
Turbulência

Atila P. Silva Freire
*Programa de Engenharia Mecânica
COPPE/UFRJ*

Anderson Ilha
*Diretoria de Metrologia Científica e Industrial
Inmetro*

Marcelo J. Colaço
*Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais
Instituto Militar de Engenharia*

Editores

ABCM – Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica
COPPE/UFRJ – Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia
IME – Instituto Militar de Engenharia

Coleção Cadernos de Turbulência
Turbulência, Volume 5, Tomo 1.

5^a Escola de Primavera em Transição e Turbulência
Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro
25 a 29 de setembro de 2006

Editores

Atila P. Silva Freire, *Programa de Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ*
Anderson Ilha, *Diretoria de Metrologia Científica e Industrial, Inmetro*
Marcelo J. Colaço, *Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais, IME*

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Processos Técnicos da
Biblioteca do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro

Escola de Primavera em Transição e Turbulência (5.:2006: Rio de Janeiro, RJ)
Turbulência: Anais da V Escola de Primavera em Transição e Turbulência,
Rio de Janeiro, 25 a 29 de setembro de 2006 /editores Atila P. Silva Freire,
Anderson Ilha e Marcelo J. Colaço. Rio de Janeiro: ABCM, 2006.
XVI, 466 p.; 23,5 cm – (Coleção Cadernos de Turbulência. Turbulência, V. 5, Tomo 1)
Inclui bibliografias

1. Turbulência. 2. Mecânica dos fluidos. 3. Fenômenos de transporte.
I. Freire, Atila P. Silva II. II. V EPTT (5.:2006: Rio de Janeiro, RJ).
III. Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica. IV. Título. II.

Série

629.1332

E74t

ISBN (10 dígitos): 85-85769-24-6

ISBN (13 dígitos): 978-85-85769-24-6

Copyright 2006, Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica, ABCM.

A ABCM não autoriza a reprodução de qualquer parte desta publicação para sua distribuição em geral, para promoções, para a criação de novas publicações ou para a venda. Apenas através de prévia solicitação, por escrito, e em casos.

Documento preparado pelos Editores em \LaTeX .

Impresso no Brasil pela Gráfica Graffito.

ISBN 85-85769-24-6



9 788585 769246

Conteúdo

1	Mecânica do Contínuo e Turbulência	1
1.1	Introdução	1
1.2	Descrição do movimento	2
1.3	Conjuntos materiais	4
1.4	Gradiente de deformação, estiramento, cisalhamento e rotação . . .	5
1.5	Gradiente de velocidades, taxa de deformação e giro	7
1.6	Equações de transporte para os tensores gradiente de velocidade, taxa de deformação e vorticidade	10
1.7	Convecção e difusão da vorticidade	10
1.8	Mudança de observador	11
1.9	Identificação de vórtices	12
1.10	Referências	14
2	Estimativas rigorosas para escoamentos turbulentos baseadas nas equações de Navier-Stokes	17
2.1	Introdução	17
2.2	As equações de Navier-Stokes	18
2.3	Quantidades médias, médias amostrais e soluções estatísticas . . .	19
2.4	Teoria de Kolmogorov e alguns resultados rigorosos	21
2.4.1	A lei de dissipação de energia de Kolmogorov	21
2.4.2	Cascata de energia	22
2.5	Escoamento em um canal liso sob um gradiente de pressão (e em outras geometrias)	24
2.5.1	Estimativa por baixo para C_f	26
2.5.2	Estimativa por cima para C_f	27
2.6	Referências	31
3	Introdução à teoria estatística da turbulência	37
3.1	Introdução	37
3.2	Descrição estatística da turbulência	40
3.2.1	Aspectos cinéticos	40
3.2.2	Aspectos dinâmicos	55
3.3	Fenomenologia de Kolmogorov	63

3.3.1	Leis de escala na faixa inercial	63
3.3.2	Complexidade computacional das DNS	66
3.3.3	Decaimento temporal da energia	68
3.3.4	Dispersão de Richardson	69
3.4	O fenômeno da intermitência	73
3.4.1	Anomalias de escala	73
3.4.2	Densidades de probabilidade	74
3.4.3	Modelos fenomenológicos	76
3.4.4	Formalismo multifractal	83
3.4.5	Auto-similaridade estendida	90
3.5	Projeto de conclusão	91
3.6	Referências	92
4	Princípios de anemometria térmica	99
4.1	Introdução	99
4.2	Princípios básicos	101
4.2.1	Modos de operação	102
4.2.2	A ponte de Wheatstone	103
4.2.3	Tipos de sensores	106
4.2.4	A transferência de calor entre o fio-quente e o fluido	107
4.2.5	Leis de calibração	109
4.3	Anemômetro de corrente constante	110
4.3.1	Princípio de funcionamento	110
4.3.2	Filtragem do sinal	112
4.4	Anemômetro de temperatura constante	112
4.4.1	O circuito de controle	113
4.4.2	A taxa de sobreaquecimento	117
4.4.3	Controle digital	119
4.5	Resposta dinâmica da ponte CTA	121
4.5.1	Modelos da dinâmica do anemômetro	125
4.5.2	Teste de resposta em frequência e teste de resposta transitória	127
4.6	Medição de velocidade	130
4.6.1	Sensibilidade direcional	132
4.6.2	Medição de duas componentes de velocidade	134
4.6.3	Medição do vetor velocidade	136
4.7	Medição simultânea de velocidade e temperatura	138
4.7.1	Calibração de temperatura para o fio-frio	139
4.7.2	Calibração direta de velocidade e de temperatura para o sensor de fio-quente	140
4.7.3	Métodos de compensação analítica	142
4.7.4	Aparato experimental	143
4.7.5	Comparação entre os métodos	146
4.8	Aquisição e tratamento de dados	148
4.8.1	Condicionamento e aquisição do sinal	149
4.8.2	Cálculo das estatísticas do escoamento	151

4.9	Análise de incertezas	155
4.9.1	Tipos de erros associados à medição	155
4.9.2	Incerteza da medição	156
4.9.3	Incerteza dos resultados	157
4.10	Aplicações	157
4.10.1	Escoamento ao redor de um cilindro	158
4.10.2	Escoamento sobre placa plana	159
4.10.3	Escoamento sobre superfície rugosa	162
4.11	Agradecimentos	167
4.12	Referências	167
5	Fundamentos de anemometria laser-Doppler	173
5.1	Preâmbulo	173
5.2	Introdução	175
5.3	Princípios básicos	179
5.3.1	Fonte de luz coerente	180
5.3.2	O efeito Doppler	181
5.3.3	O modelo de franjas	185
5.3.4	Resolução do sentido da velocidade	187
5.3.5	Ajuste do desvio de frequência	189
5.4	Teoria de reflexão da luz por partículas pequenas	191
5.4.1	A teoria de Lorenz-Mie	193
5.4.2	Características reflexivas do feixe de laser	195
5.4.3	Partículas em anemometria laser-Doppler	195
5.4.4	Detecção posterior ou anterior ao volume de controle	198
5.5	Geração do sinal	201
5.5.1	Detecção da luz refletida	201
5.5.2	Características do sinal da anemometria laser-Doppler	203
5.6	Aquisição e tratamento do sinal	205
5.6.1	Processadores de sinal	205
5.6.2	Cálculo das estatísticas do escoamento	211
5.6.3	Estimativa do espectro e funções de correlação	213
5.7	Sistemas de anemometria laser-Doppler	221
5.7.1	Sistemas unidirecionais	221
5.7.2	Sistemas bidimensionais	223
5.7.3	Sistemas tri-dimensionais	225
5.7.4	Outros componentes ópticos e acessórios	226
5.8	Análise de incertezas	228
5.8.1	Cálculo dos erros associado a uma medida	229
5.8.2	Incerteza dos resultados	232
5.8.3	Cálculo do erro associado às medidas de velocidade	233
5.9	Aplicações	235
5.9.1	Jato livre	235
5.9.2	Escoamento sobre variação de topografia	238
5.10	Agradecimentos	246

5.11	Referências	246
6	Turbulência em fluidos não-newtonianos	253
6.1	Introdução	253
6.1.1	Escoamentos turbulentos de fluidos não-newtonianos	253
6.1.2	Breve revisão do estado da arte	254
6.1.3	Organização do curso/capítulo	258
6.2	Propriedades reológicas de fluidos não newtonianos	259
6.2.1	Fluidos inelásticos: a viscosidade de corte, viscosimétrica ou de cisalhamento	259
6.2.2	Comportamento dependente do tempo	261
6.2.3	Fluidos com tensão de cedência	263
6.2.4	Fluidos viscoelásticos	265
6.3	Modelos constitutivos reológicos	269
6.3.1	Introdução e equações fundamentais	269
6.3.2	Modelos inelásticos	271
6.3.3	Modelos para fluidos com tensão de cedência	275
6.3.4	Modelos viscoelásticos explícitos	276
6.3.5	Modelos viscoelásticos implícitos na tensão	277
6.3.6	Modelos multimodo	284
6.4	Escoamento turbulento em dutos	285
6.4.1	Introdução	285
6.4.2	Fluidos viscosos	286
6.4.3	Fluidos viscoelásticos	289
6.4.4	Efeitos de escala	293
6.5	Filosofias de modelagem da turbulência	295
6.6	Fechamento de turbulência para modelo reológico de tensão pseudo-elástica	297
6.6.1	Introdução	297
6.6.2	Equação constitutiva	298
6.6.3	Equações de transporte	300
6.6.4	Fechamento para a viscosidade molecular média	303
6.7	Modelo $\kappa - \varepsilon$ anisotrópico de baixo número de Reynolds	306
6.8	Vários aspectos da modelagem	308
6.8.1	Função de amortecimento viscoso	308
6.8.2	A função de amortecimento f_μ	308
6.8.3	Modelo para a tensão pseudo-elástica	312
6.8.4	Resultados e discussão	317
6.9	Modelos de turbulência com base no modelo FENE-P	324
6.9.1	Introdução	324
6.9.2	Equações de governo e necessidades de modelação	324
6.9.3	Desenvolvimentos futuros	330
6.9.4	Modelos para outras equações constitutivas de fluidos	330
6.10	Referências	331

7	Transferência de calor em escoamentos turbulentos parietais	341
7.1	Introdução	341
7.2	As equações instantâneas	342
7.2.1	Introdução	342
7.2.2	Fluxo turbulento de calor em escoamentos parietais dilatáveis	343
7.2.3	A adimensionalização das equações instantâneas	345
7.2.4	Escoamentos dilatáveis	347
7.3	Formulação estatística para escoamentos dilatáveis	348
7.3.1	Funções estatísticas	351
7.3.2	Um modelo estatístico para escoamentos dilatáveis	353
7.3.3	As equações médias	354
7.3.4	As equações médias adimensionais	355
7.4	O problema de fechamento	356
7.4.1	Formulação evolutiva para o problema de fechamento	356
7.4.2	Formulação constitutiva para o problema de fechamento	365
7.4.3	Modelos de turbulência de origem constitutiva	368
7.5	Leis de parede	372
7.5.1	Introdução	372
7.5.2	A camada limite turbulenta de temperatura	373
7.5.3	Dedução da lei de parede para a camada limite térmica	378
7.5.4	O número de Prandtl turbulento	383
7.5.5	Determinação analógica dos fluxos turbulentos parietais de calor	386
7.6	Resultados	388
7.6.1	Introdução	388
7.6.2	Resultados	392
7.6.3	Conclusão	398
7.7	Agradecimentos	398
7.8	Referências	399
8	Simulação numérica de escoamentos complexos	405
8.1	Introdução	405
8.2	O conceito de decomposição de campos	409
8.2.1	A equação de Reynolds	410
8.2.2	Equações de transporte para o tensor de Reynolds	414
8.2.3	A equação para o transporte de escalares	417
8.2.4	Equações de transporte para o fluxo turbulento de escalares	418
8.3	Modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta	419
8.3.1	O conceito de viscosidade turbulenta	419
8.3.2	O modelo $\kappa - \varepsilon$	422
8.3.3	O modelo $\kappa - \omega$	429
8.3.4	O modelo <i>shear stress transport (SST)</i>	431
8.4	Modelos para a equação de transporte do tensor de Reynolds	432
8.4.1	O modelo <i>LRR</i>	435
8.4.2	O modelo <i>SSG</i>	438

8.4.3	O modelo <i>BSL</i> $\kappa - \omega$	439
8.5	Aplicações	440
8.5.1	Escoamento sobre colinas abruptas	440
8.5.2	Jato impingente sobre placa plana	453
8.6	Referências	460

Prefácio

O ato quase solene de escrever o Prefácio de um livro necessariamente provoca em seu escritor momentos de profunda reflexão. Afinal, o objeto de tanta dedicação intelectual se mostra por completo, desnudo, em suas virtudes e defeitos.

Em sua forma definitiva, que não pode ser modificada, o livro deveria não apenas transmitir aos seus leitores a letra fria do rigor de suas construções teóricas, mas, principalmente, o espírito de toda a sofisticação intelectual que se pretende alcançar.

O presente texto pertence a uma já extensa e exitosa família. A série de escolas dedicadas exclusivamente à investigação da turbulência de fluidos deu origem a outros textos que marcaram época. A manutenção da alta estirpe, pois, poderia causar sérios embaraços a novas contribuições.

A Turbulência é uma matéria com sabidas dificuldades conceituais, que exige de seus militantes especializações múltiplas e sofisticadas. Esse texto, sem dúvida, preencherá lacunas importantes no arcabouço de métodos e técnicas que se pretendem disponíveis para um ataque consistente às dificuldades de natureza teóricas e práticas impostas pela Turbulência àqueles que a ambicionam assaltar. Temas do mais alto grau de complexidade e importância são dissecados em dois tomos que formam uma obra com doze capítulos. Um julgamento honesto dos Editores classifica a presente contribuição como da maior relevância tanto para iniciantes como para pesquisadores experientes no assunto.

A dedicação dos autores e seu compromisso com o resultado final dessa jornada foram da maior sensibilidade. Os Editores, sinceramente, esperam que os leitores reconheçam as muitas horas de trabalho abnegado que permitiram a existência desta obra.

Finalmente, talvez devêssemos agora nos inquirir sobre o propósito de tudo isso. Por que trabalhar com tamanho afincamento para a existência dessa obra? A resposta é simples e singela: para a construção de uma sociedade melhor. Um objetivo que nos tem sido caro e que nos possibilitou encontrar aliados importantes na ABCM, na FAPERJ e no CNPq. Este projeto é, sobretudo, uma iniciativa feliz da ABCM e do Pronex “Núcleo de Excelência em Turbulência” um projeto apoiado pela FAPERJ e pelo CNPq (Processo No E-26/171.198/2003).

Os Editores

Agradecimentos



Relação de Autores

Capítulo 1

página 1

Fernando Pereira Duda
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 2

página 17

Fábio Ramos
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Ricardo Rosa
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Roger Temam
Department of Mathematics
Indiana University, Bloomington
IN 47405-5701
USA

Capítulo 3

página 37

Luca Moriconi
Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 4**página 99**

Juliana B. R. Loureiro
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

José Luiz da Silva Neto
Programa de Engenharia Elétrica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 5**página 173**

Juliana B. R. Loureiro
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Fernando T. Pinho
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade do Porto
Porto 4200-465
Portugal

Capítulo 6**página 253**

Daniel Cruz
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade Federal do Pará
Belém 66075-970 Brasil

Fernando Pinho
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade do Porto
Porto 4200-465
Portugal

Capítulo 7**página 341**

José Luiz Fontoura
Depto. de Engenharia Mecânica
Universidade de Brasília
Brasília, D.F. 70910-900
Brasil

Capítulo 8

página 405

Alexandre T. P. Alho
Depto. Engenharia Naval e Oceânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Anderson Ilha
Diretoria de Metrologia Científica
Instituto Nacional de Metrologia
Duque de Caxias, 22050-050
Rio de Janeiro Brasil

Capítulo 3

Introdução à teoria estatística da turbulência

Turbulência

O vento experimenta
o que irá fazer
com sua liberdade...

João Guimarães Rosa, *Magma* (1936).

3.1 Introdução

A teoria estatística da turbulência, introduzida há cerca de 70 anos em um trabalho pioneiro de G.I. Taylor (1935), é, atualmente, uma área de atividade intensa, acompanhando de perto o rápido passo dos novos desenvolvimentos computacionais e experimentais das duas últimas décadas. O nosso propósito com esta monografia é estabelecer fundamentos, mais do que revisar técnicas específicas de investigação. Dessa forma, queremos apresentar com um certo nível de detalhe, em uma *solução de compromisso* pragmática, aqueles resultados que devem pertencer à “bagagem” de formação de qualquer pesquisador com um sério interesse no assunto.

O problema que iremos discutir é, em linhas gerais, extremamente simples de se enunciar. Queremos descrever, de um ponto de vista estatístico, as soluções da equação de Navier-Stokes

$$\partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha = -\partial_\alpha P + \nu \partial^2 v_\alpha + f_\alpha,$$

suplementada pela condição de transversalidade (= incompressibilidade)

$$\partial_\alpha v_\alpha = 0.$$

À primeira vista, nosso problema parece mal formulado, pois não definimos quais são as condições de contorno e as forças externas a que o fluxo de fluido está

submetido. Esta crítica é pertinente se o interesse é modelar o escoamento ao longo de todas as escalas de comprimento, como se almeja em várias aplicações tecnológicas. A preocupação fundamental da teoria estatística da turbulência, entretanto, é estudar o comportamento das flutuações turbulentas a escalas diminutas, para fluxos livres de cisalhamento externo e no limite de grandes números de Reynolds. É aqui que a hipótese de universalidade da turbulência desenvolvida oferece uma perspectiva otimista de investigação. Conjectura-se que a escalas suficientemente pequenas, a dinâmica da turbulência torna-se insensível aos “detalhes finos” das condições de contorno e das forças que garantem a estacionariedade do estado turbulento.

Após décadas de experimentação real e numérica, a hipótese de universalidade assenta-se como um dos pilares razoavelmente bem verificados sobre os quais a teoria estatística da turbulência se apoia. No quadro mais simples que pode se considerar atualmente, toda a informação a respeito das forças externas e condições de contorno, necessária para atacar o problema das pequenas escalas, resume-se a apenas dois parâmetros, a taxa de dissipação de energia por unidade de massa, ε , e uma escala de comprimento integral, L . Supomos que esses dois parâmetros serão suficientes, de fato, se tanto as superfícies que limitam o escoamento como as forças externas forem dominadas, no espaço de Fourier, por modos contidos em uma esfera de raio $k < 1/L$.

Ainda embora a arena principal de estudo da teoria estatística da turbulência não abarque questões mais diretamente ligadas aos problemas práticos, seria incorreto supor que ela negligencia completamente o problema do fluxo próximo às bordas. Sabemos que o campo de velocidade flutua intensamente em uma camada limite turbulenta, o que mostra a absoluta necessidade de um tratamento estatístico ali. Observamos que alguns trabalhos recentes têm sido devotados a questões desta natureza (Sreenivasan, 1988; Perry & Marusic, 2001; Lo *et al.*, 2005), o que é um esforço muito bem-vindo, mas até o momento incapaz de derivar a célebre lei logarítmica da parede, por exemplo. O ponto é que o fluxo próximo à superfície de objetos quebra algumas simetrias da equação de Navier-Stokes, como as invariâncias de translação e rotação, o que dificulta enormemente o tratamento de problemas deste tipo. Esta discussão nos remete, então, a um aspecto crucial da teoria estatística da turbulência homogênea: ela se ocupa da classe de fluxos turbulentos que minimizam, através de mecanismos internos puramente dinâmicos, a quebra de simetrias provocada pela atividade dos turbilhões definidos a grandes escalas de comprimento.

Tendo em vista o papel fundamental das simetrias na teoria estatística da turbulência, é interessante elencar aqui as simetrias elementares conhecidas da equação de Navier-Stokes, no caso de força externa nula, $f_\alpha(\vec{x}, t) = 0$ e para os limites $L \rightarrow \infty$ e $\nu \rightarrow 0$, associados, assintoticamente, a números de Reynolds elevados:

I. Translação Espacial (homogeneidade):

$$t' = t, \quad \vec{x}' = \vec{x} + \vec{\rho}, \quad v'_\alpha(\vec{x}', t') = v_\alpha(\vec{x}, t).$$

II. Translação Temporal (estacionariedade):

$$t' = t + \delta, \quad \vec{x}' = \vec{x}, \quad v'_\alpha(\vec{x}', t') = v_\alpha(\vec{x}, t).$$

III. Invariância de Galileo:

$$t' = t, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{u}t, \quad v'_\alpha(\vec{x}', t') = v_\alpha(\vec{x}, t) - u_\alpha.$$

IV. Paridade:

$$t' = t, \quad \vec{x}' = -\vec{x}, \quad v'_\alpha(\vec{x}', t') = -v_\alpha(\vec{x}, t).$$

V. Inversão Temporal:

$$t' = -t, \quad \vec{x}' = \vec{x}, \quad v'_\alpha(\vec{x}', t') = -v_\alpha(\vec{x}, t).$$

VI. Invariância de Rotação (isotropia):

$$t' = t, \quad x'_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta}x_\beta, \quad v'_\alpha(\vec{x}', t') = \Lambda_{\alpha\beta}v_\beta(\vec{x}, t),$$

onde $\Lambda_{\alpha\beta} \in SO(3)$.

VII. Invariância de Escala:

$$t' = \lambda^{1-h}t, \quad \vec{x}' = \lambda\vec{x}, \quad v'_\alpha(\vec{x}', t') = \lambda^h v_\alpha(\vec{x}, t),$$

onde $\lambda > 0$ e h é um número real arbitrário.

As transformações de simetria para o campo de pressão seguem-se imediatamente daquelas para o campo de velocidade, pois como é bem sabido, temos

$$P = -\partial^{-2}\partial_\alpha[v_\beta\partial_\beta v_\alpha].$$

Não é absolutamente óbvio, entre as simetrias listadas acima, quais serão verificadas na forma dos valores esperados calculados sobre flutuações turbulentas. Esta é uma questão central da teoria estatística da turbulência que chama a nossa atenção aos fenômenos de quebra espontânea de simetria (simetrias não realizadas, porém preservadas) e das anomalias (simetrias não preservadas), a serem discutidos nas seções subsequentes.

Nas nossas considerações estatísticas, estaremos supondo ergodicidade, o que é, sem dúvida, uma hipótese extremamente forte no contexto da turbulência, pois mesmo na mecânica estatística do equilíbrio – o berço da hipótese ergódica – não há qualquer prova rigorosa de ergodicidade para os modelos realistas mais simples. A hipótese ergódica significa que existem, essencialmente, duas maneiras de se calcular o valor esperado de um funcional geral (isto é, um observável) do campo de velocidade, representado por $\mathcal{O}[v_\alpha(\vec{x}, t)]$:

$$\langle \mathcal{O}[v_\alpha(\vec{x}, t)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\xi \mathcal{O}[v_\alpha(\vec{x}, t + \xi)]$$

ou

$$\langle \mathcal{O}[v_\alpha(\vec{x}, t)] \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}[v_\alpha^{(i)}(\vec{x}, t)],$$

onde o índice i denota realizações diferentes do fluxo, geradas, por exemplo, a partir de um conjunto razoável de condições iniciais fixadas no passado remoto ($t \rightarrow -\infty$).

Há um bom número de livros-texto, começando pelo clássico Batchelor (1953), onde se discutem alguns dos aspectos abordados nestas notas. Uma seleção interessante é dada pelas referências: Frisch (1995), Davidson (2004), Landau & Lifschitz (1993), McComb (1991), Pope (2000) e Tsinober (2001). Deve-se levar em conta que em função da grande diversidade de tópicos da área, vários dos quais estabelecidos apenas recentemente e publicados até agora apenas como artigos originais, dificilmente haverá um tratado que ofereça um panorama completo da teoria estatística da turbulência.

3.2 Descrição estatística da turbulência

3.2.1 Aspectos cinéticos

Veremos aqui que as hipóteses gerais de homogeneidade/estacionaridade, simetria de paridade e transversalidade, mencionadas na seção anterior irão se refletir em resultados estatísticos bem definidos para as flutuações do campo de velocidade turbulento, sem que tenhamos que nos preocupar em investigar a equação de Navier-Stokes em detalhe. A nossa motivação inicial é, portanto, procurar deduzir o máximo de informação estatística associada ao fenômeno da turbulência, a partir de idéias gerais, dispensando o uso de resultados dinâmicos mais específicos, decorrentes das equações de movimento.

Correlatores de segunda ordem

Considere dois pontos arbitrários \vec{x} e $\vec{x} + \vec{\rho}$ do espaço. Um objeto matemático de grande importância na teoria estatística da turbulência é a a função de correlação de dois pontos do campo de velocidade (ou o “correlator velocidade-velocidade”) definida como

$$A_{\alpha\beta}(\vec{\rho}) \equiv \langle v_\alpha(\vec{x}, t) v_\beta(\vec{x} + \vec{\rho}, t) \rangle. \quad (3.1)$$

As hipóteses de estacionariedade e homogeneidade nos permitem afirmar, como de fato já foi adiantado na relação acima, que este correlator não depende do tempo, mas tão somente do vetor deslocamento $\vec{\rho}$. Por outro lado, as condições de transversalidade e isotropia implicam em

$$A_{\alpha\beta}(\vec{\rho}) = \Pi_{\alpha\beta} F(\rho), \quad (3.2)$$

onde $F(\rho)$ é uma função que depende apenas da distância de separação $\rho = |\vec{\rho}|$ e $\Pi_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \partial^{-2} \partial_{\alpha\beta}$ é o operador de projeção sobre modos transversos. A fim

de provar (3.2), observamos que a natureza tensorial de $A_{\alpha\beta}$ nos permite escrever, com generalidade, que

$$A_{\alpha\beta}(\vec{\rho}) = \delta_{\alpha\beta}F_1(\rho) + \partial_\alpha\partial_\beta F_2(\rho) \quad (3.3)$$

para algum par de funções $F_1(\rho)$ e $F_2(\rho)$. Aplicando a condição de transversalidade, $\partial_\alpha A_{\alpha\beta} = \partial_\beta A_{\alpha\beta} = 0$, na Eq. (3.3), obtemos

$$F_2 = -\partial^{-2}F_1. \quad (3.4)$$

Assim, substituindo (3.4) em (3.3) e comparando o resultado com a Expressão (3.2), segue-se que $F(\rho) = F_1(\rho)$.

Exercício 1:

Para sermos mais precisos, poderíamos ter agregado, de fato, a forma tensorial $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma F_3(\rho)$ à Eq. (3.3) para obter uma expressão verdadeiramente geral. Entretanto, mostre, usando simetria de paridade, que $F_3(\rho) = 0$.

Grandes esforços têm sido dedicados há várias décadas com o objetivo de se descobrir como a energia cinética turbulenta é particionada ao longo das escalas de comprimento. O foco desses estudos é o espectro de energia do fluxo turbulento no espaço de Fourier, obtido diretamente a partir da função de correlação de dois pontos do campo de velocidade. Seja

$$\Gamma(\rho) = A_{\alpha\alpha}(\vec{\rho}) = \langle v_\alpha(\vec{x}, t)v_\alpha(\vec{x} + \vec{\rho}, t) \rangle. \quad (3.5)$$

O *espectro de energia tridimensional* é definido como a transformada de Fourier de $\Gamma(\rho)$:

$$E_{3D}(k) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\rho} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{\rho}) \Gamma(\rho). \quad (3.6)$$

Escrevendo $\Gamma(\rho)$ como a transformada de Fourier inversa de $E_{3D}(k)$,

$$\Gamma(\rho) = \int d^3\vec{k} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\rho}) E_{3D}(k), \quad (3.7)$$

e fazendo $\rho = 0$, obtemos

$$\Gamma(0) = \langle \vec{v}^2 \rangle = \int d^3\vec{k} E_{3D}(k) = \int_0^\infty dk 4\pi k^2 E_{3D}(k), \quad (3.8)$$

de forma que a densidade de energia cinética será escrita como

$$\frac{1}{2}\Gamma(0) = \int_0^\infty dk 2\pi k^2 E_{3D}(k) \equiv \int_0^\infty dk E(k), \quad (3.9)$$

onde

$$E(k) = 2\pi k^2 E_{3D}(k) \quad (3.10)$$

é chamado de *espectro de energia* simplesmente.

Exercício 2:

Integrando (3.6) nas variáveis de ângulo sólido, em coordenadas esféricas, mostre que

$$E_{3D}(k) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{k} \text{sen}(k\rho) \Gamma(\rho) \quad (3.11)$$

e, portanto,

$$E(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\rho k \rho \text{sen}(k\rho) \Gamma(\rho). \quad (3.12)$$

Exercício 3:

Mostre, comparando as Expressões (3.2) e (3.5), que $F(\rho) = \frac{1}{2}\Gamma(\rho)$.

A verificação experimental das hipóteses gerais sobre as quais as relações anteriores fundamentam-se não é tão simples como poderia se supor à primeira vista. Para confirmar a validade direta da forma funcional da Eq. (3.2), por exemplo, seria necessário determinar o perfil detalhado do campo de velocidade em todo o espaço ocupado pelo fluido para várias realizações diferentes do escoamento turbulento. Uma tarefa desta natureza exigiria não apenas métodos de detecção bastante sofisticados, mas também uma enorme capacidade de processamento computacional, fatores ainda hoje limitantes, apesar dos grandes progressos tecnológicos recentes.

Todavia, podemos afirmar com segurança que as nossas hipóteses fundamentais são razoavelmente comprovadas pela experimentação, quando uma análise cuidadosa é produzida a partir daquilo que é possível mensurar, como discutiremos a seguir. Tipicamente, um sinal turbulento com frequência alta de amostragem é captado em um túnel de vento ou em uma estação atmosférica via anemometria de fio quente. O sinal de velocidade corresponde, pela hipótese de turbulência congelada de Taylor, a um corte unidimensional, isto é, uma “linha” no espaço 3D. Imaginando que esta linha seja, por definição, o eixo x , teremos, portanto, acesso experimental aos valores esperados

$$A_{\alpha\beta}(\vec{\rho}) \equiv \langle v_\alpha(\vec{x}, t) v_\beta(\vec{x} + \rho \hat{x}, t) \rangle, \quad (3.13)$$

com os quais introduzimos, agora, as transformadas de Fourier unidimensionais,

$$\Theta_{\alpha\beta}(k_1) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \exp(-ik_1\rho) A_{\alpha\beta}(\vec{\rho}). \quad (3.14)$$

Usamos, acima, a notação k_1 ao invés de k para o número de onda, por dois motivos simples: primeiro, para nos lembrarmos de que estamos considerando

transformadas de Fourier unidimensionais; segundo, diferentemente de k , que é não-negativo, temos $-\infty < k_1 < \infty$.

Reunindo as Eqs. (3.2) e (3.7) e o resultado do Exercício 3, podemos escrever

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}(\vec{\rho}) &= \frac{1}{2}\Pi_{\alpha\beta}\Gamma(\rho) = \frac{1}{2}\Pi_{\alpha\beta}\int d^3\vec{k}\exp(i\vec{k}\cdot\vec{\rho})E_{3D}(\vec{k}) \\ &= \frac{1}{2}\int d^3\vec{k}\exp(i\vec{k}\cdot\vec{\rho})\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)E_{3D}(k). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Tomando, de acordo com (3.13), $\vec{\rho} = \rho\hat{x}$, e substituindo (3.15) em (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha\beta}(k_1) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\rho\exp(-ik_1\rho)\int d^3\vec{k}'\exp(ik_1'\rho)\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k'_\alpha k'_\beta}{k'^2}\right)E_{3D}(k') \\ &= \frac{1}{2}\int d^3\vec{k}'\delta(k'_1-k_1)\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k'_\alpha k'_\beta}{k'^2}\right)E_{3D}(k'). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Investigaremos $\Theta_{\alpha\beta}$ para os casos (i) $\alpha = \beta = 1$ e (ii) $\alpha = \beta = 2$. O espectro de energia $E(k)$ poderá ser escrito convenientemente, de fato, em termos de $\Theta_{11}(k)$ (Exercício 4). Ademais, os casos (i) e (ii) estão funcionalmente relacionados entre si (Exercício 6), o que fornece uma maneira factível e ao mesmo tempo rigorosa de se testar experimentalmente hipóteses gerais da teoria da turbulência homogênea e isotrópica.

(i) Caso $\alpha = \beta = 1$:

Obtemos, a partir de (3.10) e (3.16),

$$\Theta_{11}(k_1) = \frac{1}{4\pi}\int dk_2 dk_3 \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) \frac{E(k)}{k^2}, \quad (3.17)$$

onde $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. Definindo as coordenadas planares $\vec{k}_\perp = (k_2, k_3) = k_\perp(\cos\phi, \sin\phi)$, e integrando sobre o ângulo polar ϕ , podemos re-escrever a equação acima como

$$\Theta_{11}(k_1) = \frac{1}{2}\int_0^\infty k_\perp dk_\perp \left(1 - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_\perp^2}\right) \frac{E(\sqrt{k_1^2 + k_\perp^2})}{k_1^2 + k_\perp^2}. \quad (3.18)$$

A troca de variáveis $k_\perp \rightarrow k$, com $k = \sqrt{k_1^2 + k_\perp^2}$, torna a expressão para $\Theta_{11}(k_1)$ ainda mais simples:

$$\Theta_{11}(k_1) = \frac{1}{2}\int_{k_1}^\infty dk \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) \frac{E(k)}{k}. \quad (3.19)$$

(ii) Caso $\alpha = \beta = 2$:

Novamente, usando (3.10) e (3.16), escrevemos

$$\Theta_{22}(k_1) = \frac{1}{4\pi} \int dk_2 dk_3 \left(1 - \frac{k_2^2}{k^2}\right) \frac{E(k)}{k^2}. \quad (3.20)$$

Observe que a integral acima não muda se fizermos a permutação de variáveis $k_2 \leftrightarrow k_3$. Este fato permite simetrizar (3.20), conduzindo-nos a

$$\begin{aligned} \Theta_{22}(k_1) &= \frac{1}{8\pi} \int dk_2 dk_3 \left(2 - \frac{k_2^2 + k_3^2}{k^2}\right) \frac{E(k)}{k^2} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int dk_2 dk_3 \left(2 - \frac{k^2 - k_1^2}{k^2}\right) \frac{E(k)}{k^2} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int dk_2 dk_3 \left(1 + \frac{k_1^2}{k^2}\right) \frac{E(k)}{k^2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Seguindo, agora, passos inteiramente análogos àqueles que levaram da Eq. (3.17) até a Eq. (3.19), obtemos

$$\Theta_{22}(k_1) = \frac{1}{4} \int_{k_1}^{\infty} dk \left(1 + \frac{k_1^2}{k^2}\right) \frac{E(k)}{k}. \quad (3.22)$$

Note que os valores esperados $\Theta_{11}(k_1)$ e $\Theta_{22}(k_1)$, chamados de “espectros de energia unidimensionais” possuem a mesma dimensão que $E(k)$ e, na realidade, são essencialmente equivalentes, a menos de um fator multiplicativo, ao espectro de energia quando este decai algebricamente no espaço de Fourier (Exercício 5), como se acredita ocorrer na turbulência.

Exercício 4:

Mostre, usando a Eq. (3.19) que

$$E(k) = k^3 \frac{d}{dk} \left[\frac{1}{k} \frac{d\Theta_{11}(k)}{dk} \right]. \quad (3.23)$$

Exercício 5:

Considere o espectro de energia

$$E(k) = \begin{cases} ck_0^{-\alpha}, & \text{se } k < k_0, \\ ck^{-\alpha}, & \text{se } k > k_0, \end{cases} \quad (3.24)$$

com $\alpha > 0$. Obtenha $\Theta_{11}(k)$ e $\Theta_{22}(k)$ para $k > k_0$.

Exercício 6:

Mostre, usando (3.19) e (3.22) que

$$\Theta_{22}(k_1) = \frac{1}{2} \left[\Theta_{11}(k_1) - k_1 \frac{d\Theta_{11}(k_1)}{dk_1} \right]. \quad (3.25)$$

A Expressão (3.25) implica em uma relação, no espaço físico, entre as componentes tensoriais $A_{11}(\vec{\rho})$ e $A_{22}(\vec{\rho})$. Para obter esta relação, substituímos diretamente a Eq. (3.14) em (3.25). Obtemos

$$\begin{aligned} \int d\rho \exp(-ik_1\rho) A_{22}(\vec{\rho}) &= \frac{1}{2} \int d\rho \exp(-ik_1\rho) A_{11}(\vec{\rho}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d\rho \exp(-ik_1\rho) i k_1 \rho A_{11}(\vec{\rho}) \\ &= \frac{1}{2} \int d\rho \exp(-ik_1\rho) A_{11}(\vec{\rho}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d\rho \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \exp(-ik_1\rho) \right] \rho A_{11}(\vec{\rho}) \\ &= \frac{1}{2} \int d\rho \exp(-ik_1\rho) \left[A_{11}(\vec{\rho}) + \frac{d}{d\rho} (\rho A_{11}(\vec{\rho})) \right] \\ &= \int d\rho \exp(-ik_1\rho) \left[A_{11}(\vec{\rho}) + \frac{1}{2} \rho \frac{d}{d\rho} A_{11}(\vec{\rho}) \right], \end{aligned} \quad (3.26)$$

o que leva a

$$A_{22}(\vec{\rho}) = A_{11}(\vec{\rho}) + \frac{1}{2} \rho \frac{d}{d\rho} A_{11}(\vec{\rho}) \quad (3.27)$$

para $\vec{\rho} = \rho \hat{x}$. É comum adimensionalizar a equação acima, fazendo uso da variância, v_0^2 , de uma componente cartesiana qualquer da velocidade. Por isotropia,

$$v_0^2 \equiv A_{11}(0) = A_{22}(0) = A_{33}(0). \quad (3.28)$$

Definindo, então (lembrando que $\vec{\rho} = \rho \hat{x}$),

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \frac{A_{11}(\vec{\rho})}{v_0^2}, \\ g(\rho) &= \frac{A_{22}(\vec{\rho})}{v_0^2} = \frac{A_{33}(\vec{\rho})}{v_0^2}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

re-escrevemos a versão adimensionalizada da Eq. (3.27) como

$$g(\rho) = f(\rho) + \frac{1}{2} \rho \frac{d}{d\rho} f(\rho). \quad (3.30)$$

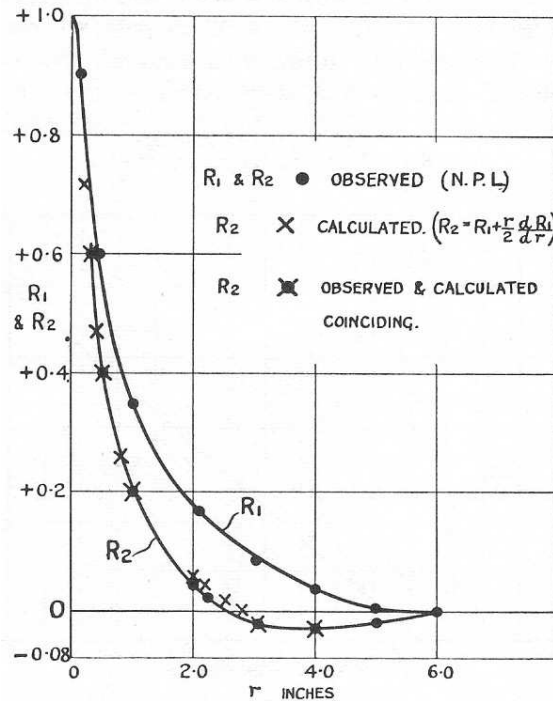


Figura 3.1: Determinações diretas de $f(\rho)$ e $g(\rho)$ e indiretas [via Eq.(3.30)] de $g(\rho)$, respectivamente, obtidas por Simmons e Salter, como reportadas em Taylor (1938).

A Eq. (3.30) reflete as propriedades conjecturadas de homogeneidade/estacionariedade e isotropia do fluxo turbulento. Sua verificação experimental, como indicada na Figura 3.1, é um marco importante da teoria estatística da turbulência. Observe, entretanto, que a simetria de paridade não é testada por (3.30), pois apenas as componentes tensoriais não-diagonais da função de correlação velocidade-velocidade contém este tipo de informação (veja o Exercício 1). O problema da existência ou não de simetria de paridade em turbulência homogênea tem recebido atenção recentemente e existem indicações de que esta simetria possa, de fato, ser espontaneamente quebrada (isto é, a simetria não seria observada a pequenas escalas, mesmo em escoamentos turbulentos sob condições de contorno/iniciais simétricas) (Kurien, 2004; Kholmyansky *et al.*, 2001).

Com o intuito de se treinar um pouco mais a aplicação das idéias de simetria e a análise cinética de valores esperados, seguem-se alguns exercícios adicionais.

Exercício 7:

Retornando à definição de $F_3(\rho)$, dada no Exercício 1, mostre que o valor esperado da helicidade, $h \equiv \vec{\omega} \cdot \vec{v}$, é

$$\langle \vec{\omega} \cdot \vec{v} \rangle = -2 \partial^2 F_3(\rho)|_{\rho=0}, \quad (3.31)$$

onde $\omega_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta v_\gamma$ representa a vorticidade. Dessa forma, a observação de helicidade média não-nula, em determinado tipo de experimento, poderia fornecer evidência sobre o fenômeno da quebra espontânea de simetria de paridade.

Exercício 8:

Tomando a transformada de Fourier do campo de velocidade, $\tilde{v}_\alpha(\vec{k})$, mostre que $E_{3D}(k) = \langle |\tilde{v}_\alpha(\vec{k})|^2 \rangle$ e que, portanto, o espectro de energia satisfaz a $E(k) > 0$.

Exercício 9:

Usando as Eqs. (3.2), (3.13) e a definição de $f(\rho)$ em (3.29), mostre que

$$A_{\alpha\beta}(\vec{\rho}) = \frac{v_0^2}{2\rho} \left[\delta_{\alpha\beta} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 f) - \rho_\alpha \rho_\beta \frac{df}{d\rho} \right]. \quad (3.32)$$

Sugestão: Faça $F(\rho) \equiv \partial^2 G(\rho)$ e encontre a relação entre $G(\rho)$ e $f(\rho)$.

Exercício 10:

(i) Mostre, a partir da desigualdade evidente $\langle [v_1(\vec{x}) + \lambda v_1(\vec{x}')]^2 \rangle \geq 0$, para qualquer λ real, que $|f(\rho)| \leq 1$. Usando um argumento análogo, mostre que $|g(\rho)| \leq 1$. Obs: não existe nenhuma razão, a priori, para que $f(\rho)$ seja estritamente positiva. Entretanto, é isto o que se observa em turbulência, devido às peculiaridades do espectro de energia (veja Davidson (2004) para uma discussão).

(ii) Mostre que $\int_0^\infty d\rho \rho g(\rho) = 0$ (isto é, $g(\rho)$ possuirá, necessariamente, valores positivos e negativos).

Exercício 11:

Considere um campo escalar qualquer $\phi(\vec{x}, t)$ (por exemplo, o campo de pressão ou o campo de densidade de energia cinética). Mostre que $\langle \phi(\vec{x}, t) v_\alpha(\vec{x}', t) \rangle = 0$.

Exercício 12:

Ainda considerando um campo escalar qualquer $\phi(\vec{x}, t)$, mostre que

$$\langle [\phi(\vec{x}, t) - \phi(\vec{x}', t)]^3 \rangle = 0.$$

Transformadas de Fourier e o teorema da amostragem

Considere a produção, por meio de anemometria de fio quente, de uma amostra discretizada, de tamanho N , dos valores de velocidade turbulenta ao longo de um corte unidimensional do espaço 3D. Os parâmetros essenciais aqui são o tamanho do sinal, que consiste de N pontos, e a separação temporal a , entre duas observações consecutivas da velocidade. Em outras palavras, o sinal, obtido com taxa de amostragem $\nu = 1/a$, possui extensão temporal Na .

Um dos problemas importantes com o qual o experimentalista se depara é aquele de fixar convenientemente os valores de a e N , bem como o número de amostras, de forma a poder investigar, por exemplo, as relações obtidas na subseção (3.2.1) para o espectro de energia e funções de correlação. Para desenvolver uma discussão mais específica, seja, então, u_r a componente longitudinal da velocidade em um túnel de vento, captada por um anemômetro, onde $r = 1, 2, \dots, N$. Faremos corresponder à velocidade u_r , pela hipótese de Taylor, a medição realizada em um ponto de coordenada espacial $x_r \equiv (r-1)aU$, onde U é a velocidade média do escoamento. A transformada de Fourier unidimensional discreta de u_r pode ser definida como

$$\tilde{u}_s = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=1}^N u_r \exp(-ik_s x_r), \quad (3.33)$$

onde $k_s = 2\pi(s-1)/aU$ é o número de onda discretizado, com $s = -N/2, -N/2+1, \dots, N/2-1$. Teremos, portanto,

$$\langle |\tilde{u}_s|^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \sum_{r'=1}^N \langle u_r u_{r'} \rangle \exp[-ik_s(x_r - x_{r'})]. \quad (3.34)$$

Usando agora a versão de Fourier invertida da Eq. (3.14), obtemos

$$\langle u_r u_{r'} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \Theta_{11}(k_1) \exp[ik_1(x_r - x_{r'})]. \quad (3.35)$$

Substituindo (3.35) em (3.34), encontramos

$$\langle |\tilde{u}_s|^2 \rangle = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 |A(k_1 - k_s)|^2 \Theta_{11}(k_1), \quad (3.36)$$

onde

$$A(k_1 - k_s) = \sum_{r=1}^N \exp[ix_r(k_1 - k_s)]. \quad (3.37)$$

A Soma (3.37) pode ser calculada exatamente, pois é uma soma de progressão geométrica. Definindo $q = \exp[iaU(k_1 - k_s)]$, temos

$$A(k_1 - k_s) = \sum_{r=0}^{N-1} q^r = q^{\frac{N-1}{2}} \left\{ \frac{\text{sen} \left[\frac{NaU}{2}(k_1 - k_s) \right]}{\text{sen} \left[\frac{aU}{2}(k_1 - k_s) \right]} \right\}. \quad (3.38)$$

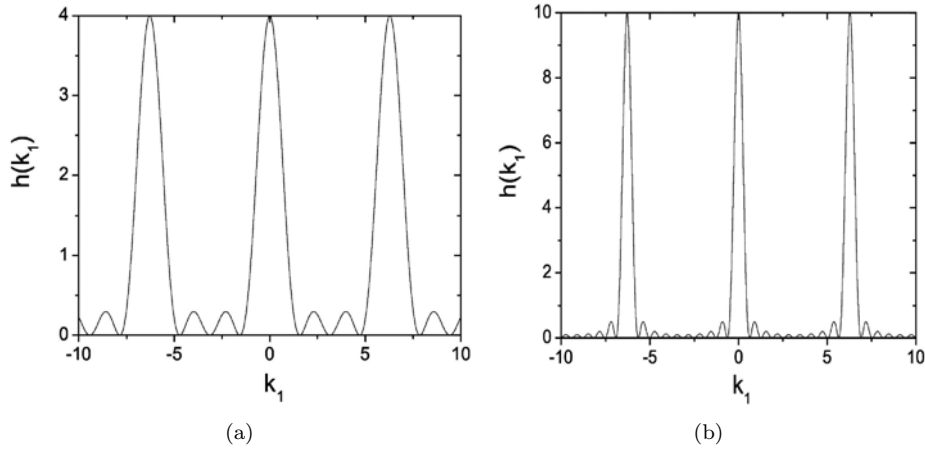


Figura 3.2: Gráficos de $h(k_1)$ para (a) $N = 4$ e (b) $N = 10$. Em ambas as curvas fizemos $aU = 1$.

Dessa forma, substituindo (3.38) em (3.36), obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle |\tilde{u}_s|^2 \rangle &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \frac{\text{sen}^2 \left[\frac{NaU}{2} (k_1 - k_s) \right]}{\text{sen}^2 \left[\frac{aU}{2} (k_1 - k_s) \right]} \Theta_{11}(k_1) \\
 &= \frac{1}{aU} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 h(k_1 - k_s) \Theta_{11}(k_1) \\
 &= \frac{1}{aU} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 h(k_1) \Theta_{11}(k_s + k_1),
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

onde

$$h(k_1) \equiv \frac{aU}{N} |A(k_1)|^2. \tag{3.40}$$

Exercício 13:

Mostre que

- (i) $\lim_{k_1 \rightarrow 0} h(k_1) = NaU$;
 - (ii) os zeros de $h(k_1)$ ocorrem para $k_1 = \pm 2\pi n / NaU$, com $n = \pm 1, \pm 2, \dots$;
 - (iii) $h(k_1)$ é uma função periódica de período $2\pi/aU$.
-

Os gráficos de $h(k_1)$ para os casos $N = 4$ e $N = 10$ estão mostrados na Figura 3.2. Fica claro, desta figura, que os picos tornam-se cada vez mais altos e estreitos à medida em que N aumenta. Fixando aU e tomando o limite $N \rightarrow \infty$, podemos

escrever, de fato, $h(k_1)$ como uma soma de funções delta de Dirac transladadas:

$$h(k_1) = c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(k_1 + \frac{2\pi n}{aU}\right), \quad (3.41)$$

onde c é uma constante a ser determinada. Observe, a partir de (3.41), que

$$\int_{-\pi/aU}^{\pi/aU} dk_1 h(k_1) = c. \quad (3.42)$$

Usando, então, (3.38), (3.40) e (3.42), encontramos

$$c = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{aU}{N} \int_{-\pi/aU}^{\pi/aU} dk_1 \frac{\text{sen}^2\left(\frac{NaU}{2} k_1\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{aU}{2} k_1\right)}. \quad (3.43)$$

A integral em k_1 pode ser re-escrita em termos de $x = NaUk_1/2$, o que dá

$$c = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N^2} \int_{-\pi N/2}^{\pi N/2} dx \frac{\text{sen}^2(x)}{\text{sen}^2(x/N)} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} = 2\pi. \quad (3.44)$$

O valor acima de c e as Eqs. (3.39) e (3.41) nos levam a

$$\langle |\tilde{u}_s|^2 \rangle = \frac{2\pi}{aU} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta_{11}\left(k_s + \frac{2\pi n}{aU}\right). \quad (3.45)$$

Uma escolha adequada de a estará relacionada à banda de frequências com a qual o sinal de velocidade é filtrado eletronicamente. Assim, imagine que o sinal seja descrito, após o tratamento eletrônico, pela banda de frequências angulares $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$, o que significa afirmar que $\Theta_{11}(k_1) = 0$ para $|k_1| > \omega_0/U$. Escolhendo $a \leq \pi/\omega_0$, a Eq. (3.45) nos dá

$$\langle |\tilde{u}_s|^2 \rangle = \frac{2\pi}{aU} \Theta_{11}(k_s). \quad (3.46)$$

Para que as transformadas discretas não sejam contaminadas por modos de Fourier adicionais (efeito de “aliasing”), como indicado pela Eq. (3.45), a frequência mínima de amostragem do sinal deverá ser, portanto,

$$1/a_{max} = \omega_0/\pi \equiv 2\nu_c, \quad (3.47)$$

onde $\nu_c = \omega_0/2\pi$ é a chamada “frequência de corte” do anemômetro. A fim de reconstruir corretamente o espectro de energia, por exemplo, a partir dos sinais produzidos por um anemômetro que opera com uma frequência de corte de 10 kHz, é necessário utilizar uma taxa de aquisição de 20 kHz. O Resultado (3.46) é, na realidade, uma aplicação particular do “teorema da amostragem” (ou “teorema de Nyquist”) da teoria de processamento de sinais Hubbard (1998).

Obviamente, ainda não respondemos à pergunta “quais são os valores razoáveis de N e a ?”, mas apenas concluímos que N deve ser tão grande quanto pudermos fazê-lo e que o valor máximo de a depende da frequência de corte ν_c do equipamento à disposição. Valores aceitáveis de N e a dependem de suposições acerca da natureza do escoamento que está sendo investigado. Verifica-se que a aproximação de turbulência homogênea e isotrópica é válida em uma faixa de números de onda $k_L \sim 1/L < k < k_\eta \sim 1/\eta$, a chamada “faixa inercial” (inertial range). As escalas de comprimento L – a escala integral – e η – a escala de Kolmogorov – são, a grosso modo, as escalas onde a energia é injetada e dissipada, respectivamente, no escoamento turbulento. Números de Reynolds elevados estão associados a $L/\eta \gg 1$. Para que a faixa inercial seja bem resolvida experimentalmente, queremos que a largura dos picos de $h(k_1)$ seja suficientemente pequena. Isto nos dá a seguinte condição (reveja o Exercício 13):

$$\frac{1}{NaU} \ll k_L, \quad (3.48)$$

isto é,

$$N \gg \frac{L}{aU}. \quad (3.49)$$

Por outro lado, se quisermos detectar flutuações que ocorrem até escalas pequenas de comprimento, da ordem de δ , deveremos impor

$$aU \sim \delta. \quad (3.50)$$

Como um exemplo realista, suponha que em um túnel de vento, tenhamos $U = 10$ m/s, $\eta = 10^{-4}$ m e $L = 0.2$ m. Um equipamento com frequência de corte de 20 kHz e, associado, pela Eq. (3.47), a $a = 2.5 \times 10^{-5}$ s, será capaz de sondar escalas de comprimento de até $\delta = 2.5 \times 10^{-4}$ m, isto é, $\delta = 2.5\eta$. Por outro lado, o tamanho da amostra terá de ser escolhido de forma a satisfazer a Relação (3.50), o que nos dá

$$N \gg 8 \times 10^2, \quad (3.51)$$

de maneira que $N = 5 \times 10^4$ já é, provavelmente, uma boa escolha para o tamanho de uma amostra simples.

O número de amostras necessário para se executar um cálculo razoavelmente preciso de valores esperados, tais como $\langle |\tilde{u}_s|^2 \rangle$, dependerá de quão flutuantes são os resultados obtidos amostra a amostra, o que é algo difícil de se controlar a priori. Supondo, grosseiramente, flutuações da ordem de 20% ao redor dos valores esperados, um conjunto de 400 amostras, estimativamente, fornecerá uma precisão de $0.2/\sqrt{400} \simeq 1\%$. Observe que 400 amostras corresponderiam aqui a um tempo total de medição de 500 segundos.

As escalas de comprimento integral e de Taylor

A definição usual do número de Reynolds envolve uma escala macroscópica de comprimento, denotada por L , a chamada de escala integral, já mencionada na

subseção anterior. Grosso modo, a escala integral dá a dimensão típica das maiores estruturas auto-correlacionadas, isto é dos turbilhões (“eddies”) coerentes, do escoamento. Uma maneira interessante de se definir L faz uso da função de correlação $g(\rho)$,

$$L \equiv \int_0^\infty d\rho g(\rho). \quad (3.52)$$

As definições utilizadas para o número de Reynolds não são universalmente padronizadas, o que é, às vezes, fonte de confusão. Uma definição razoável é a seguinte:

$$\text{Re} = \frac{Lv_0}{\nu}, \quad (3.53)$$

onde L é o comprimento dado por (3.52) e $v_0 = \sqrt{\langle v_1^2 \rangle}$. O número de Reynolds assim definido está associado, devido à definição da escala L , às flutuações de velocidade que ocorrem no “topo” da faixa inercial. É possível, de fato, definirmos um parâmetro adimensional, com papel semelhante ao do número de Reynolds que, entretanto, baseia-se em flutuações locais, definidas a pequenas escalas, o número de Reynolds-Taylor:

$$\text{R}_\lambda = \frac{\lambda v_0}{\nu}, \quad (3.54)$$

onde

$$\lambda \equiv \frac{v_0}{\sqrt{\langle (\partial_1 v_1)^2 \rangle}} \quad (3.55)$$

é a chamada “micro-escala de Taylor”.

Vamos mostrar, agora, que o número de Reynolds-Taylor pode ser escrito como

$$\text{R}_\lambda = \sqrt{\frac{10}{3}} \frac{E}{\nu \sqrt{\Omega}}, \quad (3.56)$$

onde $E = \langle \vec{v}^2 \rangle / 2$ e $\Omega = \langle \vec{\omega}^2 \rangle / 2$ são as densidades médias de energia e *enstrofia*, respectivamente. A prova de (3.56) baseia-se nas seguintes relações:

$$(i) \quad E = \frac{3}{2} v_0^2, \quad (3.57)$$

$$(ii) \quad \langle (\partial_1 v_1)^2 \rangle = \frac{2}{15} \Omega. \quad (3.58)$$

Um cálculo rápido nos faz ver que (3.54), (3.55), (3.57) e (3.58) levam à Eq. (3.56). Ao passo em que a Relação (3.57), decorre imediatamente de isotropia,

$$E = \frac{1}{2} \langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \rangle = \frac{3}{2} \langle v_1^2 \rangle = \frac{3}{2} v_0^2, \quad (3.59)$$

a prova de (3.58) é, por outro lado, mais delicada. Definimos, como ponto de partida, a função de correlação

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta}(\vec{\rho}) = \langle \partial_\alpha v_\beta(\vec{x}, t) \partial_\gamma v_\delta(\vec{x} + \vec{\rho}, t) \rangle. \quad (3.60)$$

Usando (3.2) e o resultado do Exercício 3, podemos re-escrever (3.60) como

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta}(\vec{\rho}) = -\frac{1}{2}\partial_\alpha\partial_\gamma\Pi_{\beta\delta}\Gamma(\rho). \quad (3.61)$$

Substituindo (3.7) em (3.61) e tomando $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$, obtemos

$$A_{1111}(\vec{\rho}) = \frac{1}{2}\int d^3\vec{k}k_1^2 [1 - k^{-2}k_1^2] E_{3D}(k) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\rho}). \quad (3.62)$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} A_{1111}(0) &= \langle (\partial_1 v_1)^2 \rangle = \frac{1}{2}\int d^3\vec{k}k_1^2 [1 - k^{-2}k_1^2] E_{3D}(k) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty dk k^4 E_{3D}(k) \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi [1 - \sin^2\theta \cos^2\phi] \sin^3\theta \cos^2\phi. \end{aligned} \quad (3.63)$$

As integrações angulares em (3.63) podem ser calculadas exatamente, levando a

$$\langle (\partial_1 v_1)^2 \rangle = \frac{4\pi}{15}\int_0^\infty dk k^4 E_{3D}(k). \quad (3.64)$$

Resta-nos desenvolver o cálculo de Ω . Consideremos a função de correlação vorticidade-vorticidade,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\langle \vec{\omega}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\omega}(\vec{x} + \vec{\rho}, t) \rangle &= \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\sigma\delta}\langle \partial_\beta v_\gamma(\vec{x}, t)\partial_\sigma v_\delta(\vec{x} + \vec{\rho}, t) \rangle \\ &= \frac{1}{2}[\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\beta\delta}\delta_{\gamma\sigma}]A_{\beta\gamma\sigma\delta}(\vec{\rho}) = -\frac{1}{4}[\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\beta\delta}\delta_{\gamma\sigma}]\partial_\beta\partial_\sigma\Pi_{\gamma\delta}\Gamma(\rho) \\ &= -\frac{1}{2}\partial^2\Gamma(\rho) = \frac{1}{2}\int d^3\vec{k}k^2 E_{3D}(k) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\rho}). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Nas igualdades acima, fizemos uso, em seqüência, das Eqs. (3.60), (3.61) e (3.7). Obtemos, da Eq. (3.65),

$$\Omega = \frac{1}{2}\langle \vec{\omega}^2 \rangle = \frac{1}{2}\int d^3\vec{k}k^2 E_{3D}(k) = 2\pi\int_0^\infty dk k^4 E_{3D}(k). \quad (3.66)$$

A Eq. (3.58) segue, então, diretamente de (3.64) e (3.66).

A função de correlação $g(\rho)$ fornece uma maneira alternativa de se calcular a micro-escala de Taylor λ . A expansão de $g(\rho)$ em série de potências, é, de fato,

$$g(\rho) = 1 - \frac{\rho^2}{\lambda^2} + \mathcal{O}(\rho^3). \quad (3.67)$$

A expansão de $g(\rho)$, truncada até a segunda ordem, é representada graficamente por uma parábola, mostrada na Figura 3.3 (a aproximação parabólica é boa, como

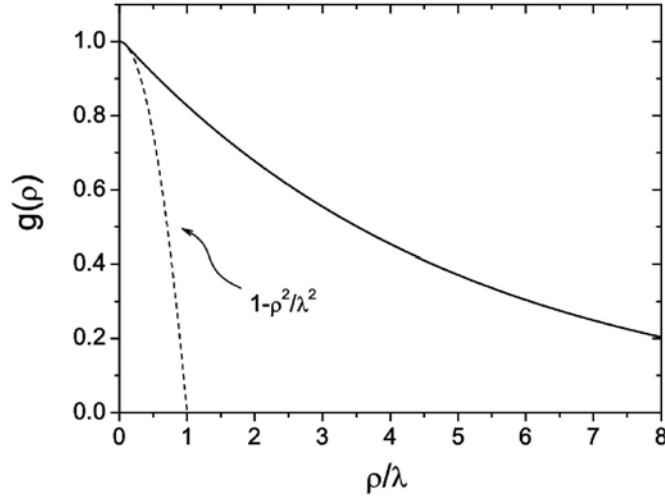


Figura 3.3: A linha sólida é o gráfico da função $g(\rho)$; a parábola tracejada representa a expansão de $g(\rho)$ até a segunda ordem em série de potências de ρ .

a experiência indica, apenas para $\rho \ll \lambda$). A Relação (3.67) é consequência da Eq. (3.30). Derivando esta última equação sucessivamente em relação a ρ , obtemos

$$\frac{d}{d\rho}g(\rho) = \frac{3}{2} \frac{d}{d\rho}f(\rho) + \frac{1}{2} \rho \frac{d^2}{d\rho^2}f(\rho) \quad (3.68)$$

e

$$\frac{d^2}{d\rho^2}g(\rho) = 2 \frac{d^2}{d\rho^2}f(\rho) + \frac{1}{2} \rho \frac{d^3}{d\rho^3}f(\rho). \quad (3.69)$$

Fazendo $\rho \rightarrow 0$ em (3.68) e (3.69) e usando a definição da micro-escala de Taylor, dada pela Relação (3.55), vem

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\rho}g(\rho) \right|_{\rho=0} &= \left. \frac{3}{2} \frac{d}{d\rho}f(\rho) \right|_{\rho=0} = \frac{3}{2v_0^2} \frac{d}{d\rho} \langle v_1(\vec{x}, t) v_1(\vec{x} + \rho \hat{x}, t) \rangle \Big|_{\rho=0} \\ &= \frac{3}{v_0^2} \langle \partial_1 v_1^2 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{d\rho^2}g(\rho) \right|_{\rho=0} &= \left. 2 \frac{d^2}{d\rho^2}f(\rho) \right|_{\rho=0} = \frac{2}{v_0^2} \frac{d^2}{d\rho^2} \langle v_1(\vec{x}, t) v_1(\vec{x} + \rho \hat{x}, t) \rangle \Big|_{\rho=0} \\ &= -\frac{2}{v_0^2} \langle (\partial_1 v_1)^2 \rangle = -\frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

As Eqs. (3.70) e (3.71) justificam, portanto, o Resultado (3.67).

A micro-escala de Taylor não possui uma interpretação física evidente, como no caso das escalas de comprimento integral e de Kolmogorov. Uma conjectura

recente (Holm *et al.*, 2005) propõe que a escala de Taylor demarca a transição entre a faixa inercial e a região dissipativa, no contexto lagrangiano, mas uma resposta conclusiva ainda não foi estabelecida. A discussão sobre a a escala dissipativa de Kolmogorov, η , de importância fundamental na turbulência, será aprofundada na Seção 3.3.

Exercício 14:

Mostre que

(i) $\langle (\partial_1 v_1)^2 \rangle = -2 \langle \partial_1 v_1 \partial_2 v_2 \rangle;$

(ii) $\langle \partial_1 v_1 \partial_2 v_1 \rangle = 0.$

Exercício 15:

Mostre que

(i) $\int_0^\infty d\rho f(\rho) = 2L;$

(ii) $f(\rho) = 1 - \rho^2/2\lambda^2 + \mathcal{O}(\rho^3).$

3.2.2 Aspectos dinâmicos

A equação de Navier-Stokes nos permite discutir, a princípio, questões dinâmicas associadas ao regime turbulento estacionário, tais como o balanço de energia e a “lei zero” da turbulência. Seremos capazes, adicionalmente, de estabelecer uma relação fundamental entre as funções de correlação de dois e três pontos – a equação de von Kármán-Howarth – que as hipóteses gerais de simetria não seriam suficientes para fornecer. A equação de von Kármán-Howarth é o pilar sobre o qual baseia-se um dos poucos resultados exatos (e, afortunadamente, de importância crucial) da teoria estatística da turbulência – a lei dos 4/5 de Kolmogorov.

A “lei zero” da turbulência

O balanço de energia em um fluxo turbulento pode ser estudado de maneira muito direta multiplicando escalarmente a equação de Navier-Stokes pelo campo de velocidade. Obtemos

$$v_\alpha \partial_t v_\alpha + v_\alpha v_\beta \partial_\beta v_\alpha = -v_\alpha \partial_\alpha P + \nu v_\alpha \partial^2 v_\alpha + v_\alpha f_\alpha. \quad (3.72)$$

A Eq. (3.72) pode ser re-escrita na forma de uma equação de continuidade,

$$\partial_t e + \partial_\alpha j_\alpha = -v_\alpha \partial_\alpha P + \nu v_\alpha \partial^2 v_\alpha + v_\alpha f_\alpha, \quad (3.73)$$

onde

$$e = \frac{1}{2} \bar{v}^2, \quad j_\alpha = e v_\alpha \quad (3.74)$$

são, respectivamente, a densidade de energia e a densidade de corrente de energia. O lado direito da Eq. (3.73) contém todas as fontes e sumidouros de energia

do nosso modelo: forças internas de pressão (componente conservativa) e de viscosidade (componente dissipativa) e a contribuição de força externa, responsável pela injeção de energia no fluido. Integrando (3.73) em todo o espaço (usando integrações parciais) e tomando valores médios, obtemos

$$\partial_t E = -\frac{\nu}{2} \int d^3 \vec{x} \langle [\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha]^2 \rangle + \int d^3 \vec{x} \langle v_\alpha f_\alpha \rangle. \quad (3.75)$$

Observe que a condição de estacionariedade pareceria, à primeira vista, incompatível com o limite de viscosidade nula: obteríamos, aparentemente, a relação $\int d^3 \vec{x} \langle v_\alpha f_\alpha \rangle = 0$. Entretanto – e aqui surge uma hipótese fundamental em turbulência – iremos supor que o primeiro termo no lado direito da equação acima não se anula no limite inviscido. A este fenômeno dá-se o nome de “anomalia dissipativa”, também conhecido como “lei zero” da turbulência. Em termos físicos, o limite de viscosidade nula deverá ser acompanhado de configurações que contém gradientes de velocidade cada vez mais intensos, como filamentos ou folhas de vorticidade.

No regime estacionário e homogêneo, obtemos, a partir de (3.75),

$$\langle v_\alpha f_\alpha \rangle = \frac{\nu}{2} \langle [\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha]^2 \rangle, \quad (3.76)$$

indicando que toda a energia injetada localmente no fluido por unidade de massa e por unidade de tempo (lado esquerdo da equação) será transformada em calor pelo mecanismo de dissipação viscosa (lado direito da equação). De acordo com a lei zero, este fato continua válido para viscosidades tão pequenas quanto se queira. Equivalentemente, por similaridade, imaginando a viscosidade como um parâmetro essencialmente fixo – como o é em termos experimentais – a lei zero nos diz que a taxa de dissipação de energia é estável mesmo na situação em que a injeção de energia esteja correlacionada em escalas de comprimento integral L progressivamente maiores. A lei zero da turbulência é um dos problemas matemáticos abertos mais importantes no tratamento rigoroso da equação de Navier-Stokes (Foias *et al.*, 2005).

“Anomalias” análogas são comuns em teoria quântica de campos, onde simetrias clássicas nem sempre são restauradas por um processo de limite, devido às perturbações causadas por flutuações quânticas. No nosso caso hidrodinâmico, a simetria de inversão temporal, dada por $t \rightarrow -t$ e $v_\alpha \rightarrow -v_\alpha$, válida para a equação de Euler, conservativa, não é válida para a equação de Navier-Stokes, mesmo no limite de viscosidade nula, como se pode verificar quando valores esperados são calculados. A energia mecânica, como o exemplo mais evidente, não é conservada neste limite, de acordo com a lei zero da turbulência.

Note que há uma diferença importante entre os conceitos de quebra espontânea de simetria e anomalia. No fenômeno da quebra espontânea de simetria, diferentemente do que ocorre no caso de anomalias, as leis de conservação continuam válidas no limite em que parâmetros que perturbam a simetria são removidos. Entretanto, as soluções das equações de movimento ou determinadas funções de correlação, por exemplo, não serão invariantes frente às transformações do grupo

de simetria quebrado. As soluções e funções de correlação alternativas que se obtém através da ação de elementos do grupo de simetria poderão ser observadas em outras realizações do mesmo experimento.

Uma metáfora consagrada, criada por Abdus Salam, nos ajuda a entender a quebra espontânea de simetria. Imagine uma mesa de jantar circular, onde entre cada dois pratos um guardanapo é simetricamente disposto. Obviamente, um convidado deverá selecionar um dos guardanapos e deixar o outro para o vizinho. Mas qual dos guardanapos é a escolha correta? aflito pelo dilema, um dos convidados precipita-se e escolhe o guardanapo à sua direita. Os outros, conseqüentemente, escolhem os guardanapos situados à direita de cada prato. Dizemos, assim, que o convidado precipitado *quebrou a simetria* de paridade que havia na mesa de jantar. Ele poderia ter escolhido o guardanapo à esquerda, é verdade, e a simetria de paridade teria sido quebrada de maneira alternativa. O fato da escolha do guardanapo à esquerda ser igualmente provável, a princípio, indica que a lei de conservação da paridade continua válida, quando investigada sobre o ensemble de todos os jantares deste tipo!

É comum indicar a taxa de dissipação de energia pelo símbolo ε , isto é,

$$\varepsilon = -\nu \langle v_\alpha \partial^2 v_\alpha \rangle . \quad (3.77)$$

Sob a hipótese de homogeneidade, teremos

$$\varepsilon = \nu \langle \partial_\beta v_\alpha \partial_\beta v_\alpha \rangle . \quad (3.78)$$

Observe que a segunda igualdade em (3.65) implica $\langle \vec{\omega}^2 \rangle = A_{\beta\alpha\beta\alpha}(0) - A_{\beta\alpha\alpha\beta}(0)$. Porém, devido à condição de incompressibilidade, $A_{\beta\alpha\alpha\beta}(0) = 0$, e assim,

$$\langle \vec{\omega}^2 \rangle = A_{\beta\alpha\beta\alpha}(0) = \langle \partial_\beta v_\alpha \partial_\beta v_\alpha \rangle . \quad (3.79)$$

Comparando as Eqs. (3.78) e (3.79), concluímos que

$$2\Omega = \langle \vec{\omega}^2 \rangle = \frac{\varepsilon}{\nu} , \quad (3.80)$$

ou seja, a enstrofia diverge no limite de viscosidade nula. Este resultado nos indica claramente que estruturas de vorticidade intensa deverão surgir no limite de números de Reynolds elevados. Usando (3.55) e (3.58), podemos escrever, a partir de (3.80),

$$\varepsilon = \frac{15\nu v_0^2}{\lambda^2} . \quad (3.81)$$

Há uma relação entre o número de Reynolds baseado na escala de Taylor e o número de Reynolds usual. Da Definição (3.54) de R_λ e de (3.81) vem que

$$R_\lambda^2 = \frac{\lambda^2 v_0^2}{\nu^2} = 15 \frac{(v_0^3/\varepsilon)v_0}{\nu} . \quad (3.82)$$

Supondo, no limite de viscosidade nula, que $L_\varepsilon \equiv v_0^3/\varepsilon$ não dependa de ν , então L_ε que tem dimensão de comprimento, deverá ser proporcional ao comprimento

integral L introduzido em (3.52). Dessa maneira, concluímos que a números de Reynolds elevados, vale $R_\lambda \propto \sqrt{\text{Re}}$. Em vários trabalhos, o número de Reynolds convencional é definido em termos do comprimento integral L_ε . Nesse caso, teremos

$$R_\lambda = \sqrt{15 \text{Re}} \quad (3.83)$$

para regimes fortemente turbulentos.

Relação de von Kármán-Howarth

Vamos concentrar, agora, a nossa atenção na evolução temporal da função de dois pontos, tal como implicada pela equação de Navier-Stokes. Para simplificar a análise, escolheremos para objeto de estudo a função de correlação escalar

$$A_{\alpha\alpha}(\rho, t) = \langle v_\alpha(\vec{x}, t) v_\alpha(\vec{x} + \vec{\rho}, t) \rangle. \quad (3.84)$$

Observe, diferentemente de (3.1), que a dependência temporal não foi suprimida na definição acima de $A_{\alpha\alpha}$. Apesar de relaxarmos a condição de estacionariedade, estaremos supondo, em toda a nossa argumentação, que as funções de correlação referem-se a regimes isotrópicos e homogêneos.

Considerando as equações de Navier-Stokes tomadas nas posições \vec{x} e $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\rho}$, escrevemos

$$\begin{aligned} v'_\alpha \left[\partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha = -\partial_\alpha P + \nu \partial^2 v_\alpha \right], \\ v_\alpha \left[\partial_t v'_\alpha + v'_\beta \partial'_\beta v'_\alpha = -\partial'_\alpha P' + \nu \partial'^2 v'_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Somando estas duas equações, e notando que $\langle v_\alpha \partial'_\alpha P' \rangle = \langle v'_\alpha \partial_\alpha P \rangle = 0$, obtemos

$$\partial_t A_{\alpha\alpha}(\rho, t) - \partial_\beta [A_{\beta\alpha\alpha}(\vec{\rho}, t) - A_{\beta\alpha\alpha}(-\vec{\rho}, t)] = 2\nu \partial^2 A_{\alpha\alpha}(\rho, t), \quad (3.86)$$

onde as derivadas espaciais referem-se às coordenadas de $\vec{\rho}$ e fizemos uso da função de correlação tripla, o tensor de terceira ordem

$$A_{\alpha\beta\gamma}(\vec{\rho}, t) \equiv \langle v_\alpha(\vec{x}, t) v_\beta(\vec{x}, t) v_\gamma(\vec{x} + \vec{\rho}, t) \rangle. \quad (3.87)$$

A Eq. (3.86) nos antecipa um fato dramático da teoria estatística da turbulência: equações de evolução para funções de correlação de n pontos irão depender de funções de $n + 1$ pontos, gerando uma hierarquia infinita de equações. Este é o célebre problema do “fechamento” em turbulência. Ao longo dos anos, tentativas diversas, com graus limitados de sucesso têm sido elaboradas para truncar de alguma forma a hierarquia de equações, havendo um certo consenso em relação à ineficácia das atuais aproximações nos limites de turbulência intensa ou em regiões muito intermitentes, como na faixa de escoamento viscoso em camadas limites turbulentas.

A Eq. (3.86) pode, de fato, ser transformada em uma equação equivalente e mais simples usando-se uma forma conveniente para a função de correlação tripla. O tensor de terceira ordem mais geral para $A_{\alpha\beta\gamma}(\vec{\rho}, t)$ é dado por

$$A_{\alpha\beta\gamma}(\vec{\rho}, t) = A(\rho, t) \rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma + B(\rho, t) (\rho_\alpha \delta_{\beta\gamma} + \rho_\beta \delta_{\alpha\gamma}) + C(\rho, t) \rho_\gamma \delta_{\alpha\beta}, \quad (3.88)$$

onde $A(\rho, t)$, $B(\rho, t)$ e $C(\rho, t)$ são funções desconhecidas a princípio. Estas três funções não são independentes entre si, como mostraremos agora. A condição de transversalidade

$$\frac{\partial}{\partial \rho_\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (3.89)$$

implica em

$$\left(5A + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} A + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} B\right) \rho_\alpha \rho_\beta + \left(2B + 3C + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} C\right) \delta_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.90)$$

isto é,

$$5A + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} A + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} B = 0, \quad (3.91)$$

$$2B + 3C + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} C = 0. \quad (3.92)$$

Por outro lado, como $A_{\alpha\alpha\gamma}(\vec{\rho}, t) = 0$ (veja o Exercício 11), obtemos

$$(A\rho^2 + 2B + 3C)\rho_\gamma = 0 \quad (3.93)$$

e assim,

$$A\rho^2 + 2B + 3C = 0. \quad (3.94)$$

A Eq. (3.91) é, de fato, redundante, pois pode ser obtida de (3.92) e (3.94). Estas duas últimas equações nos dão

$$A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} C, \quad (3.95)$$

$$B = -\frac{3}{2}C - \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} C. \quad (3.96)$$

Será útil, aqui, re-escrever as funções A e B em termos da função tripla longitudinal $A_{111}(\rho\hat{x}, t) \equiv K(\rho, t)$. Fazendo, portanto, $\alpha = \beta = \gamma = 1$ e $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = 0$, $\rho_3 = 0$ em (3.88), e usando (3.95) e (3.96) obtemos

$$K(\rho, t) = A\rho^3 + 2B\rho + C\rho = -2\rho C(\rho, t). \quad (3.97)$$

Substituindo em (3.88) as Soluções (3.95) e (3.96), com $C = -K/2\rho$, via (3.97), encontramos

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\gamma}(\vec{\rho}, t) &= \frac{1}{2\rho^3} \left(K - \frac{\partial}{\partial \rho} K \right) \rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma + \frac{1}{4\rho} \left(2K - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} K \right) (\rho_\alpha \delta_{\beta\gamma} + \rho_\beta \delta_{\alpha\gamma}) \\ &\quad - \frac{K}{2\rho} \rho_\gamma \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

A partir da (3.98), o termo dependente da função de correlação tripla na Eq. (3.86), pode ser expresso como

$$\partial_\beta [A_{\beta\alpha\alpha}(\vec{\rho}, t) - A_{\beta\alpha\alpha}(-\vec{\rho}, t)] = \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 3 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{4}{\rho} \right) K(\rho, t). \quad (3.99)$$

Adicionalmente, o Exercício 9 nos fornece

$$\langle v_\alpha v'_\alpha \rangle = A_{\alpha\alpha}(\rho, t) = \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 3 \right) \tilde{f}(\rho, t), \quad (3.100)$$

onde $\tilde{f}(\rho, t) = A_{11}(\rho \hat{x}, t)$. Substituindo as Relações (3.99) e (3.100) em (3.86), obtemos

$$\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 3 \right) \partial_t \tilde{f} = \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 3 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{4}{\rho} \right) K + 2\nu \partial^2 \left[\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 3 \right) \tilde{f} \right]. \quad (3.101)$$

Não é difícil mostrar, usando a forma esfericamente simétrica de $\tilde{f}(\rho, t)$, que

$$\partial^2 \left[\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 3 \right) \tilde{f} \right] = \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 3 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \tilde{f}, \quad (3.102)$$

o que nos permite re-escrever a Eq. (3.101) como

$$\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 3 \right) \left[\partial_t \tilde{f} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{4}{\rho} \right) K + 2\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \tilde{f} \right]. \quad (3.103)$$

Como o modo nulo do operador $(\rho \partial / \partial \rho + 3)$ é singular para $\rho \rightarrow 0$ e não esperamos singularidade alguma neste limite para os termos dependentes de \tilde{f} e K em (3.103)¹, concluímos que

$$\partial_t \tilde{f} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{4}{\rho} \right) K + 2\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \tilde{f}, \quad (3.104)$$

resultado conhecido como equação de von Kármán-Howarth (Kármán & Howarth, 1938). Equações análogas podem ser obtidas para funções de correlação de mais pontos (veja Fukayama *et al.* (2000) para uma discussão razoavelmente detalhada sobre a generalização da relação de von Kármán-Howarth).

Exercício 16:

Mostre, a partir da Equação de von Kármán-Howarth, que

(i) $I = \int_0^\infty d\rho \rho^4 \tilde{f}(\rho, t)$, a chamada *integral de Loitsyansky*, é uma quantidade conservada no tempo, desde que se suponha que $K(\rho, t)$ decaia suficientemente rápido para $\rho \rightarrow \infty$. A invariância de I está ligada a lei de conservação do momento angular (veja a discussão em Landau e Lifshitz (1993)).

(ii) no regime em que a função de correlação tripla possa ser desprezada (aproximação viscosa), teremos, assintoticamente,

$$\tilde{f}(\rho, t) \propto t^{-\frac{5}{2}} \exp \left[-\frac{\rho^2}{8\nu t} \right]. \quad (3.105)$$

¹De fato, supomos que as funções \tilde{f} e K sejam analíticas em $\rho = 0$. Além disso, $K(0) = \langle v_1^3 \rangle = 0$ e, de acordo com a subseção (3.2.1), teremos $\tilde{f}(\rho, t) = \mathcal{O}(\rho^2)$ para $\rho \rightarrow 0$.

tal como obtido por Kolmogorov (1941b). Observe que este resultado, em bom acordo com a experiência, indica que a energia cinética decai como $t^{-5/2}$ para tempos grandes, quando o número de Reynolds torna-se suficientemente pequeno, fora do regime turbulento.

Lei dos 4/5 de Kolmogorov

Investigando a equação de von Kármán-Howarth, um pequeno grande passo foi dado por Kolmogorov em 1941, apenas três anos após a publicação daquele resultado. A idéia de Kolmogorov, imbuída de considerável intuição física, foi reformular a equação de von Kármán-Howarth em termos de *funções de estrutura*. Funções de estrutura de ordem n são valores esperados dos momentos de diferenças de velocidades. Mais especificamente, definimos

$$S_n^L(\rho, t) \equiv \langle [v_1(\vec{x}, t) - v_1(\vec{x} + \rho\hat{x}, t)]^n \rangle \quad (3.106)$$

e

$$S_n^T(\rho, t) \equiv \langle [v_2(\vec{x}, t) - v_2(\vec{x} + \rho\hat{x}, t)]^n \rangle \quad (3.107)$$

como as funções de estrutura longitudinais e transversais de ordem n , respectivamente. O interesse em estudar tais funções de correlação está ligado ao fato de que o fluxo turbulento pode ser concebido como um sistema dinâmico onde várias escalas de comprimento estão acopladas entre si. No cálculo das funções de estrutura, a contribuição dos turbilhões definidos a escalas maiores é minimizada, permitindo que as flutuações de velocidade a escalas menores tornem-se mais evidentes. De certa forma, as funções de estrutura têm o papel de “microscópios matemáticos” que nos servem para investigar como se processa o fluxo turbulento até escalas diminutas de comprimento. Em termos mais técnicos, podemos dizer que a vantagem essencial das funções de estrutura reside na invariância de Galileo destas funções de correlação, removendo, assim, os efeitos espúrios de translação provocados pelos grandes turbilhões do fluxo.

Implícita na nossa discussão está a conjectura de que algum tipo de auto-ordenamento deve ocorrer na turbulência a pequenas escalas. A visão da turbulência como uma cascata de turbilhões definidos em várias escalas de comprimento remonta a Richardson (1920), como a traduziu em uma paródia poética até hoje evocada com grande frequência por fluido dinamicistas:

*Big whorls have little whorls,
Which feed on their velocity;
And little whorls have lesser whorls,
And so on to viscosity (in the molecular sense)².*

²O trabalho literário original, uma sátira aos naturalistas escrita por Jonathan Swift (1667-1745), versava assim: *So, naturalists observe, a flea / Has smaller fleas that on him prey / And these have smaller still to bite'em / And so proceed ad infinitum.*

Para escrever a equação de von Kármán-Howarth em termos de funções de estrutura, tomemos a derivada parcial de $S_2^L(\rho, t) = 2\tilde{f}(0, t) - 2\tilde{f}(\rho, t)$ em relação ao tempo. Não é difícil verificar que

$$\partial_t S_2^L(\rho, t) = \frac{2}{3} \frac{d}{dt} \langle v_\alpha^2(0, t) \rangle - 2 \partial_t \tilde{f}(\rho, t). \quad (3.108)$$

O primeiro termo no lado direito da equação acima é, por definição, $-4\varepsilon/3$. Utilizando a equação de von Kármán-Howarth, podemos re-escrever (3.108) como

$$\partial_t S_2^L = -\frac{4}{3} \varepsilon - 2 \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{4}{\rho} \right) K - 4\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \tilde{f}. \quad (3.109)$$

Notemos, agora, que

$$\begin{aligned} S_3^L(\rho, t) &\equiv \langle [v_1(\vec{x}, t) - v_1(\vec{x} + \rho\hat{x}, t)]^3 \rangle \\ &= 6 A_{111}(\rho\hat{x}, t) = 6 K(\rho, t), \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\tilde{f}(\rho, t) = \tilde{f}(0, t) - \frac{1}{2} S_2^L(\rho, t). \quad (3.111)$$

Usando as Relações (3.110) e (3.111), a Eq. (3.109) transforma-se em

$$\partial_t S_2^L = -\frac{4}{3} \varepsilon - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{4}{\rho} \right) S_3^L + 2\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) S_2^L, \quad (3.112)$$

ou, em forma mais compacta,

$$\partial_t S_2^L = -\frac{4}{3} \varepsilon - \frac{1}{3\rho^4} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^4 S_3^L) + \frac{2\nu}{\rho^4} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^4 \frac{\partial}{\partial \rho} S_2^L \right), \quad (3.113)$$

a versão kolmogoroviana da equação de von Kármán-Howarth.

A extensão da Eq. (3.113) para incluir a presença um campo de força externo, $f_\alpha(\vec{x}, t)$, não oferece problemas (deixamos como um exercício). Apenas um termo adicional deve ser incluído agora:

$$\partial_t S_2^L = -\frac{4}{3} \tilde{\varepsilon} - \frac{1}{3\rho^4} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^4 S_3^L) + \frac{2\nu}{\rho^4} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^4 \frac{\partial}{\partial \rho} S_2^L \right) + D(\rho, t), \quad (3.114)$$

onde $\tilde{\varepsilon} = \langle f_\alpha v_\alpha \rangle - d\langle (\vec{v}^2/2) \rangle/dt$ e

$$\begin{aligned} D(\rho, t) &= 2 [2 \langle v_1(\vec{x}, t) f_1(\vec{x}, t) \rangle - \langle v_1(\vec{x}, t) f_1(\vec{x} + \rho\hat{x}, t) \rangle \\ &\quad - \langle v_1(\vec{x} + \rho\hat{x}, t) f_1(\vec{x}, t) \rangle]. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Observe que as simetrias de paridade, isotropia e homogeneidade poderiam ser quebradas explicitamente pela força externa, invalidando a dedução da equação de von Kármán-Howarth. Esta dificuldade pode ser remediada definido um ensemble de configurações de $f_\alpha(\vec{x}, t)$, cada qual associada a uma realização do fluxo

turbulento, de tal forma a recuperar, no cálculo de valores esperados, as simetrias originais. Ademais, definimos forças externas auto-correlacionadas dentro da escala de comprimento integral L , o que implica, portanto, que no regime estacionário, e para $\rho \ll L$, tenhamos

$$D(\rho) = \mathcal{O}\left(\frac{\rho}{L}\right). \quad (3.116)$$

Fixando ρ e tomando, então os limites $L \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow 0$, no regime estacionário, onde $\partial_t S_2^L = 0$ e $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$, a Eq. (3.114) simplifica-se como

$$\frac{1}{\rho^4} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^4 S_3^L) = -4\varepsilon, \quad (3.117)$$

cujas solução é

$$S_3^L(\rho) = -\frac{4}{5} \varepsilon \rho, \quad (3.118)$$

a conhecida lei dos 4/5 de Kolmogorov. Este resultado é extremamente importante, porque indica uma maneira experimentalmente simples de se obter a taxa de dissipação de energia ε . Recentemente, a lei dos 4/5 de Kolmogorov foi provada, sob certas hipóteses gerais, estar em acordo com os cânones do rigor matemático (Nie & Tanveer, 1999), constituindo-se assim, em um dos poucos resultados exatos bem estabelecidos da teoria estatística da turbulência.

3.3 Fenomenologia de Kolmogorov

O estudo das funções de estrutura de ordens arbitrárias, no qual a lei dos 4/5 é um caso particular, é um problema consideravelmente difícil. Algumas hipóteses fenomenológicas foram avançadas por Kolmogorov para propor uma solução deste problema, originando o que hoje se conhece como a “teoria K41” da turbulência desenvolvida.

3.3.1 Leis de escala na faixa inercial

Kolmogorov imagina em 1941 que a cascata de Richardson possui uma estrutura universal em uma faixa de escalas de comprimento – chamada de “faixa inercial” (*inertial range*) – na qual, uma vez fixada a taxa de dissipação de energia ε , tanto a viscosidade ν quanto o comprimento integral L não teriam importância alguma, em sentido assintótico (isto é, nos limites $\nu \rightarrow 0$ e $L \rightarrow \infty$) (Kolmogorov, 1941a, 1941b). No caso em que $L \rightarrow \infty$, a suposição é a de que as funções de estrutura dependeriam apenas dos parâmetros dimensionais ρ , ε e ν . Essas são, resumidamente, as hipóteses fenomenológicas de similaridade de Kolmogorov. A teoria K41 preconiza, em linhas gerais, que na faixa inercial sejam restauradas todas as simetrias – exceto a simetria de inversão temporal – da equação de Navier-Stokes, tais como deveriam ser evidenciadas na forma de valores esperados tensoriais.

O quadro físico da turbulência proposto como dinâmica subjacente à teoria K41 é simples. Turbilhões grandes são “fragmentados” em turbilhões cada vez menores,

até que eles são “varridos” do escoamento pela transformação de energia cinética em calor a escalas suficientemente pequenas, devido ao efeito de difusão molecular, parametrizado pelo coeficiente de viscosidade. Até finais dos anos de 1980 era comum pensar que os turbilhões não teriam qualquer tipo de estrutura particular. Seriam como “flocos” de concentração de energia cinética que decairiam em flocos menores ao longo das escalas de comprimento da faixa inercial. Entretanto, como iremos discutir mais à frente, a idéia dos flocos não é muito boa e está associada, plausivelmente, a incorreções da teoria de Kolmogorov.

Definindo a faixa inercial como a região de escalas dada por $\eta \ll \rho \ll L$, onde η é a *escala dissipativa de Kolmogorov*, as hipóteses de similaridade nos dizem, então, que a forma geral de uma função de estrutura (longitudinal ou transversal) será a seguinte, para $L \rightarrow \infty$,

$$S_n(\rho) = C_n \varepsilon^{\alpha_n} \rho^{\zeta_n} \phi_n(\rho/\eta), \quad (3.119)$$

de tal forma que $S_n(\rho)$ seja finito no limite de viscosidade nula, isto é, $\eta \rightarrow 0$. Os coeficientes C_n são constantes universais adimensionais. Sem perda de generalidade, fixamos $\phi_n(\infty) = 1$. Por análise dimensional direta, obtemos

$$\alpha_n = \frac{2n}{3}, \quad \zeta_n = \frac{n}{3}, \quad \eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}. \quad (3.120)$$

No caso da função de estrutura longitudinal de segunda ordem, teremos, na faixa inercial,

$$S_2^L(\rho) = C_2 \varepsilon^{2/3} \rho^{2/3}, \quad (3.121)$$

a chamada lei dos 2/3 de Kolmogorov. De acordo com as relações obtidas na subseção (3.2.1), a Eq. (3.121) traduz-se no espectro de energia

$$E(k) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (3.122)$$

Acima, C_K é a chamada *constante de Kolmogorov*. A Expressão (3.122) é o “estandarte” da teoria de Kolmogorov. A sua verificação experimental não foi imediata porém, levando cerca de 20 anos para que o decaimento espectral de Kolmogorov fosse finalmente observado de forma incontestável (Grant *et al.*, 1962). A partir da compilação de vários trabalhos independentes, Sreenivasan (1995) sugere $C_K \simeq 1.6$ como a estimativa mais apropriada para a constante de Kolmogorov. A Figura 3.3.1 mostra um exemplo de verificação da lei espectral de Kolmogorov (Kang *et al.*, 2003).

Observemos que a forma das funções de estrutura, na teoria K41, pode ser entendida como uma consequência imediata da restauração de invariância de escala na faixa inercial e da lei dos 4/5. De fato, supondo invariância de escala, a lei dos 4/5 fixa o parâmetro de escala, definido na introdução, em $h = 1/3$, com o qual podemos obter o limite de viscosidade nula de (3.119) com os expoentes α_n e ζ_n dados por (3.120).

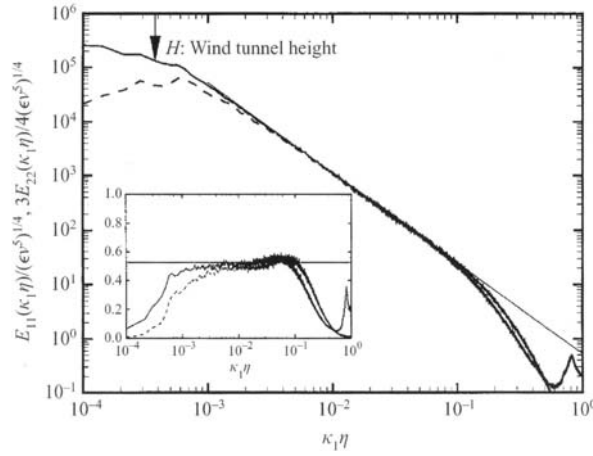


Figura 3.4: Espectros unidimensionais de energia obtidos por Kang *et al.* (2003). A linha sólida representa a lei de decaimento $k_1^{-5/3}$. No gráfico interno, são mostrados os espectros compensados, isto é, multiplicados por $k_1^{5/3}$.

O *espectro de dissipação* $\varepsilon(k)$ pode ser definido a partir da relação entre a taxa de dissipação e a enstrofia. Usando (3.80), teremos

$$\varepsilon = \nu \int_0^\infty dk k^2 E(k) \equiv \int_0^\infty dk \varepsilon(k), \quad (3.123)$$

onde $\varepsilon(k) = \nu k^2 E(k)$. Levando em conta que o decaimento de energia para números de onda $k > k_\eta \sim 1/\eta$ é extremamente rápido, podemos imaginar, a grosso modo, que o espectro tem a forma universal de Kolmogorov na faixa $1/L \leq k \leq k_\eta$, acabando abruptamente em k_η . Dessa maneira, obtemos as seguintes estimativas para a energia total e a taxa de dissipação de energia:

$$\begin{aligned} E &\sim \varepsilon^{2/3} \int_{1/L}^{k_\eta} dk k^{-5/3} \sim L^{2/3}, \\ \varepsilon &\sim \nu \varepsilon^{2/3} \int_{1/L}^{k_\eta} dk k^{1/3} \sim \nu \varepsilon^{2/3} \eta^{-4/3} \Rightarrow \varepsilon \sim \nu^3 \eta^{-4}. \end{aligned} \quad (3.124)$$

A primeira das relações acima mostra que a energia cinética está essencialmente contida na região integral do fluxo turbulento. A segunda, por outro lado, equivalente a definição de η dada em (3.120), indica a relevância das pequenas escalas no processo de dissipação.

J. Boussinesq, há cerca de 130 anos, sugeriu que em fluxos turbulentos os efeitos convectivos poderiam ser mapeados em efeitos de difusão, parametrizados por uma viscosidade efetiva, maior do que a viscosidade usual (de origem molecular) (Boussinesq, 1870). A hipótese de “viscosidade turbilhonar” (*eddy viscosity*),

antecipada por Boussinesq, é um ingrediente importante em vários modelos fenomenológicos da turbulência. Como uma maneira mais moderna de se discutir o problema, sob a luz da teoria K41, suponha que queiramos modelar o fluxo turbulento para escalas de comprimento maiores do que a , com $a > \eta$. Podemos imaginar que a escala de dissipação viscosa, η , foi efetivamente trocada por a , e o palpite mais simples é que basta alterar a viscosidade de algum modo para que as características estatísticas do fluxo a escalas maiores do que a não sejam afetadas por estas mudanças. A fim de manter a taxa de dissipação invariante após a troca de η por a , introduzimos a viscosidade turbilhonar $\nu(k)$, onde $k \equiv 1/a$, que deve satisfazer à seguinte condição:

$$\nu(k) \int_0^k dk' k'^2 E(k') \sim \nu(k) \int_0^k dk' k'^{-1/3} = \text{constante}, \quad (3.125)$$

e, portanto, $\nu(k) \sim k^{-4/3}$ – a viscosidade turbilhonar, de fato, torna-se maior a escalas maiores de comprimento. A vantagem deste tipo de formulação consiste na redução do número dos graus de liberdade que são necessários considerar na modelagem da turbulência. Esta forma de argumentação está na base dos métodos de simulação conhecidos como Large Eddy Simulation (LES) (Ferziger, 1996) e na abordagem analítica de grupo de renormalização (Smith & Woodruff, 1998).

Exercício 17:

Considerando $v_{\parallel}(\rho, t) \equiv v_1(\vec{x} + \rho \hat{x}, t) - v_1(\vec{x}, t)$ como um observável flutuante, mostre que todos os momentos estatísticos adimensionalizados H_n desta variável aleatória, entre os quais a assimetria (*skewness*) H_3 , bem como o achatamento (*kurtosis* ou *flatness*) H_4 , serão constantes ao longo da faixa inercial, na teoria K41. Lembrete:

$$H_n \equiv \frac{\langle [v_{\parallel}(\rho, t)]^n \rangle}{\langle [v_{\parallel}(\rho, t)]^2 \rangle^{\frac{n}{2}}}. \quad (3.126)$$

Exercício 18:

Mostre que

$$C_K = \frac{55\sqrt{3}}{32\pi} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) C_2, \quad (3.127)$$

onde $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{x-1}$ é a função gamma usual.

3.3.2 Complexidade computacional das DNS

Simulações numéricas diretas (*direct numerical simulations* – DNS) consistem na modelagem numérica do fluxo turbulento em todas as suas escalas relevantes,

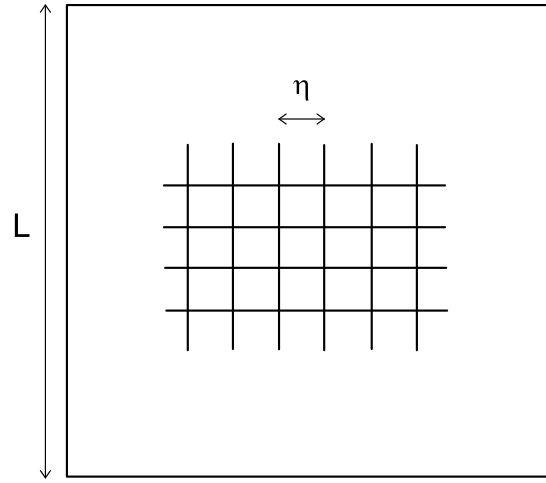


Figura 3.5: Comprimentos relevantes na definição de um grid para simulação numérica direta.

isto é, ativas, procurando evitar ao máximo o uso de hipóteses fenomenológicas. Como indicado na Figura 3.5, o “grid” de simulação deve cobrir a faixa inercial e, portanto, tipicamente estará contido em uma caixa de dimensão linear L , ao passo em que o parâmetro de rede é identificado com a escala dissipativa de Kolmogorov η . Em geral utilizam-se, nas DNS, condições de contorno periódicas.

Em três dimensões, o número de pontos do grid será, então, $N = (L/\eta)^3$. Note, agora, de acordo com (3.53), (3.57) e (3.124), que

$$\text{Re} \sim \left(\frac{L}{\eta}\right)^{4/3}, \quad (3.128)$$

ou seja $N \sim \text{Re}^{9/4}$. É importante, adicionalmente, estimarmos o passo de tempo e o número de iterações que devem ser executadas no processamento numérico. Estas escalas de tempo são dadas pelos *eddy turnover times* T_ℓ que estimam por quanto tempo turbilhões definidos a uma escala qualquer de comprimento ℓ permanecem ativos, antes de decaírem. O passo de tempo da simulação será dado pelo “eddy turnover time” T_η , à escala de Kolmogorov η ; o tempo total de simulação mínimo será, por outro lado, dado pelo “large eddy turnover time” T_L , associado à escala integral L . Empregando novamente a hipótese de similaridade de Kolmogorov, somos levados, por razões dimensionais, à definição

$$T_\ell \sim \left(\frac{\ell^2}{\varepsilon}\right)^{1/3}. \quad (3.129)$$

O número de iterações por sítio da rede é, portanto, da ordem de

$$M \sim \frac{T_L}{T_\eta} \sim \left(\frac{L}{\eta}\right)^{2/3} \sim \sqrt{\text{Re}}. \quad (3.130)$$

Conseqüentemente, o tempo de CPU total de simulação será

$$T_{\text{simul}} \sim N \times M \sim \text{Re}^{11/4} \sim \text{R}_\lambda^{11/2}. \quad (3.131)$$

Dessa forma, como um exemplo instrutivo, imagine uma simulação para $\text{R}_\lambda = 200$ que leve duas semanas para se completar. Usando o mesmo equipamento, a simulação para $\text{R}_\lambda = 700$ levaria cerca de 40 anos! O limite atual de simulação numérica direta, estabelecido para $\text{R}_\lambda \simeq 700$, pertence a um grupo de pesquisadores japoneses (Kaneda *et al.*, 2003). A simulação foi realizada no “Earth Simulator”, um enorme cluster de 640 processadores conectados em paralelo³, instalados em uma construção com dimensões de um ginásio esportivo (3250 m² e altura de 17 m).

É talvez útil mencionar que uma estimativa mais cautelosa do número de iterações por sítio da rede em DNS é dada pela condição de Courant-Friedrichs-Levy. Apesar do nome pomposo, a idéia é muito simples. A fim de que a simulação não perca nenhum efeito convectivo ao longo de todas as escalas de comprimento, supomos que os intervalos de tempo máximo e mínimo de convecção sejam estimados por L/v_0 e η/v_0 , respectivamente. Dessa forma, o número de iterações será da ordem de $M \sim L/\eta \sim \text{Re}^{3/2}$. Isto implica, refazendo os passos acima, que $T_{\text{simul}} \sim \text{R}_\lambda^6$.

3.3.3 Decaimento temporal da energia

Uma aplicação interessante da fenomenologia de Kolmogorov consiste em determinar a taxa de decaimento da energia cinética a altos números de Reynolds, para o caso de turbulência livre de forças externas. A taxa de dissipação pode ser escrita, simplesmente, como

$$\varepsilon = -\frac{3}{2} \frac{d}{dt} v_0^2(t). \quad (3.132)$$

Consideremos, agora, o comprimento integral $L_\varepsilon = v_0^3(t)/\varepsilon$ que depende do tempo, a princípio. Existem várias maneiras de se definir o comprimento integral, todas elas supostamente equivalentes. Em particular, podemos nos beneficiar da invariância da integral de Loitsyansky para escrever

$$L_\varepsilon = \frac{v_0^3(t)}{\varepsilon} \propto \left[\frac{1}{v_0^2(t)} \int_0^\infty d\rho \rho^4 \tilde{f}(\rho, t) \right]^{1/5} \sim [v_0(t)]^{-2/5}, \quad (3.133)$$

isto é, deveremos ter $v_0^3(t)/\varepsilon \sim [v_0(t)]^{-2/5}$ e, daí,

$$\varepsilon \sim [v_0^2(t)]^{17/10}. \quad (3.134)$$

³Earth Simulator, <http://www.es.jamstec.go.jp/esc/eng/>

Substituindo (3.134) em (3.132), obtemos

$$\frac{d}{dt}v_0^2(t) \sim [v_0^2(t)]^{17/10}, \quad (3.135)$$

o que leva a $v_0^2(t) \sim t^{-10/7}$, a lei de Kolmogorov do decaimento de energia turbulenta (Kolmogorov, 1941c).

A existência da integral de Loitsyansky foi posta em dúvida a partir de meados dos anos de 1950 em trabalhos que indicavam que as funções de correlação triplas poderiam não cair suficientemente rápido com $\rho \rightarrow \infty$, devido a perturbações não-locais produzidas pelo campo de pressão (Batchelor & Proudman, 1956; Saffman, 1967). Como consequência inevitável, imaginava-se que a teoria do decaimento de energia cinética deveria ser radicalmente reformulada. Entretanto, atualmente, estas críticas têm sido encaradas com alguma reserva, em função não apenas das hipóteses relativamente restritivas utilizadas naqueles trabalhos, mas sobretudo pelo fato da lei do decaimento de Kolmogorov se aproximar razoavelmente dos resultados experimentais. Como fruto de experimentação laboriosa, aceita-se que a energia turbulenta decaia como $v_0^2(t) \sim t^{-\alpha}$, com $\alpha \simeq 1.3$ (Pope, 2000; Kang *et al.*, 2003) (note que $10/7 \simeq 1.43$). O desvio teoria-experiência está, aqui, provavelmente relacionado às flutuações intermitentes do campo de velocidades, não levadas em conta pela fenomenologia de Kolmogorov (veja a Seção 3.4).

Exercício 19:

Mostre que $L_\varepsilon \sim t^{4/7}$ no decaimento livre da turbulência. Discuta porque este resultado *não* significa que os turbilhões de grandes escalas tornam-se maiores com o passar do tempo.

3.3.4 Dispersão de Richardson

Em uma série de experimentos pioneiros, levados à cabo durante a década de 1920 na Inglaterra, Richardson investigou a maneira segundo a qual partículas, inicialmente próximas entre si, afastam-se mutuamente em um escoamento turbulento. Em alguns desses estudos, milhares de balões foram liberados ao ar livre. Os balões levavam bilhetes pedindo para que aqueles que os encontrassem enviassem ao autor da aparente brincadeira um cartão postal com o local e a hora do achado. Em outros estudos, as experiências de difusão foram realizadas com grãos ou fumaça. A partir da enorme quantidade de dados coletados, Richardson formulou a seguinte lei de dispersão turbulenta (Richardson, 1926):

$$\langle [\Delta \vec{x}]^2 \rangle \sim t^3, \quad (3.136)$$

onde $\Delta \vec{x}(t)$ representa o vetor de separação entre as duas partículas, como função do tempo t . Décadas depois, Batchelor e Obukhov foram capazes de obter e discutir com algum grau de detalhe a Eq. (3.136), empregando o instrumental da

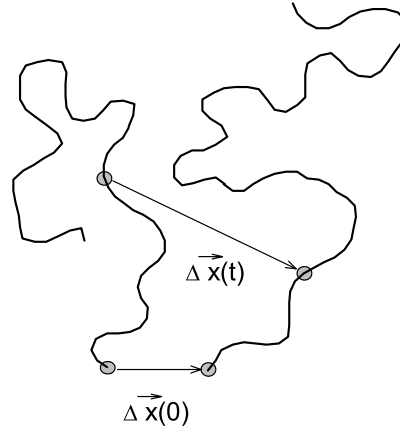


Figura 3.6: Duas partículas, com afastamento vetorial $\Delta\vec{x}(t)$ são transportadas passivamente pelo fluxo turbulento.

fenomenologia K41 (Batchelor, 1950; Obukhov, 1941). A Figura (3.6) ilustra o problema da dispersão de Richardson.

Consideremos duas partículas, situadas nas posições $\vec{x}_1(0)$ e $\vec{x}_2(0)$ em $t = 0$. Imaginando que as partículas estão ligadas solidariamente aos elementos de fluido, suas posições consecutivas serão dadas por

$$\begin{aligned}\vec{x}_1(t) &= \vec{x}_1(0) + \int_0^t dt' \vec{v}(\vec{x}_1(t'), t'), \\ \vec{x}_2(t) &= \vec{x}_2(0) + \int_0^t dt' \vec{v}(\vec{x}_2(t'), t').\end{aligned}\tag{3.137}$$

Definindo, agora,

$$\begin{aligned}\Delta\vec{x}(t) &= \vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t), \\ \Delta\vec{v}(t) &= \vec{v}_1(\vec{x}_1(t), t) - \vec{v}_2(\vec{x}_2(t), t), \\ \Delta\vec{a}(t) &= \frac{d}{dt}\Delta\vec{v}(t),\end{aligned}\tag{3.138}$$

obtemos, a partir das Relações (3.137),

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle [\Delta\vec{x}(t) - \Delta\vec{x}(0)]^2 \rangle = 2 \langle \Delta\vec{a}(t) \cdot [\Delta\vec{x}(t) - \Delta\vec{x}(0)] \rangle + 2 \langle [\Delta\vec{v}(t)]^2 \rangle. \tag{3.139}$$

O primeiro termo no lado direito da equação acima é, estimativamente, $\mathcal{O}(t^2)$, para tempos pequenos e desprezível para tempos grandes devido à ausência de

correlações entre as posições das partículas e suas acelerações. Usando a lei dos 2/3 de Kolmogorov na forma

$$\langle [\Delta \vec{v}(t)]^2 \rangle = C \varepsilon^{2/3} \langle |\Delta \vec{x}(t)|^{2/3} \rangle, \quad (3.140)$$

encontramos

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle [\Delta \vec{x}(t) - \Delta \vec{x}(0)]^2 \rangle = 2C \varepsilon^{2/3} \langle |\Delta \vec{x}(t)|^{2/3} \rangle. \quad (3.141)$$

Para tempos suficientemente pequenos, podemos fazer $|\Delta \vec{x}(t)| \simeq |\Delta \vec{x}(0)|$ em (3.141), levando a

$$\langle [\Delta \vec{x}(t) - \Delta \vec{x}(0)]^2 \rangle \simeq C \varepsilon^{2/3} |\Delta \vec{x}(0)|^{2/3} t^2. \quad (3.142)$$

A expressão acima nos mostra, auto-consistentemente, que a condição de tempos pequenos é dada por

$$\varepsilon^{2/3} |\Delta \vec{x}(0)|^{2/3} t^2 \ll |\Delta \vec{x}(0)|^2, \quad (3.143)$$

isto é,

$$t \ll t_0 \equiv \left(\frac{|\Delta \vec{x}(0)|^2}{\varepsilon} \right)^{1/3}. \quad (3.144)$$

Para tempos grandes, $t \gg t_0$, mas não tão grandes para que o afastamento entre as partículas chegue à região integral de escalas, a Eq. (3.141) torna-se

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle |\Delta \vec{x}(t)|^2 \rangle = 2C \varepsilon^{2/3} \langle |\Delta \vec{x}(t)|^{2/3} \rangle. \quad (3.145)$$

Supondo auto-similaridade assintótica para os momentos estatísticos de $|\Delta \vec{x}(t)|$, deve haver α tal que

$$\langle |\Delta \vec{x}(t)|^m \rangle \propto t^{\alpha m} \quad (3.146)$$

para todo m . A substituição de (3.146) em (3.145) nos dá $\alpha = 3/2$ e a Relação (3.136) é obtida imediatamente, portanto, fazendo $m = 2$ em (3.146). A lei de dispersão turbulenta é representada muitas vezes na forma

$$\frac{d}{dt} \langle |\Delta \vec{x}(t)| \rangle \sim \langle |\Delta \vec{x}(t)| \rangle^{4/3}, \quad (3.147)$$

referida, então, como a “lei dos 4/3” de Richardson.

Experimentos publicados em 2006 (Borgouin *et al.*, 2006) examinaram com grande atenção o problema da difusão turbulenta. Curiosamente, verificou-se que a aproximação de tempos pequenos é, de fato, aquela que deve ser utilizada na análise de escoamentos turbulentos de interesse industrial e tecnológico, bem como em condições de laboratório. Após 80 anos passados desde o trabalho de Richardson, entendemos agora que o seu resultado é incrivelmente difícil de se estabelecer, passível de verificação apenas em situações de turbulência extrema, como as

encontradas na atmosfera. Devemos notar, entretanto, que uma verificação experimental da lei de dispersão de Richardson foi realizada com sucesso no contexto de turbulência bidimensional em 1999 (Jullien *et al.*, 1999).

As flutuações de $\xi \equiv |\Delta\vec{x}(t)|$ poderiam, a princípio, ser descritas por uma função densidade de probabilidade $\rho(\xi, t)$. Há algumas formulações nessa direção, começando pela tentativa do próprio Richardson, contida já no seu artigo original (Richardson, 1926). Entretanto, o caso de turbulência bidimensional, no regime de espectro de Kolmogorov, onde os resultados numéricos e experimentais estão razoavelmente amadurecidos, revela que nenhuma das propostas analíticas é satisfatória (Jullien *et al.*, 1999; Nicolleau & Vassilicos, 2003). A teorização de $\rho(\xi, t)$ trata-se, portanto, de um problema completamente aberto.

Exercício 20:

Considerando a função de estrutura longitudinal

$$S_n^L(\rho) \equiv \langle [v_1(\vec{x}, t) - v_1(\vec{x} + \rho\hat{x}, t)]^2 \rangle = C_2 \varepsilon^{2/3} \rho^{2/3}$$

na faixa inercial, mostre que a Eq. (3.142) pode ser escrita como

$$\langle [\Delta\vec{x}(t) - \Delta\vec{x}(0)]^2 \rangle \simeq \frac{11}{3} C_2 \varepsilon^{2/3} |\Delta\vec{x}(0)|^{2/3} t^2. \quad (3.148)$$

Exercício 21:

Supondo, em acordo com a teoria K41, que o único parâmetro de controle relevante na faixa inercial seja a taxa de transferência de energia ε , obtenha os valores de α e β na expressão auto-similar,

$$\langle |\Delta\vec{x}(t)|^m \rangle = g_m \varepsilon^{\beta m} t^{\alpha m}, \quad (3.149)$$

onde g_m é uma constante adimensional (universal).

Exercício 22:

Usando a simetria de escala do regime de Kolmogorov, dada pelas transformações $v_\alpha \rightarrow \lambda^{1/3} v_\alpha$ e $t \rightarrow \lambda^{2/3} t$, mostre que a função de estrutura de segunda ordem, lagrangiana, tem a seguinte forma:

$$\langle [v_\alpha(\vec{x}(t), t) - v_\alpha(\vec{x}(t'), t')]^2 \rangle \sim |t - t'|. \quad (3.150)$$

A investigação experimental deste resultado em laboratório e a altos números de Reynolds é recente, veja Mordant *et al.* (2001). Conjectura-se que (3.150) seja uma relação exata, análoga, no formalismo lagrangiano, à lei dos 4/5 de Kolmogorov.

3.4 O fenômeno da intermitência

O fenômeno da intermitência das flutuações turbulentas foi descoberto experimentalmente por Batchelor e Townsend em 1949 (Batchelor & Townsend, 1949) e ainda hoje é assunto de interesse central de pesquisa. Em poucas palavras, a intermitência está associada à existência de flutuações intensas, não-gaussianas, de observáveis como diferenças ou gradientes de velocidade, vorticidade, circulação, etc. Acredita-se que estas flutuações sejam responsáveis por desvios importantes da fenomenologia de Kolmogorov, observados conclusivamente em meados dos anos de 1980, e estejam relacionadas a configurações específicas do campo de velocidade, como tubos de vorticidade, por exemplo, e as formas segundo as quais estas configurações estruturam-se no espaço.

3.4.1 Anomalias de escala

Em um trabalho experimental publicado em 1984, Anselmet *et al.* mostraram claramente que funções de estrutura não escalam a la Kolmogorov para ordens suficientemente altas. Mais precisamente, continua valendo a relação de escala

$$S_n(\rho) \sim \rho^{\zeta_n}, \quad (3.151)$$

porém, em geral, $\zeta_n \neq n/3$. Os desvios são bastante evidentes para ordens maiores do que $n = 4$ e é um problema aberto determinar se as funções de estrutura a ordens pequenas seguem ou não as leis de escala de Kolmogorov. A Figura 3.7 ilustra os expoentes ζ_n encontrados em diversos experimentos.

Os desvios da teoria K41 refletem a “anomalia de escala” que ocorre na turbulência e também é encontrada nas transições termodinâmicas de fase de segunda ordem. A teoria K41 pressupõe que o limite $L \rightarrow \infty$, isto é, a remoção do “cutoff infravermelho” $k_L \sim 1/L$ estaria ligado à restauração da simetria de escala na faixa inercial. Como isto não ocorre – a experiência nos mostra – estamos diante de uma anomalia. Este problema foi percebido muito cedo, já em 1942, por Landau, que talvez por possuir alguma experiência em relação aos problemas de criticalidade termodinâmica, chamou atenção para o fato de que flutuações locais da taxa de dissipação poderiam invalidar a teoria K41. Colocando de outro modo a crítica de Landau, a idéia é que as flutuações a pequenas escalas de comprimento poderiam estar inevitavelmente “contaminadas” por perturbações advindas da escala integral o que implicaria, no pior dos cenários, na ausência completa de universalidade.

Entretanto, a experiência nos mostra que a universalidade não foi de todo destruída. O conceito de faixa inercial continua pertinente, e a lei de escala de Kolmogorov (3.119) foi empiricamente substituída pela seguinte,

$$S_n(\rho) = C_n \varepsilon^{\alpha_n} L^{\beta_n} \rho^{\zeta_n}. \quad (3.152)$$

Os expoentes de escala α_n , β_n e ζ_n são universais, enquanto os coeficientes C_n não o são. Podemos dizer, em termos concretos, que a pequenas escalas a turbulência

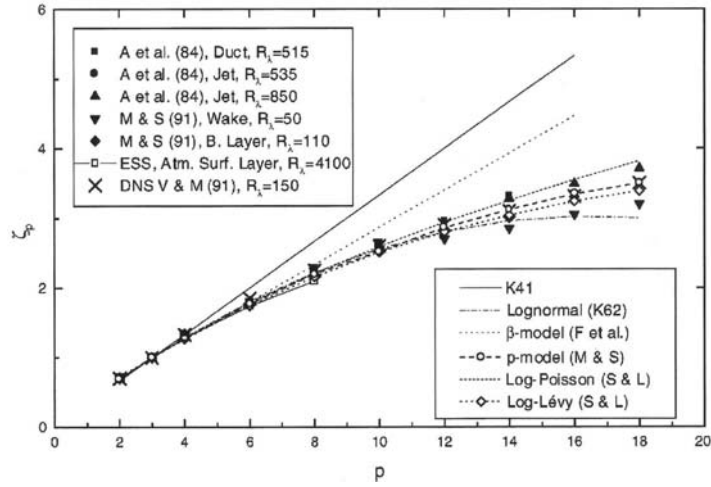


Figura 3.7: Expoentes das funções de estrutura e a comparação com alguns modelos fenomenológicos (ver a discussão abaixo), entre os quais a teoria K41. Ver Anselmet *et al.* (2001) para informações sobre os trabalhos originais indicados na figura.

gerada no rastro de uma asa de avião ou aquela no fluxo a jusante de um obstáculo cilíndrico será caracterizada, provavelmente, por C'_n s diversos, mas corresponderá aos mesmos valores de ζ_n . Não existem, até o presente momento, estratégias analíticas para o cálculo sistemático dos expoentes de escala. Este é, sem dúvida, um dos grandes desafios da teoria estatística da turbulência.

3.4.2 Densidades de probabilidade

Um argumento simples pareceria indicar que observáveis mensuráveis na turbulência, da forma $\partial_1 v_2(\vec{x}, t)$ ou $\int_{|\vec{x}| < \ell} d^3 \vec{x} \partial_1 v_1(\vec{x}, t)$, por exemplo, deveriam flutuar de acordo com uma distribuição gaussiana de probabilidades. De fato, seja $\mathcal{O}(\vec{x}, t)$ um observável qualquer. Podemos escrever, em geral,

$$\mathcal{O}(\vec{x}, t) = \int d^3 \vec{k} \tilde{\mathcal{O}}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (3.153)$$

Definimos agora uma sequência de números de onda $k_0 = 0 < k_1 < k_2 < \dots$, de forma a particionar em camadas disjuntas o espaço de Fourier e re-escrever a relação acima como

$$\mathcal{O}(\vec{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_n(\vec{x}, t), \quad (3.154)$$

com

$$\mathcal{O}_n(\vec{x}, t) \equiv \int_{\Sigma_n} d^3\vec{k} \tilde{\mathcal{O}}(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}), \quad (3.155)$$

onde Σ_n é a região, no espaço de Fourier, dada por $k_n \leq k < k_{n+1}$. Supondo, então, que a cascata de Richardson seja razoavelmente local, isto é, que a transferência de energia entre números de onda distantes seja irrelevante, podemos escolher a largura das regiões Σ_n para que

$$\langle \mathcal{O}_n(\vec{x}, t) \mathcal{O}_m(\vec{x}, t) \rangle \quad (3.156)$$

seja desprezível quando $n \neq m$. Imaginando que os momentos $\langle |\mathcal{O}_n(\vec{x}, t)|^m \rangle$ sejam limitados, para todo n e m , as hipóteses do teorema do limite central são satisfeitas, e a partir da Expressão (3.154), concluímos que a variável aleatória $\mathcal{O}(\vec{x}, t)$ possuirá distribuição gaussiana.

A evidência experimental, entretanto, indica que os argumentos a favor da gaussianidade geral de observáveis locais não são corretos, como foi constatado há vários anos por Batchelor e Townsend (1949). Alguns observáveis, de fato, como uma componente qualquer da velocidade, por exemplo, possuem distribuições gaussianas. Porém, as distribuições de outros observáveis como derivadas ou diferenças de velocidade em pontos muito próximos, possuem caudas que caem muito mais lentamente do que as caudas gaussianas. A Figura 3.8 mostra as distribuições não-gaussianas para a variável diferença longitudinal de velocidades, em um experimento de turbulência realizado com o gás hélio a baixas temperaturas (Tabeling *et al.*, 1997).

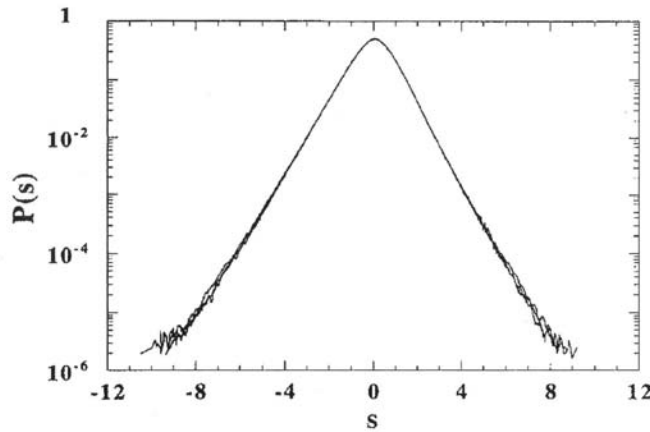


Figura 3.8: A variável s corresponde a diferença longitudinal de velocidades, $s = v_1(\vec{x}, t) - v_1(\vec{x} + \rho\hat{x})$ normalizada com o desvio padrão. As várias curvas correspondem a números de Reynolds-Taylor na faixa $1260 < R_\lambda < 3700$. Uma distribuição gaussiana estaria representada na figura como uma parábola.

É interessante notar que no caso de diferença de velocidades, o grau de intermitência diminui à medida em que a separação entre os pontos aumenta. Para pontos cuja distância é da ordem da escala de comprimento integral, a distribuição de probabilidades torna-se essencialmente gaussiana. A interpretação é simples. Pontos muito separados acabam sendo influenciados por turbilhões descorrelacionados e as flutuações tornam-se essencialmente idênticas às flutuações de uma componente isolada da velocidade.

A razão de porque alguns observáveis são gaussianos e outros não é melhor compreendida pensando em termos de espaço físico ao invés de espaço de Fourier. A velocidade flutua gaussianamente porque pode ser entendida, em termos de invariância de Galileo, como a superposição de movimentos de translação causados por turbilhões em todas as escalas de comprimento. A idéia de separação de escalas então dá base ao teorema do limite central. Já um observável como a diferença de componentes de velocidade, tomada em uma escala de comprimento ρ , tende a selecionar os turbilhões definidos ao redor desta escala, isolando-os do efeito de translação provocado pelos turbilhões definidos a escalas maiores do que ρ .

Ao fazermos uso de argumentos que referem-se à distribuição de turbilhões localizados no espaço físico, ficamos com a impressão de que a modelagem da turbulência no espaço de Fourier pode não ser a mais apropriada. Em acordo com esse tipo de crítica, a idéia de uma escala dissipativa, associada a um número de onda bem definido k_η , como se crê na teoria K41, tem sido revisada recentemente, e talvez revele ser apenas uma descrição “impressionista” da dinâmica turbulenta, que faz sentido apenas quando flutuações intermitentes são desconsideradas. Uma das direções mais promissoras de representação dos campos turbulentos, avançadas nos últimos anos, consiste substituição da descrição de Fourier pela técnica de wavelets, onde, espera-se, os aspectos de localização e escala possam ser modelados eficientemente (Farge, 1992).

A descrição unificada dos aspectos da intermitência discutidos nessa subseção e na anterior ainda é um problema aberto de grande relevância. Acredita-se que a existência de configurações específicas do fluxo turbulento, como tubos de vorticidade, seja essencial para o entendimento do fenômeno da intermitência. Este tipo de conjectura tem respaldo em modelos mais simples, como a turbulência unidimensional de Burgers (1948) (ver a subseção (3.4.4)). Desde inícios da década de 1990, sabe-se, através de simulações numéricas diretas (She *et al.*, 1990; Vincent & Meneguzzi, 1991), que o fluxo turbulento pode ser pensado pictoricamente como um gás de tubos de vorticidade fortemente interagentes. As simulações de Kaneda *et al.* (2003) produziram imagens fascinantes dos tubos de vorticidade, como se pode ver na Figura 3.9.

3.4.3 Modelos fenomenológicos

A crítica de Landau foi levada a sério por Kolmogorov e Obukhov, motivando-os a produzirem uma revisão da teoria K41, de cunho também fenomenológico (Kolmogorov, 1962; Obukhov, 1962). Imagine que o espaço tenha sido particionado em células cúbicas B_i , de dimensões $\ell \times \ell \times \ell$. Podemos definir a taxa de dissipação

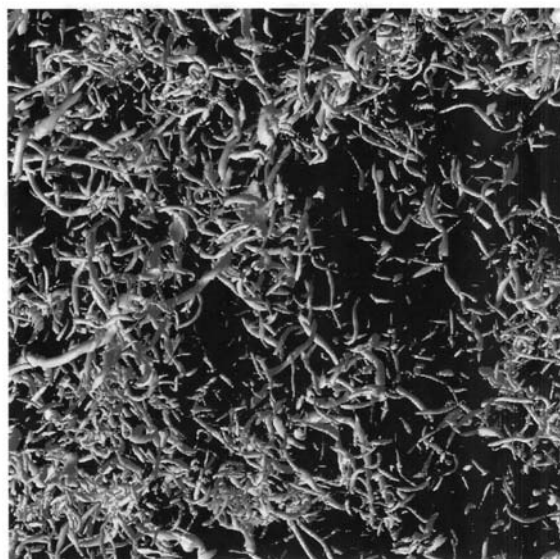


Figura 3.9: Tubos de vorticidade, isto é, iso-superfícies de vorticidade, obtidos em simulações numéricas diretas (Kaneda *et al.*, 2003). A vorticidade destes tubos está quatro desvios-padrão situada além da vorticidade rms do fluxo turbulento.

de energia na célula B_i pela expressão

$$\varepsilon_\ell = \frac{1}{\ell^3} \int_{B_i} d^3\vec{x} \frac{\nu}{2} (\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha)^2. \quad (3.157)$$

Esperamos $\langle \varepsilon_\ell \rangle = \varepsilon$ e que devido à existência de gradientes intensos do campo de velocidade, ε_ℓ seja uma variável aleatória fortemente flutuante. A quantidade ε_ℓ nos dá, essencialmente, uma definição local, à escala ℓ , da taxa de dissipação de energia. Kolmogorov propôs, em 1962, a *hipótese de similaridade refinada* que estabelece que flutuações locais da velocidade, à escala ℓ , comportam-se, estatisticamente, de modo idêntico às flutuações de $(\varepsilon_\ell \ell)^{1/3}$ (Kolmogorov, 1962). Isto é, queremos dizer que

$$v_\ell \sim (\varepsilon_\ell \ell)^{1/3}, \quad (3.158)$$

onde v_ℓ pode ser entendido, de modo vago, como a diferença longitudinal ou transversal de velocidades entre pontos separados pela distância ℓ . Notemos que (3.158) é claramente inspirada pela lei dos 4/5. Temos, de fato,

$$\langle v_\ell^3 \rangle \sim \langle \varepsilon_\ell \ell \rangle = \varepsilon \ell, \quad (3.159)$$

concordando, no que se refere à dependência de escala, com (3.118).

Suponhamos, agora, que na faixa inercial observe-se que

$$\langle \varepsilon_\ell^q \rangle \sim \ell^{-\tau_q}. \quad (3.160)$$

Usando a hipótese de similaridade refinada, obtemos, portanto, o comportamento de escala para uma função de estrutura longitudinal ou transversal de ordem q ,

$$S_q(\ell) = \langle v_\ell^q \rangle \sim \langle \varepsilon_\ell^{q/3} \rangle \ell^{q/3} \sim \ell^{\tau_{q/3} + q/3}. \quad (3.161)$$

Isto é, teremos $S_q(\ell) \sim \ell^{\zeta_q}$ com

$$\zeta_q = \tau_{q/3} + \frac{q}{3}, \quad (3.162)$$

a chamada *relação de ponte* (bridging relation) entre os expoentes τ_q e ζ_q .

É importante tentar descobrir quais são as propriedades que devem ser satisfeitas por ζ_q , independentemente de qualquer modelo particular. Uma delas, obviamente, é a lei dos 4/5 que exige $\zeta_3 = 1$, ou equivalentemente, $\tau_1 = 0$. Mostraremos, agora, que

$$\begin{aligned} \tau_q + 3q &\geq 0, & \text{se } q &\geq 0, \\ \tau_q + 3q &\leq 0, & \text{se } q &\leq 0, \end{aligned} \quad (3.163)$$

relações conhecidas como as *desigualdades de Novikov*. De fato, de acordo com (3.157), podemos escrever

$$\frac{d}{d\ell}(\ell^3 \varepsilon_\ell) \geq 0. \quad (3.164)$$

Consequentemente, supondo $q \geq 0$,

$$\frac{d}{d\ell} \langle (\ell^3 \varepsilon_\ell)^q \rangle \geq 0 \quad (3.165)$$

e, assim, usando (3.160), encontramos

$$\frac{d}{d\ell}(\ell^{\tau_q + 3q}) = (\tau_q + 3q)\ell^{\tau_q + 3q - 1} \geq 0, \quad (3.166)$$

o que implica imediatamente na desigualdade de Novikov para o caso $q \geq 0$. O caso $q \leq 0$ é provado de forma inteiramente análoga.

A idéia geral dos modelos fenomenológicos de intermitência é considerar a cascata de energia como uma sucessão de fragmentações que ocorrem sucessivamente nas escalas de comprimento ℓ_0 , $\ell_1 = \ell_0/a$, $\ell_2 = \ell_0/a^2$, etc., onde ℓ_0 representa a escala de comprimento integral e a é um parâmetro positivo arbitrário. Um turbilhão qualquer, definido à escala ℓ_n está associado à taxa local de dissipação de energia ε_n . Chamemos este turbilhão de “turbilhão-pai”. A fragmentação do turbilhão-pai dá origem a vários turbilhões – os turbilhões-filhos – todos definidos à escala de comprimento ℓ_{n+1} e associados a distintas taxas de dissipação de energia. Supomos que taxa de dissipação de um determinado turbilhão-filho seja proporcional à taxa de dissipação do turbilhão-pai, com uma certa constante de proporcionalidade W (o fator de herança!). A figura 3.10 ilustra o processo de fragmentação.

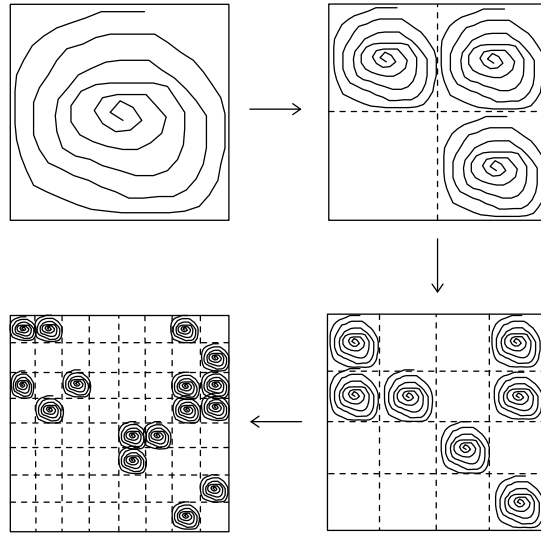


Figura 3.10: A fragmentação de turbilhões é representada ao longo das escalas ℓ_0 , $\ell_0/2$, $\ell_0/4$ e $\ell_0/8$. Note que incluímos aqui fragmentações com $W = 0$.

Assim, considerando um turbilhão qualquer, à escala ℓ_n , podemos escrever sua taxa de dissipação levando em conta todos os seus ancestrais até chegar, recursivamente ao primeiro turbilhão,

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} W_n = \varepsilon_{n-2} W_{n-1} W_n = \cdots = \varepsilon_0 W_1 W_2 \dots W_n. \quad (3.167)$$

Consideraremos os fatores W_i como variáveis aleatórias identicamente distribuídas e independentes entre si, satisfazendo a $\langle W_i \rangle = 1$. Dessa forma,

$$\langle \varepsilon_n \rangle = \varepsilon_0 \langle W \rangle^n = \varepsilon_0, \quad (3.168)$$

isto é, a condição de valor esperado unitário para W implica que a cascata de energia é conservativa em um sentido médio (cascatas rigorosamente conservativas serão consideradas mais adiante).

A partir das definições dadas até aqui, já somos capazes de determinar a forma dos expoentes de escala τ_q . Temos

$$\langle \varepsilon_n^q \rangle = \varepsilon_0^q \langle W_1^q W_2^q \dots W_n^q \rangle = \varepsilon_0^q \langle W^q \rangle^n. \quad (3.169)$$

Fazendo, agora,

$$\langle W^q \rangle^n \equiv \left(\frac{\ell_n}{\ell_0} \right)^{\tau_q} = a^{-n\tau_q}, \quad (3.170)$$

obtemos $\langle \varepsilon_n^q \rangle \sim \ell_n^{\tau_q}$, com

$$\tau_q = -\log_a \langle W^q \rangle \quad (3.171)$$

e, portanto,

$$\zeta_q = \frac{q}{3} - \log_a \langle W^{q/3} \rangle. \quad (3.172)$$

Nos modelos discutidos abaixo, realizamos de várias maneiras diferentes as distribuições de W .

O modelo log-normal

Façamos $a = 2$ e

$$W = 2^{-x}, \quad (3.173)$$

onde x é uma variável aleatória gaussiana, de média \bar{x} e variância σ^2 . A condição $\langle W \rangle = 1$ produz um vínculo entre \bar{x} a σ :

$$\bar{x} = \frac{\sigma^2}{2} \ln 2. \quad (3.174)$$

Temos

$$\langle W^q \rangle = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-qx \ln 2 - (x - \bar{x})^2/2\sigma^2] = 2^{-\bar{x}(q-q^2)}, \quad (3.175)$$

onde usamos a Eq. (3.174) para encontrar a resposta final. De acordo com a Relação (3.172), obtemos (Kolmogorov, 1962)

$$\zeta_q = \frac{q}{3} + \frac{\mu}{18} (3q - q^2), \quad (3.176)$$

onde $\mu \equiv 2\bar{x}$, como se costuma definir na literatura. O acordo experimental é razoavelmente bom (veja a Figura 3.7 para $\mu \simeq 0.2$ e ordens $q \leq 10$). É realmente digno de nota que este modelo foi proposto quase duas décadas antes de seu primeiro teste experimental.

Exercício 23:

O modelo log-normal, entretanto, não é perfeito. Mostre que este modelo não satisfaz às desigualdades de Novikov para $q > q_c = 1 + 6/\mu$ (o valor experimental $\mu = 0.2$, leva a $q_c \simeq 31$, o que justifica, de certa forma, o sucesso relativo do modelo para ordens $q \leq 10$).

O modelo de Novikov-Stewart

Este é talvez o modelo mais simples de todos (Novikov & Stewart, 1964). Façamos $a = 2$ e

$$W = \begin{cases} 1/\beta, & \text{com probabilidade } \beta, \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - \beta, \end{cases} \quad (3.177)$$

onde $0 < \beta \leq 1$. O modelo, por construção, satisfaz a $\langle W \rangle$ para qualquer β . Temos

$$\langle W^q \rangle = \beta^{1-q} \quad (3.178)$$

e, assim, usando (3.172),

$$\zeta_q = \frac{q}{3} - \left(1 - \frac{q}{3}\right) \log_2 \beta. \quad (3.179)$$

Os modelos log-Poisson e de She-Leveque

O modelo log-Poisson (Dubrulle, 1994) é definido de maneira semelhante ao modelo log-normal (pode-se, de fato, definir modelos “log-distribuição” de forma bastante geral) e é, provavelmente, aquele que leva ao melhor acordo com a experiência. Definimos

$$W = a^{(\mu-m)}, \quad (3.180)$$

onde $m = 0, 1, 2, \dots$ é uma variável aleatória inteira não-negativa, de distribuição poissoniana $P(m)$,

$$P(m) = \frac{c^m}{m!} e^{-c}. \quad (3.181)$$

Os parâmetros do modelo, a , μ e c , estão vinculados entre si para garantir a condição $\langle W \rangle = 1$. Obtemos, a partir de (3.180) e (3.181),

$$\langle W \rangle = \exp(\mu \ln a - c + c/a) \quad (3.182)$$

e, portanto, de $\langle W \rangle = 1$ vem que

$$c = \frac{a\mu \ln a}{a-1}. \quad (3.183)$$

É útil definir, com o fim de simplificar resultados, $\beta = a\mu/(a-1)$. Note que

$$c = \beta \ln a. \quad (3.184)$$

O cálculo de $\langle W^q \rangle$ é igualmente direto. Encontramos

$$\langle W^q \rangle = a^{\mu q - \beta + \beta a^{-q}}, \quad (3.185)$$

o que implica em

$$\tau_q = -\mu q + \beta - \beta a^{-q}. \quad (3.186)$$

She e Leveque (1994) sugerem fixar os valores $\mu = 2/3$ e $a = 3/2$ (isto é, $\beta = 2$), em função de argumentos fenomenológicos. Adiantamos aqui a prova de que $\mu = 2/3$. A prova de que $\beta = 2$ faz uso de idéias multifractais e será discutida na próxima subseção. She e Leveque introduzem a *intensidade de ordem q das estruturas dissipativas*, definida como

$$\varepsilon_\ell^{(q)} \equiv \frac{\langle \varepsilon_\ell^{q+1} \rangle}{\langle \varepsilon_\ell^q \rangle}, \quad (3.187)$$

onde ℓ , como sempre, é uma escala de comprimento contida na faixa inercial. Postula-se, então, que

$$(I) \quad \varepsilon^{(\infty)} \equiv \lim_{q \rightarrow \infty} \varepsilon_\ell^{(q)} \sim \ell^{-2/3}, \quad (3.188)$$

e que existe α tal que

$$(II) \quad \frac{\varepsilon_\ell^{(q+1)}}{\varepsilon_\ell^{(\infty)}} \sim \left[\frac{\varepsilon_\ell^{(q)}}{\varepsilon_\ell^{(\infty)}} \right]^\alpha. \quad (3.189)$$

É interessante notar que na teoria K41 $\varepsilon_\ell^{(q)}$ é independente de ℓ , o que é claramente incompatível com o postulado (I), acima.

Usando (3.187) e o postulado (I), o postulado (II) transforma-se em

$$\frac{\langle \varepsilon_\ell^{q+2} \rangle}{\langle \varepsilon_\ell^{q+1} \rangle} \ell^{2/3} \sim \left[\frac{\langle \varepsilon_\ell^{q+1} \rangle}{\langle \varepsilon_\ell^q \rangle} \ell^{2/3} \right]^\alpha. \quad (3.190)$$

Substituindo (3.160) na expressão acima, obtemos a seguinte relação de recorrência,

$$\tau_{q+2} - (1 + \alpha)\tau_{q+1} + \alpha\tau_q + \frac{2}{3}(1 - \alpha) = 0. \quad (3.191)$$

Como $\tau_0 = 0$ e $\tau_1 = 0$ são resultados exatos, a relação de recorrência determina completamente os outros valores de τ_q para q inteiro, como função de α . Escrevendo a solução geral para τ_q na forma

$$\tau_q = A + Bq + CD^q, \quad (3.192)$$

a relação de recorrência, por si só, implica em

$$B = -\frac{2}{3} \quad (3.193)$$

e

$$D^2 - (1 + \alpha)D + \alpha = 0, \quad (3.194)$$

sem fixar o valor de A . A equação de segundo grau para D possui duas soluções: $D = 1$ e $D = \alpha$. A solução $D = 1$ deve ser descartada, pois leva a $\tau_q = A + 1 - 2q/3$, o que é incompatível com $\tau_0 = \tau_1 = 0$. A solução $D = \alpha$ nos dá

$$\tau_q = A - \frac{2}{3}q + C\alpha^q. \quad (3.195)$$

Impondo, então, $\tau_0 = \tau_1 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} C &= -A, \\ \alpha &= 1 - \frac{2}{3A}. \end{aligned} \quad (3.196)$$

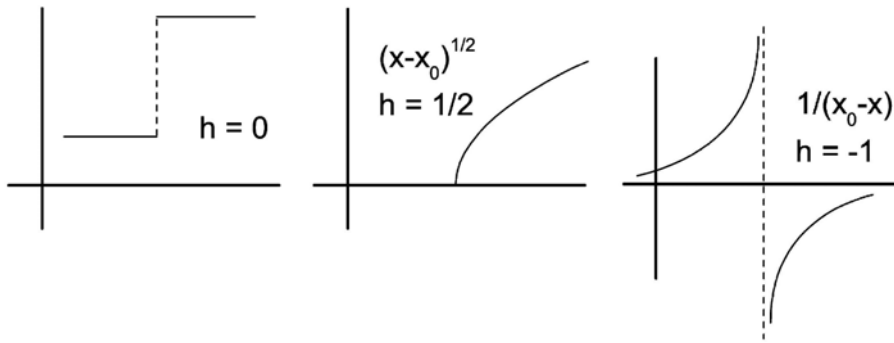


Figura 3.11: Exemplos simples de singularidades com expoentes de Hölder diversos.

Para fechar o modelo de She-Leveque basta fixar o valor numérico de A , o que será feito em breve. Não é difícil mostrar que o resultado acima é um caso particular do modelo log-Poisson, através da identificação $A = \beta$.

Exercício 24:

Mostre, a partir do postulado (I) e supondo que $\varepsilon^{(\infty)} = f(E, \varepsilon, \ell)$, onde E é a energia cinética total, que $\varepsilon^{(\infty)} \propto E$.

3.4.4 Formalismo multifractal

O ponto de partida do formalismo multifractal de Frisch e Parisi (1985) é estabelecer uma classificação das singularidades do campo de velocidade. Como já discutimos, singularidades devem ocorrer no limite de viscosidade nula, se de fato a lei zero da turbulência é válida. Os conjuntos com singularidades do mesmo tipo supostamente formam fractais bem definidos, os quais, então, servem de base para o cálculo dos expoentes de escala das funções de estrutura.

Dada uma posição \vec{x}_0 , considere o conjunto de todos os valores de α para os quais

$$\lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}_0} \left[\frac{v(\vec{x}_0) - v(\vec{y})}{|\vec{x}_0 - \vec{y}|^\alpha} \right] < \infty. \quad (3.197)$$

Dizemos que o campo de velocidade é singular em \vec{x}_0 com *expoente de Hölder* definido por $h \equiv \sup\{\alpha\}$. A Figura 3.11 mostra alguns exemplos unidimensionais.

Vamos supor, agora, que o conjunto de pontos singulares com expoente de Hölder h tenha dimensão fractal $D(h)$. Isto significa, por definição, que examinando regiões de dimensão linear ℓ no espaço tridimensional, a densidade de probabilidade de se encontrar uma região cujos pontos estão associados a singularidades

com expoente de Hölder h terá a seguinte forma

$$\rho(h) = g(h) \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^{3-D(h)}, \quad (3.198)$$

onde $g(h)$ é, essencialmente, uma função indicadora (cujo suporte é dado por intervalos nos quais ela possui valores constantes). Dessa maneira, podemos escrever

$$\langle v_\ell^q \rangle \sim \int dh \rho(h) \ell^{hq} \sim \int dh g(h) \ell^{hq+3-D(h)}. \quad (3.199)$$

Tomando o limite $\ell/\ell_0 \rightarrow 0$ e desprezando variações locais de $g(h)$, o método do ponto de sela nos dá o comportamento assintótico da integral acima. Obtemos

$$\langle v_\ell^q \rangle \sim \ell^{\inf_h [hq+3-D(h)]}, \quad (3.200)$$

isto é,

$$\zeta_q = \inf_h [hq + 3 - D(h)]. \quad (3.201)$$

Como uma primeira aplicação deste resultado, voltemos ao modelo de She-Leveque. A hipótese adicional proposta por estes autores, inspirada na descrição da turbulência em termos de filamentos de vorticidade, é que no limite $q \rightarrow \infty$, os expoentes de escala são determinados por estruturas singulares de dimensão $D(h) = 1$. Consequentemente, a Eq. (3.201) dá, para a região assintótica $q \gg 1$,

$$\zeta_q = hq + 2, \quad (3.202)$$

isto é,

$$\tau_q = q(3h - 1) + 2. \quad (3.203)$$

Comparando a relação acima com a Expressão (3.195), no regime de $q \gg 1$, concluímos que $A = 2$ e o modelo de She-Leveque resulta em

$$\zeta_q = \frac{q}{9} + 2 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{q/3}, \quad (3.204)$$

o que está em excelente acordo com a experiência. Apesar do modelo de She-Leveque fazer uso de postulados um tanto quanto “alquímicos”, notoriamente torna-se equivalente a um modelo log-Poisson, além de enfatizar o papel desempenhado por estruturas singulares unidimensionais, como evidenciadas nas simulações numéricas recentes.

O problema da “turbulência unidimensional” introduzido por Burgers há vários anos (Burgers, 1948) oferece um exemplo instrutivo onde idéias fenomenológicas e resultados exatos podem ser comparados, em particular no que se refere à multifractalidade. A equação de Navier-Stokes unidimensional escreve-se como

$$\partial_t u + u \partial_x u = \nu \partial^2 u + f. \quad (3.205)$$

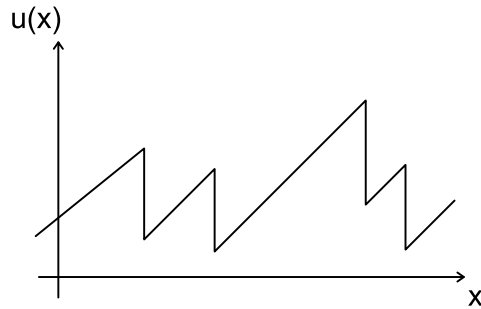


Figura 3.12: Perfil do campo de velocidade, representado como um “gás” de ondas de choque, na turbulência de Burgers, no limite de viscosidade nula.

Observe a ausência de um termo de pressão na formulação de Burgers. Não é necessário considerá-lo, uma vez que a condição de incompressibilidade é relaxada em uma dimensão. As soluções gerais da Eq. (3.205) apresentam ondas de choque que se tornam singulares no limite inviscido (o Exercício 28 ilustra esse fato). Uma configuração turbulenta do campo de velocidade u é, assim, representada como uma sucessão de rampas suaves “quebradas” por choques abruptos, veja a Figura 3.12.

Podemos interpretar este tipo de configuração como a base de um modelo “bifractal”, onde aparecem apenas dois tipos de singularidade. Rampas suaves são locais onde o expoente de Hölder é $h = 1$, enquanto que nos choques temos $h = 0$. As dimensões fractais destes conjuntos são, evidentemente, $D(0) = 0$ e $D(1) = 1$. Adaptando a Expressão (3.198) ao caso unidimensional de Burgers, escrevemos

$$\rho(h) = g(h) \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^{1-D(h)}, \quad (3.206)$$

onde $g(h) = A\delta(h) + B\delta(h-1)$, para algum par de parâmetros A e B . As funções de estrutura terão, portanto, a seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_q(\ell) &= \langle u_\ell^q \rangle = \int dh [A\delta(h) + B\delta(h-1)] \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^{hq+1-D(h)} \\ &= A \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right) + B \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^q. \end{aligned} \quad (3.207)$$

Posto de outra maneira, teremos

$$S_q(\ell) \sim \ell^{\inf_h [q, 1]}, \quad (3.208)$$

assintoticamente, para $\ell/\ell_0 \ll 1$. Isto nos dá

$$S_q(\ell) \sim \begin{cases} \ell^q, & \text{se } q < 1, \\ \ell, & \text{se } q \geq 1. \end{cases} \quad (3.209)$$

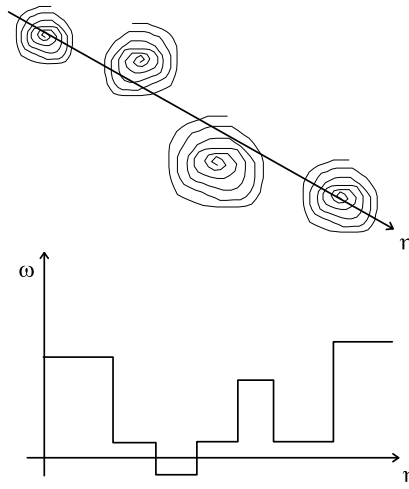


Figura 3.13: Configurações localizadas de vorticidade em duas dimensões.

Este resultado exhibe desvios extremamente grandes da teoria K41. Note, entretanto, que a dependência de escala da lei dos 4/5 continua válida aqui.

O caso de turbulência bidimensional também é interessante de um ponto de vista multifractal. Vórtices localizados são análogos aos choques de Burgers. Suponha então que o campo de velocidade esteja organizado como um gás de vórtices bidimensionais localizados.

Considerando uma direção arbitrária η , como indicada na Figura 3.13, o perfil de vorticidade como função da coordenada η será bifractal. Obtemos, então, analogamente ao problema de Burgers,

$$\langle \omega_\ell^q \rangle \sim \ell^{\inf_h [q, 1]}. \quad (3.210)$$

Escrevendo, agora, a correspondência fenomenológica entre vorticidade e velocidade, $\omega_\ell \sim v_\ell/\ell$, encontramos

$$\langle v_\ell^q \rangle \sim \ell^{q + \inf_h [q, 1]}. \quad (3.211)$$

Observe que a forma de escala da lei dos 4/5 não é obedecida pela relação acima. Isto não é surpreendente, pois como mostrado por Kraichnan, a cascata de energia pode dar lugar a uma cascata de enstrofia em duas dimensões, sob certas condições (Kraichnan, 1967).

Exercício 25:

Mostre que a teoria K41 corresponde, no contexto multifractal, à escolha $g(h) = A\delta(h - 1/3)$ e $D(1/3) = 3$. Por esta razão, a teoria K41 está associada ao fato de turbilhões ocuparem completamente todo espaço (“space-filling eddies”).

Exercício 26:

Determine $D(h)$ para o modelo log-normal. Sugestão: faça $D(h) = a + bh + ch^2$ e encontre a , b e c .

Exercício 27:

Supondo que $D(h)$ seja uma função analítica, prove, a partir do resultado (3.201), que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \zeta_q &\geq 0, \\ \frac{d^2}{dq^2} \zeta_q &< 0. \end{aligned} \tag{3.212}$$

Exercício 28:

Mostre que a onda de choque estática

$$u(x) = -U \tanh \left[\frac{U(x - x_0)}{2\nu} \right] \tag{3.213}$$

é uma solução da equação de Burgers livre, isto é, sem a presença de forças externas. Estime a largura do choque em termos da viscosidade ν e da amplitude U .

Exercício 29:

Mostre que o espectro de energia na turbulência de Burgers tem a forma $E(k) \sim k^{-2}$.

Exercício 30:

Desenvolva um argumento completamente fenomenológico para deduzir que a existência de uma cascata de enstrofia em duas dimensões implica em

$$\langle \omega_\ell^3 \rangle \sim \ell^0. \tag{3.214}$$

Supondo, então, que a invariância de escala da equação de Navier-Stokes bidimensional seja restaurada a pequenas escalas, mostre que $E(k) \sim k^{-3}$.

Exercício 31:

Mostre, a partir da Eq. (3.210), que o espectro de energia na turbulência bidimensional tem a forma $E(k) \sim k^{-4}$. Esta lei de decaimento espectral predita por

Saffman através de outros argumentos (Saffman, 1971), foi, de fato, observada numericamente nos estágios iniciais de decaimento da turbulência livre bidimensional (Brachet *et al.*, 1988).

O modelo β -randômico

O modelo β -randômico (Benzi *et al.*, 1984) é definido dentro dos moldes dos modelos de fragmentação discutidos anteriormente. Como diferenças a princípio vantajosas, este tipo de modelagem evidencia o caráter multifractal do campo de velocidades, além de descrever uma cascata conservativa de energia. Entretanto, como um aspecto indesejável, o modelo depende de um número arbitrário de parâmetros livres, o que o deixa muito flexível para produzir acordos bons com praticamente qualquer curva experimental dos expoentes de escala ζ_q .

Suponha que um determinado turbilhão-pai, definido à escala de comprimento ℓ_{n-1} , com taxa de dissipação de energia por unidade de massa ε_{n-1} , produz N_n turbilhões-filhos. Podemos escrever

$$N_n = \left(\frac{\ell_{n-1}}{\ell_n} \right)^3 \beta_n, \quad (3.215)$$

onde $0 < \beta_n \leq 1$ é a fração do volume do turbilhão-pai ocupada por todos os turbilhões-filhos somados. Iremos considerar β_n como uma variável aleatória, descrita pela densidade de probabilidade $\rho(\beta)$. Os valores de β são completamente independentes de geração em geração e de turbilhão a turbilhão. Imaginando, agora, que a taxa de dissipação de energia de um turbilhão-pai, $\varepsilon_{n-1} \ell_{n-1}^3$, é igualmente distribuída entre os turbilhões-filhos, obtemos

$$W_n N_n \ell_n^3 = \ell_{n-1}^3 \quad (3.216)$$

e assim, de acordo com a Eq. (3.215),

$$W_n \beta_n = 1. \quad (3.217)$$

Usando (3.167) com (3.217), obtemos,

$$\varepsilon_n = \left[\prod_{i=1}^n \beta_i^{-1} \right] \varepsilon_0. \quad (3.218)$$

A hipótese de similaridade refinada nos dá, portanto,

$$v_{\ell_n} \sim \left[\prod_{i=1}^n \beta_i^{-1/3} \right] \ell_n^{1/3}. \quad (3.219)$$

Um turbilhão qualquer, à escala ℓ_n , pode ser indexado pela sucessão de β 's de todos os seus ancestrais. A fração de volume do primeiro ancestral que outros

turbilhões igualmente indexados e definidos à mesma escala ℓ_n irá ocupar será $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$. Dessa forma, a função de estrutura de ordem q vem dada por

$$\begin{aligned} S_q(\ell_n) &= \langle v_{\ell_n}^q \rangle \sim \int d\beta_1 d\beta_2 \dots d\beta_n \rho(\beta_1) \rho(\beta_2) \dots \rho(\beta_n) \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n v_{\ell_n}^q \\ &= \left[\int d\beta \rho(\beta) \beta^{1-q/3} \right]^n \ell_n^{q/3} \\ &= \langle \beta^{1-q/3} \rangle \ell_n^{q/3}, \end{aligned} \quad (3.220)$$

onde usamos, para obter a segunda das igualdades acima, a Eq. (3.219). Como $\ell_n/\ell_0 = a^{-n}$ a Expressão (3.220) pode ser re-escrita como

$$S_q(\ell_n) \sim \ell_n^{\zeta_q}, \quad (3.221)$$

onde

$$\zeta_q = \frac{q}{3} - \log_a \langle \beta^{1-q/3} \rangle. \quad (3.222)$$

Consideremos, como uma aplicação simples do resultado recém-obtido, que β não flutue. Isto é, escolhemos $\rho(\beta) = \delta(\beta - \beta_0)$. Neste caso, teremos, de (3.222),

$$\zeta_q = \frac{q}{3} - \left(1 - \frac{q}{3}\right) \log_a \beta_0. \quad (3.223)$$

Note que este resultado é formalmente idêntico àquele do modelo de Novikov-Stewart, apesar dos princípios físicos subjacentes serem diferentes. A fragmentação com $\beta = \beta_0$ fixo implica que os turbilhões formam um fractal de dimensão

$$D_F = 3 + \log_a \beta_0, \quad (3.224)$$

como pode ser obtido por mera contagem de turbilhões ao longo das escalas de comprimento. De fato, à escala ℓ_n , o número de turbilhões-filhos será $N_n = (a^3 \beta_0)^2$, isto é,

$$N_n = a^{n(3+\log_a \beta_0)}. \quad (3.225)$$

Fazendo $N_n \equiv a^{D_F n}$, segue-se, então o Resultado (3.224). Através de (3.223) e (3.224), o expoente de escala pode ser expresso em termos da dimensão fractal como

$$\zeta_q = \frac{D_F - 2}{3} q + 3 - D_F. \quad (3.226)$$

É interessante confirmar que a teoria K41 corresponde aqui a $D_F = 3$, mostrando mais uma vez que os turbilhões da fenomenologia kolmogoroviana ocupam todo o espaço homoganeamente. A intermitência, a grosso modo, está ligada à existência de regiões inativas do fluxo de fluido, onde não ocorre transferência apreciável de energia entre as escalas.

Benzi *et al.* (1984) sugerem modelar o fluxo turbulento enfatizando a produção de estruturas uni e bidimensionais, provavelmente associadas a filamentos e folhas

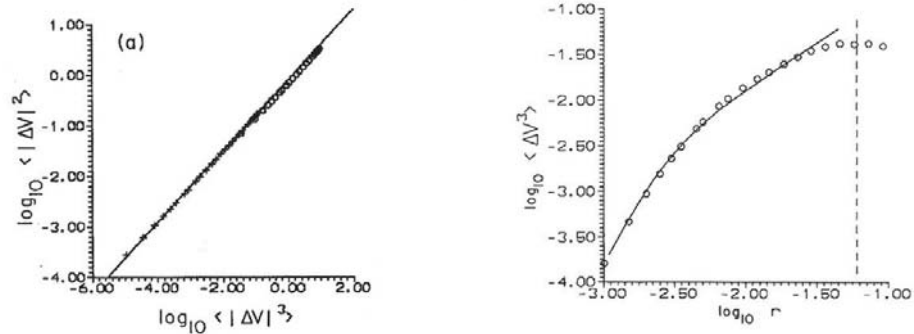


Figura 3.14: Exemplificação do fenômeno de auto-similaridade estendida, descoberto por Benzi *et al.* (1995), através das funções de estrutura de ordem dois e três.

de vorticidade. Fazendo $a = 2$, esses autores propõem a seguinte distribuição de β :

$$\rho(\beta) = x \delta(\beta - 1/2) + (1 - x) \delta(\beta - 1/4). \quad (3.227)$$

Obtém-se, para $x = 0.125$, um acordo razoável com os resultados experimentais.

A descrição dos expoentes de escala dentro do arcabouço teórico dos modelos de fragmentação tem sido, sem dúvida, corroborada pela experiência. Entretanto, não está claro se as distribuições de probabilidade intermitentes podem ser obtidas de forma simples a partir destes modelos, apesar de algumas tentativas já terem sido discutidas na literatura.

3.4.5 Auto-similaridade estendida

Uma descoberta completamente empírica sobre a forma das funções de estrutura foi realizada em 1995 por Benzi e colaboradores (1995). As funções de estruturas possuem relações ocultas de auto-similaridade que são preservadas mesmo à escalas onde os efeitos dissipativos tornam-se dominantes. A este fenômeno dá-se o nome de “auto-similaridade estendida”. Considerando, por exemplo, o gráfico à direita na Figura 3.14, observamos que o comportamento de escala da função de estrutura de ordem 3 não é evidente – estes dados representam um fluxo turbulento a baixos números de Reynolds.

Entretanto, se $\ln S_2$ é plotado contra $\ln S_3$, como está feito no gráfico à esquerda da Figura 3.14, um milagre acontece: a curva obtida possui comportamento de escala! Em termos matemáticos, Isto quer dizer que

$$S_2(\ell) \sim [S_3(\ell)]^{\zeta(2|3)}, \quad (3.228)$$

onde $\zeta_{(2|3)} = \zeta_2/\zeta_3$. Uma vez que a lei dos 4/5 nos dá $\zeta_3 = 1$, a propriedade de auto-similaridade estendida fornece um meio prático de se extrair outros expoentes de escala, com precisão razoável, a partir de dados experimentais ou numéricos coletados para números de Reynolds não tão elevados. É desnecessário, portanto, ilustrar a grande importância que a auto-similaridade estendida tem tido em anos recentes.

Observou-se, posteriormente, que a auto-similaridade estendida apresenta pequenos desvios que podem ser corrigidos pela hipótese de “auto-similaridade estendida generalizada”. Esta formulação consiste em escolher uma determinada função de estrutura como referência, digamos, de ordem p , e definir

$$G_{q,p} = \ln S_q - \frac{q}{p} \ln S_p. \quad (3.229)$$

A observação experimental mostra, então, que um comportamento de escala mais preciso é obtido quando se plota $G_{q,p}$ contra $G_{q',p}$. Colocando de outra maneira, estamos afirmando que as funções de estrutura possuem a seguinte forma:

$$S_q(\ell) = C_q [f_1(\ell)]^{\zeta_q} [f_2(\ell)]^q. \quad (3.230)$$

Na faixa inercial, esperamos que $f_1(\ell) \sim \ell$ e $f_2(\ell) = \text{const.}$ Na faixa dissipativa, por outro lado, onde as flutuações espaciais do campo de velocidade são mais suaves, deveremos ter $f_1(\ell) = \text{const.}$ e $f_2(\ell) \sim r$. As funções f_1 e f_2 são chamadas de *funções de crossover*. Não há, atualmente, fundamentação teórica para a propriedade de auto-similaridade estendida. Todavia, vale ressaltar que uma prova analítica foi desenvolvida com sucesso em um modelo de transporte turbulento de escalares passivos (Segel *et al.*, 1996).

Exercício 32:

Verifique, de fato, que a propriedade de auto-similaridade estendida generalizada é satisfeita para funções de estrutura da forma (3.230). Obtenha o expoente de escala $\zeta_{(q|q',p)}$ definido pela expressão

$$G_{q,p} \sim [G_{q',p}]^{\zeta_{(q|q',p)}}. \quad (3.231)$$

3.5 Projeto de conclusão

É grandemente instrutivo verificar, com nossos próprios olhos, boa parte dos resultados discutidos nas seções anteriores, a partir da análise numérica de séries temporais turbulentas. O grupo de pesquisa coordenado por C. Meneveau⁴ disponibiliza séries temporais extensas obtidas em um experimento de túnel de vento a $R_\lambda \simeq 700$. Sugerimos, assim, o seguinte projeto.

⁴Meneveau *et al.*, <http://pegasus.me.jhu.edu/~meneveau/>

Projeto de Conclusão

Desenvolva códigos numéricos simples de manipulação de séries turbulentas para

(i) obter ε (usando a lei dos 4/5), λ (usando $g(\rho)$ e também através de $v_0 = \langle v_1^2 \rangle$ e ε), L e L_ε , o espectro de energia $E(k) \sim k^{-5/3}$ e a constante de Kolmogorov C_K , η (a partir de ν e ε), Re e R_λ ;

(ii) confirmar as relações de isotropia entre as funções $f(\rho)$ e $g(\rho)$;

(iii) obter as funções de estrutura longitudinais e transversais para várias ordens (de $q = 1$ até $q = 15$) e verificar desvios da teoria K41 (compare os expoentes de escala longitudinais e transversais – a princípio devem ser iguais, porém efeitos de anisotropia residual podem produzir diferenças);

(iv) investigar o fenômeno da auto-similaridade estendida;

(v) testar os modelos fenomenológicos apresentados na seção anterior para o cálculo dos expoentes de escala;

(vi) Obter e investigar a gaussianidade ou não das densidades de probabilidade para as variáveis $v_1(\vec{x}, t)$ e $\delta v_{\parallel}(\rho, t) = v_1(\vec{x}, t) - v_1(\vec{x} + \rho\hat{x}, t)$. Considere (a) $\eta \ll \rho \ll L_\varepsilon$ e (b) $\rho = 2L_\varepsilon$. Calcule, para todas as distribuições encontradas, os coeficientes de assimetria e achatamento. Verifique se o coeficiente de assimetria da distribuição de $\delta v_{\parallel}(\rho)$ segue a previsão da teoria K41, variando ρ dentro da faixa inercial.

Agradecimentos

Agradeço a Atila Freire pelo convite para participar da V EPTT, além de diversas discussões iluminadoras de cunho científico e histórico. Este trabalho tem apoio parcial das agências FAPERJ-CNPq.

3.6 Referências

Anselmet F, Antonia RA, Danaïla L; “Turbulent flows and intermittency in laboratory experiments,” *Planet. Space Sci.* **49**, 1177-1191 (2001)

Anselmet F, Gagne Y, Hopfinger EJ, Antonia RA; “High-order velocity structure functions in turbulent shear flows,” *J. Fluid Mech.* **140**, 63-89 (1984).

Batchelor GK, Proudman I; “The large-scale structure of homogeneous turbulence,” *Philos. Trans. Roy. Soc.* **248**, 369-405 (1956).

Batchelor GK; “The theory of homogeneous turbulence,” Cambridge University Press, Cambridge (1953).

- Batchelor GK; “The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion,” *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **76**, 133-146 (1950).
- Batchelor GK, Townsend AA; “The nature of turbulent motion at large wavenumbers,” *Proc. R. Soc. London A* **199**, 238-255 (1949).
- Benzi R, Ciliberto S, Tripicciono R, Baudet C, Massaioli F, Succi S; “Extended self-similarity in turbulent flows,” *Phys. Rev. E* **48**, R29-R32 (1995). Veja também: van de Water W, Herweijer J; Comment on “Extended self-similarity in turbulent flows,” *Phys. Rev. E* **51**, 2669 (1995). Benzi *et al.*; Reply to “Comment on ‘Extended self-similarity in turbulent flows’,” *Phys. Rev. E* **51**, 2672 (1995).
- Benzi R, Paladin G, Parisi G, Vulpiani A; “On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems,” *J. Phys. A* **17**, 3521-3531 (1984).
- Borgouin M, Ouellette NT, Xu H, Berg J, Bodenschatz E; “The role of pair dispersion in turbulent flow,” *Science* **311**, 835-838 (2006).
- Boussinesq J; “Essai théorique sur les lois trouvées expérimentalement par M. Bazin pour l’écoulement uniforme de l’eau dans les canaux découverts,” *C. R. Acad. Sci. Paris* **71**, 389-393 (1870).
- Brachet ME, Meneguzzi M, Politano H, Sulem LP; “The dynamics of freely decaying two-dimensional turbulence,” *J. Fluid Mech.* **194**, 333-349 (1988).
- Burgers JM; “A mathematical model illustrating the theory of turbulence,” *Adv. Appl. Mech.* **1** 171-199. (1948).
- Davidson PA; “Turbulence,” Oxford University Press, New York (2004).
- Dubrulle B; “Intermittency in fully developed turbulence: log-Poisson statistics and generalized scale covariance,” *Phys. Rev. Lett.* **73**, 959-962 (1994).
- Farge M; “Wavelet transforms and their applications to turbulence,” *Ann. Rev. Fluid Mech.* **24**, 395-457 (1992).
- Ferziger JH; “Large eddy simulation,” in *Simulation and Modeling of Turbulent Flows*; Gatski T, Hussaini MY, Lumley JL (editores). Oxford University Press, Oxford (1996).
- Foias C, Manley O, Rosa RMS, Temam R; “Navier-Stokes equation and turbulence,” Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- Frisch U; “Turbulence: the legacy of A.N. Kolmogorov,” Cambridge University Press, Cambridge (1995).

Fukayama D, Oyamada T, Nakano T, Gotoh T, Yamamoto K; “Longitudinal structure functions in decaying and forced turbulence,” *J. Phys. Soc. Japan* **69**, 701-715 (2000).

Grant HL, Stewart RW, Moilliet A; “Turbulence spectra from a tidal channel,” *J. Fluid Mech.* **12**, 241-268 (1962).

Holm DD, Jeffery C, Kurien S, Livescu D, Taylor MA, Wingate BA; “The LANS- α model for computing turbulence: origins, results, and open problems,” *Los Alamos Science* **29**, 172 (2005). [acesso gratuito em <http://library.lanl.gov/cgi-bin/getfile?number29.htm>].

Hubbard BB; “The world according to wavelets,” A.K. Peters, Natick (1998).

Jullien M-C, Paret J, Tabeling P; “Richardson pair dispersion in two-dimensional turbulence,” *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2872-2875 (1999).

Kaneda Y, Ishihara T, Yokokawa M, Itakura K, Uno A, “Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box,” *Phys. Fluids* **15**, L21-L24 (2003).

Kang HS, Chester S, Meneveau C; “Decaying turbulence in an active grid generated flow and comparisons with large-eddy simulation,” *J. Fluid Mech.* **480**, 129-160 (2003).

Kármán T von, Howarth L; “On the statistical theory of isotropic turbulence,” *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **164**, 192-215 (1938).

Kholmyansky M, Shapiro-Orot M, Tsinober A; “Experimental observations of spontaneous breaking of reflectional symmetry in turbulent flow,” *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **457**, 2699-2717 (2001).

Kolmogorov AN; “A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number,” *J. Fluid Mech.* **13**, 82-85 (1962).

Kolmogorov AN; *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **32**, 16-18 (1941); tradução para o inglês: “Dissipation of energy in locally isotropic turbulence,” *Proc. Roy. Soc. London A* **434**, 15-17 (1991).

Kolmogorov AN; “On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **31**, 538-541 (1941).

- Kolmogorov AN; *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**, 9 (1941); tradução para o inglês: “The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers,” *Proc. Roy. Soc. London A* **434**, 9-13 (1991).
- Kraichnan RH; “Inertial ranges in two-dimensional turbulence,” *Phys. Fluids* **10**, 1417-1423 (1967).
- Kurien S, Taylor MA, Matsumoto, T; “Isotropic third-order statistics in turbulence with helicity: the 2/15-law,” *J. Fluid Mech.* **515**, 87-97 (2004).
- Landau LD, Lifschitz EM; “Fluid mechanics,” Pergamon Press (1993).
- Lo TS, L’vov VS, Pomyalov A, Procaccia I; “Estimating von Kármán’s constant from homogeneous turbulence,” *Europhys. Lett.* **72**, 943-949 (2005).
- Marušić I; “On the role of large-scale structures in wall turbulence,” *Phys. Fluids* **13**, 735-743 (2001).
- McComb WD; “The physics of fluid turbulence,” Oxford University Press, Oxford (1991).
- Mordant N, Metz P, Michel O, Pinton J-F; “Measurement of Lagrangian velocity in fully developed turbulence,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 214501 (2001).
- Nicolleau F, Vassilicos JC; “Turbulent pair diffusion,” *Phys. Rev. Lett.* **90**, 024503 (2003).
- Nie Q, Tanveer S; “A note on third-order structure functions in turbulence,” *Proc. Royal Soc. London A* **455**, 1615-1635 (1999).
- Novikov EA, Stewart RW; “The intermittency of turbulence and the spectrum of fluctuations in energy dissipation,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geofiz.*, **3** 408-412 (1964).
- Obukhov AM; “Some special features of atmospheric turbulence,” *J. Fluid Mech.* **13**, 77-81 (1962).
- Obukhov AM; “Spectral energy distribution in turbulent flow,” *Izv. Akad. Nauk. SSSR* **5**, 453-566 (1941).
- Parisi G, Frisch U; “Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics,” in *Proceed. Intern. School of Physics ‘E. Fermi’*; Ghil M, Benzi R, Parisi G (editores). North Holland, Amsterdam (1985).
- Pope SB; “Turbulent flows,” Cambridge University Press, Cambridge (2000).

Perry AE, Marušić I; “A wall-wake model for the turbulence structure of boundary layers. Part 1. Extension of the attached eddy hypothesis,” *J. Fluid Mech.* **298**, 361-388 (1995).

Richardson LF; “Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph,” *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **110**, 709-737 (1926).

Richardson LF; “The supply of energy from and to atmospheric eddies,” *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **97**, 354-373 (1920).

Saffman PG; “On the spectrum and decay of random two-dimensional vorticity distributions at large Reynolds number (Energy spectrum and decay of random two dimensional vorticity distributions at large Reynolds number)”, *Stud. Appl. Math.* **50**, 377-383 (1971).

Saffman PG; “Note on decay of homogeneous turbulence,” *Phys. Fluids* **10**, 1349 (1967).

Segel D, L’vov V, Procaccia I; “Extended self-similarity in turbulent systems: an analytically soluble example,” *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1828-1831 (1996).

She ZS, Leveque E; “Universal scaling laws in fully developed turbulence,” *Phys. Rev. Lett.* **72**, 336-339 (1994).

She ZS, Jackson E, Orszag SA; “Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence,” *Nature* **344**, 226-228 (1990).

Smith LM, Woodruff SL; “Renormalization-group analysis of turbulence,” *Ann. Rev. Fluid Mech.* **30**, 275-310 (1998).

Sreenivasan KR; “On the universality of the Kolmogorov constant,” *Phys. Fluids* **7**, 2778-2784 (1995).

Sreenivasan KR; “A unified view of the origin and morphology of the turbulent boundary layer structure,” in *Turbulence and Relaminarization, Proceedings of the IUTAM Symposium*, Liepmann HW, Narasimha R (editores). Springer-Verlag, Berlin-New York (1988).

Tabeling P, Zocchi G, Bellin F, Maurer J, Willaime H; “Probability density functions, skewness, and flatness in large Reynolds number turbulence,” *Phys. Rev. E* **53**, 1613-1621 (1997).

Taylor GI; “The spectrum of turbulence,” *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **164**, 476-490 (1938).

Taylor GI; “Statistical theory of turbulence,” *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **151**, 421-444 (1935).

Tsinober A; “An informal introduction to turbulence,” Kluwer Academic Publishers (2001).

