Turbulência

Atila P. Silva Freire
Programa de Engenharia Mecânica
COPPE/UFRJ

Anderson Ilha
Diretoria de Metrologia Científica e Industrial
Inmetro

Marcelo J. Colaço
Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais
Instituto Militar de Engenharia

Editores

ABCM – Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica
COPPE/UFRJ – Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia
IME – Instituto Militar de Engenharia

Coleção Cadernos de Turbulência
Turbulência, Volume 5, Tomo 1.

5^a Escola de Primavera em Transição e Turbulência
Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro
25 a 29 de setembro de 2006

Editores

Atila P. Silva Freire, *Programa de Engenharia Mecânica*, COPPE/UFRJ
Anderson Ilha, *Diretoria de Metrologia Científica e Industrial*, Inmetro
Marcelo J. Colaço, *Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais*, *IME*

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Processos Técnicos da
Biblioteca do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro

Escola de Primavera em Transição e Turbulência (5.:2006: Rio de Janeiro, RJ)
Turbulência: Anais da V Escola de Primavera em Transição e Turbulência,
Rio de Janeiro, 25 a 29 de setembro de 2006 /editores Atila P. Silva Freire,
Anderson Ilha e Marcelo J. Colaço. Rio de Janeiro: ABCM, 2006.
XVI, 466 p.; 23,5 cm – (Coleção Cadernos de Turbulência. Turbulência, V. 5, Tomo 1)
Inclui bibliografias
1. Turbulência. 2. Mecânica dos fluidos. 3. Fenômenos de transporte.
I. Freire, Atila P. Silva II. II. V EPTT (5.:2006: Rio de Janeiro, RJ).
III. Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica. IV. Título. II.
Série
629.1332
E74t
ISBN (10 dígitos): 85-85769-24-6
ISBN (13 dígitos): 978-85-85769-24-6

Documento preparado pelos Editores em LaTeX.
Impresso no Brasil pela Gráfica Graffito.

ISBN 85-85769-24-6
9 788585 769246

Conteúdo

Prefácio

O ato quase solene de escrever o Prefácio de um livro necessariamente provoca em seu escritor momentos de profunda reflexão. Afinal, o objeto de tanta dedicação intelectual se mostra por completo, desnudo, em suas virtudes e defeitos.

Em sua forma definitiva, que não pode ser modificada, o livro deveria não apenas transmitir aos seus leitores a letra fria do rigor de suas construções teóricas, mas, principalmente, o espírito de toda a sofisticação intelectual que se pretende alcançar.

O presente texto pertence a uma já extensa e exitosa família. A série de escolas dedicadas exclusivamente à investigação da turbulência de fluidos deu origem a outros textos que marcaram época. A manutenção da alta estirpe, pois, poderia causar sérios embaraços a novas contribuições.

A Turbulência é uma matéria com sabidas dificuldades conceituais, que exige de seus militantes especializações múltiplas e sofisticadas. Esse texto, sem dúvida, preencherá lacunas importantes no arcabouço de métodos e técnicas que se pretendem disponíveis para um ataque consistente às dificuldades de natureza teóricas e práticas impostas pela Turbulência àqueles que a ambicionam assaltar. Temas do mais alto grau de complexidade e importância são dissecados em dois tomos que formam uma obra com doze capítulos. Um julgamento honesto dos Editores classifica a presente contribuição como da maior relevância tanto para iniciantes como para pesquisadores experientes no assunto.

A dedicação dos autores e seu compromisso com o resultado final dessa jornada foram da maior sensibilidade. Os Editores, sinceramente, esperam que os leitores reconheçam as muitas horas de trabalho abnegado que permitiram a existência desta obra.

Finalmente, talvez devêssemos agora nos inquirir sobre o propósito de tudo isso. Por que trabalhar com tamanho afinco para a existência dessa obra? A resposta é simples e singela: para a construção de uma sociedade melhor. Um objetivo que nos tem sido caro e que nos possibilitou encontrar aliados importantes na ABCM, na FAPERJ e no CNPq. Este projeto é, sobretudo, uma iniciativa feliz da ABCM e do Pronex "Núcleo de Excelência em Turbulência" um projeto apoiado pela FAPERJ e pelo CNPq (Processo No E-26/171.198/2003).

Os Editores

Agradecimentos

Relação de Autores

Capítulo 1 **página 1**

Fernando Pereira Duda
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 2 **página 17**

Fábio Ramos
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Ricardo Rosa
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Roger Temam
Department of Mathematics
Indiana University, Bloomington
IN 47405-5701
USA

Capítulo 3 **página 37**

Luca Moriconi
Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 4 **página 99**

Juliana B. R. Loureiro
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

José Luiz da Silva Neto
Programa de Engenharia Elétrica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 5 **página 173**

Juliana B. R. Loureiro
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Fernando T. Pinho
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade do Porto
Porto 4200-465
Portugal

Capítulo 6 **página 253**

Daniel Cruz
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade Federal do Pará
Belém 66075-970 Brasil

Fernando Pinho
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade do Porto
Porto 4200-465
Portugal

Capítulo 7 **página 341**

José Luiz Fontoura
Depto. de Engenharia Mecânica
Universidade de Brasília
Brasília, D.F. 70910-900
Brasil

Capítulo 8 **página 405**

Alexandre T. P. Alho
Depto. Engenharia Naval e Oceânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Anderson Ilha
Diretoria de Metrologia Científica
Instituto Nacional de Metrologia
Duque de Caxias, 22050-050
Rio de Janeiro Brasil

Capítulo 2

Estimativas rigorosas para escoamentos turbulentos baseadas nas equações de Navier-Stokes

2.1 Introdução

As teorias clássicas de turbulência são baseadas fortemente em argumentos heurísticos e fenomenológicos, advindos de observações empíricas e da resolução de problemas simplificados ou aproximados. Essas teorias são fundamentais no tratamento teórico e prático de escoamentos turbulentos. No entanto, os seus argumentos *ad hoc* (para casos ou fins particulares), não garantem sucesso de forma geral, o que é crucial para o desenvolvimento científico e tecnológico. Dessa forma, cada nova aplicação depende ainda de uma série de experimentos laboratoriais e numéricos.

Como os escoamentos turbulentos são supostamente regidos pelas equações de Navier-Stokes, é natural buscar resultados gerais a partir das possíveis soluções dessas equações. Porém, essas equações são bastante complicadas, apresentando soluções explícitas apenas em alguns casos muito particulares. E é em parte por conta disso que grande parte da teoria clássica de turbulência se baseia em argumentos *ad hoc*.

Contudo, resultados rigorosos importantes sobre escoamentos turbulentos têm sido obtidos ultimamente, baseados em estimativas de energia, métodos variacionais e outras técnicas matemáticas mais avançadas. O nosso objetivo, aqui, é mencionar alguns desses resultados e descrever alguns detalhes sobre como obter alguns deles. Tentaremos manter o formalismo matemático o mais simples possível.

Vamos nos restringir a resultados em três dimensões. Para o caso bidimensional, veja, por exemplo, Bercovici *et al.* (1995), Constantin *et al.* (1994), Foias *et al.* (1993, 2002, 2003, 2005), Eyink (2001), Foias *et al.* (2005) e Rosa (2002).

Na seção 2.2, falamos brevemente sobre algumas questões matemáticas das equações de Navier-Stokes e sobre a relevância dos problemas de regularidade, existência e unicidade de soluções dessas equações. Na seção 2.3, discutimos brevemente os conceitos de médias temporais e amostrais e o conceito matemático de solução estatística estacionária, que torna rigoroso, de um ponto de vista de análise matemática, o conceito de média amostral. Na seção 2.4, mencionamos dois resultados rigorosos ligados à teoria de Kolmogorov para turbulência homogênea, a saber, uma estimativa por cima para a lei de dissipação de energia e uma condição natural para a existência da cascata de energia, dando um breve esboço desse último resultado. Finalmente na seção 2.5, discutimos o caso de escoamentos em um canal liso sob um gradiente de pressão e damos um esboço um pouco mais detalhado de estimativas por baixo e por cima para o coeficiente de atrito na parede.

2.2 As equações de Navier-Stokes

O movimento de fluidos newtonianos incompressíveis homogêneos é regido pelas equações de Navier-Stokes incompressíveis, que, na forma euleriana e em notação vetorial, podem ser escritas como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} p = \mathbf{f}\,, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0\,.$$

Temos $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, u_3)$ denotando o vetor velocidade de uma partícula idealizada de fluido localizada na posição $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e no instante de tempo t; ρ denota a densidade de massa, assumida constante; a viscosidade cinemática do fluido é denotada por ν e também é constante; $p = p(\mathbf{x}, t)$ é a pressão cinemática; e $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = (f_1, f_2, f_3)$ é a densidade de massa das forças de volume.

A teoria matemática clássica das equações de Navier-Stokes se baseia em grande parte nos trabalhos de Leray no início do século passado (ver Leray, 1933, 1934a-b; Hopf, 1951; Temam, 2001; Ladyzhenskaya, 1963; Constantin & Foias, 1988).

As equações de Navier-Stokes podem ser escritas como uma equação de evolução

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$$

para uma função apropriada $\mathbf{F}(\mathbf{u})$. Temos que a cada instante de tempo, $\mathbf{u}$ pertence a um "espaço de fases" H composto pelos campos de velocidade de quadrado integrável (energia cinética finita), divergente nulo (incompressibilidade) e satisfazendo condições de contorno apropriadas. A pressão pode ser, em princípio, determinada por $\mathbf{u}$ e pelas condições de contorno.

No caso tridimensional, é sabido que dada uma condição inicial em H, existe uma solução $\mathbf{u}(t)$ definida para todo $t \geq 0$, mas com uma certa regularidade que não é suficiente para garantir a sua unicidade. Por outro lado, dada uma condição inicial em H com uma certa regularidade maior, é sabido que existe uma solução regular e única em um intervalo de tempo $0 \leq t < \delta$, com δ dependendo do "tamanho", em um certo sentido, do dado inicial. Portanto, temos soluções locais únicas e soluções globais possivelmente não únicas.

A questão da existência e unicidade globais de soluções das equações de Navier-Stokes em três dimensões é de grande importância e é considerada, atualmente, um dos grandes problemas em aberto na matemática. Em particular, é um dos sete problemas selecionados pela Fundação Clay, que oferece US$1.000.000,00 para cada problema resolvido.

Essa questão de existência e unicidade não é mera curiosidade matemática, nem tem importância apenas em questões matemáticas abstratas. As técnicas que podem vir a ser criadas na busca pela resolução dessa questão podem eventualmente levar a entendimentos melhores e mais precisos sobre os fenômenos tratados no modelo e, em particular, em turbulência. Como ilustração, podemos mencionar a construção dos números complexos na resolução de equações polinomiais; a construção da teoria de distribuições para dar sentido a objetos como a função delta de Dirac, fundamental em física clássica e quântica; além de estruturas matemáticas muito mais complexas em teoria de cordas, etc. Essas técnicas também podem levar a métodos numéricos mais eficientes.

Conforme indicado acima, a questão da unicidade de soluções parece estar intimamente ligada à da regularidade (e.g. continuidade, integrabilidade, diferenciabilidade, etc.) e essa regularidade também tem interpretações práticas significativas. Por exemplo, a falta de regularidade pode estar ligada a ondas de choque, algo que aparece claramente em regimes compressíveis. Por outro lado, a falta de regularidade também pode estar ligada a um problema de modelagem, com, por exemplo, o comprimento de Kolmogorov se aproximando do livre caminho médio.

No caso bidimensional, temos a existência e unicidade de soluções globais em $t \geq 0$. Ainda assim, questões de regularidade podem estar ligadas a resultados físicos importantes, como o decaimento do espectro de energia (Bercovici *et al.*, 1995), etc.

2.3 Quantidades médias, médias amostrais e soluções estatísticas

A teoria estatística convencional de turbulência é baseada em relações envolvendo quantidades médias, como a taxa média de dissipação viscosa de energia cinética e a velocidade média do escoamento (Kolmogorov, 1941; Batchelor, 1953; Monin & Yaglom, 1975; Hinze, 1975; Tennekes & Lumley, 1972; Lesieur, 1997; Frisch, 1995; Rosa, 2006). No entanto, a questão da definição de quantidades médias é delicada, conforme colocado por Monin & Yaglom (1975). Médias temporais e espaciais são as mais usadas na prática, enquanto que médias amostrais, em relação a um grande número de experimentos, são as mais usadas na teoria, por evitarem certas questões analíticas ("de contorno", no espaço ou no tempo) complicadas.

Médias temporais podem ser facilmente formuladas para uma solução individual $\mathbf{u}(t)$ das equações de Navier-Stokes através da relação

$$\langle \varphi \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\mathbf{u}(t))\, \mathrm{d}t \,,$$

onde $T > 0$ e $\varphi : H \to \mathbb{R}$ representa a quantidade física a ser medida (energia, taxa de dissipação viscosa de energia cinética, etc.). Médias espaciais podem ser definidas de maneira semelhante.

No caso de médias amostrais, temos uma série de experimentos, gerando campos de velocidade $\mathbf{u}^n$, $n = 1, \dots, N$, e tomamos a média

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varphi(\mathbf{u}^n) \,.$$

Podemos fazer isso de maneira mais geral e rigorosa considerando uma medida de probabilidade μ definida em H:

$$\langle \varphi \rangle = \int_H \varphi(\mathbf{u})\, \mu(\mathrm{d}\mathbf{u}) \,.$$

Para que essa medida seja significativa para o escoamento, ela deve satisfazer uma equação semelhante à equação de Liouville em mecânica estatística. Na verdade, a média amostral pode variar com o tempo e devemos ter uma família de medidas de probabilidade satisfazendo a equação de evolução de Liouville. Essa família representa a evolução da distribuição de probabilidades do campo de velocidades do escoamento.

No caso de turbulência em equilíbrio estatístico no tempo, as quantidades médias não variam com o tempo e a medida μ deve satisfazer a equação do tipo Liouville estacionária

$$\int_H (\mathbf{F}(\mathbf{u}), \varphi'(\mathbf{u}))\, \mu(\mathrm{d}\mathbf{u}) = 0$$

para toda função "teste" φ suficientemente regular, onde φ' é a derivada de φ em um sentido funcional e $(\cdot, \cdot)$ é um certo produto de dualidade, uma espécie de extensão do produto interno do espaço de fases H.

Essas medidas são chamadas de *soluções estatísticas estacionárias* das equações de Navier-Stokes. Para a definição ficar completa, devemos acrescentar condições de regularidade e estimativas de energia semelhantes às da teoria clássica para as soluções individuais das equações de Navier-Stokes, além de definir de maneira precisa as funções teste permitidas. Esse conceito fundamental para o tratamento matemático de turbulência foi introduzido por Foias (1972, 1973) (veja também Hopf, 1952; Vishik & Fursikov, 1977, 1988; Foias *et al.*, 2001).

2.4 Teoria de Kolmogorov e alguns resultados rigorosos

A teoria de Kolmogorov diz respeito a escoamentos plenamente desenvolvidos, em que homogeneidade e isotropia são assumidas. Essas hipóteses são baseadas em observações e experimentos e são válidas apenas longe do bordo e em escalas suficientemente pequenas. A base fundamental é a da cascata de energia de Richardson, em que a energia cinética passa de escalas maiores para menores, sucessivamente e praticamente sem perda de energia por efeitos viscosos. Ao longo desse processo, o movimento em cada escala acaba perdendo as informações não-homogêneas e não-isotrópicas dos mecanismos geradores de energia nas grandes escalas. Nessas escalas menores, o comportamento do fluido passa a ser universal, ou seja, independente da geometria do problema e das forças agindo nas grandes escalas. A energia cinética é, assim, transferida em forma de cascata, até escalas muito menores, onde finalmente a energia começa a ser dissipada, de maneira significativa, por efeitos viscosos. É nesse processo fundamental que a teoria de Kolmogorov é calcada.

Do ponto de vista matemático, é comum modelar essa situação considerando-se escoamentos com condições de contorno periódicas e com uma força externa restrita a modos de Fourier baixos (números de onda baixos = grandes escalas). Nesse contexto, foram obtidos resultados rigorosos sobre a cascata de energia (Foias *et al.*, 2001a-c) (condições que garantem a existência da cascata de energia) e sobre a lei de dissipação de energia de Kolmogorov (Foias, 1997; Doering & Foias, 2002; Foias *et al.*, 2005, 2001a), entre outros.

2.4.1 A lei de dissipação de energia de Kolmogorov

Para efeito de ilustração, a teoria de Kolmogorov leva, através de argumentos de auto-similaridade e universalidade, à lei de dissipação de energia

$$\varepsilon \sim \frac{U^3}{\ell},$$

onde ε é a taxa média de dissipação viscosa (por unidade de tempo) de energia cinética (por unidade de massa), U é a velocidade média do escoamento, e ℓ, um comprimento macroscópico típico. No nosso caso, trabalhando com as equações de Navier-Stokes com condições periódicas de contorno, com período L, mostramos de maneira rigorosa em Foias *et al.* (2005) que, para T suficientemente grande, as médias temporais finitas correspondentes satisfazem

$$\varepsilon_T \leq C_1 \frac{U_T^3}{L},$$

onde C_1 depende do número de Reynolds mas se mantém limitado quando o número de Reynolds aumenta.

Estimativas semelhantes para médias amostrais foram obtidas em Foias (1997, 2001b) e para limites de médias temporais em Doering & Foias (2002). Resultados semelhantes em outras geometrias também foram obtidas e são mencionadas na próxima seção.

2.4.2 Cascata de energia

No caso da cascata de energia, ela passa pela equação de energia escala por escala, no espaço de Fourier, considerando-se números de onda κ. Nessa equação, aparece o termo

$$\mathfrak{e}_{\kappa,\infty} = -\frac{1}{L_x L_y h} \int_{[0,L]^3} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u})\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_{\kappa,\infty} \,\mathrm{d}\mathbf{x}\,,$$

que representa o fluxo (por unidade de tempo) de energia cinética (por unidade de massa) para as escalas acima de κ, e onde $\mathbf{u}_{\kappa,\infty}$ representa a projeção de $\mathbf{u}$ nos componentes com número de onda maior que κ (as "menores" escalas que compõem o escoamento). A equação de energia para essas escalas menores pode ser obtida multiplicando as equações de Navier-Stokes por $\mathbf{u}_{\kappa,\infty}$ e integrando o resultado em $[0,L]^3$, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{1}{L_x L_y h}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{[0,L]^3} |\mathbf{u}_{\kappa,\infty}|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{\nu}{L_x L_y h}\int_{[0,L]^3} |\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}_{\kappa,\infty}(\mathbf{x})|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ \leq \frac{1}{L_x L_y h}\int_{[0,L]^3} \mathbf{f}_{\kappa,\infty} \cdot \mathbf{u}_{\kappa,\infty} \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \mathfrak{e}_{\kappa,\infty}\,,\end{aligned}$$

onde $|\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}|^2 = \sum_{i,j=1}^3 (a_i b_j)^2$ para vetores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ (no caso acima, $\boldsymbol{\nabla}$ é o "vetor" de operadores diferenciais parciais $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$). O primeiro termo na desigualdade acima representa a taxa de variação de energia cinética; o segundo, a taxa de dissipação viscosa de energia cinética; o terceiro, a taxa de injeção de energia no sistema; e o último, o fluxo de energia para as escalas menores, mencionado acima. Tudo isso por unidade de massa e unidade de tempo e restrito aos números de onda maiores que κ.

No caso de equilíbrio estatístico no tempo, consideramos médias amostrais em relação a soluções estatísticas estacionárias. Nesse caso, a equação de energia, em média, toma a forma

$$\frac{\nu}{L_x L_y h}\Big\langle \int_{[0,L]^3} |\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}_{\kappa,\infty}(\mathbf{x})|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x}\Big\rangle \leq \frac{1}{L_x L_y h}\Big\langle \int_{[0,L]^3} \mathbf{f}_{\kappa,\infty} \cdot \mathbf{u}_{\kappa,\infty} \,\mathrm{d}\mathbf{x}\Big\rangle + \langle \mathfrak{e}_{\kappa,\infty}\rangle\,.$$

Observe, no entanto, que essa relação de energia é uma desigualdade. A razão disso está no fato de considerarmos soluções estatísticas que podem não ser suficientemente regulares, uma questão associada ao problema de existência e unicidade de soluções das equações de Navier-Stokes, mencionado anteriormente.

Para as estimativas que buscamos, é fundamental recuperarmos uma igualdade para esse tipo de relação. Isso é possível introduzindo-se um certo fluxo restrito de energia. Mas esse fluxo restrito só faz sentido físico em média, ao subtrairmos uma quantidade de energia perdida, em média, devida a uma possível perda de regularidade. Essa energia perdida é representada pelo limite

$$\lim_{\kappa' \to \infty} \langle \mathfrak{e}_{\kappa',\infty} \rangle$$

que existe, conforme provado em Foias *et al.* (2001b). Esse limite é não-negativo, sendo zero quando a solução estatística estacionária é mais regular, evitando perda de energia por falta de regularidade.

Com isso, o fluxo restrito, denotado $\mathfrak{e}^*_\kappa$, é definido por

$$\mathfrak{e}^*_{\kappa,\infty} = \mathfrak{e}_{\kappa,\infty} - \lim_{\kappa' \to \infty} \langle \mathfrak{e}_{\kappa',\infty} \rangle \,.$$

Assim, recuperamos uma igualdade, em média, para a taxa de dissipação viscosa de energia cinética:

$$\frac{\nu}{L_x L_y h} \langle \int_{[0,L]^3} |\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}_{\kappa,\infty}(\mathbf{x})|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle = \frac{1}{L_x L_y h} \langle \int_{[0,L]^3} \mathbf{f}_{\kappa,\infty} \cdot \mathbf{u}_{\kappa,\infty} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathfrak{e}^*_{\kappa,\infty} \rangle \,.$$

Consideramos, também, dois números de onda importantes. Primeiro, denotamos por κ_f o maior número de onda em que $\mathbf{f}$ tem componente ativo, representando um limite para as grandes escalas onde a energia é inserida no sistema. Denotamos, ainda, por κ_τ, o comprimento de onda de Taylor, que definimos pela relação

$$\kappa_\tau^2 = \frac{e}{2\nu\varepsilon} \,,$$

onde

$$e = \frac{1}{2L_x L_y h} \langle \int_{[0,L]^3} |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle$$

e

$$\varepsilon = \frac{\nu}{L_x L_y h} \langle \int_{[0,L]^3} |\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle \,.$$

Agora, manipulando a equação anterior (assim como a desigualdade de energia original), é possível mostrar, assumindo que $\kappa_\tau^2 \gg \kappa_f^2$, que

$$\langle \mathfrak{e}^*_{\kappa,\infty} \rangle \approx \varepsilon \qquad \text{para} \qquad \kappa_f^2 \leq \kappa^2 \ll \kappa_\tau^2 \,.$$

Essa relação diz que nesse intervalo para κ, o fluxo restrito de energia cinética transferida para os números de onda mais altos que κ se dá, *em média*, de maneira praticamente uniforme, aproximadamente igual à taxa de dissipação viscosa de energia cinética por unidade de tempo, representada por ε. Portanto, a cascata de energia ocorre pelo menos em um certo intervalo, sob a condição de que $\kappa_\tau^2 \gg \kappa_f^2$, ou seja, caso o número de onda de Taylor seja relativamente grande comparado com o maior número de onda ativo em $\mathbf{f}$. E quanto maior essa relação de grandeza, maior o intervalo da cascata de energia.

A estimativa acima pode ser escrita de forma matematicamente mais precisa da seguinte maneira:

$$1 - \left(\frac{\kappa}{\kappa_\tau} \right)^2 \leq \frac{\langle \mathfrak{e}^*_\kappa \rangle}{\varepsilon} \leq 1 \qquad \text{para} \qquad \kappa \geq \kappa_f \,,$$

de onde fica clara a condição $\kappa_f^2 \leq \kappa^2 \ll \kappa_\tau^2$ para que $\langle \mathfrak{e}^*_{\kappa,\infty} \rangle \approx \varepsilon$.

2.5 Escoamento em um canal liso sob um gradiente de pressão (e em outras geometrias)

Diferentes resultados rigorosos foram obtidos em outras geometrias e com outras forças externas em (Busse, 1978; Howard, 1972; Doering & Constantin, 1992; Constantin & Doering, 1994, 1995; Wang, 1997, 2000; Nicodemus & Grossmann, 1997, 1998; Kerswell, 1998; Childress & Kerswell, 2001; Doering & Eckhardt, 2003).

Em vários casos, métodos variacionais foram utilizados para estimar a taxa média de dissipação viscosa de energia cinética. No caso de cisalhamento, foram obtidas estimativas por cima em Doering & Constantin (1992), Constantin & Doering (1994), Doering & Eckhardt (2003). No caso de um canal liso sob um gradiente de pressão, foram obtidas estimativas por baixo em Constantin & Doering (1995). Neste último caso, a estimativa por baixo da taxa de dissipação leva a estimativas por cima do coeficiente de atrito na parede, uma quantidade de fundamental importância prática.

Mais recentemente, em Ramos, Rosa & Temam, consideramos também o caso de um canal liso sob um gradiente de pressão e combinamos o método variacional com métodos de energia para aprimorar os resultados anteriores. Conseguimos uma estimativa por baixo para o coeficiente de atrito na parede, e melhoramos a estimativa por cima obtida em Constantin & Doering (1995), tanto no sentido de reduzir as hipóteses e simplificar a demonstração, como no sentido de conseguir uma constante multiplicativa menor. Vamos, agora, ilustrar a obtenção dessas estimativas.

Nesse caso de um canal liso sob um gradiente de pressão, consideramos as equações de Navier-Stokes na forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} p = \frac{P}{L_x}\mathbf{e}_x\,, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0\,, \tag{2.1}$$

no domínio $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y) \times (0, h)$, com $\mathbf{u} = (u, v, w)$ e $\mathbf{x} = (x, y, z)$. As condições de contorno são de aderência nos planos $z = 0$ e $z = h$ e periódicas em x e y com períodos L_x e L_y, respectivamente, para $\mathbf{u}$ e p. O parâmetro P/L_x denota a magnitude do gradiente de pressão ao longo do canal. O termo $\mathbf{e}_x$ é o vetor unitário na direção x, e assumimos que L_x, L_y, h, $P > 0$.

O caso em questão é o de um escoamento em equilíbrio estatístico no tempo, ou estatisticamente estacionário. Nesse caso, consideramos médias amostrais relativas a soluções estatísticas estacionárias das equações de Navier-Stokes.

Estamos interessados em estimar o coeficiente de atrito na parede, definido nesse caso por

$$C_f = \frac{Ph}{L_x \langle U \rangle^2}\,,$$

onde $\langle U \rangle$ é a velocidade média na direção do gradiente de pressão, com

$$U = \frac{1}{L_y h} \int_0^{L_y} \int_0^h u(x, y, z)\, \mathrm{d}y \mathrm{d}z\,.$$

As estimativas para C_f são baseadas em estimativas para $\langle U\rangle$. As estimativas obtidas podem ser escritas em termos do número de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{h\langle U\rangle}{\nu}\,.$$

Temos, assim, as estimativas

$$\frac{3,46}{\mathrm{Re}} \leq C_f \leq \frac{13,5}{\mathrm{Re}} \qquad \text{se} \qquad 0 < P \leq 94,21\frac{\nu^2 L_x}{h^3}\,,$$

e

$$\frac{3,46}{\mathrm{Re}} \leq C_f \leq 0,48\left(1 + \frac{13,96}{\mathrm{Re}}\right)^2 \qquad \text{se} \qquad P > 94,21\frac{\nu^2 L_x}{h^3}\,.$$

Nesse último caso de P suficientemente grande, associado à situação de turbulência plenamente desenvolvida, a estimativa obtida anteriormente em Constantin & Doering (1995) contém uma constante multiplicativa da ordem de $0,59$, ao invés de $0,48$. Portanto, o resultado acima representa uma redução de quase 19% na estimativa para o coeficiente de atrito.

É interessante notar, também, que o coeficiente de atrito associado ao escoamente de Poiseuille (veja seção 2.5.1) é

$$C_f^{\text{Poiseuille}} = \frac{12}{\mathrm{Re}}\,,$$

e podemos ver que a estimativa por cima obtida no caso em que P é relativamente pequeno está bastante próxima desse valor. Lembremos que, para P suficientemente pequeno, o escomento de Poiseuille é globalmente assintoticamente estável e, portanto, coincide, em um certo sentido, com a solução estatística estacionária, que nesse caso é necessariamente única. A estimativa por baixo, por sua vez, apesar de apresentar uma constante multiplicativa muito menor, está da ordem correta em termos do número de Reynolds. Em relação à estabilidade do escoamento de Poiseuille, ele é localmente estável para todos os valores de P (Romanov, 1971), mas só é localmente estável para valores pequenos de P. Em particular, é possível mostrar (Ramos, Rosa & Temam) que uma condição suficiente para que ele seja globalmente assintoticamente estável é que $0 < P < 2\sqrt{2}\pi^2\nu^2 L_x/h^3$.

Voltando ao caso em que o gradiente de pressão é suficientemente grande, argumentos heurísticos (Prandtl, 1925; Tennekes & Lumley, 1972) (e fundamentados por dados experimentais) indicam um coeficiente de atrito da ordem de

$$C_f \sim \frac{1}{(\ln \mathrm{Re})^2}\,.$$

Portanto, a estimativa superior acima, em termos da dependência no número de Reynolds, difere apenas por um logaritmo. A estimativa por baixo, por sua vez, muito distante, se explica pelo fato da estimativa valer para qualquer solução estatística estacionária, inclusive àquela associada ao escoamento de Poiseuille, que não é globalmente estável nesse regime de gradiente de pressão suficientemente alto, mas existe do ponto de vista matemático.

Vamos, agora, dar uma idéia de como obter essas estimativas.

2.5.1 Estimativa por baixo para C_f

A estimativa por baixo para C_f depende de uma estimativa por cima para $\langle U\rangle$. Primeiro, note que, por causa da incompressibilidade (condição de divergente nulo) e das condições de contorno, a velocidade na direção do gradiente de pressão é independente da posição ao longo dessa direção, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{L_y h}\int_0^{L_y}\int_0^h u_x(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{L_y h}\int_0^{L_y}\int_0^h (-u_z(x,y,z) - u_y(x,y,z))\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0\,.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{L_xL_yh}\int_\Omega u(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{L_xL_yh}\int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{e}_x\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\ &\le \frac{1}{L_xL_yh}\left(\int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{1/2}(L_xL_yh)^{1/2}\,.\end{aligned}$$

Tomando a média amostral, chegamos a

$$\langle U\rangle \le \frac{1}{(L_xL_yh)^{1/2}}\langle\left(\int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{1/2}\rangle \le \left(\langle\frac{1}{L_xL_yh}\int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\rangle\right)^{1/2}\,.$$

Uma estimativa clássica de energia, que é mais delicada do ponto de vista matemático e cujos detalhes não vamos incluir aqui, diz que

$$\langle\int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\rangle \le \frac{h^2}{\nu^2}\int_\Omega |\mathbf{g}_P(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,,$$

onde $\mathbf{g}_P$ é um campo de vetores relacionado com o gradiente de pressão ($\mathbf{g}_P = A^{-1/2}\mathbf{f}_P$, onde $\mathbf{f}_P = (P/L_x)\mathbf{e}_x$, A é o chamado operador de Stokes e A^{-1} é a raiz quadrada da inversa do operador de Stokes, que existe pois A é autoadjunto e positivo). Podemos calcular o lado direito da desigualdade acima com a ajuda do escoamento plano de Pouseille ($\nu A\mathbf{U}^{\mathrm{Poiseuille}} = \mathbf{f}_P$), que é dado explicitamente por

$$\mathbf{U}^{\mathrm{Poiseuille}}(\mathbf{x}) = \frac{P}{2\nu L_x}z(h-z)\mathbf{e}_x\,.$$

Temos, de fato,

$$\int_\Omega |\mathbf{g}_P(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \nu\int_\Omega \mathbf{f}_P(\mathbf{x})\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{Poiseuille}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{P^2L_y}{2L_x}\int_0^h z(h-z)\,\mathrm{d}z = \frac{L_yh^3}{12L_x}P^2\,.$$

A primeira desigualdade acima é essencialmente uma versão rigorosa, no espaço de fases, de uma relação matricial da forma

$$\mathbf{g}_P\cdot\mathbf{g}_P = (A^{-1/2}\mathbf{f}_P)\cdot(A^{-1/2}\mathbf{f}_P) = \mathbf{f}_P\cdot(A^{-1}\mathbf{f}_P) = \nu\mathbf{f}_P\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{Poiseuille}}\,.$$

Juntando as estimativas, chegamos a

$$\langle U \rangle \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{h^2}{\nu L_x} P \,.$$

Inserindo isso na expressão para o coeficiente de atrito, obtemos

$$C_f = \frac{Ph}{L_x \langle U \rangle^2} \geq \frac{Ph}{L_x \langle U \rangle} \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{\nu L_x}{h^2 P} = 2\sqrt{3} \frac{\nu}{h \langle U \rangle} \,.$$

Da definição do número de Reynolds, chegamos finalmente à estimativa por baixo

$$C_f \geq 2\sqrt{3} \frac{1}{\mathrm{Re}} \,.$$

2.5.2 Estimativa por cima para C_f

Note que ao multiplicarmos as equações de Navier-Stokes por $\mathbf{u}$, integrarmos o resultado em Ω, e tomarmos a média amostral, chegamos à relação

$$\varepsilon \leq \frac{P \langle U \rangle}{L_x} \,.$$

Dessa forma, vemos que estimativas por baixo para ε levam a estimativas por baixo para $\langle U \rangle$, que nos dão estimativas por cima para C_f. Vamos, então, buscar estimativas por baixo para ε.

Consideramos essencialmente a idéia em Constantin & Doering (1995), mas seguindo um caminho ligeiramente diferente para evitar uma possível falta de regularidade das soluções. A idéia é considerar um "escoamento de fundo" $\bar{\mathbf{U}}$ da forma

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = \bar{U}(z) \mathbf{e}_x \,,$$

onde $\bar{U}$ é uma função continuamente diferenciável por partes, satisfazendo $\bar{U}(0) = \bar{U}(h) = 0$. Vamos inicialmente obter estimativas dependendo de $\bar{U}$. Em seguida, vamos restringir a forma de $\bar{U}$ e "maximizar" essas estimativas intermediárias para obter a estimativa desejada.

A "flutuação" em relação ao escoamento de fundo $\bar{\mathbf{U}}$ é denotada por $\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})$.

Para simplificar a notação, dado um campo de vetores $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, vamos escrever o produto tensorial $\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{a}(\mathbf{x})$ simplesmente por $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{a}(\mathbf{x})$. Assim, multiplicando as equações de Navier-Stokes por $\bar{\mathbf{U}}$, integrando em Ω e tomando a média amostral, obtemos

$$\nu \langle \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nabla}\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle = \int_\Omega \mathbf{f}_P(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \langle \int_\Omega ((\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle \,.$$

Como

$$\begin{aligned} &\langle \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}))|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle \\ &\qquad = \langle \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle - 2 \langle \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nabla}\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle + \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla}\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} \,, \end{aligned}$$

chegamos a

$$\begin{aligned} L_x\, L_y\, h\, \varepsilon &= \nu \langle \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} \rangle \\ &= \nu \langle \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}))|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} \rangle + 2 \int_\Omega \mathbf{f}_P(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\quad - 2 \langle \int_\Omega ((\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} \rangle - \nu \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x}\,. \end{aligned}$$

E como $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = (\bar{U}(z), 0, 0)$, não é difícil ver que

$$\begin{aligned} &- \langle \int_\Omega ((\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} \rangle \\ &\qquad\qquad = \langle \int_\Omega ((\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nabla})\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})) \,\mathrm{d}\mathbf{x} \rangle\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L_x\, L_y\, h\, \varepsilon = 2 \langle \int_\Omega \mathbf{f}_P(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} \rangle - \nu \langle \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} \rangle + \langle H_{\bar{\mathbf{U}}}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{U}}) \rangle\,,$$

onde

$$\begin{aligned} \langle H_{\bar{\mathbf{U}}}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{U}}) \rangle &= \nu \langle \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}))|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} \rangle \\ &\quad + 2 \langle \int_\Omega ((\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nabla})\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})) \,\mathrm{d}\mathbf{x} \rangle\,. \end{aligned}$$

Restringindo os possíveis escoamentos de fundo $\bar{\mathbf{U}}$ àqueles que satisfazem a condição $\langle H_{\bar{\mathbf{U}}}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{U}}) \rangle \geq 0$, obtemos uma estimativa por baixo para $\langle \varepsilon \rangle$ em função dos dois primeiros termos da desigualdade acima. Isso pode ser expresso da seguinte forma:

$$L_x\, L_y\, h\, \varepsilon \geq \sup_{\bar{\mathbf{U}} \in \bar{\mathcal{U}}} \left(2 \int_\Omega \mathbf{f}_P(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} - \nu \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} \right)\,,$$

onde

$$\bar{\mathcal{U}} = \left\{ \bar{\mathbf{U}} = (\bar{U}(z), 0, 0)\,,\ \bar{U}(h) = \bar{U}(0) = 0\,,\ \langle H_{\bar{\mathbf{U}}}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{U}}) \rangle \geq 0 \right\}\,.$$

Uma estimativa mais explícita pode ser obtida restringindo ainda mais o conjunto de possíveis escoamentos de fundo. Consideramos, como em Constantin & Doering (1995), escoamentos da forma

$$\bar{\mathbf{U}}(z) = \begin{cases} \dfrac{U_0}{\delta} z\,, & 0 \leq z \leq \delta\,, \\ U_0\,, & \delta \leq z \leq h - \delta\,, \\ \dfrac{U_0}{\delta}\,(h - z)\,, & h - \delta \leq z \leq h \end{cases}$$

onde $U_0 > 0$ e $0 < \delta \le h/2$. Observe que δ faz o papel de uma "camada limite" e U_0 é a velocidade do escoamento de fundo no interior do canal, fora da camada limite.

Uma desigualdade importante que usamos vem de uma estimativa precisa para o menor autovalor associado ao operador diferencial de segunda ordem restrito a funções que se anulam apenas na base ou apenas no topo do canal. Essa estimativa toma a forma

$$\lambda_1 \int_0^\delta |\varphi(z)|^2 \, dz \le \int_0^\delta \left| \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right|^2 \, dz \,,$$

para toda função continuamente diferenciável por partes $\varphi : [0, \delta] \to 0$ com $\varphi(0) = 0$, onde o primeiro autovalor é dado por $\lambda_1 = \pi^2/4\delta^2$, Uma estimativa semelhante pode ser escrita para a integral entre $h - \delta$ e h, relativa à camada limite no topo do canal. Assim, o termo $H_{\bar{\mathbf{U}}}(\mathbf{u}')$, onde $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{U}}$, pode ser estimado (detalhes em Ramos, Rosa & Temam) da forma

$$H_{\bar{\mathbf{U}}}(\mathbf{u}') \ge \left(\nu - \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \delta U_0 \right) \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}'(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \,.$$

Portanto, podemos garantir que $H_{\bar{\mathbf{U}}}(\mathbf{u}')$ é não-negativo considerando δ e U_0 tais que

$$\delta U_0 \le \frac{\sqrt{2}\pi^2 \nu}{4} \,.$$

Além disso, para essas escolhas de $\bar{\mathbf{U}}$, temos

$$2 \int_\Omega \mathbf{f}_P(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \nu \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} = 2 L_y \left(hPU_0 - P\delta U_0 - \nu L_x \frac{U_0^2}{\delta} \right) \,.$$

Agora, para obter a melhor estimativa possível a partir dessa expressão, precisamos maximizar o lado direito da identidade acima restrito às condições

$$U_0 > 0 \,, \qquad 0 < \delta \le \frac{h}{2} \qquad \text{e} \qquad \delta U_0 \le c\nu \,,$$

onde, para simplificar, introduzimos $c = \sqrt{2}\pi^2/4$. Para efeito da maximização, podemos considerar apenas

$$\psi(U_0, \delta) = hPU_0 - P\delta U_0 - \nu L_x \frac{U_0^2}{\delta} \,.$$

Procurando U_0 e δ tais que $\boldsymbol{\nabla}\psi(U_0, \delta) = (0, 0)$, vemos que o máximo dessa função ocorre em

$$U_0 = \frac{h^2 P}{9\nu L_x} \,, \qquad \delta = \frac{h}{3} \,.$$

Mas esse máximo só está na região permitida quando

$$\frac{h^2 P}{9\nu L_x} \le \frac{3c\nu}{h} \,,$$

ou seja,

$$P \leq 27c\frac{\nu^2 L_x}{h^3}\,.$$

Caso

$$P > 27c\frac{\nu^2 L_x}{h^3}\,,$$

o máximo estará, necessariamente, no contorno da região. Como $\psi(U_0,\delta)$ se anula em $U_0 = 0$ e vai para menos infinito quando δ vai para zero, esse máximo tem que pertencer a uma das curvas $\delta = h/2$ e $\delta U_0 = c\nu$. É fácil ver, também, que para que o máximo de ψ ao longo de $\delta = h/2$ esteja dentro da região, devemos ter $P \leq 16c\nu^2 L_x/h^3$, o que não vale no caso considerado. Portanto, nesse caso, o máximo pertence à curva $\delta U_0 = c\nu$. Procurando o máximo de ψ ao longo dessa curva, vemos que esse máximo ocorre em

$$U_0 = \frac{c^{1/2}}{3^{1/2}}\frac{h^{1/2}}{L_x^{1/2}}P^{1/2}\,, \qquad \delta = 3^{1/2}c^{1/2}\frac{\nu L_x^{1/3}}{h^{1/2}}\frac{1}{P^{1/2}}\,.$$

É possível verificar que nesse caso esse máximo ao longo dessa curva está na região permitida. Dessa forma, concluimos que

$$\max_{(U_0,\delta)\in\mathcal{R}} \psi(U_0,\delta) = \begin{cases} \dfrac{1}{27}\dfrac{h^3}{\nu L_x}P^2\,, & \text{se } 0 < P \leq 27c\dfrac{\nu^2 L_x}{h^3}\,, \\ \dfrac{2c^{1/2}}{3^{3/2}}\dfrac{h^{3/2}}{L_x^{1/2}}P^{3/2} - c\nu P\,, & \text{se } P > 27c\dfrac{\nu^2 L_x}{h^3}\,, \end{cases}$$

onde $\mathcal{R} = \{(U_0,\delta);\ U_0 > 0,\ 0 < \delta \leq h/2,\ \delta U_0 \leq c\nu\}$ é a região permitida.

Chegamos, então, à seguinte estimativa por baixo para a taxa média de dissipação viscosa de energia cinética:

$$L_x L_y h\varepsilon \geq 2L_y \begin{cases} \dfrac{1}{27}\dfrac{h^3}{\nu L_x}P^2\,, & \text{se } 0 < P \leq 27c\dfrac{\nu^2 L_x}{h^3}\,, \\ \dfrac{2c^{1/2}}{3^{3/2}}\dfrac{h^{3/2}}{L_x^{1/2}}P^{3/2} - c\nu P\,, & \text{se } P > 27c\dfrac{\nu^2 L_x}{h^3}\,. \end{cases}$$

Lembrando que $\varepsilon \leq P\langle U\rangle/L_x$, temos

$$\langle U\rangle \geq \begin{cases} \dfrac{2}{27}\dfrac{h^2}{\nu L_x}P\,, & \text{se } 0 < P \leq 27c\dfrac{\nu^2 L_x}{h^3}\,, \\ \dfrac{4c^{1/2}}{3^{3/2}}\dfrac{h^{1/2}}{L_x^{1/2}}P^{1/2} - 2c\dfrac{\nu}{h}\,, & \text{se } P > 27c\dfrac{\nu^2 L_x}{h^3}\,. \end{cases}$$

Podemos reescrever isso como estimativas para P da forma

$$P \leq \begin{cases} \dfrac{27}{2}\dfrac{\nu L_x}{h^2}\langle U\rangle\,, & \text{se } 0 < P \leq 27c\dfrac{\nu^2 L_x}{h^3}\,, \\ \dfrac{27}{16c}\dfrac{L_x}{h}\left(\langle U\rangle + 2c\dfrac{\nu}{h}\right)^2\,, & \text{se } P \geq 27c\dfrac{\nu^2 L_x}{h^3}\,. \end{cases}$$

Como $C_f = Ph/L_x\langle U\rangle^2$ e $\mathrm{Re} = h\langle U\rangle/\nu$, obtemos

$$C_f \leq \begin{cases} \dfrac{27}{2}\dfrac{1}{\mathrm{Re}}, & \text{se } 0 < P \leq 27c\dfrac{\nu^2 L_x}{h^3}, \\ \dfrac{27}{16c}\left(1 + 2c\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\right)^2, & \text{se } P \geq 27c\dfrac{\nu^2 L_x}{h^3}. \end{cases}$$

Substituindo o valor de c, obtemos, finalmente,

$$C_f \leq \begin{cases} \dfrac{27}{2}\dfrac{1}{\mathrm{Re}}, & \text{se } 0 < P \leq \dfrac{27\sqrt{2}\pi^2}{4}\dfrac{\nu^2 L_x}{h^3}, \\ \dfrac{27\sqrt{2}}{8\pi^2}\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}\pi^2}{2}\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\right)^2 & \text{se } P \geq \dfrac{27\sqrt{2}\pi^2}{4}\dfrac{\nu^2 L_x}{h^3}. \end{cases}$$

É interessante notar, também, que, no caso de P grande, o máximo que leva à estimativa acima é obtido com a camada limite de ordem

$$\delta \sim \frac{\nu L_x^{1/2}}{h^{1/2}}\frac{1}{P^{1/2}},$$

enquanto que a velocidade no interior do canal é de ordem

$$U_0 \sim \frac{h^{1/2}}{L_x^{1/2}}P^{1/2}.$$

2.6 Referências

Batchelor, GK; “The theory of homogeneous turbulence,” Cambridge University Press, Cambridge, (1953).

Bercovici H, Constantin P, Foias C, Manley OP; “Exponential decay of the power spectrum of turbulence,” *J. Stat. Phys.* **80**, 579-602 (1995).

Busse FH; “The optimum theory of turbulence,” *Adv. Appl. Mech.* **18**, 77-121 (1978).

Childress S, Kerswell RR, Gilbert AD; “Bounds on dissipation for Navier-Stokes flow with Kolmogorov forcing,” *Physica D* **158**, 105-128 (2001).

Constantin P, Doering CR; “Variational bounds on energy dissipation in incompressible flows II: channel flow,” *Phys. Rev. E* **51**, 3192-3198 (1995).

Constantin P, Doering CR; “Variational bounds on energy dissipation in incompressible flows: shear flow,” *Phys. Rev. E* **49**, 4087-4099 (1994).

Constantin P, Foias C, Manley OP; “Effects of the forcing function on the energy spectrum in 2-D turbulence,” *Phys. Fluids* **6**, 427-429 (1994).

Constantin P, Foias C; “Navier-Stokes equations,” University of Chicago Press, Chicago (1988).

Doering CR, Eckhardt B, Schumacher; “Energy dissipation in body-forced plane shear flow,” *J. Fluid Mech.* **494**, 275-284 (2003).

Doering CR, Foias C; “Energy dissipation in body-forced turbulence,” *J. Fluid Mech.* **467**, 289-306 (2002).

Doering CR, Constantin P; “Energy dissipation in shear driven turbulence,” *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1648-1651 (1992). Erratum: *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3000 (1992).

Eyink GL; “Dissipation in turbulent solutions of 2D Euler equations,” *Nonlinearity* **14**, 787-802 (2001).

Foias C, Jolly MS, Manley OP; “Kraichnan turbulence via finite time averages,” *Commun. Math. Phys.* **255**, 329-361 (2005).

Foias C, Jolly MS, Manley O, Rosa R, Temam R; “Kolmogorov theory via finite-time averages,” *Physica D* **212**, 245-270 (2005).

Foias C, Jolly MS, Manley OP, Rosa R; “On the Landau-Lifschitz degrees of freedom in 2-D turbulence,” *J. Stat. Phys.* **111**, 1017-1019 (2003).

Foias C, Jolly MS, Manley OP, Rosa R; “Statistical estimates for the Navier-Stokes equations and the Kraichnan theory of 2-D fully developed turbulence,” *J. Stat. Phys.* **108**, 591-645 (2002).

Foias C, Manley OP, Rosa R, Temam R; “Navier-Stokes equations and turbulence,” in *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, **83**, Cambridge University Press, Cambridge (2001).

Foias C, Manley OP, Rosa R, Temam R; “Cascade of energy in turbulent flows,” *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **332**, 509-514 (2001).

Foias C, Manley OP, Rosa R, Temam R; “Estimates for the energy cascade in three-dimensional turbulent flows,” *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **333**, 499-504 (2001).

Foias C, Manley OP, Temam R; “Bounds for the mean dissipation of 2-D enstrophy and 3-D energy in turbulent flows,” *Phys. Lett. A* **174**, 210-215 (1993).

Foias C; "What do the Navier-Stokes equations tell us about turbulence?" in *Harmonic Analysis & Nonlinear Differential Equations*, (Riverside, CA, 1995) *Contemp. Math.* **208**, 151-180 (1997).

Foias C; "Statistical study of Navier-Stokes equations II," *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **49**, 9-123 (1973).

Foias C, "Statistical study of Navier-Stokes equations I," *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **48**, 219-348 (1972).

Frisch U; "Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov," Cambridge University Press (1995).

Kerswell RR; "Unification of variational methods for turbulent shear flows: the background method of Doering-Constantin and the mean-fluctuation method of Howard-Busse," *Physica D* **121**, 175-192 (1998).

Hopf E; "Statistical hydromechanics and functional calculus," *J. Ration. Mech. Anal.* **1**, 87-123 (1952).

Hopf E; "Eberhard Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen," *Math. Nachr.* **4**, 213-231 (1951).

Kolmogorov AN; "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers," *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)* **30**, 301-305 (1941).

Hinze JO; "Turbulence," McGraw-Hill, New York (1975).

Howard LN; "Bounds on flow quantities," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **4**, 473-494 (1972).

Ladyzhenskaya O; "The mathematical theory of viscous incompressible flow," edição revisada em inglês, traduzido do russo por Richard A. Silverman; Gordon and Breach Science Publishers, New York-London (1963).

Leray J; "Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueaux que limitent des parois," *J. Math. Pures Appl.* **13**, 331-418 (1934).

Leray J; "Essai sur les mouvements d'un liquide visqueux emplissant l'espace," *Acta Math.* **63**, 193-248 (1934).

Leray J; "Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique," *J. Math. Pures Appl.* **12**, 1-82 (1933).

Lesieur M; “Turbulence in fluids,” 3ª edição, in *Fluid Mechanics and its Applications* **40**, Kluwer Academic, Dordrecht (1997).

Monin AS, Yaglom AM; “Statistical fluid mechanics: mechanics of turbulence,” MIT Press, Cambridge, MA (1975).

Nicodemus R, Grossmann S, Holthaus M; “The background flow method. Part 1. Constructive approach to bounds on energy dissipation,” *J. Fluid Mech.* **363**, 281-300 (1998).

Nicodemus R, Grossmann S, Holthaus M; “Improved variational principle for bounds on energy dissipation in turbulent shear flow,” *Physica D* **101**, 178-190 (1997).

Prandtl L; “Über die ausgebildete Turbulenz,” *Z. Angew. Math. Mech.* **5**, 136-139 (1925).

Ramos F, Rosa R, Temam R; “Statistical estimates for channel flows driven by a pressure gradient,” to be submitted.

Romanov VA; “Stability of plane-parallel Couette flow,” *Soviet Physics Dokl.* **16**, 90-91 (1971), traduzido de *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **196**, 1049-1051 (1971).

Rosa R; “Turbulence theories,” in *Encyclopedia of Mathematical Physics* **5**, 295-302. Françoise JP, Naber GL, Tsou ST (organizadores). Elsevier, Oxford (2006).

Rosa R; “Some results on the Navier-Stokes equations in connection with the statistical theory of stationary turbulence,” *Applications of Mathematics* **47**, 485-516 (2002).

Temam R; “Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis,” in *Studies in Mathematics and its Applications*, 3ª edição, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York (1984). Reedição em 2001 na *AMS Chelsea series*, AMS, Providence.

Tennekes H, Lumley JL; “A First course in turbulence,” MIT Press, Cambridge, Mass. (1972).

Vishik MI, Fursikov AV; “Mathematical problems of statistical hydrodynamics,” Kluwer, Dordrecht (1988).

Vishik MI, Fursikov AV; “L’équation de Hopf, les solutions statistiques, les moments correspondant aux systémes des équations paraboliques quasilinéaires,” *J. Math. Pures Appl.* **59**, 85-122 (1977).

Wang X; “Effect of tangential derivative in the boundary layer on time averaged energy dissipation rate,” *Physica D* **144**, 142-153 (2000).

Wang X; “Time averaged energy dissipation rate for shear driven flows in $\mathbb{R}^n$,” *Physica D* **99**, 555-563 (1997).