})\mathbf{I})\mathbf{w} + \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}} \,. \tag{1.55}$$

Já a equação de evolução para a magnitude da vorticidade , $\omega := \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$, é dada por

$$\dot{\omega} = 2(\mathbf{D} - (\operatorname{div}\, \mathbf{v})\mathbf{I})\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + 2 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} \,. \tag{1.56}$$

Portanto, são dois os mecanismos de mudança da vorticidade. O primeiro, chamado mecanismo de convecção, independe da aceleração e dependente apenas da velocidade atual e suas derivadas espaciais. Já o segundo, chamado de mecanismo de difusão, está associado com mudanças temporais da velocidade através do rotacional da aceleração das partículas. Observe que, de acordo com (1.56), a magnitude da vorticidade é imune ao mecanismo de difusão quando as linhas desta são ortogonais as linhas de vorticidade.

Usando (1.55) juntamente com o critério de Helmholtz-Zorawski (1.14) segue que uma condição necessária e suficiente para que linhas de vorticidade sejam materiais é dada por

$$\mathbf{w} \times \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \,. \tag{1.57}$$

Portanto, linhas de vorticidade serão linhas materiais na ausência de difusão ou quando as linhas de difusão forem paralelas as linhas de vorticidade. O mecanismo de convecção transporta linhas de vorticidade como linhas materiais, enquanto que o mecanismo de difusão tende tende a afastar a linhas de vorticidade das partículas instantaneamente situadas sobre elas.

1.8 Mudança de observador

No que foi feito até agora estava implícito que o movimento χ estava sendo descrito pelo observador $\oint$. No entanto, o mesmo movimento descrito pelo observador $\oint^*$ será denotado por χ^*. Considerando que estes observadores diferem entre si por um movimento rígido, diremos que χ e χ^* estão relacionados por uma mudança de observador se

$$\chi^*(X,t) = \mathbf{x}_0^*(t) + \mathbf{Q}(t)(\chi(X,t) - \mathbf{x}_0) \tag{1.58}$$

para toda partícula X e instante t, onde $\mathbf{x}_0^*(t)$ e $\mathbf{x}_0$ são pontos do espaço e $\mathbf{Q}(t)$ é um tensor ortogonal.

Já os movimento relativos χ_τ e χ_τ^* estão relacionados por

$$\chi_\tau^*(\mathbf{x}_\tau^*, t) = \mathbf{x}_0^*(t) + \mathbf{Q}(t)(\chi_\tau(\mathbf{x}_\tau, t) - \mathbf{x}_0)\,, \qquad \mathbf{x}_\tau^* = \mathbf{x}_0^*(\tau) + \mathbf{Q}(\tau)(\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_0)\,. \tag{1.59}$$

Segue portanto que

$$\mathbf{F}_\tau^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}_\tau\mathbf{Q}(\tau)^\top \,, \tag{1.60}$$

onde de agora em diante o asterico em um quantidade significa a quantidade registrada pelo observador $\oint^*$. Segue imediatamente que

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{QLQ}^\top + \mathbf{A}\,, \quad \mathbf{D}^* = \mathbf{QDQ}^\top\,, \quad \mathbf{W}^* = \mathbf{QWQ}^\top + \mathbf{A}\,, \quad \mathbf{A}_n^* = \mathbf{QA}_n\mathbf{Q}^\top\,, \tag{1.61}$$

onde $\mathbf{A} := \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\top$ é o giro entre os dois observadores.

Uma quantidade escalar, vetorial ou tensorial, é chamada objetiva, ou invariante com respeito a mundança de observador, quando a mesma se transforma, respectivamente, como

$$\alpha^* = \alpha\,, \qquad \mathbf{v}^* = \mathbf{Qv}\,, \qquad \mathbf{T}^* = \mathbf{QTQ}^\top\,, \tag{1.62}$$

onde $\mathbf{Q}$ define a diferença de orientação entre os dois observadores. Segue portanto, que $\mathbf{D}$ e os tensores $\mathbf{A}_n$ são invariantes enquanto que $\mathbf{L}$ e $\mathbf{W}$ dependem do observador.

1.9 Identificação de vórtices

O conceito de vórtice é central em mecânica dos fluidos, particularmente em turbulência. Vórtices são frequentemente vistos como os músculos e ligamentos da turbulência (Kuchermann, 1965; Moffati *et al.*, 1994). Ainda assim não existe atualmente uma definição de vórtice universalmente aceita (Chakraborty *et al.*, 2005). Jeong e Hussain (1995) discutem várias definições de vórtices apontando as deficiências das definições intuitivas.

Uma delas identifica vórtices como regiões de elevada vorticidade $|\mathbf{W}|$, embora não exista limiar universal a partir do qual seja possível declarar quando a vorticidade é elevada. Além disso, a vorticidade elevada nem sempre indica presença de vórtices, como no caso do escoamento cisalhante simples. Por esta razão, Truesdell (1954) introduziu a quantidade adimensional chamada de número de vorticidade,

$$\mathcal{W} := \frac{|\mathbf{W}|}{|\mathbf{D}|}\,, \tag{1.63}$$

como uma medida da rotacionalidade do movimento. O número de vorticidade varia entre zero (movimento irrotacional) e ∞ (movimento rígido).

Nesta seção vamos apresentar algumas definições locais de vórtices, as quais são baseadas em informações instantâneas contidas no tensor gradiente de velocidades $\mathbf{L}$. Neste sentido, um vórtice é definido como uma região do espaço com

$$f(\mathbf{L}) > 0\,, \tag{1.64}$$

onde a função f é uma medida do excesso da vorticidade em relação a taxa de deformação. A seguir apresentaremos alguns critérios, cada qual definindo uma função f.

No chamando Q-critério, introduzido por Hunt, Wray e Moin (1988), vórtices são definidos como regiões onde

$$f(\mathbf{L}) := Q := i_2(\mathbf{L}) = \frac{1}{2}(|\mathbf{W}|^2 - |\mathbf{D}|^2 + (\operatorname{tr}\mathbf{D})^2) > 0\,. \tag{1.65}$$

No caso de um escoamento incompressível, o critério acima é escrito como

$$f(\mathbf{L}) = \frac{1}{2}(|\mathbf{W}|^2 - |\mathbf{D}|^2) > 0\,, \tag{1.66}$$

definindo vórtices como regiões do espaço onde a vorticidade prevalece em relação a taxa de deformação. Neste caso, o critério para definição de vórtices pode ser escrito em termos do número de vorticidade como

$$\mathcal{W} > 1\,. \tag{1.67}$$

Outro critério bem conhecido é o $\triangle$-critério de Chong, Perry e Cantwell (1990), o qual define vórtices como regiões do espaciais com

$$f(\mathbf{L}) := \triangle(\mathbf{L}) > 0\,, \tag{1.68}$$

onde $\triangle(\mathbf{L})$ é o discriminante da equação característica para $\mathbf{L}$. Portanto, vórtices são definidos como regiões onde $\mathbf{L}$ admite autovalores complexos, o que garante que localmente o escoamento é turbilhionar. No caso de um escoamento incompressível

$$f(\mathbf{L}) = \triangle(\mathbf{L}) = \left(\frac{Q}{3}\right)^3 + \left(\frac{\det \mathbf{L}}{2}\right)^2 . \tag{1.69}$$

Já o λ_2-critério, introduzido por Jeong e Hussein (1995), define vórtices como regiões onde

$$-f(\mathbf{L}) := \lambda_2(\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2) < 0\,, \tag{1.70}$$

onde $\lambda_2(\mathbf{A})$ é o autovalor intermediário do tensor simétrico $\mathbf{A}$. Para interpretar esse critério, observemos que como $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$ é simétrico, seus autovalores são reais sendo possível ordena-los como $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Além disso, é possível escolher uma base ortonormal formada pelos autovetores correspondentes $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$. Portanto, $\lambda_2 < 0$ implica $\lambda_3 < 0$ resultando que $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$ é negativo definido no plano ortogonal ao vetor $\mathbf{e}_1$. Portanto,

$$|\mathbf{Wa}|^2 - |\mathbf{Da}|^2 > 0\,, \qquad |\mathbf{Wa}| - |\mathbf{Da}| > 0 \tag{1.71}$$

para todo vetor $\mathbf{a}$ ortogonal ao vetor $\mathbf{e}_1$, o que fornece uma interpretação para o critério λ_2. Em palavras, o critério λ_2 define vórtices como regiões onde a taxa de rotação prevalece em relação a taxa de deformação no plano ortogonal ao autovetor $\mathbf{e}_1$.

Os critérios Q, $\triangle$ e λ_2 foram objetos de comparação em Cucitori, Quadrio e Baron (1999), Chakraborty, Balachandar e Adrian (2005) e Wu, Xiang e Yong (2005).

Observe que em todos critérios mencionados acima são invariantes com respeito a mudança de observadores que preservam a orientação entre os mesmos, ou seja, $\mathbf{Q}$ em (1.58) é constante. De fato, basta observar que

$$f(\mathbf{L}) = f(\mathbf{L}^*)\,, \tag{1.72}$$

desde que o giro entre os observadores seja nulo. Em outras palavras, os critérios mencionados acima são invariantes com respeito ao grupo de tranformações galileanas estendido. Pode ser mostrado que não existe critério objetivo da forma de (1.68), uma vez que a objetividade excluiria a dependência em $\mathbf{W}$.

Recentemente, Haller (2005) propôs um critério objetivo para definição de vórtices. Este critério é desenvolvido em termos do tensor taxa de deformação e do segundo tensor de Rivlin-Ericksen $\mathbf{A}_2$, ambos tensores objetivos, o que torna o critério também objetivo. Qualitativamente, o mencionado critiério define vórtices como regiões materiais ao contrário dos critérios anteriores que identificam vórtices como regiões eulerianas.

1.10 Referências

Chakraborty P, Balachandar S, Adrian J; “On the relationships between local vortex identification schemes,” *J. Fluid Mech.* **535**, 189-214 (2005).

Chong MS, Perry AE, Cantwell BJ; “A general classification of three-dimensional flow fields,” *Phys. Fluids A* **2**, 765-777 (1990).

Cucitore R, Quadrio M, Baron A; “On the effectiveness and limitations of local criteria for the identification of a vortex,” *Eur. J. Mech. B/Fluids* **18**, 261-282 (1999).

Eringen AC; “On a rational theory of turbulence,” *Int. J. Engng. Sci.* **43** 209–221 (2005).

Eringen CA; “Nonlinear Theory of Continuous Media,” New York, Mc-Graw-Hill (1962).

Gatski TB; “Constitutive equations for turbulent flows,” *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **18**, 345–369 (2004).

Guala M, Luthi B, Liberzon A, Tsinober A, Kinzelbach W; “On the evolution of material lines and vorticity in homogeneous turbulence,” *J. Fluid Mech.* **533**, 339-359 (2005).

Gurtin ME; “An Introduction to Continuum Mechanics,” Academic Press, Londres (1981).

Haller G; “An objective definition of a vortex,” *J. Fluid Mech.* **525**, 1-26 (2005).

Heinloo J; “Formulation of turbulence mechanics,” *Phys. Rev. E* **69** (2004).

Huang YN; “On modelling the Reynolds stress in the context of continuum mechanics,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **9** 543–559 (2004).

Hunt JCR, Wray AA, Moin P; “Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows,” Center for Turbulence Research Report CTR-S88, pp.193-208 (1988).

Hutter K, Johnk K; “Continuum Methods of Physical Modeling: Continuum Mechanics, Dimensional Analysis, Turbulence,” Springer-Verlag, Berlim (2004).

Jeong J, Hussain F; “On the identification of a vortex,” *J. Fluid Mech.* **285**, 69-94 (1995).

Kosovic B; "Subgrid-scale modelling for the large-eddy simulation of high Reynolds number boundary layers," *J. Fluid Mech.* **336**, 151-182 (1997).

Kuchermann D; "Report on the IUTAM symposium on concentrated vortex motion in fluids," *J. Fluid Mech.* **21**, 1-20 (1965).

Luthi A, Tsinober A, Kinzelbach W; "Lagrangian measurement of vorticity dynamics in turbulent flow," *J. Fluid Mech.* **528**, 87-118 (2005).

Marshall JS; "A structural theory of anisotropic turbulence," *ZAMP* **46**, S737-S757, Special Issue (1995).

Moffat HK, Kida S, Ohkitani K; "Stretched vortices - the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics," *J. Fluid Mech.* **259**, 241-264 (1994).

Nikolaevskiy VN; "Angular Momentum in Geophysical Turbulence: Continuum Spatial Averaging Method," Kluwer Academic Publishers (2003).

Ooi A, Martin J, Soria J, Chong MS; "A study of the evolution and characteristics of the invariants of the velocity-gradient tensor in isotropic turbulence," *J. Fluid Mech.* **381**, 141-174 (1999).

Rivlin RS; "The relation between the flow of non-Newtonian fluids and turbulent Newtonian fluids," *Quart. Appl. Math.* **15**, 212–215 (1957).

Truesdell C; "A First Course in Rational Continuum Mechanics," volume 1, segunda edição, Academic Press (1991).

Truesdell C, Noll W; "The non-linear field theories," in *Handbuch der Physik* 3_3, Springer-Verlag, Berlim (1965).

Truesdell C, Toupin RA; "The classical field theories," in *Handbuch der Physik* 3_1, Springer-Verlag, Berlim (1960).

Truesdell C; "The Kinematics of Vorticity," Indiana University Press (1954).

Speziale CG; "Analytical Methods for the Development of Reynolds-Stress Closures in Turbulence," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 107-157 (1991).

Wu JZ, Xiong AK, Yang YT; "Axial stretching and vortex definition," *Phys. Fluids* **17** (2005)

Young PK; "Lagragian investigations of turbulence," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34**, 115-142 (2002).